(ВСЕ)ОБЩИЕ ЛОГИКА И ТЕОРИИ (ПРЕД)МНОЖЕСТВ, КВАНТИМНОЖЕСТВ, СВЕРХМНОЖЕСТВ, СВЕРХКОНТИНУУМА, СВЕРХКАРДИНАЛОВ, СВЕРХОРДИНАЛОВ, СВЕРХПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СВЕРХРЯДОВ, СВЕРХЧИСЕЛ, СВЕРХКОЛИЧЕСТВ, ОБЩИХ ПРЕДЕЛОВ, ИЕРАРХИЙ ЦЕЛОЧАСТИЧНОСТИ, СИСТЕМНЫХ ЗАДАЧ И ПРОИЗВОДНЫХ МНОЖЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Ph.D. & Dr.Sc. Lev Grigorevic Gelimson

Академический институт создания всеобщих наук (Мюнхен)

Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум», 1974, 2020

(ВСЕ)ОБЩИЕ ЛОГИКА И ТЕОРИИ (ПРЕД)МНОЖЕСТВ, КВАНТИМНОЖЕСТВ, СВЕРХМНОЖЕСТВ, СВЕРХКОНТИНУУМА, СВЕРХКАРДИНАЛОВ, СВЕРХОРДИНАЛОВ, СВЕРХПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СВЕРХРЯДОВ, СВЕРХЧИСЕЛ, СВЕРХКОЛИЧЕСТВ, ОБЩИХ ПРЕДЕЛОВ, ИЕРАРХИЙ ЦЕЛОЧАСТИЧНОСТИ, СИСТЕМНЫХ ЗАДАЧ И ПРОИЗВОДНЫХ МНОЖЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Гелимсон Лев Григорьевич,
литературно-художественный псевдоним Лео Гимельзон,
доктор технических наук в разделе «Физико-математические науки» по Классификатору Высшей Аттестационной Комиссии,
директор, Академический институт создания всеобщих наук,
русский, украинский, английский и немецкий поэт,
директор, продюсер и литературно-художественный руководитель, Многоязычный литературно-музыкальный театр, Мюнхен, Германия,
E-mail: Leohi@mail.ru Web: http://kekmir.ru/members/person_6149.html

Посвящается памяти Георга Кантора, родившегося в 1845 году в Санкт-Петербурге, совершившего революцию в математике, создателя теории множеств как основы современной классической математики, автора глубочайших исследований актуальных бесконечностей и введённых им иерархий кардинальных и порядковых (ординальных) чисел и понятий окрестностей, предельных, изолированных, внутренних, краевых, граничных и внешних точек, открытых, замкнутых, совершенных, всюду частых (всюду плотных) и нигде не частых (нигде не плотных) точечных множеств, а также производных множеств произвольных даже трансфинитных порядков, с обоснованным предложением справедливо переименовать наивную теорию множеств Кантора в живую теорию множеств Кантора.

Аннотация. Основополагающая, продвинутая, прикладная и вычислительная части классической математики имеют целые системы взаимосвязанных основополагающих принципиальных изъянов. (Все)общие логика с общей методологией преодоления антиномий теории множеств Кантора и синергичные математические теории и (мета)методологии количественно и/или качественно изменяющихся (переменных) чётко-нечётких множеств, домножеств (предмножеств) и квантимножеств (количественных множеств), сверхмножеств, сверхконтинуума, сверхкардиналов,

сверхординалов, сверхпоследовательностей, сверхрядов, сверхчисел, сверхколичеств, общих пределов, иерархий целочастичности, системных задач, множественных действий в топологических и метрических пространствах, полных и неполных линейных и нелинейных канонических единометрических производных множественных уравнений с одним неизвестным открывают, развивают и эффективно используют природу и сущность математики, а также изобретают принципиально новые общие методы и методологии.

Ключевые слова: основополагающая, продвинутая, прикладная, вычислительная классическая математика, система взаимосвязанных основополагающих принципиальных изъянов, всеобщая логика, общая методология преодоления антиномий теории множеств Кантора, синергия математических теорий и метаметодологий, количественно или качественно изменяющееся переменное чётко-нечёткое множество, домножество, предмножество,

квантимножество, сверхмножество, сверхконтинуум, сверхкардинал, сверхординал, сверхпоследовательность, сверхряд, сверхчисло, сверхколичество, общий предел, иерархия целочастичности, системная задача, множественное действие в топологическом или метрическом пространстве, неполное нелинейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение с одним неизвестным, алгоритм. УДК 51

Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум», 1974, 2020

GENERAL AND UNIVERSAL LOGIC AND THEORIES OF (PRE)SETS, QUANTISETS, OVERSETS, OVERCONTINUUM, SUPERCARDINALS, SUPERORDINALS, OVERSEQUENCES, OVERSERIES, OVERNUMBERS, SUPERQUANTITIES, GENERAL LIMITS, HIERARCHIES OF WHOLE-PARTITIONALITY, SYSTEM PROBLEMS AND DERIVED SET EQUATIONS

Gelimson Lev Grigorevic,

literary and artistic pseudonym Leo Himmelsohn,

Ph. D. & Dr. Sc. in Engineering

in the section “Physical and Mathematical Sciences”

by the Highest Attestation Commission Classifier,

Director, Academic Institute for Creating Universal Sciences,

Russian, Ukrainian, English and German poet,

Director, Producer, Literary and Artistic Manager,

Multilingual Literary and Musical Theater, Munich, Germany

E-mail: Leohi@mail.ru Web: http://kekmir.ru/members/person_6149.html

Dedicated to the memory of Georg Cantor who was born in 1845 in St. Petersburg, who revolutionized mathematics as the creator of set theory as the basis of modern classical mathematics, the author of the deepest research on actual infinities, his hierarchies of cardinal and ordinal numbers and his concepts of neighborhoods, limiting, isolated, interior, exterior and boundary points, open, closed, perfect, everywhere frequent (dense) sets and nowhere frequent (dense) sets, as well as derived sets of arbitrary also transfinite orders, with a well-founded proposal to fairly rename the naive Cantor set theory to the living Cantor set theory.

Abstract. The fundamental, advanced, applied and computational parts of classical mathematics have whole systems of interrelated defects of principle. Universal logic (with a general methodology for overcoming the antinomies of Cantor's set theory) and synergistic general mathematical theories and (meta)methodologies of quantitatively and/or qualitatively changing (variable) (non)fuzzy sets, presets and quantisets (quantitative sets), oversets, overcontinuum, supercardinals, superordinals, oversequences,

overseries, overnumbers, superquantities, general limits, whole-partitionality hierarchies, system problems, set operations in topological and metric spaces, complete and incomplete linear and nonlinear canonical co-metric derived set equations with one unknown open, develop and effectively use the nature and essence of mathematics and also invent fundamentally new general methods and methodologies.

Keywords: fundamental, advanced, applied, computational classical mathematics, defect of principle, Cantor's set theory antinomies overcoming, universal logic, synergistic general mathematical theory, metamethodology, quantitatively or qualitatively changing variable nonfuzzy set, preset, quantiset, overset, overcontinuum, supercardinal, superordinal, oversequence,

overseries, overnumber, superquantity, general limit, whole-partitionality hierarchy, system problem, set operation in topological or metric space, incomplete nonlinear canonical co-metric derived set equation, algorithm. UDC 51

Publishing House of the All-World Academy of Sciences “Collegium”, Munich, 1974, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

4. Общая методология преодоления антиномий теории множеств Кантора, основополагающей в классической математике

5. Всеобщая логика, исправляющая формальную логику

6. Общая теория использования противоречивости

7. Общие теории сверхкардиналов и сверхординалов

8. Общая теория различения повторений элементов последовательности в множестве

9. Общие теории количественно и/или качественно изменяющихся (переменных) чётко-нечётких множеств, домножеств (предмножеств) и квантимножеств (количественных множеств)

10. Общая теория единого представления конечного множества различных представлений положительного

действительного числа конечными суммами положительных слагаемых

11. Теории обще и всеобще упорядоченных множеств, упорядоченных и вполне упорядоченных разбиений упорядоченных и вполне упорядоченных множеств

12. Теории общих и всеобщих последовательностей

13. Общие теории сверхмножеств, сверхконтинуума, сверхпоследовательностей, сверхрядов, сверхчисел и сверхколичеств, конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов

14. Общая теория наилучшего приближения промежуточных значений конечным перешагиванием с избирательной (выборочной) предельностью бесконечно малого перешагивания

15. Общие теории предельных множеств и домножеств (предмножеств) с обобщением нижнего и верхнего пределов последовательности и с долевой теорией подпоследовательностей последовательности всех натуральных чисел

16. Всеобщая теория иерархий переменной участвующей целочастичности с модальными кванторами. Синергичная система вводимых всеобщих определений

17. Всеобщая теория иерархий переменных системных задач. Синергичная система вводимых всеобщих определений

18. Общая теория множественных действий в топологических и метрических пространствах

19. Система основополагающих определений и обозначений общей теории канонических единометрических производных множественных уравнений с одним неизвестным. Иерархия вложенных в предыдущие последовательных производных множеств положительных целых порядков

20. Решение определяющих уравнений теории множеств Кантора непосредственным приложением её определений

21. Общие теория и алгоритм приведения линейных и нелинейных канонических единометрических производных множественных уравнений с одним неизвестным

22. Теория линейных канонических единометрических производных множественных уравнений с одним неизвестным

ПРЕДИСЛОВИЕ. ВВЕДЕНИЕ. ТЕМАТИЧЕСКОЕ ЦИТИРОВАНИЕ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ КАНТОРА

Это полностью самостоятельно задуманная и осуществлённая научная монография в 22-летнем возрасте в 1974 году во время службы в армии в Бакинском округе противовоздушной обороны на юге Туркменистана (в итоге довелось дослужиться до старшего лейтенанта запаса) после выигрыша областных олимпиад по всем предметам и третьих мест на Всеукраинской и Всесоюзной олимпиадах по математике и окончания физико-математического специального класса будущих гимназии и лицея с золотой медалью, одной из двух в областном центре, в 1969 году, после окончания физико-математического факультета будущего педагогического университета с отличными оценками на всех экзаменах без исключения и после выигрыша Всеукраинского конкурса студенческих научных работ 1974 года.

Второе издание настоящей монографии осуществлено через 46 лет после её первого издания.

Настоящая научная монография посвящается памяти Георга Кантора, родившегося в 1845 году в Санкт-Петербурге, совершившего революцию в математике, создателя теории множеств как основы современной классической математики, автора глубочайших исследований актуальных бесконечностей и введённых им иерархий кардинальных и порядковых (ординальных) чисел и понятий окрестностей, предельных, изолированных, внутренних, краевых, граничных и внешних точек, открытых, замкнутых, совершенных, всюду частых (всюду плотных) и нигде не частых (нигде не плотных) точечных множеств, а также производных множеств произвольных даже трансфинитных порядков.

Аристотель: «Нет актуальной бесконечности. Бесконечное существует только потенциально.»

Карл Фридрих Гаусс: «Я протестую самым решительным образом против использования бесконечного как чего-то завершённого, поскольку это никогда не допустимо в математике. Бесконечное есть всего лишь фигура речи, истинное значение, являющееся пределом определённого отношения, неограниченно возрастающего...»

Георг Кантор: «Несмотря на лёгкое отличие между понятиями потенциальной и актуальной «бесконечностей», первая означает переменную конечную величину, превосходящую все конечные пределы, в то время как вторая есть фиксированная, постоянная величина, лежащая за всеми конечными значениями, это бывает

настолько часто, что их путают... Некритическое неприятие законной актуальной бесконечности – не меньшее нарушение природы вещей [какой бы то ни было – это не проявляется явно всему человечеству], которая может быть взята как есть.»

Анри Пуанкаре: «Нет актуальной бесконечности; канторианцы забыли об этом и впали в противоречия. Следующие поколения будут рассматривать канторовскую теорию множеств как болезнь, от которой наконец-то удалось избавиться.»

Лёйтзен Брауэр: «Канторовская теория в целом представляет собой патологический казус в истории математики, от которого грядущие поколения просто придут в ужас.»

Следует заметить, что в случае отказа признавать существование актуальных бесконечностей формальная логика необходимо требует отказа от признания математического существования даже ограниченных фигур, включающих и конечные отрезки и содержащих явно актуально бесконечные множества точек. Кроме того, при любой символической записи принадлежности любого элемента произвольному бесконечному множеству это множество необходимо рассматривается именно как актуальное бесконечное множество. Поэтому отказ признавать существование актуальных бесконечностей чрезвычайно сужает возможности чистой (теоретической), прикладной и вычислительной математики и науки вообще, включая решение жизненно необходимых задач.

Отказ признавать именно актуальную бесконечность мироздания в пространстве (вширь и вглубь) и во времени (вечность) не только чрезвычайно обедняет философию, но и полностью лишает всех возможности иметь жизненно необходимое приемлемое мировоззрение и именно сознательно жить и творить и тем самым подрывает основы не только человеческого познания, но и человеческих рода и жизни в целом.

Абрахам Френкель и Йегошуа Бар-Хиллел: «С самого начала следует уяснить, что в традиционной трактовке логики и математики нет решительно ничего, что могло бы служить в качестве основы для устранения антиномии Рассела. Мы полагаем, что любые попытки выйти из положения с помощью традиционных ... способов

мышления, до сих пор неизменно проваливавшиеся, заведомо недостаточны для этой цели. Некоторый отход от привычных способов мышления явно необходим, хотя место этого отхода заранее не ясно... Можно, конечно, обнести канторовский трансфинитный рай стенами, предохраняющими от вторжения гнусных антиномий, без всякой, однако, уверенности, что некоторые из этих тварей не засели внутри.»

Давид Гильберт: «С давних пор никакой другой вопрос так глубоко не волновал человеческую мысль, как вопрос о бесконечном; бесконечное действовало на разум столь же побуждающе и плодотворно, как едва ли действовала какая-либо другая идея; однако ни одно другое понятие не нуждается так сильно в разъяснении, как бесконечность...

Окончательное выяснение сущности бесконечного выходит за пределы узких интересов специальных наук и, более того, ... оно стало необходимым для чести самого человеческого разума... Ядром канторовского учения является его теория трансфинитных чисел. Эта теория представляется мне наиболее заслуживающим удивления цветком математического духа и вообще одним из высших достижений чисто умственной деятельности человека. Никто не сможет изгнать нас из рая, который создал для нас Георг Кантор!»

Артур Морис Шёнфлис, немецкий математик: «Тот, кто испытал на себе очарование личности Кантора, знает, что он полон проницательности, темперамента, изобретательности и оригинальности.»

Людвиг Виттгенштейн: «Человек день за днём трудится в поте лица своего – составляет список всех действительных чисел, и вот, когда список наконец-то закончен, появляется фокусник, берёт диагональ этого списка и на глазах изумлённой публики с помощью таки-довольно «эзотерического» алгоритма превращает её в ... анти-диагональ, т. е. в новое анти-диагональное действительное число, которое не содержится в исходном списке. Такого рода диагональное доказательство Кантора представляет собой занятие для идиотов, которое не имеет никакого отношения к тому, что в классической логике принято называть дедукцией.»

Следует заметить, что, разумеется, принадлежащий Кантору диагональный метод построения контрпримера обосновывает несчётность множества действительных чисел и является математически исключительно строгим и безупречным с точки зрения формальной логики и вполне убедительным для математической интуиции, достаточной для чувствования и через него понимания именно актуальной бесконечности, что было у Кантора и чего не было у Аристотеля и Гаусса. Однако этот метод может представиться именно психологически недостаточно убедительным для философской интуиции и здравого смысла, которые явно недостаточны для непременно живого восприятия именно актуальной бесконечности и которыми, по-видимому, руководствовался философ

Витгенштейн (вообще не понимавший, что такое бесконечность, в том числе и потенциальная, иначе не говорил бы о полной завершённости явно бесконечного списка именно всех действительных чисел) и, несомненно, руководствуются все отрицатели актуальной бесконечности. Психологическим основанием по принципу достаточного основания Лейбница как четвёртому закону формальной логики для такого отрицания применительно к этому диагональному методу Кантора является то, что при доказательстве несчётности множества действительных чисел по методу от противоречащего допускается существование счётно бесконечной последовательности непременно всех действительных чисел отрезка от нуля до единицы.

А по диагональному методу построения контрпримера Кантора строится всего лишь один-единственный контрпример действительного числа, не содержащегося в этой последовательности. Дополнительное присоединение этого единственного действительного числа к этой последовательности якобы просто пополняет её, сохраняя её счётную бесконечность и равносильность (эквивалентность) пополненной последовательности и начальной последовательности в смысле наличия их взаимно однозначного соответствия. А процесс такого пополнения по диагональному методу Кантора якобы можно продолжать до бесконечности в смысле именно потенциальной бесконечности, и это доказательство якобы никогда не завершится.

История математики убедительно доказывает, что даже от математиков никоим образом нельзя требовать наличия математической интуиции, достаточной для чувствования и через него понимания именно актуальной бесконечности, что было у Кантора и чего не было у Аристотеля и Гаусса. Поэтому представляется чрезвычайно полезным дополнительный несравненно более убедительный весьма простой именно мерный (основанный на теории меры применительно к покрытиям) метод доказательства несчётности множества всех действительных чисел. Вновь вначале по методу доказательства от противоречащего принимается допущение о существовании счётно бесконечной последовательности

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$$

непременно всех действительных чисел без исключения. Далее рассматривается произвольное сколь угодно малое непременно положительное действительное число ε. Для любого принадлежащего множеству N натуральных чисел натурального числа

$$n \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

элемент a_n симметрично (то есть с ним в середине) накрывается как окрестностью интервалом длиной $\varepsilon/2^n$, то есть

$$a_n \in]a_n - \varepsilon/2^{n+1}, a_n + \varepsilon/2^{n+1}[.$$

Тогда счётно бесконечное теоретико-множественное объединение

$$\cup_{n\in N}]a_n - \varepsilon/2^{n+1}, a_n + \varepsilon/2^{n+1}[$$

всех этих интервалов является покрытием непременно всех действительных чисел без исключения и имеет линейную меру, которая не может превышать (равенство могло бы иметь место только в случае дизъюнктности семейства всех этих интервалов, то есть полного отсутствия их взаимных пересечений) сумму ряда длин всех этих интервалов

$$\Sigma_{n\in N}\ \varepsilon/2^n = \varepsilon.$$

Тем самым строго доказано, что любая последовательность действительных чисел может быть покрыта последовательностью интервалов со сколь угодно малой суммой ряда длин этих интервалов как линейной мерой этого объединённого покрытия.

А линейная мера всей действительной числовой прямой есть плюс бесконечность.

Отсюда ясно и более чем наглядно, сколь мала любая счётно бесконечная последовательность действительных чисел по сравнению со множеством именно всех действительных чисел. Поэтому не может быть даже и речи о том, чтобы существовала счётно бесконечная последовательность непременно всех действительных чисел. Даже для обычных человеческих интуиции и здравого смысла этот мерный метод доказательства несчётности множества именно всех действительных чисел несравненно убедительнее, чем диагональный метод Кантора, не оставляет никаких сомнений в этой несчётности и не даёт решительно никакой почвы для упрёков в софистических ухищрениях и фокусничестве наподобие выводов, сделанных философом Витгенштейном.

Применительно к общей теории дифференцирования точечных множеств исходное положение в значительной степени излагается следующими цитатами Георга Кантора с разъясняющими добавлениями в квадратных скобках:

Кантор Г. Основы общего учения о многообразиях. О различных точках зрения на актуально-бесконечное. К учению о трансфинитном / перевод П. С. Юшкевича // А. В. Васильев (ред.). Новые идеи в математике. Сборник 6-ой. Теория ассамблей 1. СПб.: Образование, 1914. 184 с.

Страницы 50–53.

«Теперь, чтобы приблизиться к общему понятию континуума, лежащего внутри [n-мерного метрического пространства] G_n, я напомню о понятии производного множества $P^{(1)}$ любого данного точечного множества P, как

оно сперва было развито в работе, помещённой в «Math. Ann.»... и как оно было расширено до понятия производного множества $P^{(\gamma)}$, где γ может быть каким-либо целым числом одного из числовых классов (I), (II), (III) и т. д.

Точечные множества P можно разделить на два класса также по мощности их первого производного множества $P^{(1)}$. Если $P^{(1)}$ обладает мощностью первого числового класса (I), то, как я уже сказал в § 3 этой работы, оказывается, что существует некоторое первое целое число α первого или второго числового класса, для которого $P^{(\alpha)}$ обращается в нуль [пустое множество $\varnothing$]:

$$P^{(\alpha)} = \varnothing.$$

Но если $P^{(1)}$ имеет мощность второго числового класса (II), то $P^{(1)}$ можно всегда разложить, притом одним-единственным образом, на два множества R и S таких, что

$$P^{(1)} = R + S,$$

где R и S обладают совершенно различными свойствами. Множество R – такого р<u>о</u>да, что если повторять процесс получения от него производного множества, то можно прийти к нулю [пустому множеству $\varnothing$], так что всегда существует некоторое первое число γ числового класса (I) или (II), для которого

$$R^{(\gamma)} = \varnothing.$$

Подобные точечные множества R я называю <u>приводимыми</u> (reductibel, reduktibel).

Множество S, наоборот, – такого рода, что процесс получения производных множеств нисколько не изменяет его, так как

$$S = S^{(1)},$$

а значит, и

$$S = S^{(\gamma)},$$

Подобные множества S я называю совершенными точечными множествами. Мы можем поэтому сказать: если $P^{(1)}$ обладает мощностью второго числового класса (II), то $P^{(1)}$ распадается на некоторое определённое приводимое и некоторое определённое совершенное точечные множества. Хотя оба этих предиката – «приводимое» и «совершенное» – несовместимы в одном и том же точечном множестве, но все-таки, с другой стороны, неприводимое – не то же, что

совершенное, и точно так же не совершенное – не то же самое, что приводимое, как это легко заметить при несколько более внимательном рассмотрении.

Совершенные точечные множества S вовсе не всегда являются по своему существу тем, что я назвал в своих вышеназванных работах термином «всюду плотный».

Поэтому их одних недостаточно для полного определения точечного континуума, хотя тотчас же нужно прибавить, что последний всегда должен быть совершенным множеством.

Необходимо ещё одно понятие, чтобы в его сочетании с предыдущим определить континуум, а именно понятие связного точечного множества T.

Мы называем T связным точечным множеством, если для двух любых его точек t и t′ – при данном наперёд произвольно малом [положительном] числе ε – всегда имеется несколькими способами конечное количество точек t_1, t_2, ... , t_ν в T таких, что все расстояния tt_1, t_1t_2, t_2t_3, ... , $t_\nu t'$ меньше, чем ε.

Все известные нам геометрические континуумы точек подпадают, как легко заметить, под это понятие связного точечного множества. По моему мнению, эти два предиката «совершенный» и «связный» представляют (собой) необходимые и достаточные признаки континуума точек, и поэтому я определяю точечный континуум в G_n как совершенно-связное множество. Здесь «совершенный» и «связный» – не просто слова, они представляют собой

отчётливо охарактеризованные логически предыдущими определениями вполне всеобщие предикаты континуума. Больцановское определение континуума (Paradoxien, § 38), безусловно, неправильно. Оно выражает односторонним образом лишь одно свойство континуума, которое встречается и у множеств, получающихся из G_n, если удалить из G_n какое-либо «изолированное» точечное множество (ср.: Math. Ann., 1883, Bd. 21, S. 51). Точно так же оно встречается у множеств, состоящих из нескольких раздельных континуумов. Очевидно, что в этих случаях перед нами нет континуума, хотя, согласно Больцано, это должно было бы быть. Мы видим, таким образом, что здесь нарушено правило «ad essentiam alicujus rei pertinet id, quo dato res necessario ponitur et quo sublato res necessario

tollitur; vel id, sine quo res, et vice versa quod sine re nec esse nec concipi potest» [К сущности любой вещи относится то, посредством чего вещь обязательно даётся и чем она удаляется, вещь обязательно отбирается; или то, без чего вещь, и наоборот].

Точно так же в сочинении Дедекинда (Stetigkeit und irrationale Zahlen) выдвинуто, как мне кажется, односторонним образом лишь другое свойство континуума, а именно то, которое у него обще со всеми «совершенными» множествами.»

Замечание автора. Данное Кантором определение связности точечного множества правильно исключает разбиение его на два подмножества со строго положительным расстоянием между ними, однако не исключает разбиения

точечного множества на два непересекающихся подмножества с нулевым расстоянием между ними. В частности, на действительной числовой прямой по этому определению связно как множество всех рациональных чисел, так и множество всех иррациональных чисел, хотя оба этих множества именно всюду часто (всюду плотно) разделяют друг друга. А на действительной числовой плоскости по этому определению связно теоретико-множественное объединение находящихся друг от друга на строго положительном расстоянии двух отдельных ветвей гиперболы и пары их пересекающихся асимптот, хотя никакие две точки разных ветвей гиперболы нельзя соединить именно конечной непрерывной линией, включаемой в это теоретико-множественное объединение.

Поэтому данное определение Кантора явно недостаточно по сравнению с современным общепринятым определением связности точечного множества.

Страница 69.

«Учение о многообразиях. Этими словами я обозначаю понятие одной чрезвычайно обширной дисциплины, которую до сих пор я пытался разработать лишь в специальной форме арифметического или геометрического учения о множествах. Под «многообразием» или «множеством» я понимаю вообще всякое многое, которое можно мыслить как единое, т. е. всякую совокупность определённых элементов, которая может быть связана в одно целое с помощью некоторого закона, и таким образом я думаю определить нечто, родственное платоновскому

εἶδος или ἰδέα, а также тому, что Платон в своем диалоге «Филеб или высочайшее благо» называет μικτὸν. Он противопоставляет его ἀπειρον'у, т. е. безграничному, неопределённому, называемому мною несобственно бесконечным, равно как и πέρας'у, т. е. границе, и называет его упорядоченной «смесью» обоих последних. Что эти понятия пифагорейского происхождения – на это намекает сам Платон; ср.: Boeckh A. Philolaos des Pythagoreers Lehren. Berlin, 1819.»

Применительно к общей теории <u>дифференцирования</u> точечных множеств исходное положение в значительной степени излагается следующими цитатами Георга Кантора на немецком языке с их непосредственно следующими переводами автора на русский язык:

Cantor G. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Berlin: Springer-Verlag, 1932. 489 S. Страницы 139–141.

«Der Begriff der Ableitung einer gegebenen Mannigfaltigkeit ist übrigens nicht auf die linearen Mannigfaltigkeiten beschränkt, sondern gilt in gleicher Weise auch für die ebenen, räumlichen und n-fachen stetigen und unstetigen Mannigfaltigkeiten. Auf ihn wird, wie wir später zeigen wollen, die einfachste und zugleich vollständigste Erklärung resp. Bestimmung eines Kontinuums gegründet.

Между прочим, понятие производной данного многообразия не ограничивается линейными многообразиями, но также применяется таким же образом к плоским, пространственным и n-мерным непрерывным и

разрывным многообразиям. На понятии производной основывается, как мы покажем позже, самое простое и в то же время наиболее полное объяснение соответственно определение континуума.

Die Ableitung P′ einer linearen Punktmenge P ist nämlich die Mannigfaltigkeit aller derjenigen Punkte, welche die Eigenschaft eines Grenzpunktes von P besitzen, wobei es nicht darauf ankommt, ob der Grenzpunkt zugleich ein Punkt von P ist oder nicht.

Производная P′ линейного точечного множества P представляет собой многообразие всех тех точек, которые обладают свойством предельной точки множества P, при этом не имеет значения, является ли предельная точка также точкой множества P или нет.

Da hiernach die Ableitung einer Punktmenge P wieder eine bestimmte Punktmenge P' ist, so kann auch von dieser die Ableitung gesucht werden, welche alsdann zweite Ableitung von P genannt und mit P'' bezeichnet wird; durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man die νte Ableitung von P, welche mit $P^{(\nu)}$ bezeichnet wird.

Поскольку в соответствии с этим производная точечного множества P снова является определённым точечным множеством P', можно также искать производную этого точечного множества P', которая тогда называется второй производной точечного множества P и обозначается P''; продолжая эту процедуру, мы получаем ν-ю производную точечного множества P, которая обозначается $P^{(\nu)}$.

Hier kann es nun vorkommen, dass der Progress der Ableitungen P', P'', ... zu einer Ableitung $P^{(n)}$ führt, welche aus Punkten besteht, die in jedem endlichen Bereiche nur in endlicher Anzahl vorkommen, so dass $P^{(n)}$ keine Grenzpunkte und folglich auch keine Ableitung hat; in diesem Falle sagen wir von der Punktmenge P, dass sie von der ersten Gattung und von der nten Art sei. Bricht aber die Reihe der Ableitungen von P, die Reihe P', P'', P''', ... , $P^{(v)}$, ... nicht ab, so sagen wir, dass die Punktmenge P von der zweiten Gattung sei.

Здесь может случиться так, что последовательность производных P', P'', ... приводит к производной $P^{(n)}$, которая состоит из точек, которые существуют только в конечном количестве в каждом конечном диапазоне, так что $P^{(n)}$ не имеет предельных точек и, следовательно, не имеет

производных [вернее, все производные равны пустому множеству Ø]; в этом случае мы говорим о точечном множестве P, что оно принадлежит к первому роду и к n-му виду. Но если ряд производных точечного множества P, ряд P′, P″, P‴, ... , $P^{(\nu)}$, ..., не обрывается, мы говорим, что точечное множество P имеет второй род.

Leicht erkennt man hieraus, dass wenn P von der ersten Gattung und nter Art ist, alsdann auch P′, P″, P‴, ... zur ersten Gattung gehören und dabei resp. von der (n - l)ten, (n - 2)ten, (n - 3)ten, ... Art sind, dass ferner, wenn P zur zweiten Gattung gehört, ein gleiches auch von allen ihren Ableitungen P′, P″, ... gilt. Bemerkenswert ist ferner, dass alle Punkte von P″, P‴, ... auch immer Punkte von P′ sind, während ein zu P′ gehöriger Punkt nicht notwendig auch ein solcher von P ist...

Отсюда легко видеть, что если точечное множество P принадлежит к первому роду и n-му виду, то P′, P″, P‴, ... также принадлежат к первому роду и, следовательно, соответственно имеют (n - l)-й, (n - 2)-й, (n - 3)-й, ... вид, что, кроме того, если точечное множество P принадлежит второму роду, то тогда то же самое выполняется и для всех его производных P′, P″, ... Также следует отметить, что все точки P″, P‴, ... также всегда являются точками P′, в то время как точка, принадлежащая P′, не обязательно также является точкой точечного множества P...

Liegt P teilweise oder ganz im Intervalle (α ... β), so kann der bemerkenswerte Fall eintreten, dass jedes noch so kleine in (α ... β) enthaltene Intervall (γ ... δ) Punkte von P enthält. In einem solchen Falle wollen wir sagen, dass P im Intervalle (α ... β) überall-dicht sei...

Если точечное множество P частично или полностью лежит в интервале (α ... β), то может возникнуть замечательный случай, когда каждый, независимо от того, насколько мал, интервал (γ ... δ), содержащийся в (α ... β), содержит точки точечного множества P. В таком случае мы хотим сказать, что точечное множество P всюду плотно в интервале (α ... β)... Aus dieser Erklärung des Ausdruckes „überall-dicht in einem gegebenen Intervalle“ folgt, dass wenn eine Punktmenge in einem Intervalle (α ... β) nicht überall-dicht ist, ein in jenem enthaltenes Intervall (γ ... δ) notwendig existieren muss, in welchem kein einziger Punkt von P liegt. Ferner lässt sich zeigen, dass wenn P im Intervall (α ... β) überall-dicht ist, alsdann von P′ nicht nur ein gleiches gilt, sondern dass auch P′ alle Punkte des Intervalls (α ... β) zu den ihren hat. Diese

Eigenschaft von P′ ließe sich auch zum Ausgangspunkte der Erklärung des Überall-dicht-seins in einem Intervalle nehmen, indem man sagen kann: eine Punktmenge P wird in einem Intervalle (α ... β) überall-dicht genannt, wenn ihre Ableitung P′ alle Punkte von (α ... β) als Elemente enthält.

Из этого объяснения выражения «всюду плотно в данном интервале» следует, что если точечное множество P не является всюду плотным в интервале (α ... β), то в этом интервале (α ... β) необходимо должен существовать интервал (γ ... δ), в котором не лежит ни одна точка точечного множества P. Кроме того, можно показать, что если точечное множество P всюду плотно в интервале (α ... β), то производная P′ не только всюду плотна в интервале (α ... β), но и содержит все точки интервала (α ... β). Это

свойство производной P′ можно также взять за отправную точку для объяснения того, что точечное множество P всюду плотно в интервале, поскольку можно сказать: точечное множество P называется всюду плотным в интервале (α ... β), если производная P′ содержит все точки интервала (α ... β) как элементы.

Ist P überall-dicht in einem Intervalle (α ... β), so ist P auch überall-dicht in jedem anderen Intervalle (α′ ... β′), welches in jenem Intervalle enthalten ist.

Если точечное множество P всюду плотно в интервале (α ... β), то P также всюду плотно в любом другом интервале (α′ ... β′), который содержится в этом интервале (α ... β).

Eine in einem Intervalle (α ... β) überall-dichte Punktmenge P ist notwendig von der zweiten Gattung; denn auch P′ und daher auch P″, P‴, ... sind alsdann im Intervalle (α ... β) überall-dicht, dieser Progress der Ableitungen von P ist daher ein unbegrenzter, d. h. P gehört der zweiten Gattung an.

Точечное множество P, всюду плотное в интервале (α ... β), необходимо второго рода; так как тогда производные P′ и, следовательно, также P″, P‴, ... всюду плотны в интервале (α ... β), то это, следовательно, бесконечная последовательность непустых производных точечного множества P, так что точечное множество P принадлежит ко второму роду.

Daraus ziehen wir den Schluss, dass eine Punktmenge P der ersten Gattung in irgendeinem vorgegebenen Intervalle (α ... β) sicher nicht überall-dicht ist, dass folglich immer innerhalb (α ... β) ein Intervall (γ ... δ) gefunden werden kann, welches keinen einzigen Punkt von P enthält.

Отсюда мы делаем вывод, что точечное множество P первого рода в любом данном интервале (α ... β) заведомо не всюду плотно, следовательно, в интервале (α ... β) может быть найден интервал (γ ... δ), который не содержит ни одной точки точечного множества P.

Ob nun auch umgekehrt jede Punktmenge der zweiten Gattung so beschaffen ist, dass ein Intervall (α ... β) existiert, in welchem sie überall-dicht ist, diese Frage wird uns später beschäftigen [S. 148].

Обратно, каждое ли точечное множество второго рода таково, что существует интервал (α ... β), в котором оно всюду плотно, – этот вопрос займёт нас позже [с. 148].»

Страницы 146–148.

«Die Punktmengen der ersten Gattung lassen sich, wie wir soeben gesehen [haben], durch den Begriff der Ableitung, soweit er bisher entwickelt ist, vollkommen charakterisieren, für die der zweiten Gattung reicht jener Begriff nicht aus, hier wird eine Erweiterung desselben notwendig, die sich bei tieferem Erfassen wie von selbst darbietet.

Как мы только что видели, точечные множества первого рода могут быть полностью охарактеризованы концепцией производной, насколько она развита до сих пор; для тех точечных множеств, что принадлежат ко второму роду,

этого понятия недостаточно; здесь необходимо расширение, само собой разумеющееся при более глубоком понимании.

Man beachte, dass in der Reihe der Ableitungen einer Menge P jedes Glied ein Divisor der vorangehenden ist, jede neue Ableitung $P^{(\nu)}$ also aus der vorhergehenden $P^{(\nu-1)}$ durch <u>Wegfall</u> gewisser Punkte entsteht, <u>ohne</u> dass neue Punkte hinzukommen.

Обращает на себя внимание, что в ряду производных множества P каждый член является делителем [подмножеством] предыдущего, поэтому каждая новая производная $P^{(\nu)}$ возникает из предыдущей производной $P^{(\nu-1)}$ путём <u>удаления</u> определённых точек <u>без добавления</u> новых точек.

Gehört P zur zweiten Gattung, so wird P′ sich aus zwei wesentlich verschiedenen Punktmengen Q und R zusammensetzen, so dass

Если точечное множество P принадлежит ко второму роду, то производная P′ будет состоять из двух существенно разных точечных множеств Q и R, так что

$$P' = \{Q, R\} \; [= Q + R = Q \cup R],$$

die eine Q besteht aus denjenigen Punkten von P′, welche bei hinreichendem Fortschreiten in der Folge P′, P″, P‴, ... verloren gehen, die andere R umfasst diejenigen Punkte, welche in allen Gliedern der Folge P′, P″, P‴, ... erhalten bleiben, es ist also definiert durch die Formel

одно множество Q состоит из тех точек P′, которые теряются при достаточном продвижении в

последовательности P', P'', P''', ..., другое множество R включает в себя те точки, которые сохраняются во всех членах последовательности P', P'', P''', ..., поэтому оно определяется формулой

$$R = D(P', P'', P''', ...) \; [= P' \cap P'' \cap P''' \cap ...] = D(P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, ...)$$

$$= D(P\hat{}(1), P\hat{}(2), P\hat{}(3), ...).$$

Wir haben aber auch offenbar

Но также очевидно

$$R = D(P'', P''', P^{IV}, ...)$$

und allgemein

и вообще

$$R = D(P\hat{}(n_1), P\hat{}(n_2), P\hat{}(n_3), ...),$$

wo n_1, n_2, n_3, ... irgendeine Reihe ins Unendliche wachsender ganzer, positiver Zahlen ist.

где n_1, n_2, n_3, ... – некоторая последовательность положительных целых чисел, возрастающая до бесконечности.

Diese aus der Menge P hervorgehende Punktmenge R werde nun durch das Zeichen

Это точечное множество R, которое выходит из множества P, теперь символом

$$P^{(\infty)}$$

ausgedrückt und „Ableitung von P der Ordnung ∞“ genannt. [An Stelle des vieldeutigen ∞ hat Cantor hierfür später das Zeichen ω verwendet. Vgl. hier S. 195.]

выражается и называется «производной точечного множества P порядка ∞». [Вместо неоднозначного ∞ Кантор позже использовал для этого символ ω. См. здесь стр. 195.]

Die erste Ableitung von $P^{(\infty)}$ werde mit $P^{(\infty+1)}$, die nte Ableitung von $P^{(\infty)}$ mit $P^{(\infty+n)}$ bezeichnet; $P^{(\infty)}$ wird aber auch eine, im allgemeinen von $\emptyset$ verschiedene Ableitung von der Ordnung ∞ haben, wir nennen sie

Обозначим первую производную $P^{(\infty)}$ через $P^{(\infty+1)}$, n-ю производную $P^{(\infty)}$ через $P^{(\infty+n)}$; но $P^{(\infty)}$ также будет иметь производную порядка ∞, которая, вообще говоря, отлична от $\emptyset$, назовём её

$$P^{(\infty+\infty)} = P^{(2\infty)}.$$

Durch Fortsetzung dieser Begriffskonstruktionen kommt man zu Ableitungen, die konsequenterweise durch

Продолжая эти концептуальные построения, можно прийти к производным, которые, следовательно, через

$$P\hat{}(n_0\infty+n_1)$$

zu bezeichnen sind, wo n_0, n_1 positive ganze Zahlen sind. Wir kommen aber auch darüber hinaus, indem wir

могут быть обозначены, где n_0, n_1 – положительные целые чиcла. Но мы также выходим за рамки этого, для чего мы

$$D(P^{(\infty)}, P^{(2\infty)}, P^{(3\infty)}, \ldots)$$

bilden und dafür das Zeichen $P^\wedge(\infty^2)$ festsetzen.

образуем и определим для этого знак $P^\wedge(\infty^2)$.

Hieraus ergibt sich durch Wiederholung derselben Operation und Kombinierung mit den früher gewonnenen der allgemeinere Begriff

Отсюда при повторении тех же действий и сочетании с полученными ранее возникает более общее понятие

$$P^\wedge(n_0\infty^2+n_1\infty+n_2)$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens kommt man zu

и при продолжении этого процесса приходим к

$$P\hat{}(n_0\infty^{\nu}+n_1\infty^{\nu-1}+...+n_{\nu}),$$

wo n_0, n_1, ... , n_ν positive ganze Zahlen sind. Zu weiteren Begriffen gelangt man, indem man ν variabel werden lässt; man setze:

где n_0, n_1, ... , n_ν – положительные целые чи<u>и</u>сла. К дальнейшим понятиям можно прийти, позволив ν стать переменной; положим:

$$P\hat{}(\infty^{\infty}) = D(P^{(\infty)}, P\hat{}(\infty^2), P\hat{}(\infty^3), ...).$$

Durch konsequentes Fortschreiten gewinnt man sukzessive die weiteren Begriffe:

Последовательно продвигаясь вперёд, можно получить следующие понятия:

$$P\hat{}(n\infty^{\infty}), P\hat{}(\infty^{\infty+1}), P\hat{}(\infty^{\infty+n}), P\hat{}(\infty^{n\infty}), P\hat{}(\infty\hat{}\infty^{n}), P\hat{}(\infty\hat{}\infty^{\infty}),$$

usw.;

и т. д.;

wir sehen hier eine dialektische Begriffserzeugung, welche immer weiter führt und dabei frei von jeglicher Willkür in sich notwendig und konsequent bleibt.

Мы видим здесь диалектическое порождение понятий, которое ведёт всё дальше и дальше и остаётся свободным от всякого произвола, необходимым и непротиворечивым.

Für die Punktmengen der ersten Gattung ist, wie aus ihrem Begriffe folgt,

Для точечных множеств первого рода, как следует из их понятия,

$$P^{(\infty)} = \emptyset;$$

es ist bemerkenswert, dass auch das Umgekehrte bewiesen werden kann: jede Punktmenge, für welche jene Gleichung besteht, ist von der ersten Gattung; die Mengen erster Gattung sind also durch jene Gleichung völlig charakterisiert.

примечательно, что обратное также может быть доказано: каждое точечное множество, для которого выполняется это уравнение, принадлежит к первому роду; таким образом, множества первого рода полностью характеризуются этим уравнением.

Es ist leicht, das Beispiel einer Punktmenge zweiter Gattung zu bilden, für welche $P^{(\infty)}$ aus einem Punkte p besteht; man nehme in Intervallen, die auf einander folgen, an einander grenzen und dabei unendlich klein werdend gegen p konvergieren, Punktmengen der ersten Gattung an, deren Ordnungszahlen

über alle Grenzen hinaus wachsen, wenn die entsprechenden Intervalle sich dem p nähern, – so bilden sie zusammengenommen ein derartiges Beispiel, welches zugleich die in Nr. 1 [S. 141] aufgeworfene Frage erledigt, ob zu einer Punktmenge zweiter Gattung ein Intervall immer gehören müsse, in welchem sie überall-dicht ist; wir sehen an diesem Beispiel, dass dies keineswegs erforderlich ist.

Легко построить пример точечного множества второго рода, для которого $P^{(\infty)}$ состоит из только одной точки p; в интервалах, которые следуют друг за другом, примыкают друг к другу и тем самым сходятся к точке p, становясь бесконечно малыми, мы предполагаем множества точек первого рода, порядковые номера которых растут за все пределы, когда соответствующие интервалы

приближаются к точке p, – поэтому они образуют вместе такой пример, который в то же время решает вопрос в Nr. 1 [с. 141], всегда ли интервал должен содержаться в множестве точек второго рода, всюду плотном в этом интервале; из этого примера видно, что в этом нет необходимости.

Mit gleicher Leichtigkeit konstruiert man Punktmengen der zweiten Gattung, für welche $P^{(\infty+n)}$ oder $P^{(2\infty)}$ oder allgemeiner

С такой же легкостью строятся точечные множества второго рода, для которых $P^{(\infty+n)}$, или $P^{(2\infty)}$, или более общие

$$P\hat{}(n_0\infty^\nu+n_1\infty^{\nu-1}+\ldots+n_\nu)$$

aus einem vorgeschriebenen Punkte p bestehen.

состоят из только одной заданной точки p.

Alle derartigen Mengen sind in keinem Intervalle überall-dicht und gehören außerdem der ersten Klasse an; sie gleichen in diesen beiden Beziehungen den Punktmengen erster Gattung.

Все такие точечные множества ни на каком интервале не являются всюду плотными и, кроме того, относятся к первому классу [мощности]; в этих двух отношениях они напоминают точечные множества первого рода.»

Страницы 157–161.

«Sind mehrere Punktmengen P_1, P_2, P_3, ... paarweise ohne Zusammenhang, so wollen wir, wenn P die aus ihrer Zusammenfassung hervorgehende Menge ist, an Stelle einer früher gebrauchten Formulierung [hier S. 145] die bequemere wählen:

Если точечные множества P_1, P_2, P_3, ... попарно не пересекаются, тогда, если P является точечным множеством, полученным в результате их объединения, мы хотим выбрать более удобную формулировку вместо формулировки, использованной ранее [здесь стр. 145]:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \dots [= P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots].$$

Und im Einklang hiermit möge, wenn Q eine in P enthaltene Menge und R diejenige Menge ist, welche übrig bleibt, wenn man Q von P entfernt, geschrieben werden:

И в соответствии с этим, если Q – точечное множество, содержащееся в P, а R – точечное множество, которое остаётся, когда Q вычитается из P, мы пишем:

$$R = P - Q [= P \setminus Q].$$

Eine Punktmenge Q, die wir uns in einem n-dimensionalen stetigen Raume liegend denken, kann so beschaffen sein, dass kein zu ihr gehöriger Punkt zugleich Grenzpunkt derselben ist; eine solche Menge, für welche also

Точечное множество Q, которое мы считаем лежащим в n-мерном непрерывном пространстве, может быть составлено таким образом, что никакая принадлежащая ему точка не является в то же время его предельной точкой; такое множество, для которого

$$D(Q, Q') \, [= Q \cap Q'] = \emptyset,$$

nennen wir eine isolierte Punktmenge. Hat man irgend eine Punktmenge P, die nicht isoliert ist, so geht aus ihr eine isolierte Q dadurch hervor, dass man von ihr die Menge D(P, P′) entfernt.

назовём изолированным точечным множеством. Если есть какое-либо точечное множество P, которое не является изолированным, то изолированное Q получается из P вычитанием из P множества D(P, P′) [= P ∩ P′].

Hier ist also

Так что

$$Q = P - D(P, P') \; [= P \setminus P \cap P']$$

und folglich

и, следовательно,

$$P = Q + D(P, P') \; [= Q \cup P \cap P'].$$

Jede Punktmenge kann also zusammengesetzt werden aus einer isolierten Menge Q und aus einer anderen R, welche Divisor der Ableitung P′ ist. Beachten wir ferner, worauf wiederholt aufmerksam gemacht worden ist, dass jede höhere Ableitung

von P in der vorhergehenden Ableitung enthalten ist, so folgt, dass

Следовательно, каждое точечное множество может состоять из изолированного точечного множества Q и другого точечного множества R, которое является делителем [подмножеством] производной P′. Отметим также то, что уже неоднократно указывалось, что каждая высшая производная точечного множества P содержится в предыдущей производной, поэтому отсюда следует, что

$$P' - P'', P'' - P''', \dots , P^{(\nu)} - P^{(\nu+1)}, \dots$$

lauter isolierte Mengen sind.

являются просто изолированными множествами.

Man hat aber die für das folgende wichtigen Zerlegungen

Но имеются важные для следующего разложения

$$P' = (P' - P'') + (P'' - P''') + \ldots + (P^{(n-1)} - P^{(n)}) + P^{(n)}$$

und

и

$$P' = (P' - P'') + (P'' - P''') + \ldots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \ldots + P^{(\infty)}.$$

Von isolierten Punktmengen gilt nun der folgende Satz:

К изолированным точечным множествам применима следующая теорема:

Theorem I. Jede isolierte Punktmenge ist abzählbar, gehört also zur ersten Klasse...

Теорема I. Каждое изолированное точечное множество счётно, поэтому принадлежит первому классу [мощности]...

Theorem II. Ist die Ableitung P′ einer Punktmenge P abzählbar, so ist P gleichfalls abzählbar...

Теорема II. Если производная P′ точечного множества P счётна, то множество P также счётно...

Theorem III. Jede Punktmenge der ersten Gattung und nter Art ist abzählbar...

Теорема III. Каждое точечное множество первого рода n-го вида счётно...

Theorem IV. Jede Punktmenge P der zweiten Gattung, für welche $P^{(\infty)}$ abzählbar ist, ist selbst abzählbar.

Теорема IV. Каждое точечное множество P второго рода, для которого $P^{(\infty)}$ счётно, само счётно.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus der Zerlegung:

Доказательство этой теоремы следует из разложения:

$$P' = (P' - P'') + (P'' - P''') + \ldots + (P^{(\nu-1)} - P^{(\nu)}) + \ldots + P^{(\infty)} \ldots$$

Versteht man unter α irgendeines der in Bd. 17, S. 357 [hier S. 147] eingeführten Unendlichkeitssymbole, so hat man den umfassenderen Satz:

Если под α понимать любой из символов бесконечности, представленных в томе 17, стр. 357 [здесь стр. 147], то можно получить более исчерпывающее утверждение:

Theorem V. Jede Punktmenge P zweiter Gattung, für welche $P^{(\alpha)}$ abzählbar ist, ist selbst abzählbar...

Теорема V. Каждое точечное множество P второго рода, для которого $P^{(\alpha)}$ счётно, само счётно...

Die letzten Sätze kann man auch in folgender Weise formulieren:

Последние предложения также можно сформулировать следующим образом:

Ist P eine nicht abzählbare Punktmenge, so ist auch $P^{(\alpha)}$ nicht abzählbar, sowohl wenn α eine endliche ganze Zahl, wie auch wenn es eines der Unendlichkeitssymbole ist...

Если P – несчётное точечное множество, то $P^{(\alpha)}$ также несчётно, если α – конечное целое число или один из символов бесконечности...

Theorem VI. Ist eine in einem Intervalle (a, b) enthaltene lineare Punktmenge P so beschaffen, dass ihre Ableitung P′ abzählbar ist, so ist es immer möglich, P in eine endliche Anzahl von Intervallen mit beliebig kleiner Intervallsumme einzuschließen...

Теорема VI. Если линейное точечное множество P, содержащееся в интервале (a, b), таково, что его производная P′ счётна, то всегда можно включить P в

конечное число интервалов со сколь угодно малой суммой длин интервалов...

Hilfssatz I. Eine in einem Intervalle (c, d) der stetigen Veränderlichen x gegebene, stetige Funktion φ(x), welche an den Grenzen ungleiche Werte φ(c) und φ(d) hat, nimmt irgend einen in den Grenzen φ(c) und φ(d) liegenden Wert y zum mindesten einmal an.

Лемма I. Непрерывная функция φ(x) непрерывной переменной x, заданная в интервале (c, d), которая имеет неравные значения φ(c) и φ(d) на концах интервала, принимает любое значение в пределах между φ(c) и φ(d) хотя бы один раз.

Hilfssatz II. Eine in einer unendlichen Geraden liegende unendliche Anzahl von Intervallen, die außer einander liegen,

höchstens an ihren Grenzen zusammenstoßen, ist immer abzählbar [S. 153 oben].

Лемма II. Бесконечное число интервалов, лежащих на бесконечной прямой, которые лежат вне друг друга, самое большее стыкуются на своих концах, всегда счётно [стр. 153 выше].»

Страница 215.

«Theorem A. Eine in einem stetigen, n-dimensionalen Gebiete G_n enthaltene Punktmenge P kann, wenn sie von der ersten Mächtigkeit ist, nie eine perfekte Punktmenge sein.

Теорема A. Точечное множество P, содержащееся в непрерывной n-мерной области G_n, если оно имеет первую мощность, никогда не может быть совершенным точечным множеством.»

Страница 218.

«Auf solche Weise haben wir gezeigt, dass eine Punktmenge P von der ersten Mächtigkeit niemals eine perfekte Menge sein kann.

Таким образом, мы показали, что точечное множество P первой мощности никогда не может быть совершенным множеством.

Theorem B. Ist α irgendeine Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse und P innerhalb G_n eine Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass

Теорема B. Если α – любое число первого или второго класса, а P внутри G_n – такое точечное множество, что

$$P^{(\alpha)} = \varnothing,$$

so ist $P^{(1)}$ sowohl wie auch P von der ersten Mächtigkeit, es sei denn, dass P resp. $P^{(1)}$ endliche Mengen sind.

то $P^{(1)}$, а также P имеют первую мощность или являются конечными множествами.»

Страница 220.

«Theorem C. Ist P eine innerhalb G_n gelegene Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ von der ersten Mächtigkeit ist, so gibt es immer Zahlen γ der ersten oder zweiten Zahlenklasse derart, dass $P^{(\gamma)}$ gleich Null wird, und von allen solchen Zahlen γ gibt es eine kleinste α.

Теорема C. Если P – точечное множество внутри G_n такой природы, что его первая производная $P^{(1)}$ – первой мощности, то всегда найдутся числа γ первого или второго

числовых классов, такие, что множество $P^{(\gamma)}$ пусто, причём из всех таких чисел γ существует наименьшее α.»

Страница 221.

«Theorem D. Ist P eine innerhalb G_n gelegene Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit als die erste hat, so gibt es immer Punkte, welche allen Ableitungen $P^{(\alpha)}$ zugleich angehören, wo α irgendeine Zahl der ersten oder zweiten Zahlenklasse ist, und der Inbegriff aller dieser Punkte, der nichts anderes ist als $P^{(\Omega)}$, ist stets eine perfekte Punktmenge.

Теорема D. Если P – точечное множество внутри G_n такой природы, что его первая производная $P^{(1)}$ имеет мощность больше первой, то всегда есть точки, которые принадлежат сразу всем производным $P^{(\alpha)}$, где α – любое число первого

или второго числовых классов, и воплощение всех этих точек, которое есть не что иное, как $P^{(\Omega)}$, всегда является совершенным точечным множеством.»

Страницы 222–223.

«Theorem E. Ist P eine innerhalb G_n gelegene Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit als die erste hat, und ist $S = P^{(\Omega)}$ die perfekte Menge, deren Existenz in Theorem D ausgesprochen ist, so ist die Differenz

Теорема E. Если P – точечное множество внутри G_n такой природы, что его первая производная $P^{(1)}$ имеет мощность больше первой, и если $S = P^{(\Omega)}$ – совершенное множество, существование которого утверждается в теореме D, то разность

$$\mathbf{R = P^{(1)} - S\ [= P^{(1)} \setminus S]}$$

stets eine Punktmenge von höchstens der ersten Mächtigkeit, und wir können daher stets und nur auf eine Weise $P^{(1)}$ in zwei Bestandteile R und S zerlegen, so dass

всегда есть точечное множество мощности не более первой, и поэтому мы можем всегда и только единственным образом разложить $P^{(1)}$ на две составные части (компоненты) R и S, так что

$$\mathbf{P^{(1)} = R + S\ [= R \cup S],}$$

wo S eine perfekte Punktmenge und R eine Punktmenge ist, die entweder endlich oder von der ersten Mächtigkeit ist.

где S – совершенное точечное множество, а R – точечное множество, которое либо конечно, либо имеет первую мощность.

Theorem F. Ist P innerhalb G_n eine beliebige Punktmenge von solcher Beschaffenheit, dass ihre erste Ableitung $P^{(1)}$ eine höhere Mächtigkeit als die erste hat, so gibt es stets eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenklasse zugehörige Zahl α, so dass

Теорема F. Если P – произвольное точечное множество внутри G_n такой природы, что его первая производная $P^{(1)}$ имеет мощность больше первой, то всегда существует такое наименьшее число α, принадлежащее первому или второму числовому классу, что

$$P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+1)},$$

und es ist folglich bereits die αte Ableitung von P, d. i. $P^{(\alpha)}$ gleich der perfekten Menge $P^{(\Omega)} = S$.

и, следовательно, уже α-я производная множества P, т. е. $P^{(\alpha)}$, равна совершенному множеству $P^{(\Omega)} = S$.»

Страница 224.

«Diese Sätze A, B, C, D, E, F sowohl, wie die hier entwickelten Beweise derselben waren mir zur Zeit der Abfassung von Nr. 5 dieser Abhandlung bekannt; indessen bin ich dort bei der Formulierung des Satzes E, auf S. 575, Bd. 21 [hier S. 193], etwas zu weit gegangen; so wie der Satz E dort steht, ist er nicht allgemein richtig.

Эти теоремы A, B, C, D, E, F, а также разработанные здесь их доказательства были известны мне на момент написания № 5 этого трактата; тем временем я немного переборщил с формулировкой теоремы E на стр. 575, т. 21 [здесь стр. 193]; то, как там написано предложение E, в общем случае может оказаться неверным.

Aus dem Umstand nämlich, dass R höchstens von der ersten Mächtigkeit und gleichzeitig ein Bestandteil von $P^{(1)}$ ist, glaubte ich folgern zu dürfen, dass R die Ableitung eines gewissen Bestandteiles von P wäre, und schloss daraus mit Hilfe des Theorems C ganz richtig, dass es ein α geben müsste, so dass

Из того факта, что точечное множество R имеет мощность не более первой и в то же время является подмножеством первой производной $P^{(1)}$ точечного множества P, я полагал, что могу вывести, что R является производной определённого подмножества точечного множества P, и из этого я совершенно правильно пришёл к выводу, что по теореме C должно существовать такое α, что

$$R^{(\alpha)} = \emptyset.$$

Es zeigt sich nun aber, dass im allgemeinen R nicht Ableitung einer anderen Menge zu sein braucht.

Но оказывается, что точечное множество R в общем случае не обязательно должно быть производной другого точечного множества.

Diese wichtige Bemerkung ist zuerst von Herrn Ivar Bendixson in Stockholm in einem an mich gerichteten Schreiben (Mai 1883) gemacht worden.

Это важное замечание было впервые сделано г-ном Иваром Бендиксоном в Стокгольме в адресованном мне письме (май 1883 г.).

Auf meinen Wunsch hat derselbe seine bei dieser Gelegenheit gefundenen Resultate, welche zum Teil mit den obigen Sätzen D,

E, F übereinstimmen, ausgearbeitet und in Acta mathem. Bd. II, S. 415 publiziert.

По моей просьбе он обработал результаты, которые он нашёл в этом случае, некоторые из которых согласуются с приведёнными выше предложениями D, E, F, и опубликовал их в Acta mathem., том II, стр. 415.

Da hiernach $R^{(\gamma)}$ im allgemeinen für keinen Wert von γ Null zu sein braucht, so ergab sich die Frage, durch welche Eigenschaft die abzählbare Menge R sich von anderen Mengen der ersten Mächtigkeit unterscheide; die Beantwortung dieser Frage fand Herr Bendixson in folgendem Theorem:

Поскольку, согласно этому, $R^{(\gamma)}$, вообще говоря, не обязательно должно быть пустым множеством для любого значения γ, возник вопрос, каким свойством счётное

множество R отличается от других множеств первой мощности; г-н Бендиксон нашёл ответ на этот вопрос в следующей теореме:

Theorem G. Ist R die in Theorem E vorkommende Menge erster Mächtigkeit, so gibt es eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenklasse angehörige Zahl α, so dass

Теорема G. Если R – множество первой мощности, фигурирующее в теореме E, то существует такое наименьшее число α, принадлежащее первому или второму числовому классу, что

$$D(R, R^{(\alpha)}) [= R \cap R^{(\alpha)}] = \emptyset.»$$

Страницы 227–228.

«Aus unseren Sätzen C, D, E, F in § 16 ergeben sich daher folgende Sätze für abgeschlossene Punktmengen:

Из наших теорем C, D, E, F в § 16 вытекают следующие теоремы для замкнутых точечных множеств:

Theorem C′. Ist P irgendeine abgeschlossene Punktmenge von der ersten Mächtigkeit, so gibt es immer eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenklasse zugehörige Zahl α, so dass $P^{(\alpha)}$ gleich Null ist, oder was dasselbe heißen soll, solche Mengen sind immer reduktibel.

Теорема C′. Если P – любое замкнутое точечное множество первой мощности, то всегда существует такое наименьшее число α, принадлежащее первому или второму числовому классу, что $P^{(\alpha)}$ равно пустому множеству, или, что должно означать то же самое, такие множества всегда приводимы (редуктивны).

Theorem E′. Ist P eine abgeschlossene Punktmenge von höherer als der ersten Mächtigkeit, so zerfällt P und zwar nur auf eine Weise in eine perfekte Menge S und eine Menge von der ersten Mächtigkeit R, so dass

Теорема E′. Если P – замкнутое точечное множество мощности больше первой, то P разделяется на совершенное множество S и множество первой мощности R только одним способом, так что

$$\mathbf{P = R + S\ [= R \cup S],}$$

und es existiert eine kleinste der ersten oder zweiten Zahlenklasse zugehörige Zahl α, so dass $P^{(\alpha)}$ gleich S wird.

и существует такое наименьшее число α, принадлежащее первому или второму числовому классу, что $P^{(\alpha)}$ становится равным S.

Es ist ferner wichtig den Fall ins Auge zu fassen, dass eine Menge P Divisor ihrer Ableitung $P^{(1)}$ ist oder, was dasselbe ist, dass

Также важно рассмотреть случай, когда множество P является делителем [подмножеством] своей производной $P^{(1)}$, или, что то же самое, что

$$D(R, R^{(1)}) [= R \cap R^{(1)}] = P;$$

unter solchen Umständen wollen wir P eine in sich dichte Menge nennen.

в таких обстоятельствах мы хотим назвать P плотным в себе множеством.

Ist P irgendeine in sich dichte Menge, so ist ihre Ableitung $P^{(1)}$ stets eine perfekte Menge.

Если P – некоторое плотное в себе множество, то его производная $P^{(1)}$ всегда является совершенным множеством.

Denn einerseits ist ja immer $P^{(2)}$ Divisor von $P^{(1)}$; in unserem Falle ist aber auch $P^{(1)}$ Divisor von $P^{(2)}$; denn schreiben wir

Потому что, с одной стороны, $P^{(2)}$ всегда является делителем [подмножеством] $P^{(1)}$; в нашем случае, однако, $P^{(1)}$ также является делителем [подмножеством] $P^{(2)}$; потому что мы пишем

$$P^{(1)} = N + P,$$

so folgt daraus

поэтому отсюда следует

$$P^{(2)} = N^{(1)} + P^{(1)};$$

d. h. $P^{(1)}$ ist mit allen seinen Punkten in $P^{(2)}$ enthalten. Folglich sind die beiden Mengen $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ identisch dieselben und es ist daher $P^{(1)}$ eine perfekte Menge.
а это значит, что $P^{(1)}$ со всеми его точками содержится в $P^{(2)}$. Следовательно, два множества $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ совпадают, и, следовательно, $P^{(1)}$ – совершенное множество.
Dann ist auch der Fall hervorzuheben, wo eine Menge P eine solche Beschaffenheit hat, dass kein Bestandteil, d. h. keine Teilmenge von P in sich dicht ist; in diesem Falle nennen wir die Menge P eine separierte Menge.
Тогда также следует подчеркнуть случай, когда множество P имеет такое свойство, что никакая составляющая часть, т. е. никакое подмножество, множества P не является

плотным в себе; в этом случае мы называем множество P разрозненным множеством.

Die isolierten Mengen bilden offenbar eine besondere Klasse von separierten Mengen. Ferner ist hervorzuheben, dass alle abgeschlossenen Mengen erster Mächtigkeit separierte Mengen sind, weil sie sonst nicht reduktibel wären, und dass auch alle diejenigen Mengen erster Mächtigkeit, welche in den Theoremen E, E′ und G (§ 16) vorkommen und dort mit R bezeichnet wurden, separierte Mengen sind.

Очевидно, изолированные множества образуют особый класс разрозненных множеств. Кроме того, следует подчеркнуть, что все замкнутые множества первой мощности являются разрозненными множествами, потому что в противном случае не были бы приводимыми, а также

все те множества первой мощности, которые встречаются в теоремах E, E′ и G (§ 16) и там обозначаются R, являются разрозненными множествами.

Würde nämlich R einen Bestandteil M haben, welcher in sich dicht ist, so würde $R^{(\alpha)}$ den Bestandteil $M^{(1)}$ haben, weil $M^{(1)}$ eine perfekte Menge ist, die in allen Ableitungen von R erhalten bleibt; da zudem M als in sich dichte Menge ein Bestandteil von $M^{(1)}$ ist, so würde der Bestandteil M von R ebenfalls in $R^{(\alpha)}$ enthalten sein, was in Widerspruch zu dem Bendixsonschen Satze (§ 16) treten würde. Also hat R keinen Bestandteil, welcher in sich dicht ist, und es gehört also R immer zu der Klasse der separierten Mengen.

Если бы множество R имело плотное в себе подмножество M, то множество $R^{(\alpha)}$ имело бы подмножество $M^{(1)}$, потому

что $M^{(1)}$ – совершенное множество, которое сохраняется во всех производных множества R; поскольку M как плотное в себе множество является подмножеством множества $M^{(1)}$, то подмножество M множества R также содержалось бы в $R^{(\alpha)}$, что противоречило бы теореме Бендиксона (§ 16). Таким образом, множество R не имеет плотных в себе подмножеств, и поэтому множество R всегда принадлежит к классу разрозненных множеств.

Zu den separierten Mengen gehört auch immer, was auch P sei, die Menge

Каким бы ни было множество P, всегда принадлежит разрозненным множествам множество

$$P - D(P, P^{(\Omega)}) \; [= P \setminus P \cap P^{(\Omega)}],$$

von welcher man zugleich stets behaupten kann, dass sie von der ersten Mächtigkeit ist, was leicht mittels des Theorems III in § 15 [S. 214] bewiesen wird.

о котором в то же время всегда можно утверждать, что оно имеет первую мощность, что легко доказать с помощью теоремы III из § 15 [с. 214].

Auf die Frage, ob eine separierte Menge auch von höherer als der ersten Mächtigkeit sein kann, kommen wir später.

К вопросу, может ли разрозненное множество также иметь мощность больше первой, мы подойдём позже.»

Страницы 229–230.

«Der Begriff „in sich dicht“ steht natürlich in einer gewissen Verwandtschaft zu dem schon früher oft von mir gebrauchten

„überall-dicht“, um so mehr müssen wir sie auseinander halten und jeder Verwechslung zwischen ihnen vorbeugen.

Понятие «плотное в себе множество», конечно, связано с понятием «всюду плотное множество», которое я часто использовал ранее, поэтому мы должны разделять их и не допускать путаницы между ними.

Der Ausdruck „in sich dicht“ bezeichnet für sich eine bestimmte Beschaffenheit einer Menge; dagegen hat „überall-dicht“ an und für sich nicht die Bedeutung einer Mengenbeschaffenheit, sondern erlangt solche erst dadurch, dass man ihn in Verbindung mit einem bestimmten n-dimensionalen stetigen Bestandteil H von G_n braucht, indem man von einer Menge P sagt, sie sei „überall-dicht in H“.

Выражение «плотное в себе множество» означает определённое свойство множества самого по себе; с другой стороны, выражение «всюду плотное множество» не имеет значения свойства множества самого по себе, а получает значение свойства множества только в связи с определённым n-мерным непрерывным множеством H пространства G_n, когда говорится о множестве P, «всюду плотном в H».

Macht man sich diesen wesentlichen Unterschied klar, so folgt von selbst, dass eine Menge P sehr wohl in sich dicht sein kann, ohne dass sie in irgendwelchem Teilgebiete H von G_n überall-dicht wäre, und dass auch umgekehrt eine Menge P in einem Teilgebiete H überall-dicht sein kann, ohne dass sie in sich dicht

zu sein braucht, falls nämlich P auch außerhalb des Gebietes H zugehörige Punkte besitzt.

Если прояснить это существенное различие, из этого, конечно, следует, что множество P вполне может быть плотным в себе, не будучи всюду плотным в любой подобласти H в G_n, и что, наоборот, множество P в подобласти H также может быть всюду плотным без необходимости быть плотным в себе, а именно, если P содержит точки также вне области H.

Liegt andrerseits P ganz im Gebiete H und ist darin überall-dicht, so ist unmittelbar klar, dass in einem solchen Falle P auch in sich dicht genannt werden muss.

С другой стороны, если P целиком лежит в области H и в ней всюду плотно, то сразу ясно, что в таком случае P также следует называть плотным в себе.»

Страница 236.

«Wir wollen nun zu einer genaueren Untersuchung der perfekten Mengen übergehen.

Перейдём теперь к более подробному изучению совершенных множеств.

Da jede solche Punktmenge gewissermaßen in sich begrenzt, abgeschlossen und vollendet ist, so zeichnen sich die perfekten Mengen vor allen anderen Gebilden durch besondere Eigenschaften aus.

Поскольку каждое такое точечное множество, так сказать, само по себе ограничено, замкнуто и завершено, то

совершенные множества отличаются от всех других структур особыми свойствами.

Sie [perfekte Mengen] dürften aber auch noch aus dem Grunde eine generelle und ausführliche Behandlung verdienen, weil die sämtlichen Kontinua, wenn wir dieses Wort in dem Sinne nehmen, wie ich ihn in der vorigen Nummer dieser Abhandlung, in Nr. 5 § 10 [hier S. 194] gebraucht habe, zu ihnen [perfekten Mengen] gehören; denn unter einem Kontinuum im eigentlichen Sinne verstehe ich jede perfekte Punktmenge, die in sich zusammenhängend ist; was ich hierbei mit „zusammenhängend" sagen will, ist gleichfalls an der soeben erwähnten Stelle erklärt worden.

Но они [совершенные множества] также заслуживают общего и подробного рассмотрения по той причине, что все

континуумы, если мы возьмём это слово в том смысле, который я использовал в предыдущем номере этого трактата, в п. 5 § 10 [здесь стр. 194], должны принадлежать им [совершенным множествам]; ибо под континуумом в собственном смысле я понимаю каждое совершенное точечное множество, которое связно в себе; то, что я имею в виду здесь под «связным», также было объяснено в только что упомянутом пункте.»

Страница 264.

«Theorem H. Ist P irgendeine abgeschlossene Punktmenge, so besteht dieselbe immer aus zwei wesentlich verschiedenen, getrennten Bestandteilen R und S (von welchen einer auch Null sein kann), so dass

Теорема H. Если P – любое замкнутое множество точек, то оно всегда состоит из двух отдельных существенно разных подмножеств (составных частей, компонентов) R и S (одно [каждое] из которых также может быть равно пустому множеству), так что

$$P = R + S\ [= R \cup S], \quad (3)$$

wo R eine separierte Menge und höchstens von der ersten Mächtigkeit, während S, falls sie nicht gleich Null, eine perfekte Menge und daher (Acta mathematica, T. 4, p. 381) [hier III 6, S. 252] von der Mächtigkeit des Linearkontinuums ist. Falls die abgeschlossene Menge P endlich oder von der ersten Mächtigkeit ist, verschwindet der Teil S und man hat alsdann von einem gewissen kleinsten α der ersten oder zweiten Zahlenklasse an (welches kleinste α stets von der ersten Art ist):

где R – разрозненное множество не более первой мощности, тогда как множество S, если оно не равно пустому множеству, – совершенное точечное множество и, следовательно (Acta mathematica, T. 4, стр. 381) [здесь III 6, стр. 252], мощности линейного континуума. Если замкнутое множество P конечно или первой мощности, то часть S обращается в пустое множество, и тогда существует некоторое наименьшее число α из чисел первого или второго числового класса (причём наименьшее α – всегда первого класса), для которых

$$P^{(\alpha)} = \emptyset.$$

Ist aber die abgeschlossene Menge P von höherer als der ersten Mächtigkeit, so ist S immer eine von Null verschiedene perfekte

Menge und man hat von einem gewissen kleinsten α der ersten oder zweiten Zahlenklasse an

Но если замкнутое множество P имеет мощность выше первой, то S всегда является непустым совершенным множеством, и существует некоторое наименьшее число α из чисел первого или второго числового класса, для которых

$$P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+\lambda)} = S$$

und somit auch

и, таким образом, также

$$P^{(\Omega)} = S.$$

Die separierte Menge R hat dabei die Eigenschaft, dass

Разрозненное множество R обладает тем свойством, что

$$D(R, R^{(\alpha)})\ [= R \cap R^{(\alpha)}] = D(R, R^{(\Omega)})\ [= R \cap R^{(\Omega)}] = \emptyset.$$

Alle abgeschlossenen unendlichen Punktmengen sind entweder von der ersten Mächtigkeit oder von der Mächtigkeit des Linearkontinuums (Math. Ann., Bd. 23, S. 488) [hier S. 244].

Все замкнутые бесконечные точечные множества имеют либо первую мощность, либо мощность линейного континуума (Math. Ann., Vol. 23, p. 488) [здесь с. 244].

Ich will nun im folgenden zeigen, wie sich alle diese Sätze auf beliebige, also auch auf nicht abgeschlossene Punktmengen verallgemeinern lassen.

Далее я хочу показать, как все эти теоремы могут быть обобщены на произвольные, то есть также на незамкнутые точечные множества.»

Страницы 407–409.

«Das Folgende findet sich fast übereinstimmend in zwei Briefen; der eine vom 13. Mai 1887 ist an Herrn Gymnasiallehrer F. Goldscheider in Berlin, der andere vom 16. Mai 1887 an Herrn Professor Dr. K. Weierstraß von mir geschrieben worden.

Следующее почти идентично содержится в двух написанных мной письмах; одно от 13 мая 1887 г. – учителю гимназии Ф. Гольдшайдеру в Берлине, другое от 16 мая 1887 г. – профессору доктору К. Вейерштрассу.

Sie erwähnen in Ihrem Schreiben die Frage über die aktual unendlich kleinen Größen.

В своем письме вы упоминаете вопрос об актуально бесконечно малых величинах.

An mehreren Stellen meiner Arbeiten werden Sie die Ansicht ausgesprochen finden, dass dies unmögliche, d. h. in sich

widersprechende Gedankendinge sind, und ich habe schon in meinem Schriftchen „Grundlagen e. allg. Mannigfaltigkeitslehre“ pag. 8 im § 4, wenn auch damals noch mit einer gewissen Reserve, angedeutet, dass die strenge Begründung dieser Position aus der Theorie der transfiniten Zahlen herzuleiten wäre.

В нескольких местах моей работы вы найдёте твёрдое мнение, что это невозможно, т. е. это внутренне противоречивые мысли, и я уже написал в моей работе «Основы общей теории многообразий» на стр. 8 в § 4, даже если в то время ещё с некоторой оговоркой, и указал, что строгое обоснование этой позиции может быть получено из теории трансфинитных чисел.

Erst in diesem Winter fand sich die Zeit dazu, meine diesen Gegenstand betreffenden Ideen in die Gestalt eines förmlichen Beweises zu bringen. Es handelt sich um den Satz:

Только этой зимой было найдено время, чтобы привести мои идеи по этому поводу к виду формального доказательства. Речь идёт о следующем предложении:

„Von Null verschiedene lineare Zahlgrößen ζ (d. h. kurz gesagt, solche Zahlgrößen, welche sich unter dem Bilde begrenzter geradliniger stetiger Strecken vorstellen lassen), welche kleiner wären als jede noch so kleine endliche Zahlgröße, gibt es nicht, d. h. sie widersprechen dem Begriff der linearen Zahlgröße.“

«Ненулевые линейные числовые величины ζ (то есть, короче, такие числовые величины, которые можно представить изображением ограниченных отрезков прямых

непрерывных линий), которые были бы меньше любого конечного числа, каким бы малым оно ни было, не существуют; то есть они противоречат понятию линейной числовой величины.»

Der Gedankengang meines Beweises ist einfach folgender: Ich gehe von der Voraussetzung einer linearen Größe ζ aus, die so klein sei, dass ihr n-faches

Ход мыслей моего доказательства прост: я исхожу из предположения о линейной величине ζ, которая настолько мала, что её n-кратная величина

$$\zeta n$$

für jede noch so große endliche ganze Zahl n kleiner ist als die Einheit, und beweise nun aus dem Begriff der linearen Größe

und mit Hilfe gewisser Sätze der transfiniten Zahlenlehre, dass alsdann auch

меньше единицы для любого конечного целого числа n, каким бы большим оно ни было, и теперь доказываю, исходя из понятия линейной величины и с помощью определённых теорем теории трансфинитных чисел, что тогда также

$$\zeta\nu$$

kleiner ist als jede noch so kleine endliche Größe, wenn ν irgendeine noch so große transfinite Ordnungszahl (d. h. Anzahl oder Typus einer wohlgeordneten Menge) aus irgendeiner noch so hohen Zahlenklasse bedeutet.

меньше любой конечной величины, какой бы малой она ни была, если ν означает любое трансфинитное порядковое

число (то есть число или тип вполне упорядоченного множества) из любого числового класса, каким бы большим оно ни было.

Dies heißt aber doch, dass ζ auch durch keine noch so kräftige actual unendliche Vervielfachung endlich gemacht werden, also sicherlich nicht Element endlicher Größen sein kann.

Однако это означает, что ζ нельзя сделать конечным даже с помощью любого актуально бесконечного умножения, поэтому ζ определённо не может быть элементом конечных величин.

Somit widerspricht die gemachte Voraussetzung dem Begriff linearer Größen, welcher derartig ist, dass nach ihm jede lineare Größe als integrierender Teil von anderen, im

besonderen von endlichen linearen Größen gedacht werden muss.

Сделанное таким образом предположение противоречит понятию линейных величин, согласно которому каждая линейная величина должна рассматриваться как интегрирующая часть других, в частности конечных линейных величин.

Es bleibt also nichts übrig, als die Voraussetzung fallen zu lassen, wonach es eine Größe ζ gäbe, die für jede endliche [positive] ganze Zahl n kleiner wäre als 1/n, und hiermit ist unser Satz bewiesen.

Таким образом, ничего не остаётся, кроме как отказаться от предположения, что существует величина ζ, которая

будет меньше 1/n для любого конечного [положительного] целого числа n, и это доказывает нашу теорему.

Es scheint mir dies eine wichtige Anwendung der transfiniten Zahlenlehre zu sein, ein Resultat, welches alte, weit verbreitete und tief wurzelnde Vorurteile zu beseitigen geeignet ist.

Мне кажется, что это – важное приложение теории трансфинитных чисел, результат, который способен развеять старые, широко распространённые и глубоко укоренившиеся предрассудки.

Die Tatsache der aktual-unendlich großen Zahlen ist also so wenig ein Grund für die Existenz aktual-unendlich kleiner Größen, dass vielmehr gerade mit Hilfe der ersteren die Unmöglichkeit der letzteren bewiesen wird.

Факт существования актуально бесконечно больших чисел является настолько малой причиной существования актуально бесконечно малых величин, что именно с помощью первых доказывается невозможность вторых.

Ich glaube auch nicht, dass man dieses Resultat auf anderem Wege voll und streng zu erreichen imstande ist.

Я также не верю, что этого результата можно полностью и строго добиться каким-либо другим способом.

Das Bedürfnis unseres Satzes ist besonders einleuchtend gegenüber neueren Versuchen von O. Stolz und P. Dubois-Reymond, welche darauf ausgehen, die Berechtigung aktual-unendlich kleiner Größen aus dem sogenannten „Archimedischen Axiom“ abzuleiten.

Потребность в нашей теореме особенно очевидна по сравнению с более поздними попытками О. Штольца и П. Дюбуа-Реймона, которые стремятся вывести обоснование актуально бесконечно малых величин из так называемой «аксиомы Архимеда».

(Vgl. O. Stolz, Math. Annalen Bd. 18, S. 269; ferner seine Aufsätze in den Berichten des naturw. medizin. Vereines in Innsbruck, Jahrgänge 1881–82 und 1884; sie sind betitelt: „Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes“ und: „Die unendlich kleinen Größen“; endlich vergleiche man desselben Autors: „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik“, Leipzig 1885, I. Teil, S. 205.)

(См. О. Штольц, Math. Annalen Vol. 18, p. 269; также его статьи в Berichte des naturw. medizin. Verein в Инсбруке,

1881–82 и 1884 годы; они озаглавлены: „Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes“ и „Die unendlich kleinen Größen“; наконец, сравните того же автора: «Лекции по общей арифметике», Лейпциг, 1885, часть I, стр. 205.)

Archimedes scheint nämlich zuerst darauf aufmerksam geworden zu sein, dass der in Euklids Elementen gebrauchte Satz, wonach aus jeder noch so kleinen begrenzten geradlinigen Strecke durch endliche, hinreichend große Vervielfachung beliebig große endliche Strecken erzeugt werden können, eines Beweises bedürftig sei, und er glaubte darum diesen Satz als „Annahme“ (λαμβανόμενον) bezeichnen zu sollen.

Архимед, кажется, первым заметил, что теорема, используемая в «Элементах» Евклида, согласно которой из

каждого ограниченного отрезка прямой, независимо от того, насколько он мал, с помощью конечного достаточно большого умножения можно образовать любые сколь угодно большие конечные отрезки, нуждается в доказательстве, и поэтому он считал, что это предложение надлежит обозначить как «предположение» (λαμβανόμενον).
(Vgl. Eukl. Elem. lib. V, def. 4: λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέδη λέγεται, ῳ ἅ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν; ferner insbesondere Elem. lib. X, pr. 1. Archimedes: de sphaera et cylindro I, postul. 5 und die Vorrede zu seiner Schrift: de quadratura parabolae.)
Nun ist der Gedankengang jener Autoren (O. Stolz a. a. O.) der, dass wenn man dieses vermeintliche „Axiom“ fallen ließe,

daraus ein Recht auf aktual unendlich-kleine Größen, welche dort „Momente“ genannt werden, hervorgehen würde.

Ход мыслей этих авторов (О. Штольц...) состоит в том, что если отбросить эту предполагаемую «аксиому», то возникло бы право на актуально бесконечно малые величины, которые там называются «моментами».

Aber aus dem oben von mir angeführten Satze folgt, wenn er auf geradlinige stetige Strecken angewandt wird, unmittelbar die Notwendigkeit der Euklidischen Annahme.

Но из предложения, которое я цитировал выше, если оно применяется к отрезкам прямых непрерывных линий, необходимость евклидова предположения следует немедленно.

Also ist das sogenannte „Archimedische Axiom“ gar kein Axiom, sondern ein, aus dem linearen Größenbegriff mit logischem Zwang folgender Satz.

Таким образом, так называемая «аксиома Архимеда» – это вовсе не аксиома, а утверждение, которое с логической необходимостью следует из понятия линейной величины.»

Применительно к точечным множествам в топологических пространствах принятое в настоящей научной монографии исходное положение в значительной степени излагается приведёнными ниже цитатами с добавлениями поясняющих слов (пространство, множество, точка и так далее) из классической монографии:

Хаусдорф Ф. Теория множеств / перевод с немецкого Н. Б. Веденисова; под редакцией и с дополнениями проф. П. С.

Александрова и проф. А. Н. Колмогорова. М.; Л.: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, 1937. 306 с.

Страница 33.

«Множество всех подмножеств множества M мощности m имеет мощность 2^m.

В самом деле, в § 4 мы видели, что это множество эквивалентно множеству A^M, где A состоит из двух элементов.

§ 7. Скала мощностей

До сих пор мы ещё не могли ответить на вопрос, существуют ли действительно различные бесконечные мощности или же справедлив широко распространённый предрассудок, что бесконечность есть только голое,

безразличное, не поддающееся никакому дальнейшему расчленению отрицание конечного.

I. $2^m > m$, т. е. множество всех подмножеств M имеет мощность большую, чем само M.»

Страницы 34–35.

«С теоремой I мы приобрели уверенность в существовании различных бесконечных кардинальных чисел и притом в бесконечном множестве, отправляясь от какого-нибудь бесконечного m (например $\aleph_0$ или $\aleph$), мы можем построить:

$$m_1 = 2^m > m,$$

$$m_2 = 2\hat{}m_1 > m_1,$$

$$m_3 = 2\hat{}m_2 > m_2,$$

....

(заметим, что теорема I имеет место также и для конечных m: $1 = 2^0 > 0$, $2 = 2^1 > 1$, ...).

Далее, $m + m_1 + m_2 + \dots$ есть ещё большее кардинальное число, и, отправляясь от этого последнего, мы можем продолжить процесс; в самом деле, вообще имеем:

II. Если каждому $m \in M$ соответствует кардинальное число a_m и если среди чисел a_m не существует наибольшего, то сумма

$$a = \Sigma_m{}^M a_m \; [= \Sigma_{m \in M} a_m]$$

больше каждого из a_m.

Действительно, с одной стороны, во всяком случае $a \geq a_m$ для каждого m, с другой – равенство исключено, так как в противном случае a_m было бы наибольшее из данных кардинальных чисел.

Например, если бы существовали два несравнимых кардинальных числа a и b, a + b было бы больше каждого из них.

Теоремы I и II позволяют неограниченно восходить ко всё более и более высоким мощностям; они же приводят к антиномии (стр. 9).

Действительно, каково бы ни было множество кардинальных чисел, всегда можно найти кардинальное число, большее, чем все числа данного множества, и, следовательно, не входящее в него, т. е. ни одно такое множество не содержит все кардинальные числа и „множество всех кардинальных чисел“ немыслимо. Таким образом, мы столкнулись с тем обстоятельством, что требование собрать все вещи некоторого определённого

типа не всегда осуществимо: когда нам кажется, что мы их имеем все налицо, всё же они не все исчерпаны. Тревога, внушаемая этой антиномией, коренится не в том, что мы натолкнулись на противоречие, а в том, что этого противоречия мы не ожидали: множество всех кардинальных чисел кажется a priori столь же неоспоримым, как и множество [всех] натуральных чисел. Отсюда возникает сомнение, нет ли других таких же противоречивых „мнимых множеств“ и даже не таковы ли вообще все бесконечные множества, и затем возникает потребность устранить это сомнение, т. е. построить теорию множеств на новой (аксиоматической) основе так, чтобы противоречия были исключены. В этой книге мы не можем вдаваться в начатые Э. Цермело в этом направлении

исследования, сулящие верный успех, и остаёмся при нашем „наивном“ понятии множества.»

Страницы 75–78.

«§ 15. Алефы

Все кардинальные числа могут быть рассматриваемы как мощности вполне упорядоченных множеств (теорема Цермело (Zermelo)) и потому сравнимы между собой. Классом порядковых чисел Z(a) называется множество всех порядковых чисел α, имеющих мощность a; Z(a) есть подмножество соответствующего класса типов T(a) (стр. 51). При конечном n = 0, 1, 2, ... [класс] Z(n) состоит из одного только порядкового числа n; нам уже теперь известно бесконечное множество представителей класса Z($\aleph_0$):

$$\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots , \omega 2, \dots , \omega 3, \dots , \omega^2, \dots , \omega^3, \dots , \omega^\omega, \dots .$$

Если a < b и α, β суть порядковые ч<u>и</u>сла классов Z(a), Z(b), то α < β.

I. <u>Любое множество кардинальных чисел, расположенное по величине этих чисел, вполне упорядочено</u>.

В с<u>а</u>мом деле, ставя в соответствие каждому кардинальному числу какой-нибудь представитель соответствующего класса порядковых чисел, мы подобно отобразим наше множество кардинальных чисел на множество порядковых чисел, откуда и следует вполне упорядоченность (§ 13, IV).

II. <u>Для каждого множества кардинальных чисел существуют числа, большие всех чисел этого множества, в частности первое большее число</u>.

Первое утверждение нам уже известно из § 7, второе следует из I; действительно, раз существует мощность a > R (R – рассматриваемое множество кардинальных чисел), то или a есть наименьшее число, обладающее этим свойством, или же во вполне упорядоченном множестве кардинальных чисел, которые > R и < a, существует наименьшее. (Мы не сказали, что существует наименьшее число во множестве кардинальных чисел > R, так как это множество немыслимо так же, как множество всех кардинальных чисел.)

Нетрудно видеть, что первое кардинальное число b, большее числа a, получается следующим образом: ищется порядковое число, непосредственно следующее за классом Z(a): мощность этого числа и есть b. Вопрос о том, не

является ли $2^a > a$ первым кардинальным числом, бо́льшим a, не решён до сих пор ни для одной бесконечной мощности a; при $a = \aleph_0$ этот вопрос составляет континуум-проблему (стр. 41).

Бесконечные кардинальные чи́сла ($\geq \aleph_0$) называются алефами. Первое из них есть $\aleph_0$, мощность множества [всех] натуральных чисел; следующее обозначается $\aleph_1$, следующее за ним – $\aleph_2$ и т. д., наименьшее, превосходящее все $\aleph_\nu$ с конечным индексом ν, обозначается $\aleph_\omega$, следующее за ним $\aleph_{\omega+1}$ и т. д. Таким образом, каждый алеф $\aleph_\alpha$ имеет своим индексом α тип множества всех предшествующих ему алефов.

Например, мощность континуума $\aleph > \aleph_0$, следовательно, $\aleph \geq \aleph_1$; вопрос о том, имеет ли тут место знак равенства или неравенства, есть континуум-проблема.

Наименьшее порядковое число класса $Z(\aleph_\alpha)$ называется начальным числом этого класса и обозначается ω_α. $\omega_0 = \omega$ есть наименьшее из начальных чисел, за ним следует ω_1, ω_2, ... , ω_ω, $\omega_{\omega+1}$, ...; каждое начальное число ω_α имеет индексом тип множества всех предшествующих начальных чисел.

Таким образом, множество чисел μ ($\omega_\alpha \leq \mu < \omega_{\alpha+1}$)

$$Z(\aleph_\alpha) = W(\omega_{\alpha+1}) - W(\omega_\alpha),$$

или, подразумевая под знаком + сложение упорядоченных множеств:

$$W(\omega_{\alpha+1}) = W(\omega_\alpha) + Z(\aleph_\alpha), (1)$$

$$W(\omega_\alpha) = W(\omega_0) + \Sigma_{\xi<\alpha} Z(\aleph_\alpha), (2)$$

где при $\alpha = 0$ последнюю сумму надо положить равной нулю, а $W(\alpha)$, как и раньше, обозначает множество порядковых чисел $< \alpha$. $W(\omega_0) = W(\omega)$ есть сумма конечных классов порядковых чисел $Z(0)$, $Z(1)$, ...; однако часто (по Кантору) $W(\omega)$ называется первым, $Z(\aleph_0)$ – вторым, а $Z(\aleph_1)$ – третьим классом порядковых чисел.

По формуле (4) § 14 каждое порядковое число представимо в виде $\omega\mu + \nu$ ($\nu < \omega$, т. е. конечное число); в частности, предельное число имеет вид $\lambda = \omega\mu$. Так что для его мощности имеем:

$$L = \aleph_0 m,\ \aleph_0 L = \aleph_0^2 m = \aleph_0 m = L.$$

Так как каждое начальное число, очевидно, есть число предельное (бесконечная мощность не может быть

изменена присоединением одного элемента), то для каждого алефа $\aleph_\alpha$

$$\aleph_0\aleph_\alpha = \aleph_\alpha,$$

откуда по теореме эквивалентности

$$2\aleph_\alpha = \aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha,$$

$$r + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \text{ при } r < \aleph_\alpha.$$

Если $r < \aleph_\alpha$, $h < \aleph_\alpha$, то и $r + h < \aleph_\alpha$; действительно, допустим, что $r \leq h$ и что $h = \aleph_\eta$, причём $\eta < \alpha$ (если η конечно – доказывать нечего); тогда

$$r + h = r + \aleph_\eta = \aleph_\eta < \aleph_\alpha.$$

Далее отсюда выводим, что при любом разбиении $W(\omega_\alpha) = P + Q$ остаток Q имеет также тип ω_α, так как в противном случае в равенстве $\omega_\alpha = \xi + \eta$ (ξ – тип P, η – тип Q, r, h –

мощности P и Q, так что $\aleph_\alpha = r + h$) мы бы имели, что и r и h меньше $\aleph_\alpha$. Таким образом, из (1) следует:

$Z(\aleph_\alpha)$ имеет тип $\omega_{\alpha+1}$ и мощность $\aleph_{\alpha+1}$. (3)

Например, $Z(\aleph_0)$ имеет мощность $\aleph_1$, в то время как соответствующий класс типов $T(\aleph_0)$ имеет мощность континуума (стр. 52), что снова приводит к неравенству $\aleph \geq \aleph_1$ и иллюстрирует ещё раз континуум-проблему. В силу (2)

$$\omega_\alpha = \omega_0 + \Sigma_{\xi<\alpha}\, \omega_{\xi+1} = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{\xi+1} + \ldots,$$

$$\aleph_\alpha = \aleph_0 + \Sigma_{\xi<\alpha}\, \aleph_{\xi+1} = \aleph_0 + \aleph_1 + \aleph_2 + \ldots + \aleph_{\xi+1} + \ldots .$$

Например,

$$\aleph_\omega = \aleph_0 + \aleph_1 + \aleph_2 + \ldots;$$

$\aleph_\omega$ в противоположность $\aleph$ (стр. 36 и 40) удовлетворяет неравенству

$$\aleph_\omega < \aleph_\omega \hat{}\, \aleph_0.$$

Каждая степень с конечным показателем любого алефа равняется этому самому алефу, как это следует из равенства

$$\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha. \quad (4)$$

Для доказательства равенства (4) упорядочим пары (ξ, η), $(\xi < \omega_\alpha, \eta < \omega_\alpha)$, образующие множество мощности $\aleph_\alpha^2$, по возрастанию натуральной суммы (с. 73) $\sigma(\xi, \eta) = \zeta$; тогда (если $\omega^y z = \omega^y(x + y)$ – старший член ζ и если, скажем, $x > 0$, то $\xi = \omega^y x + ... < \omega_\alpha$, следовательно, $\omega^y < \omega_\alpha$ и каждое кратное ω^y также $< \omega_\alpha$, следовательно, $\zeta < \omega^y(z + 1) < \omega_\alpha$) $\zeta < \omega_\alpha$, и так как каждому ζ соответствует только конечное число пар (ξ, η), то мы получаем множество мощности $\leq \aleph_0\aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. Итак,

$$\aleph_\alpha = \aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha^3 = ...$$

Мы знаем, что по отношению к показателю $\aleph_0$ алефы распадаются на две категории: такие, что $\aleph_\alpha$^$\aleph_0 > \aleph_\alpha$ (например $\aleph_0$, $\aleph_\omega$), и такие, что $\aleph_\alpha$^$\aleph_0 = \aleph_\alpha$ (таковы все алефы вида a^$\aleph_0$, например 2^$\aleph_0 = \aleph$). Вопрос о том, к какой категории принадлежит $\aleph_1$, т. е., какой знак имеет место в $\aleph_1$^$\aleph_0 \geq \aleph_1$, есть снова континуум-проблема, так как $\aleph_1$^$\aleph_0 = \aleph$ (из $2 < \aleph_1 \leq \aleph$ следует

$$2\text{^}\aleph_0 \leq \aleph_1\text{^}\aleph_0 \leq \aleph\text{^}\aleph_0 = 2\text{^}\aleph_0).$$

Из (4) следует:

III. Сумма порядковых чисел $< \omega_{\alpha+1}$, в которой множество слагаемых имеет тип $< \omega_{\alpha+1}$, сама $< \omega_{\alpha+1}$.

Пусть, в самом деле,

$$\sigma = \Sigma_\eta\, \alpha_\eta = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\eta + \ldots\ (\eta < \beta;\ \beta < \omega_{\alpha+1},\ \alpha_\eta < \omega_{\alpha+1}).$$

Каждое слагаемое имеет мощность $< \aleph_{\alpha+1}$, т. е. $\leq \aleph_\sigma$, то же относится и к β, следовательно, σ имеет мощность $\leq \aleph_\alpha\aleph_\alpha = \aleph_\alpha < \aleph_{\alpha+1}$.

Этому предложению можно придать другую форму:

IV. Если дано множество порядковых чисел $< \omega_{\alpha+1}$, имеющее тип $< \omega_{\alpha+1}$, то ближайшее следующее за этим множеством число также $< \omega_{\alpha+1}$.

Действительно, если $W = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\eta, \dots\}$ имеет тип β ($\eta < \beta$, $\alpha_\eta < \omega_{\alpha+1}$), то, полагая

$$\sigma = \Sigma_\eta\ \alpha_\eta = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\eta + \dots,$$

получим $W < \sigma + 1 < \omega_{\alpha+1}$, так что наименьшее число, большее W, во всяком случае меньше $\omega_{\alpha+1}$.

Эти теоремы выясняют объём числового отрезка $W(\omega_{\alpha+1})$ или класса порядковых чисел $Z(\aleph_\alpha)$. Например, если число

α принадлежит к $Z(\aleph_0)$, то и следующее за ним $\alpha + 1$ также принадлежит $Z(\aleph_0)$; если все чисел последовательности $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ принадлежит к этому классу, то к нему же принадлежит и предельное число этой последовательности; к классу $Z(\aleph_1)$ принадлежит число, следующее за каждым числом этого класса, предельное число каждой ω-последовательности, а также и предел ω_1-последовательности

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_\omega < \alpha_{\omega+1} < \ldots$$

чисел этого класса.

В применении к начальным числам, индекс которых есть предельное число, теоремы III и IV могут быть неверны; например к $W(\omega_\omega)$ принадлежат числа ω_0, ω_1, ω_2, ..., но не предельное число ω_ω этой последовательности. Начальные

числа, для которых справедлива теорема IV, называются регулярными, так же как и соответствующие им мощности; к ним относятся $\omega_0 = \omega$ и числа вида $\omega_{\alpha+1}$. Регулярных начальных чисел, имеющих индексом предельное число, до сих пор не найдено; они должны быть ошеломляюще велики.»

Страница 101.

«§ 21. Общие топологические пространства

1. Операция замыкания. Мы скажем, что в множестве R установлена операция замыкания, если каждому подмножеству M ⊆ R поставлено в соответствие некоторое подмножество [M] ⊆ R. Множество [M] называется замыканием множества M. Множество R, в котором установлена операция замыкания, называется общим

топологическим пространством, его элементы – точками пространства R; подмножества пространства R мы будем называть точечными множествами или, ещё чаще, просто множествами. Точки множества [M] называются точками прикосновения множества M.

Следует отметить, что если в одном и том же множестве установлены две разные операции замыкания, то мы имеем два разных топологических пространства.

Примеры.»

Страница 102.

«4) Пусть R – произвольное бесконечное множество; положим для любого непустого множества M: [M] = R, [∅] = ∅.

5) Пусть R – то же множество, что в 4); положим [M] = R, если M бесконечно, [M] = M, если M конечно, [∅] = ∅.
6) Для того же R, что в 4), 5), положим [M] = R \ M.
В последних трёх примерах одно и то же множество R мы обращали в разные общие топологические пространства. Лишь очень редко общее топологическое пространство определяется непосредственным заданием для любого множества M его замыкания [M], как это было в примерах 4), 5), 6). Чаще операция замыкания определяется с помощью вспомогательных конструкций. В этой книге такими конструкциями будут введение <u>метрики</u> и введение <u>окрестностей</u>. Как эти понятия служат для определения общего топологического пространства, будет выяснено ниже.

2. Метрика. По определению в множестве R установлена общая метрика, если каждой паре элементов x, y отнесено неотрицательное число ρ(x, y), называемое расстоянием от x до y. Метрика называется собственной, если расстояние ρ(x, y) удовлетворяет следующим условиям, называемым аксиомами метрического пространства:

1) (Аксиома тождества) ρ(x, y) = 0 тогда и только тогда, когда x = y.

2) (Аксиома симметрии) ρ(x, y) = ρ(y, x).

3) (Аксиома треугольника) ρ(x, y) + ρ(y, z) ≥ ρ(x, z).

Множество R с установленной в нём общей метрикой называется общим метрическим пространством; в частности, если метрика собственная, R называется метрическим пространством. Элементы пространства R

будем называть точками пространства. Если даны два множества A ⊃ ∅ и B ⊃ ∅ общего метрического пространства, то число inf ρ(a, b) (a ∈ A, b ∈ B) называется расстоянием от множества A до множества B и обозначается ρ(A, B). Очевидно, в метрическом пространстве ρ(A, B) = ρ(B, A), так что можно говорить просто о расстоянии между A и B.»

Страница 103.

«Множество R, в котором введена общая метрика ρ(x, y), может быть обращено в общее топологическое пространство, если установить операцию замыкания при помощи следующего условия; x ∈ [M] тогда и только тогда, когда ρ(x, M) = 0. Если, наоборот, дано общее топологическое пространство R и если некоторая метрика

ρ(x, y), установленная в R, определяет ту самую операцию замыкания, которая была установлена в R a priori, говорят, что общее топологическое пространство R обладает метрикой ρ(x, y) или, ещё, что ρ(x, y) есть метрика этого общего топологического пространства. Общее топологическое пространство, обладающее хотя бы одной собственной метрикой, называется метризуемым.
Две различные метрики ρ(x, y) и ρ′(x, y), установленные в множестве R, называются топологически равносильными, если они устанавливают в R одну и ту же операцию замыкания. Очевидно, для топологической равносильности необходимо и достаточно, чтобы равенство ρ(x, M) = 0 влекло равенство ρ′(x, M) = 0, и наоборот.»
Страница 104.

«3. Окрестностные пространства. Множество R называется окрестностным пространством, если в R выделена некоторая система подмножеств {U} и если каждому элементу x ∈ R поставлены в соответствие некоторые из множеств системы {U}, называемые окрестностями элемента x; при этом требуется только, чтобы каждому элементу x была отнесена хотя бы одна окрестность.»

Страница 105.

«Окрестностное пространство R обращается в общее топологическое пространство, если определить точки прикосновения и тем самым операцию замыкания следующим образом: точка x пространства R называется точкой прикосновения множества M тогда и только тогда,

когда каждая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества M.»

Страница 110.

«§ 22. Топологические пространства

1. Определение топологического пространства. Общее топологическое пространство R называется просто топологическим, если операция замыкания, его определяющая, удовлетворяет следующим аксиомам:

I. [A + B] = [A] + [B],

II. A ⊆ [A],

III. [[A]] ⊆ [A],

IV. [∅] = ∅ (замыкание пустого множества есть пустое множество).

Так как согласно аксиоме II $[A] \subseteq [[A]]$, то аксиома III может быть ещё высказана так:

III′. $[[A]] = [A]$.

Читатель может проверить, что все примеры общих топологических пространств, приведённые в § 21, п. 1, кроме 6), суть топологические пространства.»

Страницы 111–113.

«2. Замкнутые и открытые множества. Мы предполагаем, что нам дано топологическое пространство R. Множество $F \subseteq R$ называется замкнутым, если оно содержит все свои точки прикосновения ($F \supseteq [F]$).

Согласно аксиоме II множество F замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием: $F = [F]$.

Множество G называется открытым, если его дополнение R \ G есть замкнутое множество. Таким образом, дополнение замкнутого множества открыто, дополнение открытого – замкнуто.

С помощью этих определений аксиомы III, IV можно высказать в следующей форме:

III′. Замыкание любого множества есть замкнутое множество.

IV′. Пространство R открыто.

Так как замыкание любого множества (в том числе и самого пространства R) замкнуто, то пространство R замкнуто. Таким образом:

II. Всё пространство и пустое множество суть одновременно замкнутые и открытые множества.

III. Из A ⊆ B следует [A] ⊆ [B].

IV. Сумма конечного числа и пересечение любого множества замкнутых множеств суть замкнутые множества...

IV′. Пересечение конечного числа и сумма любого множества открытых множеств суть открытые множества.

V. Если множество G открыто и пересечение MG = ∅, то пересечение [M]G = ∅.

Ибо из MG = ∅, M ⊆ R \ G следуют [M] ⊆ [R \ G] = R \ G, [M]G ⊆ (R \ G) ∩ G = ∅.

Отметим, что в доказательствах теорем II–V не используется аксиома III.

3. Задание замыканий с помощью замкнутых множеств. Пусть нам дана система {A} замкнутых подмножеств

множества R и некоторое множество $M \subset R$. Замкнутое множество $A_1 \in \{A\}$, $A_1 \supseteq M$ называется минимальным содержащим множество M замкнутым множеством системы $\{A\}$, если в системе $\{A\}$ не существует замкнутого множества A_2 такого, что $M \subseteq A_2 \subset A_1$. Для системы всех замкнутых множеств топологического пространства R имеем:

VI. Замыкание [M] множества M есть минимальное замкнутое множество, содержащее M...

Отсюда следует, что нам известны замыкания всех множеств $M \subset R$, если известно, какие множества в топологическом пространстве R замкнуты. Но мы видели, что система $\{F\}$ всех замкнутых множеств топологического пространства R удовлетворяет условиям:

α) Сумма конечного числа и пересечение любого числа множеств системы {F} принадлежат системе {F}.

β) Пустое множество и всё топологическое пространство R принадлежат системе {F}.

Отсюда следует, что в VI содержится вторая половина следующего утверждения:

VII. Если в множестве R указана система {F} замкнутых множеств, удовлетворяющая условиям α), β), и если замыкание [M] произвольного множества M ⊆ R по определению есть минимальное множество системы {F}, содержащее множество M, то множество R есть топологическое пространство, и система замкнутых множеств этого топологического пространства может быть получена указанным выше образом. В силу второй части

условия α) это минимальное множество единственно: это есть пересечение всех F $\supseteq$ M...

4. Задание топологических пространств с помощью окрестностей. По определению всякое открытое множество, содержащее точку x $\in$ R, называется абсолютной окрестностью точки x топологического пространства R.

Чтобы оправдать это определение, надо показать, что построенная таким образом система окрестностей действительно есть система окрестностей топологического пространства R (§ 21, п. 3). Другими словами, надо доказать теорему:

VIII. Точка x $\in$ [M] тогда и только тогда, когда каждая абсолютная окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества M...

Следствие. Любое топологическое пространство может быть рассматриваемо как окрестностное пространство.

Система всех открытых множеств топологического пространства R называется абсолютной системой окрестностей пространства R.

Из критерия равносильности (§ 21, п. 3, 1) следует, что система окрестностей {U(x)}, введённая в топологическом пространстве R, определяет топологическое пространство R в том и только в том случае, если каждое открытое множество, содержащее точку x, содержит некоторую окрестность U(x) системы и если каждая окрестность U(x) системы содержит хотя бы одно открытое множество. Последнее требование выполняется само собой, если система {U(x)} состоит из открытых множеств; первое же

условие может быть перефразировано так: каждое открытое множество есть сумма некоторых множеств системы {U(x)}.

Это приводит к следующей теореме:

IX. Пусть в топологическом пространстве R задана некоторая система открытых множеств {U}; пусть каждое множество системы {U} отнесено в качестве окрестности каждой входящей в него точке. Полученная таким образом система окрестностей определяет топологическое пространство R тогда и только тогда, когда каждое открытое множество может быть представлено как сумма некоторых множеств системы {U}.

Понятия открытого и замкнутого множеств имеют смысл и в общих топологических пространствах: множество F

замкнуто, если $F \supseteq [F]$; множество G открыто, если множество $F = R \setminus G$ замкнуто.

Система {U} открытых множеств общего топологического пространства R называется базой этого пространства, если каждое открытое множество $G \subseteq R$ есть сумма множеств системы {U}.

X. Окрестностное пространство является топологическим в том и только в том случае, если оно обладает базой {U}, обладающей следующими свойствами:

A) Каждая точка x обладает хотя бы одной окрестностью и каждая окрестность точки x содержит точку x.

B) Пересечение двух окрестностей точки x содержит третью окрестность точки x.

C) Если точка y $\in$ U(x), то существует окрестность точки y, входящая в U(x).»

Страница 114–115.

«Таким образом, мы во второй раз доказали, что всякое метрическое пространство есть пространство топологическое.

5. Задание топологических пространств с помощью открытых множеств. Пусть в множестве R выделены некоторые подмножества, которые названы „открытыми“ и про которые мы предполагаем, что выполнены следующие требования:

α') Пересечение конечного числа и сумма любого множества „открытых“ множеств есть „открытое“ множество.

β′) Пустое множество и R – „открытые“ множества.

Введём в множестве R систему окрестностей, называя окрестностью элемента x любое его содержащее „открытое“ множество. Нетрудно видеть, что эта система окрестностей удовлетворяет условиям A), B), C) и определяет, следовательно, топологическое пространство и что система открытых множеств этого последнего совпадает с системой a priori выделенных в множестве R „открытых“ множеств. Обратно, любое топологическое пространство может быть определено таким образом, как это следует из п. 2, II, IV и п. 4, IX. Итак, все топологические и только топологические пространства могут быть получены указанным способом.

§ 23. Множества в топологических пространствах

1. Внутренние и граничные точки. Пусть нам даны топологическое пространство R и в нём множество M. Сумма всех открытых множеств $\subseteq$ M называется открытым ядром множества M и обозначается M_i; точки множества $M_r = M \setminus M_i$ называются краевыми точками, точки множества M_i – внутренними точками множества M, $M = M_i + M_r$.

Множество M_i есть максимальное открытое множество $\subseteq$ M, т. е. нет такого открытого множества G, что $M_i \subset G \subseteq M$; $M = M_i$ ($M_r = \emptyset$) тогда и только тогда, когда множество M открыто. Множество M, для которого $M = M_r$ ($M_i = \emptyset$), называется краем. Множество M_r краевых точек всегда есть край. Сумма $M_r + (R \setminus M)_r$ называется границей множества M и обозначается M_g. Граница G_g открытого

множества G совпадает с $(R \setminus G)_r$, следовательно, есть край. В силу того, что множества M и $R \setminus M$ входят симметрично в определение границы, они имеют одну и ту же границу:

$$M_g = (R \setminus M)_g,\ M_g = R \setminus (M_i + (R \setminus M)_i),$$

откуда следует (§ 22, п. 2), что граница есть множество <u>замкнутое</u>...

Если нам дано любое (конечное или бесконечное) число множеств A, B, ... и если

$$S = A + B + ...,$$

$$D = AB...,$$

то

$$D_i \subseteq A_iB_i...,$$

$$S_i \supseteq A_i + B_i + ...$$

(последнее по IV′, п. 2, § 22). Для конечного числа множеств, например для двух, $D_i = A_iB_i$, ибо A_iB_i есть открытое множество $\subseteq AB = D$, так что $D_i \supseteq A_iB_i$.

2. Плотность. Множество A по определению плотно по отношению к множеству B, если для множества A его замыкание $[A] \supseteq B$. Неравенство $[A] \supseteq B$ равносильно неравенству $[A] \supseteq [B]$. Два множества A, B относятся к одному классу плотности, если множество A плотно по отношению к множеству B ($[A] \supseteq [B]$) и множество B плотно по отношению к множеству A ($[B] \supseteq [A]$), т. е. если мы имеем $[A] = [B]$. В каждом таком классе есть одно замкнутое множество F ($F = [A] = [B] = ...$), максимальное множество данного класса.

Если множество A ⊆ B и плотно по отношению к множеству B, говорят, что множество A плотно в множестве B. Очевидно, что всякое множество A плотно в множестве A. Вместо того, чтобы говорить, что множество A плотно в пространстве R, говорят иногда, что множество A всюду плотно. Все всюду плотные множества пространства R принадлежат к одному классу плотности (характеризуемому тем, что [A] = [B] = ... = R). Очевидно, что множество A плотно в пространстве R тогда и только тогда, когда AG ≠ ∅, каково бы ни было открытое непустое множество G ⊆ R. Отсюда следует, что пересечение конечного числа открытых плотных в пространстве R множеств плотно в пространстве R. Достаточно ограничиться случаем двух множеств G_1, G_2: каково бы ни

было открытое множество $U \subseteq R$, UG_1 есть непустое открытое множество, которое, следовательно, имеет непустое пересечение с G_2, т. е. содержит точку $y \in G_2$, и тогда $y \in G_1G_2$.»

Страницы 116–117.

«Отметим, что не всякое пространство содержит счётное всюду плотное множество. Так, любое несчётное множество R может быть обращено в метрическое пространство, если положить $\rho(x, y) = 1$, каковы бы ни были $x, y \in R$. В полученном пространстве нет счётного всюду плотного множества, так как каждая точка $x \in R$ есть открытое множество.

Свойству быть плотным в пространстве R (или в множестве M) противопоставляется свойство быть нигде не

плотным в пространстве R (в множестве M). Замкнутое множество F нигде не плотно в пространстве R, если дополнение G множества F плотно в пространстве R, т. е. если [G] = [R \ F] = R, F_i = ∅; таким образом, множество F замкнуто и нигде не плотно только тогда, когда оно есть замкнутый край. Можно также сказать, что замкнутые нигде не плотные множества совпадают с границами открытых множеств. Ибо если множество F = F_r нигде не плотно в пространстве R, то множество F есть граница своего дополнения G = R \ F, и если G есть произвольное открытое множество, то его граница F_r есть замкнутый край.

Обычные кривые в R^2, кривые и поверхности в R^3 и т. п. нигде не плотны. Точнее, если f(x_1, x_2) есть действительная

непрерывная функция такая, что не существует открытого множества G, во всех точках которого $f(x_1, x_2)$ обращается в нуль (таковы, например, полиномы, не все коэффициенты которых равны нулю), то уравнение $f(x_1, x_2) = 0$ определяет нигде не плотное множество; действительно, это множество замкнуто и не имеет внутренних точек.

Произвольное множество $A \subset R$ называется нигде не плотным в пространстве R, если замыкание [A] нигде не плотно в пространстве R, т. е. если множество $R \setminus [A] = G$ плотно в R.

Если M есть произвольное множество $\subset R$, то множество $A \subset M$ нигде не плотно в множестве M, если

$$[M \setminus [A]M] = [M],$$

т. е. каждая точка множества M есть точка прикосновения множества

$$M \setminus [A]M = (R \setminus [A])M.$$

Так, множество [всех] целых чисел нигде не плотно в множестве [всех] рациональных чисел.

I. Если множество A нигде не плотно в множестве M, то множество A нигде не плотно во всяком множестве

$$M^* \supset M...$$

II. Если множество A нигде не плотно в множестве M, то всякое множество $A^* \subset A$ нигде не плотно в множестве M...

III. Сумма конечного числа нигде не плотных в множестве M множеств нигде не плотна в множестве M...

IV. Если множество A нигде не плотно в множестве M, A ⊂ G ⊂ M, G – открытое множество, то множество A нигде не плотно в множестве G...

3. Относительные и абсолютные понятия. Всякое множество M общего топологического пространства R может быть обращено в общее топологическое пространство M(R), если каждому подмножеству A ⊂ M отнести в качестве его замыкания [A](M) пересечение M[A] множества M и замыкания [A] множества A в пространстве R. Пространство M(R) зависит от пространства R в том смысле, что если пространство R* ⊃ M отлично от пространства R, то, вообще говоря, пространства M(R) и M(R*) – разные топологические пространства. M(R) называется подпространством пространства R, или

относительным пространством. В большинстве наших дальнейших рассуждений пространство R может считаться одним и тем же, так что мы можем обозначать пространство M(R) просто через M.

Если ρ(x, y) есть метрика пространства R, то множество M пространства R есть также метрическое пространство [расстояние ρ(x, y) установлено для всякой пары точек, в том числе и для пары точек, принадлежащих M], – и определённое этой метрикой метризуемое пространство совпадает с пространством M(R); это непосредственно следует из того, как определяются замыкания в метрических пространствах. Таким образом, подпространство метризуемого пространства метризуемо.»

Страница 118.

«Если R есть окрестностное пространство, {U(x)} – определяющая его система окрестностей, то окрестностью точки $x \in M$ в множестве M называют множество вида $U_M(x) = MU(x)$. Операция замыкания, установленная системой окрестностей $\{U_M(x)\}$, та же, что в пространстве M(R): подпространство окрестностного пространства есть окрестностное пространство. Если система окрестностей {U(x)} удовлетворяет условиям X, § 22, п. 4, то эти условия выполнены и для системы окрестностей $\{U_M(x)\}$: подпространство топологического пространства есть топологическое пространство.

Свойство общего топологического пространства называется когрэдиентным, если из того, что оно выполняется в пространстве R, следует, что оно

выполняется в любом подпространстве $\subseteq$ R. Свойства быть топологическим (и метризуемым) пространством – когрэдиентны.

Замкнутые (открытые) множества пространства M(R) называются иначе замкнутыми (открытыми) в множестве M множествами. В приводимых ниже рассуждениях предполагается, что множество M есть подпространство топологического пространства R.

Множество A замкнуто в множестве M тогда и только тогда, когда множество A есть пересечение множества M с замкнутым в пространстве R множеством...

Точно так же в множестве M открыты те и только те множества, которые суть пересечения открытых в пространстве R множеств с множеством M.

4. Связность. Разложение

$$M = M_1 + M_2 = MF_1 + MF_2 \quad (1)$$

множества M на два непересекающихся замкнутых в множестве M множества называется разбиением, если оба слагаемых $\supset \emptyset$. Множество M $\supset \emptyset$ называется связным, если оно не может быть разбито. В частности, замкнутое множество $\supset \emptyset$ связно, если оно не может быть разложено на два непересекающихся замкнутых множества $\supset \emptyset$. Множества M_1, M_2 (если они производят разбиение) не только замкнуты в множестве M, но и открыты в множестве M. Поэтому открытое множество $\supset \emptyset$ связно, если оно не может быть представлено как сумма двух открытых множеств $\supset \emptyset$. Связное открытое множество называется областью. Связное пространство не может быть

разложено на сумму двух непустых замкнутых (открытых) множеств.»

Страницы 119–120.

«Чтобы доказать, что множество M ⊃ ∅ связно, надо показать, что при разложении (1) одно из слагаемых пусто. При этом полезно иметь в виду, что разложение (1) приводит к такому же разложению всякого подмножества A ⊂ M:

$$A = A_1 + A_2 = AM_1 + AM_2 = AF_1 + AF_2.$$

I. Если любые две точки множества M могут быть соединены в множестве M, т. е. если любые две точки множества M принадлежат связному подмножеству множества M, то множество M связно...

II. Сумма двух связных множеств, пересечение которых не пусто, связна...

До некоторой степени обратным II является:

III. Два непустых замкнутых множества связны, если связны их сумма и пересечение...

Конечное число расположенных в определённом порядке множеств A, B, C, ... образует цепочку, если каждые два соседних множества имеют общие точки ($AB \supset \emptyset$, $BC \supset \emptyset$, ...). Если множества цепочки связны, то по II связны A + B, (A + B) + C, ...

IV. Сумма любого (конечного или бесконечного) числа связных множеств связна, если любые два слагаемых принадлежат некоторой цепочке, составленной из слагаемых. В частности, сумма связных множеств связна, если любые два слагаемых имеют общие точки.

Максимальное связное подмножество множества M (т. е. не содержащееся ни в каком [строго большем] связном подмножестве множества M) называется компонентой множества M. Мы получаем компоненту, если образуем множество M(x) всех точек множества M, которые могут быть соединены с некоторой точкой x ∈ M, или, иначе, сумму всех содержащих точку x связных подмножеств множества M (эта сумма связна по IV). Компонента M(x) может сводиться к одной точке x. Две компоненты M(x), M(y) по II либо совпадают, либо не пересекаются. Таким образом, мы получаем разложение множества M на компоненты:

$$M = M(x) + M(y) + ..., (2)$$

причём может быть только одна компонента (если М связно) или [большее единицы] конечное или бесконечное число компонент.

Примеры. Гипербола состоит из двух компонент. В множестве всех иррациональных чисел числовой прямой все точки суть компоненты.

Множество, все компоненты которого суть точки, называется вполне несвязным, а множество, не содержащее бесконечных замкнутых связных подмножеств, – всюду разрывным. Первое требование сильнее (примеры см. § 32, § 38, 5).

V. Если множество М связно, то связно и всякое множество N, содержащее множество М и входящее в замыкание [М] множества М.

Разложению

$$N = N_1 + N_2$$

на <u>замкнутые</u> в множестве N множества соответствует разложение

$$M = M_1 + M_2$$

на <u>замкнутые</u> в множестве M множества; пусть, скажем, $M_2 = \varnothing$, $M_1 = M$, $M \subseteq N_1 \subseteq [M]$, $[N_1] = [M]$, и по замкнутости N_1 в N:

$$N_1 = N[N_1] = N[M] = N, N_2 = \varnothing.$$

VI. <u>Компоненты множества</u> M <u>замкнуты в множестве</u> M. Пусть P – компонента множества M; так как $P \subseteq M[P] \subseteq [P]$, то по V множество M[P] связно, а по максимальности P: M[P] = P.

VII. Связное множество C, соединяющее две точки a, b двух дополнительных множеств A, B (A + B = R), пересекает границу этих множеств.

Ибо если бы $CA_g = C(A_r + B_r) = \emptyset$, то имели бы $C = CA_i + CB_i$; это есть разбиение множества C, ибо CA_i и CB_i оба открыты (замкнуты) в множестве C.»

Страница 124.

«§ 25. Аксиомы отделимости

1. Первая аксиома отделимости и предельные точки. В этом параграфе под окрестностью точки x топологического пространства R понимается всегда абсолютная окрестность, а под окрестностью множества $M \subset R$ – любое такое открытое множество G, что $M \subseteq G \subseteq R$.

Точка x называется предельной точкой множества M ⊂ R, если любая окрестность U(x) точки x содержит точку множества M, отличную от точки x.»

Страница 125.

«Все предельные точки множества M образуют производное множество множества M, обозначаемое M′...

Множество M замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.

Понятие предельной точки имеет наглядное содержание только в топологических пространствах, в которых имеет место:

IV_1. (Первая аксиома отделимости.) Для любых двух точек x, y пространства R существует окрестность U(x) точки x, не содержащая точку y. (По симметрии точек x и y существует и окрестность U(y) точки y, не содержащая точку x).

Топологическое пространство мы будем называть T_1-пространством, если оно удовлетворяет этой аксиоме. Из критерия равносильности (§ 21, п. 3) следует, что в T_1-пространстве R свойством IV_1 обладает любая определяющая пространство R система окрестностей. Теорема I, показывающая, что термин „предельная точка“ соответствует нашим интуитивным представлениям, так же как и всё сказанное в этом пункте, относится к T_1-пространствам.

I. Если x – предельная точка множества M, то каждая её окрестность содержит бесконечно много точек множества M. Конечное множество не имеет предельных точек...

II. Производное множество замкнуто.

Если $x \in M'' = (M')'$, то во всякой окрестности $U(x)$ точки x существует точка $y \in M'$, $y \neq x$; по IV_1 существует окрестность $U(y)$ точки y, $x \notin U(y)$ и по определению предельной точки в окрестности точки y $V(y) = U(x)U(y)$ существует точка $z \in M$; итак, всякая окрестность $U(x)$ точки x содержит точку $z \in M \setminus \{x\}$, что и требовалось доказать.»

Страница 126.

«Множество MM' обозначим через M_h, множество $M \setminus M_h$ – через M_j. Точки множества M_j называются <u>изолированными</u> точками множества M; множество M называется <u>изолированным</u>, если $M_h = \emptyset$, $M_j = M$, и <u>плотным в себе</u>, если $M_j = \emptyset$, $M_h = M$...

Множество M_j всегда изолировано ($M_j{}'M_j = \emptyset$), ибо предельная точка x множества M_j предельна и для множества M, следовательно, $x \notin M_j$.

Множество M_h может содержать изолированные точки (конечно, не являющиеся изолированными точками множества M); так, для множества $M = \{1, 1/2, 1/3, ... , 0\}$ множество M_h состоит из единственной точки 0, следовательно, изолировано...

То обстоятельство, что множество M плотно в себе, может быть записано так:

$$M \subseteq M',$$

что множество M замкнуто, так:

$$M \supseteq M'.$$

Если имеет место и то и другое, т. е если M = M′, то множество M называется совершенным.

Множество M

плотно в себе, если [M] = M′,

замкнуто, если [M] = M,

совершенно, если [M] = M′ = M...

Конечные множества, как не имеющие вовсе предельных точек, замкнуты. Что это не так в топологических пространствах, не являющихся T_1-пространствами, показывает пример 4) п. I § 21.

Производное множество множества M и производное множество его замыкания [M] совпадают:

$$[M]' = M'..., (1)$$

ибо если $x \in [M]'$, то каждая окрестность $U(x)$ точки x содержит точку $y \in [M] \setminus \{x\}$; существует, далее, окрестность точки y $U(y) \subset U(x)$ и не содержащая точку x; окрестность $U(y)$ точки y содержит точку $z \in M$; следовательно, каждая окрестность $U(x)$ точки x содержит точку $z \in M \setminus \{x\}$, $x \in M'$, т. е. $[M]' \subseteq M'$; обратное включение $M' \subseteq [M]'$ очевидно. Из (1) следует, что <u>множества</u> M <u>и</u> [M] <u>имеют одни и те же изолированные точки</u>:

$$M_j = [M]_j.»$$

Страница 127.

«В с<u>а</u>мом деле,

$$M_j = [M] \setminus M' = [[M]] \setminus [M]' = [M]_j.$$

Последние равенства показывают, что <u>если множество</u> M <u>плотно в себе, то его замыкание</u> [M] <u>совершенно, и обратно</u>...

...Сумма плотных в себе множеств есть плотное в себе множество. Сумма всех плотных в себе подмножеств множества M (к которым причисляются множество M и пустое множество) представляет собой максимальное плотное в себе подмножество множества M, или плотное в себе ядро множества M. Обозначим ядро множества M через M_k; не принадлежащие ядру M_k точки множества M называются разрозненными (separiert; Кантор) точками множества M, множество M_s всех разрозненных точек множества M – разрозненной частью множества M. Мы получаем разложение M на сумму двух слагаемых без общих точек:

$$M = M_k + M_s. \quad (3)$$

Ядро M_k замкнуто в множестве M: в самом деле, если бы оно имело предельную точку $x \in M \setminus M_k$, то множество $M_k + \{x\}$ было бы плотным в себе подмножеством множества M, что противоречит максимальности ядра M_k. В частности, если множество M замкнуто, то ядро M_k замкнуто и плотно в себе, так что плотное в себе ядро замкнутого множества есть множество совершенное.

Множество M, состоящее только из разрозненных точек ($M_k = \varnothing$), называется разрозненным; разрозненные множества противопоставляются плотным в себе множествам:

M плотно в себе, если $M_s = \varnothing$, $M_k = M$,

M разрознено, если $M_k = \varnothing$, $M_s = M$.

Подобно тому, как множество изолированных точек изолировано, – множество разрозненных точек разрознено;

это оправдывает наши термины: изолированная часть, разрозненная часть. Так как изолированная точка множества M не принадлежит никакому плотному в себе подмножеству множества M, то

$$M_j \subseteq M_s, M_h \supseteq M_k. (4)»$$

Страница 128.

«Укажем ещё некоторые соотношения, получающиеся при пересечении множества M с открытым множеством G. Если множество G открыто, то

$$[MG] \supseteq [M]G, (MG)' \supseteq M'G... (5)$$

Вот некоторые применения (5):

III. Пересечение множества открытого с плотным в себе плотно в себе...

IV. Открытое множество, не содержащее изолированных точек пространства, плотно в себе...

Если M есть множество, не содержащее в себе изолированных точек пространства, то M_i плотно в себе, следовательно:

$$M_i \subseteq M_k,\ M_r \supseteq M_s. \quad (6)$$

Между разрозненной M_s и изолированной M_j частями произвольного множества M имеет место соотношение

$$M_j \subseteq M_s \subseteq [M_j], \quad (7)$$

левая часть которого уже была отмечена (4). Вторая часть утверждает, что каждая точка x, входящая в разрозненную часть M_s множества M, есть точка прикосновения изолированной части M_j множества M; если бы это было не

так, то существовала бы такая окрестность $U(x)$ точки x, что $U(x)M_j = \emptyset$; но по (5)

$$MU(x) = M_hU(x) \subseteq M'U(x) \subseteq (MU(x))',$$

т. е. множество $MU(x)$ плотно в себе, следовательно, $MU(x) \subset M_k$, а это противоречит тому, что $x \in M_s$. Таким образом, разрозненная часть M_s множества M состоит из изолированной части M_j множества M и из некоторых предельных точек множества M.»

Страница 129.

«V. Сумма конечного числа разрозненных множеств разрознена.

Достаточно показать, что, если сумма двух разрозненных множеств $S = A + B$ плотна в себе, она есть пустое множество. Так как $G = R \setminus [A]$ есть открытое множество, то

по III множество SG = BG плотно в себе, следовательно, пусто; $S \subseteq [A]$, $[S] \subseteq [A]$, $A \subseteq S \subseteq S' = A'$, множество A плотно в себе, следовательно, $A = \emptyset$, $B = \emptyset$, что и требовалось доказать.»

Страница 134.

«§ 26. Пространства со счётной базой

1. Общие свойства. В этом параграфе мы обращаемся к изучению пространств, в которых существует счётная база (§ 22, п. 4). Очевидно, это свойство пространства когрэдиентно, так что все доказанные ниже свойства пространства R принадлежат и всем его подпространствам. Важнейшим примером пространств со счётной базой являются метрические пространства со счётным всюду плотным множеством (§ 23, п. 2).»

Страница 135.

«В предложениях I–VI под R следует понимать топологическое пространство со счётной базой.

I. Существует счётное плотное в пространстве R множество. Действительно, если G = {G_1, G_2, ...} есть счётная база пространства R, то, выбирая в каждом множестве G_n по точке a_n, получаем счётное множество A = {a_1, a_2, ...}, плотное в пространстве R, так как каждая окрестность U(x) каждой точки x ∈ R содержит хотя бы одно из множеств G_1, G_2, ... и, следовательно, содержит одну из точек a_1, a_2, ..., так что точка x ∈ A.

Точка x называется точкой сгущения множества M, если, какова бы ни была окрестность U(x) точки x пространства R, множество MU(x) несчётно. Множество M_γ всех точек

сгущения замкнуто, ибо если $x \in (M_\gamma)'$, то каждая окрестность $U(x)$ точки x содержит некоторую точку $y \in M_\gamma$ вместе с её окрестностью $U(y)$, – следовательно, несчётное множество точек множества M.

Пересечение $MM_\gamma = M_v$ называется сгустком множества M. Очевидно, $[M] \supseteq M' \supseteq M_v$. Если сгусток $M_v = \varnothing$, то множество M не более как счётно. В самом деле, в этом случае каждая точка $x \in M$ имеет в счётной базе $G = \{G_1, G_2, ...\}$ окрестность G_x, содержащую не более чем $\aleph_0$ точек множества M, и так как различных окрестностей в этой базе не более как счётное число, то множество M счётно. Отсюда следует, что так называемая разреженная часть $M_u = M \setminus M_v$ множества M не более как счётна: если бы множество M_u было несчётно, то множество $M_{uv} \subseteq M_v$ было

бы не пусто, т. е. множество M_u содержало бы точку сгущения множества M.

Если множество M несчётно, то его сгусток M_v также несчётен, ибо удаление счётной части M_u не влияет на мощность несчётного множества M. Отсюда следует, что M_γ – совершенное множество. В самом деле, если x – изолированная точка множества M_γ, U(x) – окрестность точки x, не содержащая точек множества M_γ, кроме точки x, то сгусток множества MU(x) пуст, множество MU(x) счётно, что нелепо.

Из счётности множества M_u вытекает, что $M_\gamma = M_{v\gamma}$: если бы окрестность U(x) точки $x \in M_\gamma$ содержала не более чем $\aleph_0$ точек M_v, то она содержала бы не более чем $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ точек множества M. Далее, имеем:

$$M_v \subseteq M_\gamma = M_{v\gamma} \subseteq M_v;$$

откуда сгусток M_v есть плотное в себе множество. Поэтому

$$M_v \subseteq M_k \subseteq M_h;$$

$$M_u \supseteq M_s \supseteq M_j.$$

В частности:

II. Разрозненная M_s (и изолированная M_j) часть всякого множества M пространства R не более чем счётна.»

Страницы 136–137.

«III. (Теорема Кантора-Бендиксона.) Замкнутое множество пространства R есть сумма совершенного множества и не более чем счётного множества.

Ибо (§ 25, п. 1, 3) замкнутое множество $F = F_k + F_s$, где множество F_k замкнуто в множестве F, значит, и в пространстве R, а множество F_s по II не более чем счётно.

Система открытых множеств {G} называется покрытием множества $M \subseteq R$, если каждая точка $x \in M$ принадлежит хотя бы одному из множеств системы {G}. Покрытие {G} содержит покрытие {G*}, если каждое G* есть одно из G. По числу входящих в них множеств покрытия разделяются на конечные, счётные и т. д.

IV. Всякое покрытие пространства R (и любого его подмножества M) содержит не более чем счётное подпокрытие...

V. В пространстве R не может быть больше чем $\aleph_0$ открытых множеств без общих точек. Ибо если {G} есть несчётная система открытых множеств без общих точек, то, принимая за M сумму всех множеств системы {G}, мы

получаем покрытие $\{G\}$ множества M, которое не содержит счётного подпокрытия.

Вполне упорядоченная система множеств $A = \{A_0, A_1, A_2, \ldots, A_\xi, \ldots\}$ называется неубывающей, если при $\alpha < \beta$ $A_\alpha \subseteq A_\beta$, и невозрастающей, если при $\alpha < \beta$ $A_\alpha \supseteq A_\beta$. Последовательность монотонна, если она невозрастающая или неубывающая. Наконец, последовательность возрастающая, если при $\alpha < \beta$ $A_\alpha \subset A_\beta$, и убывающая, если при $\alpha < \beta$ $A_\alpha \supset A_\beta$.

VI. (Теорема Бэра.) Всякая вполне упорядоченная монотонная система открытых (замкнутых) множеств пространства R содержит не более как счётное число различных множеств.

При доказательстве можно, очевидно, предполагать, что все множества различны и открыты.

Пусть $\Gamma = \{\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots , \Gamma_\xi, \dots\}$ ($\xi < \mu$) есть возрастающая последовательность открытых множеств, $G = \{G_1, G_2, \dots\}$ – счётная база пространства R. Так как каждое множество Γ_ξ есть сумма совокупности слагающих его множеств счётной базы G, то среди элементов счётной базы G, слагающих множество $\Gamma_{\xi+1}$, заведомо есть элемент $G_{\xi+1}$, не содержащийся в совокупности элементов счётной базы G, слагающих множество Γ_ξ. Следовательно, различных множеств последовательности Γ не может быть больше, чем различных множеств счётной базы G, что и требовалось доказать.

Нетрудно видеть, что в пространстве R существует не более чем $\aleph$ открытых (а следовательно, и замкнутых) множеств: действительно, каждое открытое множество O есть сумма некоторых множеств счётной базы G = {G_1, G_2, ...}: O = G_{m1} + G_{m2} + ..., следовательно, открытых множеств не более, чем множеств натуральных чисел ($2^\wedge\aleph_0 = \aleph$).

Если R есть хаусдорфовское пространство со счётной базой, то открытых (замкнутых) множеств в пространстве R ровно $\aleph$, как это будет показано ниже. Мощность такого пространства не более чем $\aleph$ (так как точки суть замкнутые множества).

Последовательность x_1, x_2, ... , x_n, ... точек пространства R называется сходящейся к точке x ($x_n \to x$), если всякая абсолютная окрестность точки x содержит почти все точки

последовательности x_n [все точки последовательности x_n, начиная с некоторого н<u>о</u>мера n, или, равносильно, с достаточно больш<u>и</u>ми номерами n]. Заметим, что мы не предполагаем, что все точки различны (может быть, $x_{n1} = x_{n2} = \ldots$); если все точки последовательности различны, мы назовём её <u>собственной</u>.

VII. <u>Если точка</u> x <u>предельна для множества</u> M T_1-<u>пространства со счётной базой, то существует собственная последовательность точек</u> $x_n \in M$, <u>сходящаяся к точке</u> x...

В T_1-<u>пространствах</u> одна и та же последовательность x_n может сходиться к <u>разным</u> точкам; так, если в примере 5), § 21, п. 1 пространство R счётно, то каждая собственная последовательность сходится ко всякой точке $x \in R$.

В хаусдорфовских пространствах последовательность может сходиться только к одной точке, ибо если $x_n \to x$, $y \neq x$, $U(x)U(y) = \emptyset$, то окрестность $U(y)$ точки y содержит только конечное число точек x_n.

Теорема VII вместе с приведённым дополнением верна в произвольных метрических пространствах, что читатель без труда докажет.

Из сказанного следует, что в хаусдорфовском пространстве со счётной базой всегда существует изолированное счётное множество $M \subset R$: если $R' = \emptyset$, то таково всякое счётное множество $M \subset R$; если $R' \supset \emptyset$, пусть $x \in R'$, $x_n \to x$, $M = \{x_1, x_2, ...\}$ есть изолированное множество. В первом случае ($R' = \emptyset$) все подмножества множества M замкнуты, во втором случае ($R' \supset \emptyset$) замкнуты все подмножества множества $M +$

{x}. В обоих случаях мы имеем $2^\wedge\aleph_0 = \aleph$ подмножеств, что в соединении со сказанным в п. 1 и подтверждает, что в пространстве R существует равно $\aleph$ замкнутых (открытых) множеств.»

Страница 138.

«В изолированном пространстве вовсе не существует совершенных множеств. Нам ниже понадобится такая теорема:

VIII. Если пространство R метризуемо и его плотное в себе ядро R_k не пусто, то в пространстве R существует ровно $\aleph$ совершенных множеств.

Мы можем заменить пространство R множеством R_k, так как по замкнутости R_k множества, совершенные в множестве R_k, совершенны и в пространстве R, и считать, следовательно, что пространство R совершенно.»

Применительно к общей теории дифференцирования и интегрирования множеств с каноническими уравнениями в топологическом пространстве со счётной базой исходное положение в значительной степени излагается следующими цитатами академика Павла Сергеевича Александрова (Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 411 с.).

Страницы 271–272.

«Следствие. Множество M, лежащее в пространстве R со счётной базой, может содержать не более счётного множества изолированных точек. В частности:

Всякое множество, лежащее в пространстве со счётной базой и состоящее из одних изолированных точек, конечно или счётно.

Только что доказанные предложения о счётности множества изолированных точек сейчас будут значительно усилены.

Вспомним, что точка a называется точкой конденсации множества M в пространстве R, если каждая окрестность точки a содержит несчётное множество точек множества M. Очевидно, что только несчётные множества могут иметь точки конденсации и что каждая точка конденсации и подавно является предельной точкой.

Имеет место следующая замечательная теорема, впервые доказанная Линделёфом:

Теорема 50. (Теорема Линделёфа.) Пусть M – множество, лежащее в пространстве со счётной базой. Тогда точки множества M, не являющиеся точками конденсации этого множества, образуют конечное или счётное множество.

...Теорема 51. Множество Ф всех точек конденсации любого множества М, лежащего в пространстве со счётной базой, есть совершенное множество, пустое в том и только в том случае, если М не более чем счётно, и несчётное в случае несчётного М. Каждая точка а ∈ Ф есть точка конденсации и множества Ф.»

Страница 273.

«Следствие. Всякое замкнутое множество F, лежащее в пространстве со счётной базой, либо не более чем счётно, либо есть сумма несчётного совершенного множества своих точек конденсации и не более чем счётного множества остальных точек.

В самом деле, обозначая через Ф множество всех точек конденсации множества F, имеем Ф ⊆ F, в то время как F \ Ф по теореме 50 не более чем счётно.»

Страница 274.

«Теорема 53. (Теорема Бэра–Хаусдорфа.) Всякая вполне упорядоченная система возрастающих или убывающих множеств, которые либо все замкнуты, либо все открыты в пространстве R со счётной базой, содержит не более счётного числа различных элементов.

Доказательство опирается на следующую лемму:

Лемма. Вполне упорядоченная система строго возрастающих (строго убывающих) множеств

$$M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_\alpha \subset \ldots$$

$$(M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset M_\alpha \supset \ldots),$$

состоящих из натуральных чисел, не более чем счётна.»

Страница 275.

«Та же теорема может быть высказана и следующим образом (привожу лишь формулировку, касающуюся систем убывающих замкнутых множеств, предоставляя остальные три формулировки читателю):

Теорема 53′. Какова бы ни была вполне упорядоченная система убывающих замкнутых множеств пространства R со счётной базой, занумерованных всеми порядковыми числами первого и второго классов:

$$F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_\alpha \supseteq \ldots,\ \alpha < \omega_1,\ (4)$$

найдётся такое α, что все множества (4), начиная с α-го, совпадают между собой:

$$F_\alpha = F_{\alpha+1} = F_{\alpha+2} = \ldots .$$

Доказательство от противного. Если такого α нет, то для каждого $\alpha < \omega_1$ можно найти наименьшее такое $\beta(\alpha)$, $\alpha < \beta(\alpha) < \omega_1$, что $F_\alpha \neq F_{\beta(\alpha)}$ и, следовательно, $F_\alpha \supset F_{\beta(\alpha)}$. Положим теперь $\nu_0 = 0$ и предположим, что для всякого порядкового числ<u>а</u> ζ, меньшего, чем некоторое $\alpha < \omega_1$, построено порядковое число $\nu_\zeta < \omega_1$ так, что при $\zeta < \zeta' < \alpha$ имеем $\nu(\zeta) = \nu_\zeta < \nu_{\zeta'} = \nu(\zeta')$ и $F_{\nu(\zeta)} \supset F_{\nu(\zeta')}$. Для построения числ<u>а</u> ν_α обозначим через α' наименьшее (порядковое) число, меньшее ω_1 и большее, чем все ν_ζ, $\zeta < \alpha$, и положим $\nu_\alpha = \beta(\alpha') > \alpha'$. Тогда

$$F_{\nu(\alpha)} \subset F_{\alpha'} \subseteq \bigcap_{\gamma<\alpha} F_\gamma \subset \bigcap_{\zeta<\alpha} F_{\nu(\zeta)},$$

т. е. $F_{\nu(\alpha)} \subset F_{\nu(\zeta)}$ для любого $\zeta < \alpha$.»

Страница 276.

«Таким образом для любого $\alpha < \omega_1$ строится $\nu_\alpha = \nu(\alpha)$ так, что множества $F_{\nu(\alpha)}$, число которых несчётно (равно $\aleph_1$), все различны между собою в противоречии с теоремой 53. Теорема 53′ этим доказана.

Пусть теперь E – произвольное множество, лежащее в пространстве со счётной базой. Обозначаем через $E^{(1)}$ производную множества E (т. е. множество всех предельных точек этого множества). Если дано $E^{(\alpha)}$, то определяем $E^{(\alpha+1)}$ как производную множества $E^{(\alpha)}$. Если β – предельное трансфинитное число второго класса, то обозначаем через $E^{(\beta)}$ пересечение всех $E^{(\alpha)}$, $\alpha < \beta$. Определённое таким образом для любого порядкового числа $\alpha < \omega_1$ замкнутое множество $E^{(\alpha)}$ называется производной порядка α от множества E. Они образуют вполне упорядоченную систему убывающих

замкнутых множеств и потому, начиная с некоторого $\alpha < \omega_1$, совпадают между собою. Очевидно, множество

$$E^{(\alpha)} = E^{(\alpha+1)} = \dots$$

есть совершенное множество. Итак, имеет место

Теорема 54. (Теорема Кантора–Бендиксона.) Для каждого множества E, лежащего в пространстве со счётной базой, имеется первое такое порядковое число $\alpha < \omega_1$, что производная α-го порядка множества E есть совершенное множество (быть может, пустое), т. е.

$$E^{(\alpha)} = E^{(\alpha+1)} = \dots .$$

Из теоремы Линделёфа при этом следует, что $E^{(\alpha)}$ может быть пустым лишь в случае не более чем счётного E. В случае же несчётного E множество

$$E^{(\alpha)} = E^{(\alpha+1)} = \dots$$

есть несчётное совершенное множество (содержащее множество всех точек конденсации множества E).»

Страница 299.

«Для топологических пространств со счётной базой имеют место теоремы 49 (и следствия из теоремы 49), 50, 51, 52, 53, 53′, 54, 55...»

Следует добавить, что точка конденсации вполне логично называется по-русски точкой сгущения в определении на странице 135 классической монографии:

Хаусдорф Ф. Теория множеств / перевод с немецкого Н. Б. Веденисова; под редакцией и с дополнениями проф. П. С. Александрова и проф. А. Н. Колмогорова. М.; Л.: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, 1937. 306 с.

Основополагающая, продвинутая, прикладная и вычислительная части классической математики имеют целые системы взаимосвязанных принципиальных изъянов, критическим анализом которых и продолжается настоящая научная монография. Представляется также целесообразным введение целого ряда общенаучных, в частности общематематических, уточнений. Далее в монографии излагается общая методология преодоления антиномий теории множеств Кантора, основополагающей в классической математике. Основное содержание настоящей научной

монографии посвящено созданию, развитию и изложению, (все)общих логики и теорий (пред)множеств, квантимножеств, сверхмножеств, сверхконтинуума, сверхкардиналов, сверхординалов, сверхпоследовательностей, сверхрядов, сверхчисел, сверхколичеств, общих пределов, иерархий переменных участвующей целочастичности с модальными кванторами, системных задач с синергичной системой вводимых всеобщих определений и канонических единометрических производных множественных уравнений с одним неизвестным.

1. СИСТЕМЫ ОСНОВОПОЛАГАЮЩИХ ПРИНЦИПИАЛЬНЫХ ИЗЪЯНОВ КЛАССИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

Величественное здание классической математики с открытием парадоксов бесконечного Галилеем и Больцано зиждется на теории множеств Кантора и на теории действительных чисел с изобретением и осмыслением положительных целых, дробных, иррациональных, отрицательных чисел и нуля и действий над ними с открытием их главных свойств. Среди других основополагающих изобретений – системы координат, начиная с декартовых, мнимые ч<u>и</u>сла, векторы, матрицы, тензоры, исчисление бесконечно малых Лейбница и Ньютона, нечёткие множества и нестандартный анализ с

естественным доказательством известных теорем, но без точного измерения бесконечно большого и бесконечно малого.

Классическая математика, начиная со своих основ, имеет принципиальные изъяны и явно недостаточна для миропонимания и решения многих видов насущных задач жизни, науки и техники.

<u>Действия</u> рассматриваются для не более чем счётного множества чисел.

<u>Деление</u> рассматривается с потерей первоначального смысла деления на некотор<u>о</u>е <u>непустое</u> <u>множество</u> равных частей с приведением <u>итога</u> только для <u>одной</u> из этих частей и тем самым с нарушением закона сохранения при отличном от единицы делителе.

<u>Деление на нуль</u> рассматривается без необходимости и ведёт к неразрешимым проблемам.

Теория множеств Кантора лишена учёта количеств наличных элементов с поглощением при разбиении и составлении и без законов сохранения. Действительные числа не измеряют разных бесконечностей, лишь грубо различаемых мощностями и кардинальными числами Кантора. Множества точек единичного отрезка и трёхмерного пространства имеют одну и ту же мощность непрерывного (континуума) ℵ. Мощность строится на взаимно однозначном соответствии, в которое Галилей поставил как парадокс множество всех натуральных (положительных целых) чисел и собственное подмножество этого множества – куда более редкое множество квадратов этих чисел. Вне конечного нет законов сохранения ввиду поглощения – даже бесконечно большого при возведении

любого бесконечного кардинального числа в любую натуральную (положительную целую) степень.

Классические меры, скажем, меры длины, площади и объёма, чувствительны лишь к своим размерностям, но не к меньшим размерностям, например не к границам предмета и его составных частей при его разбиении и составлении, и тем самым нарушают законы сохранения. Для смешанного целого из частей разных размерностей нет известной общей (и тем более всеобщей) меры.

Нет слагаемости по сечениям вопреки методу неделимых Архимеда с доказательством методом исчерпывания, «Стереометрии винных бочек» Кеплера и принципу Кавальери. Скажем, определённый интеграл рассматривается как предел интегральных сумм с лишь

соразмерной слагаемостью, а не как прямая сумма по сечениям.

Классическая наука неспособна выражать действием смешанные (именованные) величины (с наименованием). Скажем, 5 литров воды ≠ 5 литров × вода, 5 литров воды ≠ вода × 5 литров.

Степенные и показательные функции определены только для неотрицательных оснований.

Не всегда существующими вероятностями нельзя различить невозможные и в разной мере и степени возможные события нулевой меры. А плотность вероятности (производная интегральной функции распределения) вообще не имеет смысла вероятности, которая при непрерывности считается равной нулю.

Абсолютная погрешность формального (условного, независимого от истинности) приравнивания не однозначна, так как при его равносильном умножении на ненулевое число умножается на его абсолютную величину.

Относительная погрешность определена лишь для двухэлементного формального (условного, независимого от истинности) приравнивания, для него двузначна, вопреки замыслу может превышать единицу и даже быть бесконечной.

Метод наименьших квадратов с опорой именно на худшие данные не однозначен и обычно ведёт к предсказуемым неприемлемым изъянам, извращениям и парадоксам.

Последовательное приближение из одного начала с жёстким предписанием (алгоритмом) требует явного

выражения последующего приближения через предыдущие приближения с обеспечением сжимаемости отображения, весьма затруднительно и обычно очень медленно сходится.

Машинное вычисление вносит собственные погрешности и часто выходит за пределы счёта, обрывая его вообще.

Классическая наука считает непрерывное (континуум) положительных размерности и меры, например бесконечные пространство и время с вечностью, полностью составленным лишь из элементов-точек и мгновений нулевых размерности и меры. Однако сложение любого множества нулей неизбежно даёт только нуль и ничего более.

Понимание природы, сущности, строения и соотношений непрерывного, пространства, времени, действия, покоя и движения, постоянства (сохранения) и изменения и не только

для этого необходимое точное измерение потенциальных (возможных, способных, стремящихся, становящихся, развёртывающихся) и актуальных (достигнутых, осуществлённых, завершённых, действительных, настоящих, подлинных, истинных) бесконечно больших и бесконечно малых непосильны для классических философии и науки около 2500 лет.

Таким образом, автору с 12 лет начали проясняться и уже задолго до замысла настоящего научного труда были вполне ясны целые системы основополагающих принципиальных изъянов классической математики по её основным общепринятым разделам чистой, прикладной и вычислительной математики при дополнительном полезном делении чистой математики на основополагающую и продвинутую математику.

1.1. ИЗЪЯНЫ ОСНОВОПОЛАГАЮЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

Действия рассматриваются для не более чем счётного множества чисел. В частности, нет слагаемости по сечениям.

Деление рассматривается с потерей первоначального смысла деления на некоторое непустое множество равных частей с приведением итога только для одной из этих частей и тем самым с нарушением закона сохранения при отличном от единицы делителе. То есть всё, приходящееся на все остальные части, не рассматриваются вообще.

Деление на нуль есть полностью лишённое смысла деление на пустое множество частей, рассматривается без необходимости и ведёт к неразрешимым проблемам.

Бессмысленность деления на нуль в ряде видов насущных задач: 20 яблок, 5 приглашённых, деление поровну между пришедшими с остатком себе, не пришёл никто. 20/0 = +∞? Всего 20 яблок. Нелепо, не нужно делить. Все 20 яблок себе. Это было ясно понято автором в 12 лет.

Нет всеобщности пустоты: пустая сумма считается нулём, а пустое произведение – единицей.

Недостаточность действительных чисел. Не существует вероятность

$$p_{a\in A} = p_{1A}$$

равновероятного выбора каждого из элементов $a\in A$ счётно бесконечного множества A, например

$$n \in N = \{1, 2, 3, ...\}.$$

По теореме сложения вероятностей несовместных событий вероятность выбора не определённого заранее какого-нибудь одного из элементов множества, то есть вероятность достоверного события, должна составлять то ли

$$\Sigma_{n\in N}\ p_{n\in N} = +\infty,$$

если

$$p_{a\in A} = p_{1A} = p_{n\in N} = p_{1N} > 0,$$

то ли

$$\Sigma_{n\in N}\ p_{n\in N} = 0,$$

если

$$p_{a\in A} = p_{1A} = p_{n\in N} = p_{1N} = 0,$$

то есть в итоге ни в одном из обоих возможных случаев не получается единица как вероятность достоверного события. Вероятность

$$p_{x\in X} = p_{1X}$$

возможного события, а именно равновероятного выбора каждого из элементов несчётного непрерывного множества X, скажем, действительного интервала строго между нулём и единицей X =]0, 1[, классической математикой считается нулём

$$p_{x\in X} = p_{1X} = p_{x\in]0,\ 1[} = p_{1]0,\ 1[} = 0,$$

как и для невозможного события.

Неколичественность множеств Кантора.

$$\{1_{(1)}, 1_{(2)}, \dots , 1_{(1000000000)}\} = \{1\}.$$

То есть множество, состоящее из миллиарда одинаковых монет, классической математикой считается в точности равным множеству, состоящему из одной такой монеты, при условии неразличимости всех этих монет, которое

вполне можно принять ввиду равенства их покупательной способности как их важнейшего атрибута.

Нет действия для именованных смешанных величин.

5 л воды ≠ 5 л × вода, 5 л воды ≠ вода × 5 л.

Парадоксы бесконечного.

Галилей: взаимно однозначное соответствие n и n^2.

Нет количественного различения счётных множеств.

Общие счётная мощность (кардинальное число) $\aleph_0$ и мера (+∞ для меры счёта и 0 для линейной и других мер) любых счётных множеств: всюду частых (всюду плотных) рациональных чисел, N = {1, 2, 3, ...}, {2, 4, 6, ...}, миллиардных тетраций, состоящего из

$1000000000, 1000000000^{1000000000}$, 1000000000 в степени $1000000000^{1000000000}$ и т. д.

Крайне грубое различение видов бесконечного мощностью (кардинальным числом). Канторов дисконтинуум нулевой меры, отрезок [0, 1] и всё бесконечное пространство R^n конечной размерности: одна и та же мощность $\aleph$ непрерывного, или континуума.

Самопоглощение бесконечных кардинальных чисел Кантора при сложении и умножении:

$$\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = 2\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = 3\aleph_0 = ...,$$

$$\aleph_0 = (\aleph_0)^2 = (\aleph_0)^3 = ...$$

Нет общей меры для множества смешанной размерности:

$$\text{measure}(\{0\} \cup [1, 2]).$$

Меры не чувствительны к меньшим размерностям: m[1, 2] = m]1, 2] = m]1, 2[. Нет законов сохранения ввиду поглощения при разбиении и составлении:

$$m_1([1, 3] \cup [2, 4]) = m_1[1, 4] = 3 \neq 4 = m_1[1, 3] + m_1[2, 4].$$

Нет вообще законов сохранения за пределами конечного.

Нет составленности (слагаемости) непрерывного (континуума), пространства и времени с вечностью из точек и мгновений нулевых меры и размерности.

Нет слагаемости фигур и тел из сечений по Архимеду, Кеплеру и Кавальери.

Различение $\pm\infty$ лишь знаками:

$$\ln n \sim \Sigma_{j=1}{}^{n}\, 1/j,\ \Sigma_{n\in N}\, 1/n = +\infty = \Sigma_{n\in N}\, {}^{n}1000000000.$$

Неизмеримость потенциально и актуально бесконечно большого и бесконечно малого.

Неопределённость деления на сам достигнутый нуль 0 вообще. Нечувствительность деления ненулевого на становящийся, но не достигаемый нуль $0_{\approx}$ со знаком ($\pm$):

$$a/(+0_{\approx}) = -a/(-0_{\approx}) = +\infty \ (a > 0),$$

$$a/(+0_{\approx}) = -a/(-0_{\approx}) = -\infty \ (a < 0).$$

Нет законов сохранения для нулей со знаками в вычислительной технике:

$$-0/|x| = -0$$

$$(x \neq 0),$$

$$(-0)(-0) = +0,$$

$$|x|(-0) = -0,$$

$$x + (-0) = x + (+0) = x,$$

$$(-0) + (-0) = (-0) - (+0) = -0,$$

$$(+0) + (+0) = (+0) - (-0) = +0,$$

$$x - x = x + (-x) = +0.$$

Вывод: около 2500 лет нет понимания природы ∞, 0, пустоты и непрерывного.

1.2. ИЗЪЯНЫ ПРОДВИНУТОЙ МАТЕМАТИКИ

Бесколичественность (неколичественность) соединений (систем).

Действия над не более чем счётными множествами чисел без законов сохранения.

Ограничение степенных x^a и показательных a^x функций неотрицательными основаниями, поскольку возведение в степень безупречно определено только для неотрицательных оснований (возведение в степень и извлечение корня первичны, умножение и деление вторичны):

$$(-1)^3 = -1 \neq 1 = [(-1)^6]^{1/2} = (-1)^{6/2},$$

$$(-1)^{1/3} = -1 \neq 1 = [(-1)^2]^{1/6} = (-1)^{2/6}.$$

Это было ясно понято автором в 12–14 лет.

Ограничение области полезности сверхдействий (после сложения, умножения и возведения в степень):
только при $x \geq 1$ полезны тетрации

$$^{2}x = x^{x},\ ^{3}x,\ ^{4}x,\ \dots .$$

Невозможность уподобления (моделирования) многих простых видов насущных предметов, например итогов и тем более хода поездки за покупками.
Неизмеримость насущных предметов с бесконечно большим и бесконечно малым.
Нет составленности (слагаемости) интегралов по сечениям и тем более точкам.
Несуществование и обнуление вероятностей насущных возможных событий. Отсутствие вероятностного смысла плотности вероятности как лишь производной

интегральной функции распределения: так, при нормальном распределении плотность вероятности каждого значения положительна при нулевой вероятности.

Ограничение целыми степенями (на случай отрицательных оснований) с первой по четвёртую в статистике (метод Пирсона) при сверхвлиянии выбросов.

В классической математике сущность решений задач и доказательств теорем основана на линейной двоичной классической формальной логике. Однако изложение даже классических решений задач и доказательств теорем требует принятия решений, явно или неявно основанного на именно разветвлённых всеобщей логике и всеобщих математических теориях и методологиях уточняющего взвешивания логических доводов и противодоводов.

1.3. ИЗЪЯНЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Плохое оценивание неточности;

нет никакого оценивателя уверенности в точности.

Абсолютная погрешность формального (условного, независимого от истинности) приравнивания недостаточна и не однозначна при его равносильном (эквивалентном) умножении на ненулевое число:

$$\Delta_{1000 =?\ 999} = \Delta_{1 =?\ 0} = 1,\ \Delta_{10 =?\ 0} = 10.$$

Относительная погрешность определена лишь для двухэлементного формального (независимого от истинности, условного) приравнивания, двусмысленна и может быть бесконечной:

$$\delta_{a =?\ b} = |a - b|/|a| \neq |a - b|/|b|,$$

$$\delta_{1 =?\ 0} = 1/0 = \infty,\ \delta_{1 =?\ -1} = 2,\ \delta_{100\ -\ 99 =?\ 0}\ ?,\ \delta_{1\ -\ 2\ +\ 3\ -\ 4 =?\ -1}\ ?$$

**Неразличима уверенность в точности,
например двух точных решений неравенства:**

$$x > 1: x_1 = 1 + 10^{-10},\ x_2 = 1 + 10^{10}.$$

**Метод наименьших квадратов Лежандра и «короля математики» Гаусса имеет много взаимосвязанных основополагающих изъянов и крайне узкие области применимости и тем более приемлемости и пригодности:
не пригоден при не совпадающих физических размерностях (единицах) задачи;
меняет не проверяемый итог при её равносильных (эквивалентных) преобразованиях:**

$$x = 1 \wedge x = 2 \rightarrow x = 3/2;$$

$$10x = 10 \wedge x = 2 \rightarrow x = 102/101;$$

$$x = 1 \wedge 10x = 20 \rightarrow x = 201/101;$$

необоснованно полагается, как и математическая статистика, на абсолютную погрешность и аналитически простейшую вторую степень усреднения;
неустойчив к наклону (изображения на координатной плоскости к оси абсцисс) системы данных (с разбросом) и их уподоблений, его переменности и вращению, способен почти игнорировать часть решаемой задачи, опирается на именно наихудшие данные и часто ведёт к предсказуемым неприемлемости, извращениям и парадоксам:
приближение y = kx точек (1, 1), (10, 15) на координатной плоскости даёт

$$k = 151/101,$$

$$\Delta_{(1,\ 1)} = 51/101,$$

$$\Delta_{(10,\ 15)} = 5/101.$$

1.4. ИЗЪЯНЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Основополагающие ограничения машинной вычислимости, в том числе методами наименьших квадратов и конечных элементов:

конечные якобы бесконечности и нули;
разрывность исчисления;
извращающий суммы обрыв бесконечных рядов;
незримость и непроверяемость промежуточных действий;
неулучшаемость итогов;
повышение возможностей заблуждений, самообмана и скрытого непонимания;
слепота наивной веры во всемогущество техники с нечувствительностью заложенных негибких предписаний (алгоритмов) и преобразований.

Впечатляющая игра в поддавки с самоубеждающей красотой представления.

Заманчивая лёгкость перекладывания полномочий думать на безотказную технику.

Уклонение от углублённой замысловатости исканий истины.

Подрывающее здоровье, здравомыслие и предвидение отвыкание от устного и ручного письменного счёта, забывание и даже незнание таблицы умножения.

Обесчеловечивание исследований попыткой замещения чутья объёмом работ.

Поверхностность и непредусмотрительность бесхитростной «грубой силы».

Медленная сходимость и невычислимость одноначального последовательного приближения с требованием явного выражения последующего приближения через предыдущие при часто затруднительной сжимаемости отображения.

Неоправданное осложнение искусственным введением случайных распределений.

Частая извращаемость обработки данных с разбросом опорой на наихудшие данные.

Непосильность требуемого отсутствия погрешностей в делопроизводстве.

Таким образом, ко времени замысла настоящего научного труда в 18 лет автору были вполне ясны целые системы основополагающих принципиальных изъянов классической математики. Его собственная всеобщая математика, преодолевшая все эти изъяны, начала зарождаться с 12 лет.

Тем не менее, ко времени замысла настоящего научного труда время для систематического изложения всеобщей математики ещё не наступило.

Поэтому значительная часть объёма настоящей научной монографии во многом ограничивается пределами именно классической математики.

2. ДОСТИЖЕНИЕ ОДНОЗНАЧНОСТИ ЯЗЫКОВЫХ И/ИЛИ СИМВОЛИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ СОВМЕЩЕНИЙ И СОЕДИНЕНИЙ

Настоящая научная монография вводит, предлагает и применяет жизненно важные для мышления, понимания, исследования и сообщения общенаучные (в том числе логические, филологические и математические) именно однозначные непременно разные языковые выражения совмещений и соединений.

Замечание. Союз «и» неоднозначен в смысле неразличимости, с одной стороны, простого перечисления поодиночке независимо друг от друга предметов через запятые с использованием союза «и» вместо последней промежуточной запятой, с другой стороны, именно

совмещения непременно всех перечисляемых предметов, а с третьей стороны, именно совмещения только предметов, непосредственно соединённых союзом «и», размещённого как отдельный предмет последним в общем списке (перечне) после списка (перечня) всех предыдущих предметов, перечисляемых через запятые.

Пример. Языковое выражение даже только двух предметов вида

A и B

может означать то ли, с одной стороны, простое перечисление

A, B

этих двух предметов поодиночке независимо друг от друга через запятые, то ли, с другой стороны, именно совмещение

(условно линейно обозначаемое смыканием обозначений отдельных предметов)

AB

обоих этих предметов A, B.

Замечание. Указанная выше третья возможность выродилась во вторую возможность в последнем примере ввиду наличия только двух предметов.

Пример. Языковое выражение четырёх предметов вида

A, B, C и D

может означать то ли, с одной стороны, простое перечисление

A, B, C, D

этих четырёх предметов поодиночке независимо друг от друга через запятые, то ли, с другой стороны, именно

совмещение (условно линейно обозначаемое смыканием обозначений отдельных предметов)

ABCD

непременно всех четырёх перечисляемых предметов, то ли, с третьей стороны, именно совмещение CD только двух предметов, непосредственно соединённых союзом «и», размещённое как отдельный предмет последним в общем списке (перечне) после списка (перечня) A, B всех предыдущих предметов, перечисляемых через запятые:

A, B, CD.

Определение. Языковым обозначением списка (перечня) предметов является непременно бессоюзно связанное перечисление через запятые имён (названий, словесных

обозначений) всех этих предметов в указанном порядке, в том числе без союза «и».

Пример. Философия, логика, филология, математика, физика.

Определение. Символическим обозначением списка (перечня) предметов является непременно бессоюзно связанное перечисление через запятые символических обозначений всех этих предметов в указанном порядке, в том числе без союза «и».

Пример. A, B, C, D.

Определение. Неупорядоченным (переставимым, переместимым) бесповторным (неповторимым) списком (перечнем) предметов называется множество этих предметов.

Обозначение. Неупорядоченный (переставимый, переместимый) бесповторный (неповторимый) список (перечень) предметов может быть обозначен подобно множеству предметов взятием списка (перечня) предметов как элементов их списка (перечня), в частности языковых и/или символических обозначений этих предметов, в фигурные скобки.

Пример. {Философия, логика, филология, математика, физика}.

Пример. {0, 1, 2, число Эйлера, 3, число пи, 4}.

Пример. {A, B, C, D}.

Определение. Неупорядоченным (переставимым, переместимым) повторным (повторимым) списком (перечнем) предметов называется домножество

(предмножество) как множество всех количественных элементов, то есть именно всех непременно различных предметов их списка (перечня) с их количествами (кратностями их повторений) в левых нижних указателях (индексах), непременно подлежащих указанию в случаях большей, чем единица, кратности (повторности, повторяемости).

Обозначение. Неупорядоченный (переставимый, переместимый) повторный (повторимый) список (перечень) предметов может быть обозначен взятием именно всех непременно различных предметов их списка (перечня), в частности языковых и/или символических обозначений этих предметов, с их количествами (кратностями их повторений) в левых нижних указателях (индексах),

непременно подлежащих указанию в случаях большей, чем единица, кратности (повторности, повторяемости), в фигурные скобки, первая из которых снабжается символизирующим допустимость равенства элементов и точный учёт количеств равных элементов знаком равенства = как левым нижним указателем (индексом).

Пример. ${}_{=}\{e, 1, \pi, e, \pi, 1, e, 4\} = {}_{=}\{{}_{3}e, {}_{2}1, {}_{2}\pi, {}_{1}4\} = {}_{=}\{{}_{3}e, {}_{2}1, {}_{2}\pi, 4\}$.

Определение. Упорядоченным (не переставимым, не переместимым) посредством размещения бесповторным (неповторимым) списком (перечнем) предметов называется последовательность этих предметов.

Обозначение. Упорядоченный (не переставимый, не переместимый) посредством размещения бесповторный (неповторимый) список (перечень) предметов может быть

обозначен взятием списка (перечня) предметов как элементов их списка (перечня), в частности языковых и/или символических обозначений этих предметов, в круглые скобки.

Пример. (Философия, логика, филология, математика, физика).

Пример. (0, 1, 2, число Эйлера, 3, число пи, 4).

Пример. (A, B, C, D).

Определение. Упорядоченным (не переставимым, не переместимым) посредством размещения повторным (повторимым) списком (перечнем) предметов называется последовательность именно всех предметов их списка (перечня) в порядке их размещения с количествами (кратностями повторений) непременно соседних (стоящих

подряд) одинаковых предметов в левых нижних указателях (индексах), непременно подлежащих указанию в случаях большей, чем единица, кратности (повторности, повторяемости).

Обозначение. Упорядоченный (не переставимый, не переместимый) посредством размещения повторный (повторимый) список (перечень) предметов может быть обозначен взятием последовательности именно всех предметов их списка (перечня) в порядке их размещения с количествами (кратностями повторений) непременно соседних (стоящих подряд) одинаковых предметов в левых нижних указателях (индексах), непременно подлежащих указанию в случаях большей, чем единица, кратности (повторности, повторяемости), в круглые скобки, первая из

которых снабжается символизирующим допустимость равенства элементов и точный учёт количеств непременно соседних (стоящих подряд) равных элементов знаком равенства = как левым нижним указателем (индексом).

Пример. $_=(e, e, 1, \pi, \pi, 1, 1, \pi, 4, e) = {}_=({}_2e, {}_11, {}_2\pi, {}_21, {}_1\pi, {}_14, {}_1e) = {}_=({}_2e, 1, {}_2\pi, {}_21, \pi, 4, e)$.

Определение. Упорядоченным (не переставимым, не переместимым) посредством отношения бесповторным (неповторимым) списком (перечнем) предметов называется последовательность этих предметов с непременным указанием этого отношения (но не обязательным именно наличным порядком этих предметов в соответствии с этим отношением).

Обозначение. Упорядоченный (не переставимый, не переместимый) посредством отношения бесповторный (неповторимый) список (перечень) предметов может быть обозначен взятием списка (перечня) предметов как элементов их списка (перечня), в частности языковых и/или символических обозначений этих предметов, в круглые скобки, первая из которых снабжается символизирующим это отношение знаком этого отношения как левым верхним указателем (индексом).

Пример. $^{<}(4, e, 1, \pi, 3, 2)$.

Пример. $^{\leq}(4, e, 1, \pi, 3, 2)$.

Пример. $^{<}(1, 2, e, 3, \pi, 4)$.

Пример. $^{\leq}(1, 2, e, 3, \pi, 4)$.

Определение. Неканоническим упорядоченным (не переставимым, не переместимым) посредством отношения бесповторным (неповторимым) списком (перечнем) предметов называется последовательность этих предметов с непременным указанием этого отношения и с обязательными хотя бы частичными нарушениями этого отношения именно наличным порядком этих предметов.

Пример. $^{<}(4, e, 1, \pi, 3, 2)$.

Пример. $^{\leq}(4, e, 1, \pi, 3, 2)$.

Определение. Каноническим упорядоченным (не переставимым, не переместимым) посредством отношения бесповторным (неповторимым) списком (перечнем) предметов называется последовательность этих предметов и с непременным указанием этого отношения, и с

обязательным именно наличным порядком этих предметов в соответствии с этим отношением.

Пример. $^{<}(1, 2, e, 3, \pi, 4)$.

Пример. $^{\leq}(1, 2, e, 3, \pi, 4)$.

Следствие. Любая правильно выстроенная иерархия с явным указанием образующего её отношения является каноническим упорядоченным (не переставимым, не переместимым) посредством отношения бесповторным (неповторимым) списком (перечнем) предметов.

Определение. Канонизацией упорядоченного (не переставимого, не переместимого) посредством отношения бесповторного (неповторимого) списка (перечня) предметов называется непременное приведение последовательности этих предметов в полное соответствие с этим отношением

при хотя бы частичных нарушениях этого отношения именно наличным порядком этих предметов.

Пример. $^{<}(4, e, 1, \pi, 3, 2) \Rightarrow {}^{<}(1, 2, e, 3, \pi, 4)$.

Пример. $^{\leq}(4, e, 1, \pi, 3, 2) \Rightarrow {}^{\leq}(1, 2, e, 3, \pi, 4)$.

Определение. Языковым обозначением совмещения предметов является перечисление через запятые предварённых повторяющимися союзами «и» словесных обозначений всех этих предметов в указанном порядке.

Пример. И философия, и логика, и филология, и математика, и физика.

Определение. Смешанным языково-символическим обозначением совмещения предметов является перечисление через запятые предварённых

повторяющимися союзами «и» символических обозначений всех этих предметов в указанном порядке.

Пример. И A, и B, и C, и D.

Определение. Символическим обозначением совмещения предметов является условно линейно обозначаемое смыкание символических обозначений всех этих предметов в указанном порядке.

Пример. ABCD.

Замечание. Союз «или» при отсутствии дополнительных разъяснений неоднозначен в смысле неразличимости трёх принципиально различных чрезвычайно часто встречающихся словоупотреблений.

С одной стороны, это именно исключающий союз «или», подразумевающий необходимость выбора одного и только

одного предмета из списка (перечня) перечисляемых предметов.

С другой стороны, это именно неисключающий союз «или», подразумевающий возможность и даже допустимость взять произвольное обычно непустое подмножество (непустой подсписок, непустой подперечень) указанного множества (списка, перечня), в том числе и полное подмножество (полный подсписок, полный подперечень), равное (равный) самому этому множеству (списку, перечню) целиком, без малейшей необходимости выбора.

С третьей стороны, это именно поясняющий и дополняющий союз «или», непременно предварённый запятой и предваряющий собой пояснение и/или дополнение предшествующего этому союзу «или» слова или

выражения близкими по смыслу единичными или списочными (перечисленными) словами или выражениями.

Определение. Языковым обозначением списка (перечня) предметов с необходимостью выбора одного и только одного предмета из списка (перечня) перечисляемых предметов является перечисление через запятые предварённых повторяющимися союзами «или» («либо», «то ли») словесных обозначений всех этих предметов в указанном порядке.

Пример. Или философия, или логика, или филология, или математика, или физика.

Пример. Либо философия, либо логика, либо филология, либо математика, либо физика.

Пример. То ли философия, то ли логика, то ли филология, то ли математика, то ли физика.

Определение. Смешанным языково-символическим обозначением списка (перечня) предметов с необходимостью выбора одного и только одного предмета из списка (перечня) перечисляемых предметов является перечисление через запятые предварённых повторяющимися союзами «или» («либо», «то ли») символических обозначений всех этих предметов в указанном порядке.

Пример. Или A, или B, или C, или D.

Пример. Либо A, либо B, либо C, либо D.

Пример. То ли A, то ли B, то ли C, то ли D.

Определение. Языковым обозначением списка (перечня) предметов с возможностью и даже допустимостью взять произвольное (произвольный) обычно, но необязательно, непустое (непустой) подмножество (подсписок, подперечень) указанного множества (списка, перечня), в том числе и полное (полный) подмножество (подсписок, подперечень), равное (равный) самому этому множеству (списку, перечню) целиком, без малейшей необходимости выбора, является перечисление через запятые предварённых повторяющимися соединёнными союзами «и/или» словесных обозначений всех этих предметов в указанном порядке.

Пример. И/или философия, и/или логика, и/или филология, и/или математика, и/или физика.

Замечание. Во имя облегчения восприятия списка (перечня) предметов допускается размещение соединённого союза «и/или» лишь однажды перед последним предметом без запятой после предпоследнего предмета.

Пример. Философия, логика, филология, математика и/или физика.

Определение. Смешанным языково-символическим обозначением списка (перечня) предметов с возможностью и даже допустимостью взять произвольное (произвольный) обычно, но необязательно, непустое (непустой) подмножество (подсписок, подперечень) указанного множества (списка, перечня), в том числе и полное (полный) подмножество (подсписок, подперечень), равное (равный) самому этому множеству (списку, перечню)

целиком, без малейшей необходимости выбора, является перечисление через запятые предварённых повторяющимися соединёнными союзами «и/или» символических обозначений всех этих предметов в указанном порядке.

Пример. И/или A, и/или B, и/или C, и/или D.

Определение. Обозначением пояснения и/или дополнения слова или выражения близкими по смыслу единичными или списочными (перечисленными) словами или выражениями является перечисление этих близких по смыслу единичных или списочных (перечисленных) слов

или выражений после поясняемого и/или дополняемого слова или выражения то ли в скобках, то ли после двоеточия, то ли после тире, то ли после запятой и пояснительного союза «то есть».

Пример. Наличие (присутствие, существование, действительность).

Пример. Наличие: присутствие, существование, действительность.

Пример. Наличие – присутствие, существование, действительность.

Пример. Наличие, то есть присутствие, существование, действительность.

3. ВВЕДЕНИЕ РЯДА ОБЩЕНАУЧНЫХ, В ЧАСТНОСТИ ОБЩЕМАТЕМАТИЧЕСКИХ, УТОЧНЕНИЙ

Представляется целесообразным введение ряда общенаучных, в частности общематематических, уточнений, отчасти основанных на критическом анализе классической монографии:

Хаусдорф Ф. Теория множеств / перевод с немецкого Н. Б. Веденисова; под редакцией и с дополнениями проф. П. С. Александрова и проф. А. Н. Колмогорова. М.; Л.: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, 1937. 306 с.

Можно считать не только разъяснением, но и однозначно характеризующим объём понятия и поэтому полноценным определением основанное на идеях Кантора «множество есть многое, мыслимое как единое», «множество есть любая совокупность определённых и вполне различаемых объектов нашего восприятия или нашей мысли» и о двойном отвлечении следующее определение множества:
Множество есть мысленное безотносительное в остальном объединение некоторых определённых отдельных (раздельных, разделённых) предметов, называемых элементами этого множества, принадлежащими этому множеству, которое содержит все эти элементы и именно целиком состоит из них. При этом безотносительность в остальном означает, во-первых, ограничение явно

указанными отношением принадлежности элементов множеству и отношением содержания элементов состоящим из них и только из них множеством, а во-вторых, отвлечение от всех остальных отношений, включая как взаимосвязи и взаимоотношения элементов множества между собой, так и расположение, включая упорядоченность, элементов во множестве.

В классической математике понятие множества элементов определённого вида двусмысленно: то ли непременно всех, то ли, возможно, только некоторых. Например, одно и то же название множества натуральных чисел используется и для множества непременно всех натуральных чисел, и для любого из множеств некоторых натуральных чисел. Настоящая научная монография предлагает во избежание

двусмысленности непременно явно и однозначно указывать или множество всех элементов определённого вида, или множество некоторых элементов определённого вида соответственно.

В классической математике понятие множества всех натуральных чисел двусмысленно. Нуль то ли включается в это множество, то ли исключается из этого множества, причём нередко и то, и другое встречаются в пределах одного математического текста. Поэтому каждый раз необходимо разъяснение, в том числе и при символических записях вида n $\in$ N, что весьма неудобно, слишком часто не делается и ведёт к совершенно недопустимым неясности и путанице. Поэтому чрезвычайно полезно и даже необходимо введение определённости, единообразия и последующей возможной общепринятости.

Красноречиво происхождение слова «нуль» (латынь nullus никакой, figura nihili знак ничего, nulla figura никакой знак; санскрит śūnyaḥ пустота, отсутствие).

История математики убедительно доказывает следующее. В Древнем Вавилоне нуль первоначально вообще не имел никакого знака и изображался пропуском, пробелом, пустым местом, позже двойным клином, который воспринимался не как цифра, а как отсутствие цифры. В Древних Китае, Греции и Риме вообще обходились без нуля. В Европе до XVIII века нуль считался символом, а не числом. Даже доживший до XVIII века математический самородок, один из основоположников математики до Ньютона и Лейбница, автор символа бесконечности, «Арифметики бесконечного», «Всеобщей математики, или

полного курса арифметики» Джон Валлис считал: «Нуль не число». Признанию нуля числом способствовал Леонард Эйлер. Так что нуль именно как отдельное число, а не просто как цифра в многозначном числе, стал общепризнанным не тысячи лет назад, как именно натуральные (то есть естественные) числа

$$1, 2, 3, 4, ...,$$

а только в XVIII веке благодаря трудам (более двух десятилетий в Санкт-Петербурге отчасти на русском языке) Леонарда Эйлера.

Поэтому представляется целесообразным не считать нуль натуральным числом и поэтому не включать нуль во множество всех натуральных чисел

$$N = \{1, 2, 3, 4, ...\},$$

отождествляемое с последовательностью (которой является естественно вполне упорядоченное отношением «предшествующий элемент строго меньше последующего элемента» множество) всех натуральных чисел

$$\mathbf{N = (1, 2, 3, 4, ...),}$$

а использовать при необходимости расширенное дополнительным включением нуля множество всех нуль-натуральных чисел

$$\mathbf{N\&0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\},}$$

отождествляемое с последовательностью (которой является естественно вполне упорядоченное отношением «предшествующий элемент строго меньше последующего элемента» множество) всех нуль-натуральных чисел

$$\mathbf{0\&N = (0) \cup N = (0) \cup (1, 2, 3, 4, ...) = (0, 1, 2, 3, 4, ...).}$$

Обозначение. Для систем, в том числе последовательностей и хотя бы частично упорядоченных множеств, используются круглые скобки взамен фигурных скобок для множеств, а в остальном другие теоретико-множественные обозначения соответствующих действий и отношений, однако с учётом упорядоченности, исключающей переместительность (коммутативность) именно строго упорядоченных совокупностей.

Преимущество предлагаемого названия нуль-натуральных чисел и их множества заключается в соединении полной ясности и однозначности и предельной краткости.

Преимущество предлагаемого обозначения N&0 множества нуль-натуральных чисел заключается в соединении полной ясности и однозначности (добавления нуля к множеству натуральных чисел N), краткости, одноуровневости (важной при размещении этого целого обозначения в индексе) и простоты набора ввиду ограничения обычными символами клавиатуры.

Чуть более краткое обозначение N_0, во-первых, не показывает, какое именно отношение имеет индекс 0 к множеству натуральных чисел N, и поэтому нуждается в дополнительном объяснении, а во-вторых, является двухуровневым, что приводит к затруднительности размещения целого обозначения N_0 в индексе.

Разве что по методу исключения намекающее обозначение $N_{\geq 0}$ (поскольку все натуральные ч<u>и</u>сла и так не меньше нуля, но зачем-то это указано дополнительно) и ясное обозначение множества неотрицательных целых чисел $Z_{\geq 0}$, во-первых, по числу символов 3 не короче предлагаемого обозначения N&0, во-вторых, являются двухуровневыми, что приводит к затруднительности размещения целых обозначений $N_{\geq 0}$ и $Z_{\geq 0}$ в индексах, а в-третьих, машинописный набор обозначений $N_{\geq 0}$ и $Z_{\geq 0}$ резко затруднён наличием специального символа отношения $\geq$, отсутствующего на обычной клавиатуре.

В классической математике понятие счётного множества двусмысленно.

В математической литературе на русском языке обычно называется счётным только счётно бесконечное множество. Но логично считать несчётным любое множество, не являющееся счётным, то есть в таком случае не только желаемое несчётно бесконечное множество, но и нежеланное конечное множество, которое тоже не считается счётным, и для однозначности и краткости речи следовало бы называть несчётно бесконечное множество сверхсчётным множеством.

Кроме того, применительно к топологическим пространствам со счётной базой имеется в виду не более чем счётная база, которая может быть и конечной.

В математической литературе на английском языке обычно называется счётным или конечное, или счётно бесконечное множество. В переводах на русский язык также встречается включение конечного в счётное прямо в определениях.

Пример:

Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

Страница 182. «Определение. Множество A называется счётным, если оно конечно или равномощно множеству натуральных чисел.»

В математической литературе на немецком языке вообще отсутствует однозначность понимания счётного множества. Это либо только счётно бесконечное множество, как в математической литературе на русском языке, либо или конечное, или счётно бесконечное множество, как в математической литературе на английском языке.

Настоящей научной монографией предлагаются следующие логичные (однозначные, ясные и краткие) дополнительные (альтернативные) названия на русском, английском и немецком языках соответственно:

для конечного множества (finite set, endliche Menge) дополнительное (альтернативное) название: считанное множество (counted set, abgezählte Menge);

для счётно бесконечного множества (countably infinite set, abzählbar unendliche Menge) дополнительное (альтернативное) название: считаемое множество (enumerable or denumerable set, nummerierbare Menge), или всенумеруемое множество (all-numerable set, all-nummerierbare Menge);

для конечного или счётно бесконечного множества (finite or countably infinite set, endliche oder abzählbar unendliche Menge) дополнительное (альтернативное) название: счётное множество (countable set, abzählbare Menge);

для несчётно бесконечного множества (uncountably infinite set, überabzählbar unendliche Menge) дополнительное (альтернативное) название: сверхсчётное множество (overcountable or supercountable set, überabzählbare Menge).

В классической математике и вообще в науке и жизни часто используется выражение «по крайней мере», которое как минимум (если при этом речь идёт о линейной мере в том или ином смысле) двусмысленно. Например, выражение «существует по крайней мере одна точка» может означать:

1) существует по меньшей мере одна точка (хотя бы одна точка, как минимум одна точка, не менее одной точки);

2) существует по большей мере одна точка (как максимум одна точка, не более одной точки).

Во избежание такой двусмысленности предлагается вообще отказаться от использования выражения «по крайней мере» и заменять его именно однозначными выражениями в зависимости от требуемого точного смысла, например приведёнными выше в каждом из обоих смыслов или

равносильными (эквивалентными) выражениями. В случае нелинейной меры могут потребоваться другие выражения, именно однозначно передающие требуемый точный смысл.

Настоящая научная монография исправляет исторически сложившееся в классической математике двойное использование понятия плотности множества в принципиально разных смыслах.

Во-первых, это совершенно правильное и уместное понятие плотности (единичной для точки плотности множества и нулевой для точки разрежения множества) измеримого множества в точке как предела относительной меры заполнения бесконечно малой окрестности этой точки теоретико-множественным пересечением этого множества с этой окрестностью.

Во-вторых, это введённая Георгом Кантором, основоположником теории множеств, лежащей в основе всей современной классической математики, широко известная и явно неуместная в данном случае всюду плотность или нигде не плотность одного множества в другом множестве или в объемлющем топологическом пространстве, причём на деле вовсе не плотность, как можно было бы подумать по названию, а всего лишь частота представленности, то есть либо всюду частая представленность множества с наличием его точек в любой окрестности каждой точки этого другого множества или объемлющего топологического пространства соответственно в случае так называемой якобы «всюду плотности», либо всюду редкая (нигде не частая)

представленность множества с отсутствием его точек в некотором открытом подмножестве любого открытого множества объемлющего топологического пространства соответственно в случае так называемой якобы «нигде не плотности».

Настоящая научная монография называет эту частоту представленности множества также кратко вездесущностью (повсеместностью, частотой) множества и допускает добавление ссылки на широко известную и явно неуместную в данном случае плотность в круглых скобках в возможных кавычках. В итоге получаются вездесущие (повсеместные, всюду частые, всюду «плотные») и всюду редкие (нигде не частые, нигде не «плотные») множества соответственно.

4. ОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ ПРЕОДОЛЕНИЯ АНТИНОМИЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ КАНТОРА, ОСНОВОПОЛАГАЮЩЕЙ В КЛАССИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКЕ

Теория множеств Кантора с якобы непреодолимыми антиномиями является основополагающей для классической математики.

Замечание. В классической математике принципиально различаются и по-разному обозначаются:

отношение принадлежности элемента множеству и отношение включения подмножества в множество;

произвольный элемент и состоящее лишь из этого элемента одноэлементное множество.

Оба этих различения могут быть полезными и в соответствующих случаях целесообразными. Однако именно

совокупность этих обоих различений ведёт ко многим известным антиномиям теории множеств Кантора, основополагающей в классической математике. Поэтому в таких случаях целесообразна и принята в настоящей научной монографии дополнительная возможность принципиального отказа от этих двух различений.

Определение. Произвольный элемент и состоящее лишь из этого элемента одноэлементное множество, сохраняющие свои общепринятые обозначения, соответствующие выбору точки зрения на них, в том числе соответствующей рассмотрению и других отношений, на деле являются и поэтому называются различными выражениями одного и того же предмета и поэтому при необходимости, целесообразности и/или полезности могут считаться принципиально не различимыми, или тождественными.

Определение. Отношение вхождения объединяет считающиеся при этом не различимыми отношение принадлежности элемента множеству и отношение включения подмножества в множество и при необходимости, целесообразности и/или полезности обозначается знаком включения подмножества в множество.

Если таких необходимости, целесообразности и/или полезности нет, то рассматриваются и применяются общепринятые понятия и обозначения элемента, одноэлементного множества и отношений принадлежности и включения. В частности, элемент принадлежит множеству, а состоящее из этого единственного элемента одноэлементное множество включается в множество.

5. ВСЕОБЩАЯ ЛОГИКА, ИСПРАВЛЯЮЩАЯ ФОРМАЛЬНУЮ ЛОГИКУ

Не только доказательства, но и любые рассуждения должны основываться на логике как науке о правильном мышлении и его основных законах.

Однако формальная логика, включающая традиционную логику и математическую логику, имеет целый ряд принципиальных недостатков и изъянов.

Настоящая научная монография рассматривает эти принципиальные недостатки и изъяны по порядку и предлагает излагаемую всеобщую логику (название «общая логика» введено Кантом для обычной логики, то есть формальной логики), которая входит в логику в самом широком смысле слова «Логос» по Гераклиту как «вечной

и всеобщей необходимости», то есть закономерности, взаимосвязи, взаимозависимости, упорядоченности, включая также известные логику вещей и логику событий, стремится к всеобщности, использует достижения известных разновидностей логики, в том числе формальной логики как выводного знания, индуктивной логики как наведения на открытия и диалектической логики как науки о всеобщих законах мышления, и устраняет эти принципиальные недостатки и изъяны.

1. Формальная логика и вместе с ней язык и классическая наука, включая математику, используют связку есть/суть и равносильные (эквивалентные) ей, например является/являются, в единственном и множественном числах соответственно отнюдь не однозначно, а даже трёхзначно:

а) в единственно верном и допустимом обратимом смысле тождества, например: квадрат есть равносторонний прямоугольник, прямоугольные ромбы суть квадраты;

б) в неправильном (неверном) и явно неприемлемом ввиду введения в заблуждение необратимом смысле скрытой принадлежности элементов множеству, имеющему и другие элементы, например: данный квадрат ABCD есть прямоугольник, эти киты в области нашей видимости суть млекопитающие;

в) в неправильном (неверном) и явно неприемлемом ввиду введения в заблуждение необратимом смысле скрытого включения именно правильной части множества, то есть не совпадающей с целым множеством, в это целое множество, например: квадрат есть прямоугольник, киты суть млекопитающие.

Всеобщая логика использует связку есть/суть и равносильные (эквивалентные) ей, например является/являются, в единственном и множественном числах соответственно именно однозначно в единственно верном и допустимом обратимом смысле тождества, а в случае принадлежности элементов множеству и в случае включения правильной части множества в целое множество именно явно и правильно отображает соответствующие необратимые отношения во избежание введения в заблуждение, если такое заблуждение возможно, а предотвращение заблуждения необходимо и/или полезно:

а) в единственно верном и допустимом обратимом смысле тождества всеобщая логика использует связку есть/суть и равносильные (эквивалентные) ей, в частности

является/являются, в единственном и множественном числах соответственно, например: квадрат есть равносторонний прямоугольник, прямоугольные ромбы суть квадраты;

б) в случае принадлежности элементов множеству, имеющему и другие элементы, всеобщая логика использует связку (есть элемент множества)/(суть элементы множества) и равносильные (эквивалентные) ей, в частности (есть один из)/(суть некоторые) и (принадлежит к)/(принадлежат к), в единственном и множественном числах соответственно, например: например: данный квадрат ABCD есть элемент множества прямоугольников, данный квадрат ABCD есть один из прямоугольников, данный квадрат ABCD принадлежит к прямоугольникам,

эти киты в области нашей видимости суть элементы множества млекопитающих, эти киты в области нашей видимости суть некоторые млекопитающие, эти киты в области нашей видимости принадлежат к млекопитающим;

в) в случае скрытого включения именно правильной части множества, то есть не совпадающей с целым множеством, в это целое множество всеобщая логика использует связку (включается как вид в род)/(включаются как вид(ы) в род) и равносильные (эквивалентные) ей, в частности (есть вид рода)/(суть вид(ы) рода), (есть частный случай)/(суть частные случаи) и (относится к)/(относятся к), в единственном и множественном числах соответственно, например: квадрат включается как вид в род прямоугольников, квадрат есть вид рода прямоугольников,

квадрат есть частный случай прямоугольника, квадрат относится к прямоугольникам, киты включаются как вид в род млекопитающих, киты суть вид рода млекопитающих, киты суть частный случай млекопитающих, киты относятся к млекопитающим.

Замечание. Эти уточняющие усложнения особенно необходимы и полезны для формирования понятий, однако не обязательны, если понятия правильно сформированы, а заблуждения исключены.

Замечание. По биологической классификации, которая является абсолютной, китообразные образуют отряд, включённый в класс млекопитающих. В философии и логике род и вид являются относительными парными

категориями в том смысле, что вид является частным случаем рода, а род является обобщением вида, объём видового понятия является правильным подмножеством (правильной частью) объёма родового понятия, причём непременное соседство рода и вида в смысле отсутствия промежуточных категорий не обязательно. То есть для философии, логики и математики существенно, что множество китов есть правильное подмножество множества млекопитающих, и несущественно, что по абсолютной биологической классификации множество китов называется именно отрядом, а множество млекопитающих называется именно классом, важно лишь, что отряд является правильной частью класса.

2. Формальная логика использует ровно два истинностных значения – истину и ложь, которые, однако, не образуют правильной дихотомии.

Дело в том, что антонимом истины является не ложь как непременно умышленное извращающее действительность введение в заблуждение, то есть сознательный обман, а всего лишь заблуждение как ошибочное представление о действительности. Антонимом лжи является вовсе не истина, а правда, которая многозначна и может выражать не только правильность, но и собственные коренные интересы, например у каждого – своя правда.

Кроме того, и правда, и особенно ложь неизбежно передают именно эмоциональную окраску, далеко не всегда уместную в общем случае.

Например, в математике и не только в естественных, но и в гуманитарных и общественных науках часто речь идет всего лишь о правильности и ошибках чисто познавательного характера независимо от желаний, чувств, нравственности и их оценивания.

Кроме того, применительно к подобным случаям истина и заблуждение как философские категории часто оказываются явно неуместными, например слишком громкими, расплывчатыми, недостаточно определёнными.

Неоднозначно и соответствие действительности, часто самопротиворечивой и к тому же искусственно изменяемой, требующее непременно правильного истолкования.

Например, кто-нибудь может выразить на доске или на листе бумаги ошибочное утверждение, скажем, якобы «дважды два есть пять», и тогда оно начинает соответствовать его изображающей части действительности, а именно доске или листу бумаги с такой ошибочной записью.

Это замечание является действенным не только для логики, но и для философии в целом.

Поэтому всеобщая логика предлагает равносильные (эквивалентные) простые, чёткие, ясные и вполне однозначные дихотомии да–нет, правильность–ошибка, правильно–ошибочно, верно–неверно и другие подобные равносильные (эквивалентные) этим пары антонимов.

3. Неприятным чисто терминологическим недочётом формальной логики и вслед за ней классической математики является использование названия метода доказательства от противного как именно отталкивающе эмоционально окрашенного. Всеобщая логика легко устраняет этот недочёт простым использованием исправленного названия метода доказательства от противоречащего, что безупречно выражает сущность этого метода.

4. Стремление математики во что бы то ни стало избегать противоречивости во многом связано с использованием так называемой импликации (материальной импликации, следования следствия, или заключения, из основания, или посылки), например имеющей вид «посылка влечёт следствие». То есть основание достаточно для следствия, а следствие необходимо для основания. В отличие от условного суждения в языке и в формальной логике, истинностное значение (правильность или ошибочность) импликации в формальной логике считается зависящим только от истинностных значений посылки и следствия независимо от их содержаний (смыслов) и от возможного наличия причинно-следственной связи между ними, их временной связи и так далее.

Импликация считается ошибочной в том единственном случае, если и только если посылка правильна и при этом следствие ошибочно, и считается правильной, если и посылка, и следствие правильны или если посылка ошибочна независимо от следствия.

Последний случай приводит к тому, что из ошибочного (то есть неверного, неправильного), в том числе противоречивого, высказывания следует любое высказывание, в частности ошибочное, в том числе противоречивое.

Это первый и главный парадокс материальной импликации, особенно вредный потому, что способен вести именно к расширенному производству ошибочных утверждений.

Примеры правильных умозаключений (материальных импликаций) при ошибочных, в том числе противоречивых, суждениях – и посылках (основаниях), и следствиях:

Если дважды два есть пять, то круг есть квадрат.

Если дважды два не есть четыре и дважды два есть четыре, то круг не есть квадрат и круг есть квадрат.

Если дважды два есть четыре и дважды два не есть четыре, то круг есть квадрат.

Если дважды два есть пять, то круг есть квадрат и круг не есть квадрат.

Если Екатерина Великая есть Наполеон, то Екатерина Великая есть Юлий Цезарь.

Вторым парадоксом материальной импликации является следование правильного из ошибочного. Этот парадокс неприятен, однако менее вреден по сравнению с первым парадоксом, поскольку не способен вести именно к расширенному производству ошибочных утверждений.

Формальная импликация Бертрана Рассела всего лишь вносит в явном виде и акцентирует переменную с квантором всеобщности.

Строгая импликация Льюиса вносит осмысленность, однако не позволяет избавиться от обоих парадоксов материальной импликации.

Каузальная импликация использует понятия каузальных возможности, невозможности и необходимости, лишь частично отражает причинность и ведёт к своим парадоксам:

любое высказывание каузально следует из каузально невозможного высказывания;

из любого высказывания каузально следует каузально необходимое высказывание.

Релевантная импликация Аккермана позволяет избавиться от обоих парадоксов материальной импликации, однако обладает ограниченными возможностями и часто ведёт к недоказуемости.

Поэтому сохранение дееспособной материальной импликации является чрезвычайно полезным не только для формальной логики.

Ведь при разветвлении, переборе различных случаев, выборе вариантов и принятии решений часто оказывается удобным брать в качестве посылок (оснований) значения той или иной чисто формальной переменной, включая лингвистическую, ни в малейшей степени не являющиеся причинами следствий импликаций.

Всеобщая логика полностью устраняет парадоксы материальной импликации и обеспечивает её безупречную работоспособность благодаря следующим двум общим правилам:

1) если и только если посылка материальной импликации правильна, – импликация далее рассматривается и выполняется вместе с её следствием;

2) если и только если посылка материальной импликации ошибочна, – импликация далее вообще не рассматривается и не выполняется вместе с её следствием, то есть опускается.

Пример.

Если дважды два есть пять, то круг есть квадрат.

Посылка «дважды два есть пять» этой материальной импликации ошибочна.

Поэтому по второму общему правилу всеобщей логики эта материальная импликация опускается, то есть вообще не рассматривается далее, как и её следствие «круг есть квадрат» вместе с кругом, квадратом и суждением «круг есть квадрат».

5. Формальная логика линейна, последовательна, безвозвратна, чётка, бесчувственна, не обучаема, догматична, неспособна приспосабливаться к решаемой задаче и при этом развиваться.

Эти изъяны естественны для бездумного и бесчувственного искусственного интеллекта, по существу искусственного рассудка, однако совершенно неприемлемы для человека и человечности.

Всеобщая логика, вообще говоря, нелинейна, может быть непоследовательной, возвратной, нечёткой, учитывающей чувства и волю, обучаемой, гибкой, способной приспосабливаться к решаемой задаче и при этом развиваться.

Эти дополнительные возможности как достоинства, непосильные для бездумного и бесчувственного искусственного рассудка, являются чрезвычайно ценными, очень полезными и даже необходимыми для человека и человечности,
особенно в условиях быстрорастущей сложности решаемых задач.
Всё это ярко проявляется при разветвлении, переборе различных случаев, выборе вариантов и принятии решений.

Пример.

Таблица. Сопоставление (соответствующих при наличии соответствий) доводов (достоинств) и противодоводов (недостатков) формальной логики и предлагаемой всеобщей логики для принятия решения о целесообразности создания, развития, использования и представления всеобщей логики.

Формальная логика		Предлагаемая всеобщая логика	
Противодоводы	Доводы	Противодоводы	Доводы
истина			правильность
ложь			ошибка
от противного			от противоречащего
парадоксы материальной импликации			нет парадоксов материальной импликации

Формальная логика		Предлагаемая всеобщая логика	
Противодоводы	Доводы	Противодоводы	Доводы
производство ошибочных утверждений			нет производства ошибочных утверждений
линейность			(не)линейность
последовательность			(не)последовательность
безвозвратность			(без)возвратность
чёткость			(не)чёткость
бесчувственность			чувственность
необучаемость			обучаемость
догматичность			гибкость
неприспособляемость			приспособляемость
неразвиваемость			развиваемость

Замечание. Для формальной логики, особенно для математической логики, характерна линейная последовательность без возвратов. Это чрезвычайно удобно и даже необходимо для искусственного рассудка, однако явно недостаточно для человеческого разума, поскольку влечёт догматичность, неспособность приспосабливаться к решаемой задаче и при этом развиваться. Встречаются лишь элементы возвратности. Например, в выделяющем условном суждении основание и следствие необходимы и достаточны друг для друга.

Замечание. Всеобщая логика допускает не только линейную последовательность без возвратов, но и нелинейность и возвраты. Это чрезвычайно удобно и даже необходимо для человеческого разума, ещё и способного именно искусно использовать грубую силу искусственного рассудка, влечёт гибкость, способность приспосабливаться к решаемой задаче и при этом развиваться.

Замечание. Формальная логика является чёткой. Нечёткая логика существует отдельно от формальной логики. А всеобщая логика допускает и чёткость, и нечёткость и поэтому соединяет преимущества и чёткой логики, и нечёткой логики.

Замечание. Формальная логика имеет своим предметом формы и законы правильного мышления. Однако человеческая душа (психика) включает не только мышление. В неё входят ещё и волеизъявление и чувствование, причём не только познавательное, но и эмоциональное. Всё это находится далеко за пределами формальной логики. Разумеется, эмоциональные решения, как правило, ошибочны. А всеобщая логика не только полностью учитывает, но и полезно преобразует именно мышлением чувствование и волеизъявление, включая желания, стремления и интересы, именно как дополнительные доводы и противодоводы. Это необходимо для успешной жизнедеятельности, невозможной при отсутствии соответствующих желаний, стремлений и интересов, а особенно при активном нежелании.

Замечание. Всеобщая логика соединяет достижения известных видов логики, включая формальную дедуктивную логику с традиционной логикой и математической логикой, индуктивную логику, многозначную логику, нечёткую логику, модальную логику, а также математики, филологии, философии, психологии, педагогики и других наук.

Замечание. Всеобщая логика является многозначной, допуская наряду с обычными логическими значениями 1 (правильность) и 0 (ошибочность) другие чёткие и нечёткие числовые значения, а также n1 (необходимость), n0 (невозможность), p (возможность с вероятностью p).

Следствие. Логическое значение импликации с необходимой посылкой равно логическому значению следствия этой импликации. То есть в ней посылка и следование опускаются, остаётся лишь следствие.

Следствие. Импликация с невозможной посылкой опускается, до следования и следствия рассмотрение не доходит.

Замечание. Импликация вида A ⇒ B, равносильность (эквивалентность) вида A ⇔ B являются бинарными логическими отношениями непереместительным (некоммутативным) и переместительным (коммутативным) соответственно. Полезны обобщения.

Определение. Взвешенным предметом называется предмет A с указанным весом w.

Обозначение. Вес w взвешенного предмета выражается левым нижним указателем (индексом): ${}_{w}A$.

Замечание. В качестве весомости (математического веса) w и наряду с ней может использоваться мера любого целесообразного свойства этого предмета, например:

полезность $u \in [0, 1]$ (вредность $u \in [-1, 0]$),

желательность $d \in [0, 1]$ (нежелательность $d \in [-1, 0]$),

правдоподобие, приемлемость, применимость $t \in [0, 1]$ (неправдоподобие, неприемлемость, неприменимость $t \in [-1, 0]$),

вероятность $p \in [0, 1]$.

Замечание. Возможно совместное указание мер произвольного множества свойств предмета, включая его вес.

Обозначение. Меры произвольного множества свойств предмета, возможно, включая его вес, выражаются в левом нижнем указателе (индексе) условной последовательностью этих мер в произвольном порядке, к каждому из численных выражений этих мер приписывается справа буквенное обозначение соответствующей меры, в качестве разделительных знаков используются запятые, а при зависимости этих мер от переменных, в частности от указателей (индексов), эти переменные обозначаются как аргументы соответствующих функций.

Пример. Левый нижний указатель (индекс)

$$0.(3)p(r,s),-0.5t(r,s),-0.7d(r,s),-0.8u(r,s),0.3w(r,s);$$

предмет A с этим указателем (индексом)

$${}_{0.(3)p(r,s),-0.5t(r,s),-0.7d(r,s),-0.8u(r,s),0.3w(r,s)}A.$$

Определение. Системным предметным отношением называется предмет, равносильный (эквивалентный) выражаемой им как итогом соответствующей системе предметов и выражающийся соответствующей функцией этой системы предметов.

Замечание. Системное предметное отношение зависит не только от предметов системы, но и от системы их взаимосвязей, то есть от строения системы, включая возможные причинно-следственные связи, последовательности во времени и так далее.

Замечание. Система предметов может быть произвольной, причём не только конечной, но и бесконечной.

Обозначение. Система взвешенных системных предметных отношений

$$({}_{r\in R\ W(r)}M_r({}_{s\in S\ w(r,s)}A_s)),\ ({}_{r\in R\ W(r)}M_r({}_{s\in S\ w(r,s)}A(s))),$$

где

r – указатель (индекс) системного предметного отношения;

R – система указателей (индексов) системных предметных отношений;

M_r – системное предметное отношение с указателем (индексом) r;

s – указатель (индекс) предмета;

S – система указателей (индексов) предметов;

A_s = A(s) – предмет с указателем (индексом) s, слева краткое двухуровневое обозначение, справа равносильное (эквивалентное) одноуровневое обозначение;

$W(r)$ – вес системного предметного отношения M_r с указателем (индексом) r в системе взвешенных сущностных системных логических отношений;

$w(r,s)$ – вес предмета A_s с указателем (индексом) s в системном предметном отношении M_r с указателем (индексом) r;

$({}_{s\in S}\ {}_{w(r,s)}A_s) = ({}_{s\in S}\ {}_{w(r,s)}A(s))$ – система взвешенных предметов $A_s = A(s)$ с указателями (индексами) s и весами $w(r,s)$ в системном предметном отношении M_r с указателем (индексом) r, соответствующая системе S указателей (индексов) s.

<u>Замечание</u>. И <u>система</u> S указателей (индексов) s, и соответствующая ей <u>система</u> $({}_{s\in S}\ {}_{w(r,s)}A_s) = ({}_{s\in S}\ {}_{w(r,s)}A(s))$ взвешенных предметов $A_s = A(s)$ с весами $w(r,s)$ могут иметь

строения (структуры) как системы отношений их элементов и лишь в простейшем частном случае безотносительности, включающей неупорядоченность, совпадают с не имеющими строений (структур) своими носителями как множествами всех соответствующих элементов.

Замечание. В системе взвешенных системных предметных отношений можно считать, как это и делается здесь, что каждое из этих отношений имеет место именно между всеми предметами системы. Это не является ограничением общности. Действительно, в каждом из этих отношений, относящихся не ко всем предметам системы, можно считать, что это отношение относится ко всем предметам системы, и при этом придавать нулевой вес каждому предмету системы, к которому это отношение не относится.

Кроме того, указание именно всех предметов системы в каждом из отношений соответствует принципу всеобщей взаимосвязанности предметов и явлений. В приближённой всеобщей логике можно пренебречь в каждом из этих отношений не только предметами с нулевыми весами, но и предметами с достаточно малыми положительными весами.

Обозначение. При бесструктурности систем, тем самым сводящихся к их носителям, а именно множествам, взамен круглых скобок для систем используются фигурные скобки для множеств.

Примеры.

$$\{_{r\in R\ W(r)}M_r(_{s\in S\ w(r,s)}A_s)\},\ \{_{r\in R\ W(r)}M_r(_{s\in S\ w(r,s)}A(s))\};$$
$$(_{r\in R\ W(r)}M_r\{_{s\in S\ w(r,s)}A_s\}),\ (_{r\in R\ W(r)}M_r\{_{s\in S\ w(r,s)}A(s)\});$$
$$\{_{r\in R\ W(r)}M_r\{_{s\in S\ w(r,s)}A_s\}\},\ \{_{r\in R\ W(r)}M_r\{_{s\in S\ w(r,s)}A(s)\}\}.$$

Определение. Сущностным системным логическим отношением называется высказывание, равносильное (эквивалентное) выражаемой им как итогом соответствующей системе высказываний и выражающееся соответствующей функцией этой системы высказываний.

Замечание. Сущностное системное логическое отношение зависит не только от логических значений высказываний, но и от их содержаний и смыслов, возможных причинно-следственных связей, последовательностей во времени и так далее.

Замечание. Система высказываний может быть произвольной, причём не только конечной, но и бесконечной.

Обозначение. Система взвешенных сущностных системных логических отношений

$$({}_{r\in R\ W(r)}E_r({}_{s\in S\ w(r,s)}P_s)),\ ({}_{r\in R\ W(r)}E_r\,({}_{s\in S\ w(r,s)}P(s))),$$

где

r – указатель (индекс) сущностного системного логического отношения;

R – система указателей (индексов) сущностных системных логических отношений;

E_r – сущностное системное логическое отношение с указателем (индексом) r;

s – указатель (индекс) высказывания;

S – система указателей (индексов) высказываний;

$P_s = P(s)$ – высказывание с указателем (индексом) s, слева краткое двухуровневое обозначение, справа равносильное (эквивалентное) одноуровневое обозначение;

$W(r)$ – вес сущностного системного логического отношения E_r с указателем (индексом) r в системе взвешенных сущностных системных логических отношений;

$w(r,s)$ – вес высказывания P_s с указателем (индексом) s в сущностном системном логическом отношении E_r с указателем (индексом) r;

$({}_{s\in S}\quad {}_{w(r,s)}P_s) = ({}_{s\in S}\quad {}_{w(r,s)}P(s))$ – система взвешенных <u>высказываний</u> $P_s = P(s)$ с указателями (индексами) s и весами $w(r,s)$ в сущностном системном логическом отношении E_r с указателем (индексом) r, соответствующая системе S указателей (индексов) s.

Замечание. И система S указателей (индексов) s, и соответствующая ей система $({}_{s\in S}\ {}_{w(r,s)}P_s) = ({}_{s\in S}\ {}_{w(r,s)}P(s))$ взвешенных высказываний $P_s = P(s)$ с весами w(r,s) могут иметь строения (структуры) как системы отношений их элементов и лишь в простейшем частном случае безотносительности, включающей неупорядоченность, совпадают с не имеющими строений (структур) своими носителями как множествами всех соответствующих элементов.

Замечание. В системе взвешенных сущностных системных логических отношений можно считать, как это и делается здесь, что каждое из этих отношений имеет место именно между всеми высказываниями системы. Это не является ограничением общности. Действительно, в каждом из этих

отношений, относящихся не ко всем высказываниям системы, можно считать, что это отношение относится ко всем высказываниям системы, и при этом придавать нулевой вес каждому высказыванию системы, к которому это отношение не относится. В приближённой всеобщей логике можно пренебречь в каждом из этих отношений не только высказываниями с нулевыми весами, но и высказываниями с достаточно малыми положительными весами.

Обозначение. При бесструктурности систем, тем самым сводящихся к их носителям, а именно множествам, взамен круглых скобок для систем используются фигурные скобки для множеств.

Примеры.

$$\{_{r\in R\ W(r)}E_r(_{s\in S\ w(r,s)}P_s)\},\ \{_{r\in R\ W(r)}E_r(_{s\in S\ w(r,s)}P(s))\};$$

$$(_{r\in R\ W(r)}E_r\{_{s\in S\ w(r,s)}P_s\}),\ (_{r\in R\ W(r)}E_r\{_{s\in S\ w(r,s)}P(s)\});$$

$$\{_{r\in R\ W(r)}E_r\{_{s\in S\ w(r,s)}P_s\}\},\ \{_{r\in R\ W(r)}E_r\{_{s\in S\ w(r,s)}P(s)\}\}.$$

Определение. Формальным системным логическим отношением называется логическая переменная, принимающая логические значения, как функция произвольной системы логических переменных.

Замечание. Формальное системное логическое отношение зависит только от логических значений логических переменных и не зависит от содержаний и смыслов, возможных причинно-следственных связей, последовательностей во времени и так далее.

Замечание. Система логических переменных может быть произвольной, причём не только конечной, но и бесконечной.

Обозначение. Система взвешенных формальных системных логических отношений

$$({}_{r\in R}\ {}_{W(r)}F_r({}_{s\in S}\ {}_{w(r,s)}L_s)),\ ({}_{r\in R}\ {}_{W(r)}F_r({}_{s\in S}\ {}_{w(r,s)}L(s))),$$

где

r – указатель (индекс) формального системного логического отношения;

R – система указателей (индексов) формальных системных логических отношений;

F_r – формальное системное логическое отношение с указателем (индексом) r;

s – указатель (индекс) логической переменной;

S – система указателей (индексов) логических переменных;

$L_s = L(s)$ – логическая переменная с указателем (индексом) s, слева краткое двухуровневое обозначение, справа равносильное (эквивалентное) одноуровневое обозначение;

$W(r)$ – вес формального системного логического отношения F_r с указателем (индексом) r в системе взвешенных формальных системных логических отношений;

$w(r,s)$ – вес логической переменной L_s с указателем (индексом) s в формальном системном логическом отношении F_r с указателем (индексом) r;

$({}_{s\in S}\ {}_{w(r,s)}L_s) = ({}_{s\in S}\ {}_{w(r,s)}L(s))$ – система взвешенных логических переменных $L_s = L(s)$ с указателями (индексами) s и весами $w(r,s)$ в формальном системном логическом отношении F_r с указателем (индексом) r, соответствующая системе S указателей (индексов) s.

Замечание. И система S указателей (индексов) s, и соответствующая ей система $({}_{s\in S}\ {}_{w(r,s)}L_s) = ({}_{s\in S}\ {}_{w(r,s)}L(s))$ взвешенных логических переменных $L_s = L(s)$ с весами w(r,s) могут иметь строения (структуры) как системы отношений их элементов и лишь в простейшем частном случае безотносительности, включающей неупорядоченность, совпадают с не имеющими строений (структур) своими носителями как множествами всех соответствующих элементов.

Замечание. В системе взвешенных формальных системных логических отношений можно считать, как это и делается здесь, что каждое из этих отношений имеет место именно между всеми логическими переменными системы. Это не является ограничением общности. Действительно, в

каждом из этих отношений, относящихся не ко всем логическим переменным системы, можно считать, что это отношение относится ко всем логическим переменным системы, и при этом придавать нулевой вес каждому логическому переменному системы, к которому это отношение не относится. В приближённой всеобщей логике можно пренебречь в каждом из этих отношений не только логическими переменными с нулевыми весами, но и логическими переменными с достаточно малыми положительными весами.

Обозначение. При бесструктурности систем, тем самым сводящихся к их носителям, а именно множествам, взамен круглых скобок для систем используются фигурные скобки для множеств.

Примеры.

$$\{_{r\in R\ W(r)}F_r(_{s\in S\ w(r,s)}L_s)\},\ \{_{r\in R\ W(r)}F_r(_{s\in S\ w(r,s)}L(s))\};$$

$$(_{r\in R\ W(r)}F_r\{_{s\in S\ w(r,s)}L_s\}),\ (_{r\in R\ W(r)}F_r\{_{s\in S\ w(r,s)}L(s)\});$$

$$\{_{r\in R\ W(r)}F_r\{_{s\in S\ w(r,s)}L_s\}\},\ \{_{r\in R\ W(r)}F_r\{_{s\in S\ w(r,s)}L(s)\}\}.$$

Определение. Иерархической математической индукцией называется многоуровневая упорядоченная последовательная математическая индукция, каждый нижестоящий (последующий, любой, кроме наивысшего) уровень которой как относительно внутренний вложен во все вышестоящие (предыдущие, более высокие) её уровни как относительно внешние.

Замечание. Всеобщая логика целостна, синергична и саморазвивается подобно живому организму и психике. Для более ясного представления о всеобщей логике

целесообразны её хотя бы весьма условные анализ и синтез с выделением хотя бы некоторых её взаимосвязанных составных частей с выражением их иерархии. При этом выделение не является разбиением, а об исчерпании именно всех составных частей не может быть и речи, да и возможно множество таких иерархий. Подобным образом условно выделяются системы живого организма, а также чувствование, мышление и волеизъявление в психике с недопустимым оставлением памяти с её различными видами в стороне. Следующие две таблицы могут дать некоторое представление о составе, строении и возможных иерархиях всеобщей логики (ВЛ), или универсальной логики, кратко унилогики, причём только о самых верхних частях неограниченно продолжающихся вниз иерархий всеобщей логики.

Таблица. Иерархия всеобщей логики (ВЛ): всеобщие ЖИЗНЕЛОГИКА, ПСИХОЛОГИКА И ДЕЕЛОГИКА.

ВСЕОБЩАЯ ЖИЗНЕЛОГИКА		ВСЕОБЩАЯ ПСИХОЛОГИКА		ВСЕОБЩАЯ ДЕЕЛОГИКА	
УНИПРИРОДО ЛОГИКА	УНИОБЩЕ ЛОГИКА	УНИЧУВСТВО ЛОГИКА	УНИМЫСЛЕ ЛОГИКА	УНИВОЛЕ ЛОГИКА	УНИДЕЛЬНО ЛОГИКА
ВЛ мироздания ВЛ места Унилогика времени Унилогика изменения Унилогика жизни Унилогика развития	Унилогика личности Унилогика семьи Унилогика общества Унилогика права ВЛ государства ВЛ иерархии	ВЛ ощущения ВЛ переживания Унилогика нрава Унилогика любви Унилогика судьбы ВЛ счастья	ВЛ здравомыслия Унилогика целей Унилогика средств Унилогика поиска ВЛ творчества ВЛ созидания	ВЛ потребностей ВЛ призвания ВЛ самовоспитания ВЛ настойчивости ВЛ ответственности ВЛ надёжности	Унилогика игры Унилогика труда ВЛ управления Унилогика отдыха ВЛ успеха ВЛ достижения

Замечание. В последней иерархии исходна трихотомия условного выделения, далее следуют дихотомии и выделения шестёрок составляющих частей.

Таблица. Иерархия всеобщей логики. Всеобщая логика вещности, духовности и общности.

Всеобщая логика вещности	**Всеобщая логика духовности**	**Всеобщая логика общности**
Всеобщая логика мироздания	**Всеобщая логика психосферы**	**Всеобщая логика обобществления**
Всеобщая логика мироведения	**Всеобщая логика мировоззрения**	**Всеобщая логика личноведения**

Всеобщая логика онтологии	**Всеобщая логика опытности**	**Всеобщая логика саморазвития**
Всеобщая логика всеистории	**Всеобщая логика здравомыслия**	**Всеобщая логика оздоровления**
Всеобщая логика глобализма	**Всеобщая логика воображения**	**Всеобщая логика самообучения**
Всеобщая логика неорганики	**Всеобщая логика мифологии**	**Всеобщая логика самовоспитания**
Всеобщая логика жизни	**Всеобщая логика верования**	**Всеобщая логика открытия**
Всеобщая логика экологии	**Всеобщая логика философии**	**Всеобщая логика изобретения**

Всеобщая логика природоведения	**Всеобщая логика науковедения**	**Всеобщая логика любви и семьи**
Всеобщая логика физики **Всеобщая логика механики** **Всеобщая логика прочности** **Всеобщая логика устойчивости** **Всеобщая логика надёжности** **Всеобщая логика долговечности**	**Всеобщая логика гносеологии** **Всеобщая логика психологии** **Всеобщая логика металогики** **Всеобщая логика математики** **Всеобщая логика кибернетики** **Всеобщая логика метрологии**	**Всеобщая логика создания семьи** **Всеобщая логика развития семьи** **Всеобщая логика семьеведения** **Всеобщая логика развития детей** **Всеобщая логика развития талантов** **Всеобщая логика развития рода**

Всеобщая логика техноведения	**Всеобщая логика искусствоведения**	**Всеобщая логика обществоведения**
Всеобщая логика техносферы **Всеобщая логика промышленности** **Всеобщая логика сельского хозяйства** **Всеобщая логика транспорта** **Всеобщая логика связи** **Всеобщая логика домотехники**	**Всеобщая логика изобразительности** **Всеобщая логика музыкальности** **Всеобщая логика зодчества** **Всеобщая логика словесности** **Всеобщая логика созидания** **Всеобщая логика отворчествления**	**Всеобщая логика дружбы** **Всеобщая логика сотрудничества** **Всеобщая логика педагогики** **Всеобщая логика народоведения** **Всеобщая логика хозяйствования** **Всеобщая логика государственности**

Замечание. В последней иерархии исходна трихотомия условного выделения с двойными названиями, далее следуют трихотомии и выделения шестёрок составляющих частей.

Замечание. Всеобщая логика является человеческой логикой главенства здравого смысла, диктующего формальную правильность и исключающего главенство формальностей.

Замечание. Целесообразно хотя бы кратко представить некоторые из составных частей всеобщей логики, причём лишь отчасти указанные непосредственно в приведённых самых верхних частях неограниченно продолжающихся вниз иерархий всеобщей логики.

Всеобщая логика здравого смысла личности и общества открывает, логически учитывает и использует логику и законы становления и развития здравого смысла в иерархии мышления, неопровержимо доказывает ключевую роль здравого смысла в жизни всех, даже учёных, и нацелена на общественно и лично жизненно необходимое и полезное повышение устойчивости, прочности, надёжности и долговечности личности и общества и их здравомыслия при любых жизненных событиях, поворотах и превратностях судьбы, сколь угодно изощрённых вредных воздействиях внутренних и внешних враждебных сил, включая навязывание рекламы и пропаганды.

Формальная всеобщая логика ограничивается логическими значениями логических переменных и полностью отвлекается от всего остального, включая смыслы, содержания, причинно-следственные связи, временные последовательности и так далее.

Сущностно точная всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы общеполезных исследования, достижения и развития сущностной точности здравого смысла, мышления в целом и мудрости с чувствованием и предчувствием интуиции посредством выделения и рассмотрения всех существенных взаимосвязей с отвлечением от всех несущественных взаимосвязей.

Приближённая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы общеполезных исследования, достижения и развития общей теории приближений, принципиально отличающихся от точности и тем более важных, необходимых и полезных, что иррациональные и некоторые рациональные числа невозможно достаточно ясно ощутить и приемлемо представить себе без их приближений, а при отсутствии возможности пренебречь малыми влияниями вообще невозможно рассмотреть что бы то ни было именно отдельно ввиду наличия и действия всеобщей связи предметов и явлений.

Предельная всеобщая логика логически учитывает, использует и развивает пределы и крайности, в том числе с целью найти возможные принципиальные особенности, контрпримеры и пределы применимости теорем, методов и теорий.

Множественная всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы общеполезных исследования и развития общей теории множеств.

Сверхмножественная всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы общеполезных исследования и развития общей теории сверхмножеств.

Целочастичная всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы общеполезных исследования и развития общей теории целого и его частей.

Системная всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы общеполезных исследования и развития общей теории систем, их элементов и строений (структур), причём частными случаями систем являются частично упорядоченное множество, упорядоченное множество и вполне упорядоченное множество.

Языковедческая всеобщая логика проникновенно исследует, извлекает, развивает и использует логику языка и речи, сохранения их исконности и животворности, их оживления, очищения, одухотворения и полезного развития, раскрывает жизненно необходимые ключевые роли языка и речи в формировании и развитии, образовании, воспитании и мировоззрении общества и личности с её совестью, нравственностью, чувствованием, мышлением, волеизъявлением и жизнедеятельностью, открывает, логически учитывает и использует законы языка и речи с учётом опыта и выражающих его предположений, предрассудков и предубеждений, предпочтений и стереотипов, привычек и обычаев, традиций и обрядов во имя общеполезных совершенствования и созидания.

Литературоведческая всеобщая логика проникновенно исследует, извлекает, открывает, развивает и использует логику и законы общеполезных сочинения, исследования, продвижения и применения произведений литературы, включая мифологию, (пере)осмысливаемый всеобщими метафольклорностью и герменевтикой фольклор (особенно сказки, пословицы и поговорки), авторские афоризмы, поэзию, прозу, драматургию и науковедение с научными и научно-популярными произведениями, раскрывает их жизненно необходимые ключевые роли в формировании и развитии, образовании, воспитании и мировоззрении общества и личности с её совестью, нравственностью, чувствованием, мышлением, волеизъявлением и жизнедеятельностью, в представлении и продвижении именно положительных личных и общественных примеров во имя общеполезных совершенствования и созидания.

Искусствоведческая всеобщая логика проникновенно исследует, извлекает, открывает, развивает и использует логику и законы общеполезных создания, исследования, продвижения и применения произведений искусства, включая музыку, театр, кино, живопись, ваяние, зодчество и декоративно-прикладное искусство, раскрывает их жизненно необходимые ключевые роли в формировании и развитии, образовании, воспитании и мировоззрении общества и личности с её совестью, нравственностью, чувствованием, мышлением, волеизъявлением и жизнедеятельностью, в представлении и продвижении именно положительных личных и общественных примеров во имя общеполезных совершенствования и созидания.

Психологическая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы психологии, в особенности относящиеся к вниманию, ощущению, чувствованию, восприятию, воображению, мышлению и памяти.

Педагогическая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы педагогики образования и самообразования, включая обучение и самообучение, воспитание и самовоспитание, а также развитие и сохранение мышления, чувствования, волеизъявления и памяти в деятельности.

Демографическая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы исследований демографии и общеполезного управления ею в интересах развития человечества в целом с учётом всемирно-исторического опыта и выражающих его предположений, предрассудков и предубеждений, предпочтений и стереотипов, привычек и обычаев, традиций и обрядов и их определяющего влияния на жизнедеятельность народов и на преобладающий их менталитет (строй души), его общеполезных воспроизводства, формирования, развития, представления и продвижения именно положительных личных и общественных примеров во имя общеполезных совершенствования и созидания.

Всемирно-историческая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы всемирно-исторических развития, исследования, представления, продвижения, обучения и воспитания, вписывает разрозненные события в единую и тем самым развивающуюся всемирно-историческую картину мира, обеспечивает правильной методологией изложения истории усиленное и усиливающее непременно общеполезное для всего человечества в целом развитие народов с учётом всемирно-исторического опыта и выражающих его предположений, предрассудков и предубеждений, предпочтений и стереотипов, привычек и обычаев, традиций и обрядов и их определяющего влияния на жизнедеятельность народов и на преобладающий их

менталитет (строй души), его общеполезных воспроизводства, формирования, развития, представления и продвижения именно положительных личных и общественных примеров во имя общеполезных совершенствования и созидания. Более того, всемирно-историческая всеобщая логика, опираясь на всемирно-историческое обобщение даже единичного до всеобщего по категорическому императиву Канта, помогает именно здравомыслящим образом, логично, разумно, мирно, взаимоприемлемо и очень убедительно согласовывать между собой даже, казалось бы, не просто противоречащие друг другу, но и непримиримые (антагонистические) интересы.

Географическая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы исследований географии территорий и её определяющего влияния на жизнедеятельность народов и на преобладающий их менталитет (строй души), его общеполезных формирования, развития, представления и продвижения.

Геополитическая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы исследований геополитики и её определяющего влияния на жизнедеятельность народов и на преобладающий их менталитет (строй души), его общеполезных формирования, развития, представления и продвижения.

Игровая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы игр, включая борьбу и войны.

Догматическая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы верования и вероисповедания, идеологии с агитацией и пропагандой и юриспруденции.

Традиционалистская всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы исследований и сохранения опыта и выражающих его предположений, предрассудков и предубеждений, предпочтений и стереотипов, привычек и обычаев, традиций и обрядов и их определяющего влияния на жизнедеятельность народов и на преобладающий их менталитет (строй души), его общеполезных воспроизводства, формирования, развития, представления и продвижения.

Развивающая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы исследований и общеполезного развития личностей, народов и человечества в целом, сохранения опыта и выражающих его предположений, предрассудков и предубеждений, предпочтений и стереотипов, привычек и обычаев, традиций и обрядов и их определяющего влияния на жизнедеятельность народов и на преобладающий их менталитет (строй души), его общеполезные воспроизводство, формирование, развитие, представление и продвижение.

Коммуникативная всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы общения (коммуникации).

Управленческая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику, законы и методологии управления и самоуправления, включая прямую и обратную связь и особенно принятие наилучших решений, в том числе при нечёткости и неопределённости, исходя именно из всей полноты имеющихся подлинных данных независимо от того, нравятся ли эти данные себе или кому бы то ни было другому.

Исследовательская всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы исследовательской деятельности, включая жизненную, искусную и научную с правдоподобными рассуждениями и решением принципиально новых задач, в том числе при нечёткости и неопределённости, исходя именно из всей полноты имеющихся подлинных данных независимо от того, нравятся ли эти данные себе или кому бы то ни было другому.

Творческая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы творчества в жизни, искусстве, науке и технике.

Созидательная всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы созидания в жизни, искусстве, науке и технике и убеждает в необходимости именно общеполезного созидания с помощью непременно доброжелательной и полезной созидательной критики с полным отсутствием разрушительного критиканства.

Разрушительная всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы разрушения в жизни, включая телесное, душевное и духовное здоровье личности и общества, искусстве, науке и технике

непременно с целью обеспечения устойчивости, прочности, надёжности и долговечности путём предотвращения разрушений даже при экстремальных (крайне высоких) природных, технических и общественных (в том числе обусловленных враждебной деятельностью изнутри и извне) нагрузках и условиях нагружения и испытания и убеждает в необходимости именно общеполезного созидания с помощью непременно доброжелательной и полезной созидательной критики с полным отсутствием разрушительного критиканства, а также наилучшим образом использует деятельность критиканов посредством гроссмейстерского метамышления, усиливающего уверенность в правильности собственных действий путём повторного выворачивания наизнанку всех измышлений и извращений критиканов, однако со взятием на вооружение всех справедливых их замечаний.

Всеобщая логика открытий открывает, логически учитывает и использует логику и законы открытий неизвестного в жизни, искусстве, науке и технике.

Изобретательская всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы изобретательства и рационализаторства в жизни, искусстве, науке и технике путём создания во всех них изобретений небывалого и рационализаторских предложений.

Всеобщая логика рационализации открывает, логически учитывает и использует логику и законы концептуализации, методологизации и рационализации в жизни, искусстве, науке и технике, включая непременно продуманное построение всей жизнедеятельности, обязательное исключение именно эмоционального и, как

правило, ошибочного принятия решений и вместо этого чисто мыслительное принятие решений с непременным учётом эмоций всего лишь как одного из доводов или противодоводов.

Философская всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы формирования, исправления и развития философии и мировоззрения с целью правильного общего понимания даже далёких областей знания, а также для общественных и личных успокоения, умиротворения, духовного, душевного и телесного очищения путём философического отношении к жизни, её событиям и даже крутым поворотам и превратностям судьбы.

Судьбоносная всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы общественно и лично наиболее полезного выбора жизненного пути и соответствующего неуклонного следования наивысшему возможному непременно общеполезному призванию с достижениями в деятельности, саморазвитии и развитии общества.

Всеобщая логика потребностей открывает, логически учитывает и использует логику и законы становления и развития общественно и лично наиболее полезных потребностей.

Всеобщая логика возможностей открывает, логически учитывает и использует логику и законы становления и развития, создания и использования общественно и лично наиболее подходящих возможностей.

Всеобщая логика желаний открывает, логически учитывает и использует законы становления и развития общественно и лично наиболее полезных желаний.

Всеобщая логика целенаправленности и целеустремлённости открывает, логически учитывает и использует логику и законы становления и развития общественно и лично наиболее полезных целей, неуклонного следования им и путей их достижения решением задач.

Всеобщая логика достижений открывает, логически учитывает и использует логику и законы становления и развития общественно и лично наиболее полезных достижений.

Хозяйственная всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы общественно и лично наиболее полезного хозяйствования, включая промышленность, сельское хозяйство, транспорт, связь, торговлю и финансы.

Доверительная всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы исследований и общеполезных формирования, развития и применения веры и доверия в искусстве, технике, науке, жизни и практической деятельности в целом, включая непременно обоснованную правильную опору на общественные и личные опыт, знания и их носителей, умения и навыки.

Всеобщая логика метамышления открывает, логически учитывает и использует логику и законы исследований и

общеполезных формирования, развития и применения метамышления в искусстве, технике, науке, жизни и практической деятельности в целом, включая непременно обоснованную правильную опору на общественно и лично используемое именно подтверждающее отрицание деятельности, заведомо враждебной по здравому смыслу и всемирно-историческому опыту, причём чем больше недовольства явных врагов и чем громче оно проявляется, тем правильнее и полезнее для себя собственная деятельность.

Диалектическая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы диалектических рассмотрений и исследований, включая доводы и соответствующие противодоводы по принципу достаточного

основания Демокрита как четвёртому закону формальной логики в ходе внутреннего диалога в духе Сократа применительно к наилучшим возможностям выбора и решениям, наиболее вероятным версиям и сценариям деятельности и событий в общеполезных целях и интересах. Всеобщая логика убеждения и самоубеждения открывает, логически учитывает и использует логику и законы убеждения и самоубеждения в правильности и/или полезности получаемых и/или передаваемых итогов исследований, знаний, умений и навыков в образовании, включая обучение и воспитание, и при общении, включая обсуждения и споры, а также посредством доводов и соответствующих противодоводов по принципу достаточного основания Демокрита как четвёртому закону

формальной логики в ходе внутреннего диалога в духе Сократа применительно к наилучшим возможностям выбора и решениям, наиболее вероятным версиям и сценариям деятельности и событий в общеполезных целях и интересах.

Оздоравливающая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы общеполезных исследования, достижения и развития телесного, душевного и духовного оздоровления личностей, народов и человечества в целом, включая самоисцеление, физическую культуру, здравоохранение, лечение, развитие и распространение только общеполезных знаний, умений, навыков, опыта, стереотипов, привычек, обычаев, традиций, обрядов, предположений, предрассудков, предубеждений и предпочтений.

6. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОТИВОРЕЧИВОСТИ

В предыдущем разделе, посвящённом всеобщей логике, было отмечено, что страх классической математики перед противоречивостью во многом связан с тем, что материальная импликация способна расширенно производить ошибочные высказывания, поскольку из ошибочного высказывания следует любое высказывание, в том числе ошибочное.

Однако всеобщая логика исправила этот изъян материальной импликации, избежать которой удаётся далеко не всегда.

Поэтому именно всеобщая логика создала возможность безбоязненно использовать противоречивость.

Первым из трёх законов диалектики Гегеля является закон единства и борьбы противоположностей.

То есть и в природе, и в обществе, и в мышлении многие предметы самопротиворечивы.

Но тогда и их приемлемые математические модели непременно должны быть тоже самопротиворечивыми.

Ярким примером являются исследования антагонистических игр в теории игр, теория принятия решений при несовпадении интересов, теория задач оптимизации в тех их обычных случаях, когда система критериев оптимизации самопротиворечива.

Самопротиворечиво любое приближённое равенство и вообще любое приближённое отношение, а также любое возможное отношение, которое может или иметь место, или не иметь места.

Поэтому самопротиворечиво отображение, в том числе восприятие, произвольного действительного предмета как непременно частичное и поэтому приближённое.

Самопротиворечиво отвлечение от принципа всеобщей связи предметов и явлений, поскольку неминуемо приходится пренебрегать бесчисленными несущественными связями и ограничиваться только некоторыми немногими наиболее существенными связями.

Самопротиворечивы и вещность в целом, коль скоро разные вещи противоречат друг другу, и каждая вещь в отдельности.

Самопротиворечивы духовность в целом и мировоззрение, философия и любая наука хотя бы ввиду неминуемых приближённости и многозначности обычных и даже научных общих и индивидуальных языка и речи, личных особенностей психики, даже просто наличия парных категорий (например правильное–ошибочное, точное–приближённое, конечное–бесконечное, синоним–антоним) и методов (например анализ–синтез), а также отдельные чувства, мысли, волеизъявления и жизнедеятельность, части которой противоречат друг другу.

Самопротиворечива общность в целом, в том числе любая личность и любое общество, не говоря уже о противоречиях личного и общественного.

Общая теория использования противоречивости не только признаёт наличие самопротиворечивости в мироздании в целом и в отдельных его частях, а также в их отображениях, и не только проявляет терпимость к самопротиворечивости, но и активно создаёт и действенно использует противоречивость.

Разумеется, многие отдельные примеры использования противоречивости давно и хорошо известны, некоторые даже со времён античности, например метод доказательства от противоречащего и контрпримеры.

Однако принципиальным является различие в целях.

Классическая математика, особенно чистая, и прежде всего её аксиоматические теории, стремятся во что бы то ни стало избежать противоречивости.

А общая теория использования противоречивости, наоборот, ищет наличные противоречия и даже умышленно создаёт новые противоречия, но только в случае их полезности.

Поиск наличных противоречий позволяет лучше познать и глубже понять исследуемый предмет.

А создание новых полезных противоречий, например умышленное рассмотрение крайних и предельных случаев, позволяет наилучшим образом испытать исследуемый предмет, например доказываемую теорему или создаваемые метод или теорию.

Всё это относится и к всеобщей логике и к её названным выше частям.

Всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, индуктивной эвристической правдоподобно рассудительной логикой как наведением на поиски закономерностей и решений задач, а с другой стороны, дедуктивной формальной логикой как выведением и доказыванием, которая помогает индуктивной логике выводить и проверять искомые закономерности и строго доказывать находки. Кроме того, дедуктивная логика часто нуждается в представлениях, невозможных без индуктивной логики, например о бесконечной последовательности простых чисел, общий член которой неизвестен, так что приходится ограничиваться приведением нескольких первых членов последовательности.

Всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между крайностями, которые в частном случае именно двух крайностей могут быть противоположными. Например, на действительной числовой оси промежуток (интервал, полуинтервал-полуотрезок, отрезок) положительной длины задаётся, во-первых, указанием его обоих противоположных концов, имеющий алгебраически меньшее числовое значение из которых также может называться началом, а во-вторых, указанием принадлежности или непринадлежности каждого из этих концов этому промежутку, причём никакие промежуточные значения этого промежутка не указываются вообще, да и невозможно указать их непременно все ввиду их бесконечности и даже несчётности.

Всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между чёткой и нечёткой логиками, допускает и чёткость, и нечёткость и поэтому соединяет преимущества и чёткой логики, и нечёткой логики.

Всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, во-первых, чувствованием, причём не только познавательным, но и эмоциональным, а во-вторых, мышлением, причём не только дедуктивным, но и индуктивным, в том числе приданием главенства здравому смыслу и интуиции.

Разумеется, эмоциональные решения, как правило, ошибочны. А всеобщая логика не только полностью учитывает, но и полезно преобразует именно мышлением чувствование и волеизъявление, включая желания, стремления и интересы, именно как дополнительные доводы и противодоводы. Это необходимо для успешной жизнедеятельности, невозможной при отсутствии соответствующих желаний, стремлений и интересов, а особенно при активном нежелании.

Всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между различными науками, включая формальную логику с традиционной логикой и математической логикой, многозначную логику, модальную логику, а также математику, филологию, философию, психологию, педагогику, соединяет и развивает их достижения.

Всеобщая логика как целостная, синергичная и саморазвивающаяся подобно живому организму и психике не только допускает, но и синергично использует противоречия между целым и взаимосвязанными составными частями с их иерархией.

Всеобщая логика здравого смысла личности и общества не только допускает, но и синергично использует противоречия внутри каждой личности, внутри каждого общества и между личностью и обществом, а также между, с одной стороны, подлинными интересами полезного развития личности и общества, а с другой стороны, направленными на извращающее вырождение личности и общества сколь угодно изощрёнными вредными воздействиями внутренних и внешних враждебных сил, включая навязывание рекламы и пропаганды.

Формальная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между формальной правильностью и здравым смыслом, исключает главенство формальностей, обеспечивает главенство здравого смысла и правильно оформляет выводы здравого смысла.

Формальная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, бездумным и бесчувственным искусственным интеллектом, по существу искусственным рассудком, основанным на формальной логике, которая линейна, последовательна, безвозвратна, чётка, бесчувственна, не обучаема, догматична, неспособна приспосабливаться к решаемой задаче и при этом развиваться, а с другой стороны, человеческими разумом и чувствами, здравым

смыслом и интуицией, основанными на всеобщей логике, которая, вообще говоря, нелинейна, может быть непоследовательной, возвратной, нечёткой, учитывающей чувства и волю, обучаемой, гибкой, способной приспосабливаться к решаемой задаче и при этом развиваться, особенно в условиях быстрорастущей сложности решаемых задач, при разветвлении, переборе различных случаев, выборе вариантов и принятии решений.

Формальная всеобщая логика не только допускает, но и синергично преобразует в гармоническое единство противоречие между электронно-вычислительной машиной и человеком (исследователем, программистом), то есть замещает борьбу противоположностей их именно

гармоническим единством посредством рациональных разделения и объединения труда: человек чувствует, размышляет, разрабатывает алгоритмы для машины, анализирует и синтезирует итоги машинных вычислений, а машина вычисляет по алгоритмам, которые задал ей человек. То есть вместо борьбы человека и машины друг против друга (человек или машина, кто кого?) получается своеобразный кентавр, единство «человек плюс машина», соединение их достоинств и преодоление их принципиальных недостатков, ведь счётные возможности электронно-вычислительной машины на много порядков превышают человеческие.

Сущностно точная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, бесконечным многообразием именно всех свойств любого предмета, а с другой стороны, очень немногими его ключевыми свойствами, важными для данных рассмотрения и/или деятельности.

Сущностно точная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, бесконечным многообразием именно всех взаимосвязей любого предмета с мирозданием, а с другой стороны, очень немногими ключевыми взаимосвязями этого предмета с мирозданием, важными для данных рассмотрения и/или деятельности, посредством выделения и рассмотрения всех существенных взаимосвязей с отвлечением от всех несущественных взаимосвязей.

Сущностно точная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, недостижимыми полнотой и точностью учёта как всего бесконечного многообразия свойств рассматриваемого предмета, так и всего бесконечного множества взаимосвязей этого предмета с мирозданием, а с другой стороны, осуществимыми полнотой и точностью учёта как лишь немногих главных свойств рассматриваемого предмета, так и лишь немногих главных взаимосвязей этого предмета с мирозданием, причём имеет место натурное моделирование бесконечных множеств свойств и взаимосвязей конечными множествами главных элементов тех бесконечных множеств, а сущностно точное, по сути приближённое, равенство предмета и его натурной модели рассматривается по существу как точное, что самопротиворечиво.

Приближённая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, невозможностью именно точно учесть бесконечное множество непременно всех, даже сколь угодно малых, влияний, а с другой стороны, возможностью только приближённо учесть лишь очень немногие главные влияния, для чего необходимо и достаточно пренебречь всеми достаточно малыми влияниями, ведь при отсутствии возможности выполнения этого необходимого и достаточного условия невозможно рассмотреть что бы то ни было именно отдельно ввиду наличия и действия всеобщей связи предметов и явлений.

Приближённая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, недостижимой точностью приближения рассматриваемого предмета его моделью, а с другой стороны, осуществимым приближением рассматриваемого предмета его моделью, причём приближённое равенство предмета и его модели рассматривается по существу как точное, что самопротиворечиво.

Приближённая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между абсолютной и относительной погрешностями приближений, соединяет достоинства этих погрешностей и устраняет их принципиальные изъяны.

Приближённая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, наибольшими простотой и удобством классического метода наименьших квадратов Гаусса и Лежандра, а с другой стороны, весьма ограниченными областями применимости и особенно приемлемости этого метода, причём предлагает учитывать и устранять эту ограниченность с использованием соединения достоинств абсолютной и относительной погрешностей приближений и устранения принципиальных изъянов этих погрешностей и метода наименьших квадратов.

Приближённая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между единственностью именно точного самого предмета и бесконечной множественностью его возможных приближений, причём из всех приемлемых достаточно точных всё-таки приближений (в этом есть самопротиворечивость) выбираются наиболее простые и удобные для использования.

Приближённая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, несчётностью множества всех иррациональных чисел действительной числовой прямой при счётности множества всех её рациональных чисел, а с другой стороны, невозможностью достаточно ясно ощутить и приемлемо

представить себе любое иррациональное число без бесконечной множественности его рациональных приближений.

Приближённая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, точностью беззаконного следования всем единичным данным их случайного разброса и поэтому не более чем приближённым, а с другой стороны, умышленной приближённостью именно наилучшего и наиболее целесообразного учёта непременно всей совокупности этих данных для получения точных или достаточно точных приближённых закономерностей или законов, несравненно более точных, чем эта совокупность данных, по сочетанию критериев достаточной точности, естественности, красоты, простоты и удобства при использовании.

Приближённая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, принципиальной необходимостью учёта непременно всей совокупности данных решаемой задачи, а с другой стороны, принципиальной необходимостью пренебрежения выбросами как наихудшими данными их совокупности для попытки получить сколько-нибудь приемлемые итоги по простейшему и удобнейшему классическому методу наименьших квадратов Гаусса и Лежандра как главному и по существу единственному широко применяемому и практически незаменимому методу в классической теории обработки данных.

Приближённая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, принципиальной недопустимостью опоры метода наименьших квадратов на именно наихудшие данные их совокупности, а с другой стороны, принципиальной необходимостью опоры на именно наилучшие данные их совокупности, для чего предлагает, во-первых, возможно наименьшие необходимые и достаточные усложнения метода наименьших квадратов в порядке его уточняющих и совершенствующих развития и обобщения, а во-вторых, принципиально новые методы приближений.

Предельная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, принципиальными особенностями и относительной редкостью предельного, крайнего, а с другой стороны, обычностью, привычностью и относительной частотой непредельного, промежуточного, причём умышленно идёт именно на пределы, крайности, особенно противоречащие друг другу, чтобы найти возможные принципиальные особенности, контрпримеры во имя противоречий и пределы применимости теорем, методов и теорий.

Множественная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, единством множества в целом, а с другой стороны, разделённостью множества на отдельные его элементы.

Множественная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, произвольным предметом, а с другой стороны, одноэлементным множеством, единственным элементом которого является именно этот предмет.

Множественная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между рассмотрениями произвольного предмета и одноэлементного множества, единственным элементом которого является именно этот предмет, с одной стороны,

как принципиально различных, а с другой стороны, как принципиально совпадающих (тождественных), причём в зависимости от целесообразности при решении данной задачи, что придаёт весьма полезную и часто необходимую гибкость и, в частности, позволяет избежать целого ряда антиномий теории множеств Кантора, лежащей в основе всей современной классической математики.

Множественная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между наличием в любой окрестности каждой граничной точки для множества как точек этого множества, так и точек его дополнения, то есть каждая граничная точка является самопротиворечивой, причём не только поэтому, но и потому, что она может как принадлежать множеству, так и не принадлежать ему.

Множественная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие, заключающееся в том, что предельная точка для множества, принадлежащая по определению производному множеству для этого множества, может не принадлежать самому этому множеству и в таком случае быть самопротиворечивой.

Сверхмножественная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между именно нулевыми размерностью и мерой каждой точки как элемента и наличием предметов с положительными размерностью и мерой, откуда следует, поскольку никакое сложение сколь угодно многих нулей принципиально не может дать ничего, кроме нуля, что такие предметы имеют отдельные указываемые точки как элементы, однако не

могут именно полностью состоять и складываться (слагаться, составляться) только и исключительно из этих точек как элементов и поэтому являются сверхмножествами как состоящими непременно из частей целыми сверхточечных, сверхэлементарных и сверхмножественных природы, сущности, строения, состава, слагаемости и сплочения. Разумеется, можно указывать произвольные множества точек как элементов сверхмножества и рассматривать такие множества как подмножества сверхмножества, неспособные, однако, ни в малейшей степени именно исчерпать ни сверхмножество целиком, ни даже какую бы то ни было его часть, имеющую непременно положительные размерность и меру.

Целочастичная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между целым, которое может быть организменным, синергичным, неделимым, и его частями, которые могут лишь условно для предшествующего мысленному синтезу мысленного анализа рассматриваться как отдельные.

Системная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между отдельным элементом и системой отдельных элементов, которые, помимо отношений принадлежности элементов системе, состоящей из этих элементов, могут иметь дополнительные отношения с ней и между собой, причём совокупность всех этих дополнительных отношений есть строение (структура) системы, частными случаями которой являются частично

упорядоченное множество, упорядоченное множество и вполне упорядоченное множество.

Языковедческая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между, с одной стороны, языком и речью, между которыми есть внутреннее противоречие, а с другой стороны, логикой, намного более точной и несравненно более бедной, чем язык и речь, причём обогащает логику посредствам извлечения из языка и речи наилучших возможностей уточнения, усовершенствования, развития и обобщения логики.

Литературоведческая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между, с одной стороны, литературными и литературоведческими языком и речью, между которыми есть внутреннее противоречие, а

с другой стороны, логикой, намного более точной и несравненно более бедной, чем литературные и литературоведческие язык и речь, причём обогащает логику посредствам извлечения из литературных и литературоведческих языка и речи наилучших возможностей уточнения, усовершенствования, развития и обобщения логики. При этом особую ценность представляют собой избранные пословицы и поговорки как квинтэссенция народной мудрости, авторские афоризмы, афористическая и философская поэзия, песни, включая народные, басни и сказки, а также мифология и научная фантастика. Но и обратно, литературоведческая всеобщая логика помогает создавать литературные произведения этих и других литературных жанров и литературоведческие

труды, а также новые литературные жанры. Более того, литературоведческая всеобщая логика помогает оживлять научные исследования и их представление монографиями и статьями, докладами, лекциями и учебниками и выдвигает обоснованное предложение справедливо переименовать наивную теорию множеств Кантора в живую теорию множеств Кантора.

Искусствоведческая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между искусством и наукой для создания искусства научного поиска, в частности искусства логического поиска, разумеется, применительно к индуктивной логике, а также вместе с литературоведческой всеобщей логикой использует песни, искусствоведческие труды и идеи произведений

искусства. Но и обратно, искусствоведческая всеобщая логика помогает создавать произведения искусства, а также новые жанры искусства. Более того, искусствоведческая всеобщая логика, особенно театроведческая, музыковедческая и относящаяся к живописи, помогает оживлять научные исследования и их представление монографиями и статьями, докладами, лекциями и учебниками и выдвигает обоснованное предложение справедливо переименовать наивную теорию множеств Кантора в живую теорию множеств Кантора.

Психологическая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между, с одной стороны, психологией, которая наряду с общей психологией включает дифференциальную психологию с

индивидуальными психологиями, возрастную психологию и ещё целое многообразие специальных психологий, учитывающих индивидуальные различия, например психологию математических способностей школьников, а с другой стороны, логикой, которая часто во многом пренебрегает действительными психическими свойствами и процессами личностей, в частности относящимися к вниманию, ощущению, чувствованию, восприятию, воображению, мышлению и памяти, считается непременно общей для всех наукой и как раз в таком качестве обычно развивается и излагается в науке и преподавании. Однако даже применительно к искусственному рассудку формальная всеобщая логика учитывает различия в свойствах электронно-вычислительных машин и их

программных обеспечений. А психологическая всеобщая логика опирается на психологию вместе со всеми её составными частями и тщательно учитывает не только действительные психические свойства и процессы личностей, в частности относящиеся к вниманию, ощущению, чувствованию, восприятию, воображению, мышлению и памяти, но и просто огромные различия в индивидуальных логиках между людьми очень разных высших посильных уровней мышления даже в общем коллективе учащихся, студентов или сотрудников. Одни из них, даже если и знают таблицу умножения, всё-таки не способны понять и именно своими словами, а не вызубрив, повторить известное логическое рассуждение. Другие способны на это, но не именно на самостоятельное

мышление. Третьи ограничиваются жизненным опытом, привычками, предрассудками, предубеждениями, здравым смыслом, практическим умом и интуицией, достаточными для повседневной жизни, а в более сложных случаях принимают самопроизвольные, часто эмоциональные и поэтому в основном ошибочные решения. Четвёртые обладают лишь конкретным предметным мышлением и полностью лишены отвлечённого научного мышления. Пятые способны на самостоятельные гуманитарные рассуждения, но даже не понимают логики точных наук. Шестые в общих чертах понимают логику точных наук и только с помощью преподавателей способны решать лишь простые стандартные задачи. Седьмые способны полностью самостоятельно решать лишь стандартные

задачи. Восьмые способны полностью самостоятельно решать лишь простейшие нестандартные задачи уровня школьных и районных олимпиад. Девятые способны полностью самостоятельно решать сложнейшие нестандартные задачи уровня всесоюзных и международных олимпиад. Десятые способны доказывать принципиально новые теоремы. Одиннадцатые способны создавать принципиально новые общие методы. Двенадцатые способны создавать принципиально новые общие теории. Тринадцатые способны создавать принципиально новые науки. Четырнадцатые способны создавать целые иерархии принципиально новых наук. При этом психологическая всеобщая логика не только тщательно учитывает просто огромные различия в

индивидуальных логиках между людьми очень разных высших посильных уровней мышления, а также различия во внимании, ощущении, чувствовании, восприятии, воображении и памяти, но и помогает не просто лучше, а непременно правильно понять и успешно развивать себя и других, а также добиваться наивысших возможных достижений. Но и обратно, психологическая всеобщая логика помогает развивать психологию.

Педагогическая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между, с одной стороны, педагогикой, которая наряду с общей педагогикой включает частные и специальные педагогики по их направлениям (общеобразовательная, трудовая, научная, инженерная, военная, артистическая и другие педагогики) и

категориям обучаемых и воспитуемых (собственных детей для родителей, а также школьников, студентов, взрослых, самих себя применительно к самообучению и самовоспитанию), а с другой стороны, логикой, которая часто во многом пренебрегает этими и другими различиями, считается непременно общей для всех наукой и как раз в таком качестве обычно развивается и излагается в науке и преподавании. А педагогическая всеобщая логика опирается на педагогику вместе со всеми её составными частями и тщательно учитывает все эти и другие различия применительно к обучению и самообучению, воспитанию и самовоспитанию, а также развитию и сохранению внимания, ощущения, чувствования, восприятия, воображения, мышления,

волеизъявления и памяти в деятельности. Но и обратно, педагогическая всеобщая логика помогает развивать педагогику.

Демографическая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между:

1) с одной стороны, всемирно-историческим опытом и выражающими его предположениями, предрассудками и предубеждениями, предпочтениями и стереотипами, привычками и обычаями, традициями и обрядами с их определяющими влияниями на жизнедеятельность народов и на преобладающий их менталитет (строй души);

2) с другой стороны, демографической наукой, лишь немногими очень редкими достижениями подытоживающей и обобщающей подлинный всемирно-исторический опыт, а

в остальном тонущей в обилии частностей и откровенных мелочей, заведомо несущественных для знания и понимания личности, общеполезных созидательных или вредоносных разрушительных поведения и деятельности именно типичного представителя того или иного народа в том или ином обществе;

3) с третьей стороны, демографической практикой, которая во многом противоречит здравому смыслу, подлинному всемирно-историческому опыту, его подытоживающим и обобщающим лишь немногим очень редким достижениям демографической науки, теории именно устойчивого управления с необходимостью непременно правильного представления об обратной связи, да и логике с её законами непременно правильного мышления, и поэтому направлена

не на общеполезное созидание, а на вредоносное разрушение.

Демографическая всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует законы исследований демографии и общеполезного управления ею в интересах развития человечества в целом с учётом всемирно-исторического опыта и выражающих его предположений, предрассудков и предубеждений, предпочтений и стереотипов, привычек и обычаев, традиций и обрядов и их определяющего влияния на жизнедеятельность народов и на преобладающий их менталитет (строй души), его общеполезных воспроизводства, формирования, развития, представления и продвижения именно положительных личных и

общественных примеров во имя общеполезных совершенствования и созидания.

Всемирно-историческая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между, с одной стороны, разрозненными историческими событиями, а с другой стороны, единой и тем самым развивающейся всемирно-исторической картиной мира, обеспечивает правильной методологией изложения истории усиленное и усиливающее непременно общеполезное для всего человечества в целом развитие народов с учётом всемирно-исторического опыта и выражающих его предположений, предрассудков и предубеждений, предпочтений и стереотипов, привычек и обычаев, традиций и обрядов и их определяющего влияния на

жизнедеятельность народов и на преобладающий их менталитет (строй души), его общеполезных воспроизводства, формирования, развития, представления и продвижения именно положительных личных и общественных примеров во имя общеполезных совершенствования и созидания. Более того, всемирно-историческая всеобщая логика, опираясь на всемирно-историческое обобщение даже единичного через отдельное и особенное до общего и всеобщего по императиву Канта, помогает именно здравомыслящим образом, логично, разумно, мирно, взаимоприемлемо и очень убедительно согласовывать между собой не просто противоречащие друг другу, но и даже, казалось бы, непримиримые, антагонистические интересы.

Географическая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между, с одной стороны, объективными географией территорий и её определяющими влияниями на жизнедеятельность народов и на преобладающий их менталитет (строй души), а с другой стороны, субъективными возможностями управления всеми ими, причём имеет целью именно наилучшее управление посредством непременно общеполезных воспроизводства, формирования и развития жизнедеятельности народов и преобладающих их менталитетов (строев души), представления и продвижения именно положительных личных и общественных примеров во имя общеполезных совершенствования и созидания.

Геополитическая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между, с одной стороны, наличными геополитическими интересами и наличной геополитикой, а с другой стороны, субъективными возможностями управления геополитическими интересами и геополитикой, причём имеет целью именно наилучшее управление их взаимоприемлемым согласованием посредством непременно общеполезных воспроизводства, формирования и развития жизнедеятельности народов и преобладающих их менталитетов (строев души), представления и продвижения именно положительных личных и общественных примеров во имя общеполезных совершенствования и созидания.

Игровая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между, с одной стороны, наличными интересами игроков в данной игре, а с другой стороны, субъективными возможностями управления использованием данной игры для общего развития личностей игроков и тем самым их поведения и деятельности в целом, причём имеет целью именно наилучшее управление их взаимоприемлемым согласованием во имя общеполезных совершенствования и созидания.

Догматическая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между знанием и верой, между интересами, идеологией и пропагандой, между объективными и субъективными (юридическими) законами

общества, причём имеет целью именно наилучшее управление их взаимоприемлемым согласованием во имя общеполезных совершенствования и созидания.

Традиционалистская всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между традициями и новаторством для отбора и сохранения только и исключительно полезных для человечности и человечества опыта и выражающих его предположений, предрассудков и предубеждений, предпочтений и стереотипов, привычек и обычаев, традиций и обрядов и их определяющего влияния на жизнедеятельность народов и на преобладающий их менталитет (строй души), его общеполезных воспроизводства, формирования, развития, представления и продвижения.

Развивающая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между традициями и новаторством для развития только и исключительно полезных для человечности и человечества опыта и выражающих его предположений, предрассудков и предубеждений, предпочтений и стереотипов, привычек и обычаев, традиций и обрядов и их определяющего влияния на жизнедеятельность народов и на преобладающий их менталитет (строй души), его общеполезных воспроизводства, формирования, развития, представления и продвижения.

Коммуникативная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между обществом и личностью, между различными обществами и между

различными личностями, причём в непременно общеполезных интересах человечности и человечества в целом.

Коммуникативная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между, во-первых, действительностью, во-вторых, её восприятием и соответствующими чувствами и мыслями и, в-третьих, сообщением обо всём этом, причём в непременно общеполезных интересах человечности и человечества в целом.

Управленческая всеобщая логика и всеобщая логика рационализации не только допускают, но и синергично используют противоречия между прошлым, настоящим и будущим, между возможностью и действительностью,

между необходимостью и случайностью, между необходимостью и свободой, между ответственностью и свободой, между известностью и неизвестностью, между определённостью и неопределённостью, между предсказуемостью и непредсказуемостью, между чёткостью и нечёткостью, между желательностью и нежелательностью, между чувствованием и мышлением, между целенаправленностью и бесцельностью, между сознательностью и стихийностью, между научностью и ненаучностью, между знанием и верой, между интуицией и рассуждением, между правдоподобием и неправдоподобием, между теорией и практикой, между упорядоченностью и беспорядочностью, между различными решениями, между различными возможными сценариями будущего, между

объективностью положения, обстоятельств и событий и субъективностью управления, между управляющим и управляемыми, между зависимостью и независимостью, между непосредственностью и опосредованностью, между управлением и самоуправлением, между прямой и обратной связями, между разными личностями, между разными обществами, между обществом и личностью, между нравственностью и правом, между совестливостью и бессовестностью, между справедливостью и несправедливостью.

Исследовательская всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между исследователем и исследуемым, между объектом и моделью, между открытием и изобретением, между чувствованием и

мышлением, между наукой и преподаванием, между научностью и ненаучностью, между теорией и практикой, между наблюдением и опытом, между единичностью и повторяемостью, между воспроизводимостью и невоспроизводимостью, между конечностью и бесконечностью, между прерывностью и непрерывностью, между индукцией и дедукцией, между предположением и доказательством, между правильностью и ошибочностью, между правдоподобием и неправдоподобием, между интуицией и рассуждением, между противоречивостью и непротиворечивостью, между строгостью и нестрогостью, между точностью и приближённостью, между понятностью и непонятностью, между анализом и синтезом, между зависимостью и независимостью, между объективностью и

субъективностью, между жизнью, наукой и искусством, между возможностью и действительностью, между необходимостью и случайностью, между известностью и неизвестностью, между определённостью и неопределённостью, между предсказуемостью и непредсказуемостью, между чёткостью и нечёткостью, между целенаправленностью и бесцельностью, между упорядоченностью и беспорядочностью, между различными решениями, между непосредственностью и опосредованностью, между прямой и обратной связями.

<u>Творческая</u> <u>всеобщая</u> <u>логика</u>, <u>всеобщая</u> <u>логика</u> <u>открытий</u> и <u>изобретательская</u> <u>всеобщая</u> <u>логика</u> не только допускают, но и <u>синергично</u> <u>используют</u> <u>противоречия</u> между творцом и творческим произведением, между объектом и моделью,

между новизной и повторением, между открытием и изобретением, между теорией и практикой, между научностью и ненаучностью, между художественностью и нехудожественностью, между чувствованием и мышлением, между правдоподобием и неправдоподобием, между интуицией и рассуждением, между понятностью и непонятностью, между анализом и синтезом, между зависимостью и независимостью, между объективностью и субъективностью, между жизнью, наукой и искусством, между возможностью и действительностью, между необходимостью и случайностью, между необходимостью и свободой, между ответственностью и свободой, между известностью и неизвестностью, между определённостью и неопределённостью, между предсказуемостью и

непредсказуемостью, между чёткостью и нечёткостью, между целенаправленностью и бесцельностью, между упорядоченностью и беспорядочностью, между различными решениями, между непосредственностью и опосредованностью, между прямой и обратной связями.

Созидательная всеобщая логика и разрушительная всеобщая логика не только допускают, но и синергично используют противоречия между созиданием и разрушением, между прочностью и разрушением, между сопротивляемостью и податливостью, между устойчивостью и неустойчивостью, между надёжностью и ненадёжностью, между долговечностью и недолговечностью, между личной и общественной полезностью, между новизной и повторением, между

открытием и изобретением, между теорией и практикой, между чувствованием и мышлением, между мышлением и метамышлением, между интуицией и рассуждением, между понятностью и непонятностью, между анализом и синтезом, между зависимостью и независимостью, между объективностью и субъективностью, между жизнью, наукой и искусством, между возможностью и действительностью, между необходимостью и случайностью, между необходимостью и свободой, между ответственностью и свободой, между известностью и неизвестностью, между определённостью и неопределённостью, между предсказуемостью и непредсказуемостью, между чёткостью и нечёткостью, между целенаправленностью и бесцельностью, между упорядоченностью и

беспорядочностью, между различными решениями, между непосредственностью и опосредованностью, между прямой и обратной связями, между непременно доброжелательной и полезной созидательной критикой и разрушительным критиканством.

Философская всеобщая логика и доверительная всеобщая логика не только допускают, но и синергично используют противоречия между мирозданием и философом, между исследователем и исследуемым, между бытием и сознанием, между сознательностью и стихийностью, между близким и далёким, между прошлым, настоящим и будущим, между движением и покоем, между изменением и постоянством, между спокойствием и борьбой, между синергией и разобщением, между единым и многим, между объектом и

моделью, между открытием и изобретением, между чувствованием и мышлением, между знанием и верой, между желательностью и нежелательностью, между переживанием и философичностью, между наукой и преподаванием, между научностью и ненаучностью, между теорией и практикой, между наблюдением и опытом, между единичностью и повторяемостью, между воспроизводимостью и невоспроизводимостью, между конечностью и бесконечностью, между прерывностью и непрерывностью, между индукцией и дедукцией, между предположением и доказательством, между правильностью и ошибочностью, между правдоподобием и неправдоподобием, между интуицией и рассуждением, между противоречивостью и непротиворечивостью, между

строгостью и нестрогостью, между точностью и приближённостью, между понятностью и непонятностью, между анализом и синтезом, между зависимостью и независимостью, между объективностью и субъективностью, между жизнью, наукой и искусством, между возможностью и действительностью, между необходимостью и случайностью, между необходимостью и свободой, между ответственностью и свободой, между известностью и неизвестностью, между определённостью и неопределённостью, между предсказуемостью и непредсказуемостью, между чёткостью и нечёткостью, между целенаправленностью и бесцельностью, между упорядоченностью и беспорядочностью, между непосредственностью и опосредованностью, между прямой

и обратной связями, между различными решениями, между различными возможными сценариями будущего, между объективностью положения, обстоятельств и событий и субъективностью управления, между управляющим и управляемыми, между управлением и самоуправлением, между разными личностями, между разными обществами, между обществом и личностью, между нравственностью и правом, между совестливостью и бессовестностью, между справедливостью и несправедливостью.

Судьбоносная всеобщая логика, всеобщая логика целенаправленности и целеустремлённости и всеобщая логика достижений не только допускают, но и синергично используют противоречия между мирозданием и философом, между бытием и сознанием, между

сознательностью и стихийностью, между близким и далёким, между прошлым, настоящим и будущим, между предопределением и неопределённостью, между предопределением, предназначением, предначертанием и самоопределением, между чувствованием и мышлением, между знанием и верой, между желательностью и нежелательностью, между переживанием и философичностью, между научностью и ненаучностью, между теорией и практикой, между наблюдением и опытом, между единичностью и повторяемостью, между воспроизводимостью и невоспроизводимостью, между предположением и доказательством, между правдоподобием и неправдоподобием, между интуицией и рассуждением, между понятностью и непонятностью, между анализом и

синтезом, между зависимостью и независимостью, между объективностью и субъективностью, между жизнью, наукой и искусством, между возможностью и действительностью, между необходимостью и случайностью, между необходимостью и свободой, между ответственностью и свободой, между известностью и неизвестностью, между определённостью и неопределённостью, между предсказуемостью и непредсказуемостью, между чёткостью и нечёткостью, между целенаправленностью и бесцельностью, между упорядоченностью и беспорядочностью, между непосредственностью и опосредованностью, между прямой и обратной связями, между различными решениями, между различными возможными сценариями будущего, между объективностью

положения, обстоятельств и событий и субъективностью управления, между управляющим и управляемым, между управлением и самоуправлением.

Всеобщая логика потребностей, всеобщая логика возможностей и всеобщая логика желаний не только допускают, но и синергично используют противоречия между, во-первых. потребностями (с внутренним противоречием между, с одной стороны, подлинными личными и общественными потребностями, а с другой стороны, мнимыми потребностями, например безудержного потребительства, которые навязываются и даже вместе с завистью разжигаются действиями внутренних и внешних врагов, включая рекламу), во-вторых, возможностями (с внутренним противоречием между, с одной стороны,

собственными возможностями, включая задатки, способности, одарённость, таланты, знания, умения, навыки, а с другой стороны, внешними возможностями, которыми являются условия окружающей среды, включая востребованность или ненадобность, поддержку или препятствия) и, в-третьих, желаниями (с внутренним противоречием между судьбоносными и эпизодическими желаниями, причём любое желание может быть самопротиворечивым).

Хозяйственная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между природой, техносферой и обществом, между общественным и личным хозяйствованием, между производством и потреблением, между производством и сферой услуг, между производством,

торговлей и финансами, между транспортом и связью, между трудом, отдыхом и развитием личностей.

Всеобщая логика метамышления, диалектическая всеобщая логика и всеобщая логика убеждения и самоубеждения не только допускают, но и синергично используют противоречия между убеждением и самоубеждением в правильности и/или полезности получаемых и/или передаваемых итогов исследований, знаний, умений и навыков в образовании, включая обучение и воспитание, и при общении, включая обсуждения и споры, между внешними и внутренними диалогами, между различными идеями, концепциями, версиями, решениями, алгоритмами и сценариями деятельности и событий, между доводами и

соответствующими противодоводами, между мышлением и метамышлением, между опирающимся на истины и достижения положительным метамышлением и отрицающим заведомые ложь и извращения отрицательным метамышлением в искусстве, технике, науке, жизни и практической деятельности в целом, включая непременно обоснованную правильную опору на общественно и лично используемое именно подтверждающее отрицание деятельности, заведомо враждебной по здравому смыслу и всемирно-историческому опыту, причём чем больше недовольства явных врагов и чем громче оно проявляется, тем правильнее и полезнее для себя собственная деятельность.

Оздоравливающая всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречия между оздоровлением и болезнетворностью, между исцелением и устранением симптомов, между исцелением и самоисцелением, между телесностью, душевностью и духовностью, между очищением и загрязнением, между физической культурой и спортом, между общеполезными созидательными и общественно и лично вредными разрушительными знаниями, умениями, навыками, опытом, стереотипами, привычками, обычаями, традициями, обрядами, предположениями, предрассудками, предубеждениями и предпочтениями.

Таким образом, всеобщая логика создаёт методологические основы общей теории использования противоречивости.

7. ОБЩИЕ ТЕОРИИ СВЕРХКАРДИНАЛОВ И СВЕРХОРДИНАЛОВ

В теории множеств Кантора (к номерам теорем приписываются справа во избежание путаницы цитированные в начале настоящей научной монографии соответствующие параграфы по монографии
Хаусдорф Ф. Теория множеств / перевод с немецкого Н. Б. Веденисова; под редакцией и с дополнениями проф. П. С. Александрова и проф. А. Н. Колмогорова. М.; Л.: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, 1937. 306 с. С. 33–35. § 7. Скáла мощностей)
для <u>доказательства существования именно бесконечного множества различных мощностей</u>

(кардинальных чисел) используются общий метод перехода от произвольного множества A мощности a = |A| к имеющему мощность 2^a множеству всех его подмножеств, причём 2^a > a для произвольного конечного или бесконечного множества A, а также общий метод сумм бесконечного множества кардинальных чисел без наибольшего элемента. Получаемая общим методом перехода от произвольного множества к множеству всех его подмножеств по Кантору бесконечная строго монотонно возрастающая последовательность мощностей определяется мощностью a = |A|

начального множества A. Разумеется, для любого конечного и тем более бесконечного начального множества A такая последовательность оказывается чрезвычайно редкой с быстро нарастающими пропусками промежуточных мощностей. Это видно даже по наиболее частой последовательности, для чего в качестве начального множества A выбрано пустое множество $\varnothing$, так что получается имеющая быстро нарастающие пропуски бесконечная строго монотонно возрастающая последовательность некоторых (чем дальше, тем более редких) конечных мощностей

$(0 = |\varnothing|, 2^0 = 1 = |\{\varnothing\}| > 0, 2^1 = 2 = |\{\varnothing, \{\varnothing\}\}| > 1, 2^2 = 4 > 2, 2^4 = 16 > 4, 2^{16} = 65536 > 16, ...)$.

В теории множеств Кантора есть и общий метод построения строго монотонно возрастающей последовательности именно всех мощностей (кардинальных чисел) подряд без промежуточных пропусков:

Хаусдорф Ф. Теория множеств / перевод с немецкого Н. Б. Веденисова; под редакцией и с дополнениями проф. П. С. Александрова и проф. А. Н. Колмогорова. М.; Л.: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, 1937. 306 с. С. 75. § 15. Алефы.

Общие теории сверхкардиналов и сверхординалов развивают теорию множеств Кантора и опираются на неё, в частности на все три этих общих метода Кантора, перенимая общий метод перехода от произвольного множества к множеству всех его подмножеств, принципиально преображая общий метод сумм бесконечного множества кардинальных чисел без наибольшего элемента и развивая общий метод построения строго монотонно возрастающей последовательности именно всех мощностей (кардинальных чисел) подряд без промежуточных пропусков. Однако, в отличие от теории множеств Кантора, общие теории сверхкардиналов и сверхординалов руководствуются не формальной логикой, а всеобщей логикой, отчасти изложенной выше.

Соответствующее принципиальное различие между этими двумя логиками в данном случае можно показать на примере коренным образом различных выводов из одной и той же теоремы и её доказательства, приведённых выше:

«I§7. $2^m > m$, т. е. множество всех подмножеств M имеет мощность большую, чем само M...

Далее, $m + m_1 + m_2 + \ldots$ есть ещё большее кардинальное число, и, отправляясь от этого последнего, мы можем продолжить процесс; в самом деле, вообще имеем:

II§7. Если каждому $m \in M$ соответствует кардинальное число a_m и если среди чисел a_m не существует наибольшего, то сумма

$$a = \Sigma_m{}^M a_m$$

больше каждого из a_m.

Действительно, с одной сторон<u>ы</u>, во всяком случае $a \geq a_m$ для каждого m, с другой – равенство исключено, так как в противном случае a_m было бы наибольшее из данных кардинальных чисел.»

По <u>формальной</u> <u>логике</u>, которой руководствуется <u>теория множеств</u> <u>Кантора</u>, она делает следующие выводы:

«Теоремы I§7 и II§7 позволяют неограниченно восходить ко всё более и более высоким мощностям; они же приводят к антиномии (стр. 9).

Действительно, каково бы ни было множество кардинальных чисел, всегда можно найти кардинальное число, большее, чем все ч<u>и</u>сла данного множества, и, следовательно, не входящее в него, т. е. ни одно такое множество не содержит все кардинальные ч<u>и</u>сла и

„множество всех кардинальных чисел“ немыслимо. Таким образом, мы столкнулись с тем обстоятельством, что требование собрать все вещи некоторого определённого типа не всегда осуществимо: когда нам кажется, что мы их имеем все налицо, всё же они не все исчерпаны. Тревога, внушаемая этой антиномией, коренится не в том, что мы натолкнулись на противоречие, а в том, что этого противоречия мы не ожидали: множество всех кардинальных чисел кажется a priori столь же неоспоримым, как и множество натуральных чисел. Отсюда возникает сомнение, нет ли других таких же противоречивых „мнимых множеств“ и даже не таковы ли вообще все бесконечные множества, и затем возникает потребность устранить это сомнение, т. е. построить теорию множеств на новой (аксиоматической) основе так, чтобы противоречия были исключены.»

По всеобщей логике, которой руководствуются общие теории сверхкардиналов и сверхординалов, они делают следующие основные выводы:

1. Теория множеств Кантора по формальной логике доказала отнюдь не немыслимость и невозможность существования множества всех кардинальных чисел Кантора, а всего лишь незамкнутость множества всех кардинальных чисел Кантора относительно сложения их всех, поскольку всего лишь не существует и потому отсутствует кардинальное число Кантора, равное сумме всех кардинальных чисел Кантора. Это мнимое

доказательство якобы немыслимости и невозможности существования множества всех кардинальных чисел Кантора вполне подобно мнимому доказательству якобы немыслимости и невозможности существования множества всех положительных целых чисел, являющихся положительными конечными кардинальными числами Кантора, якобы потому, что любая бесконечная их сумма является плюс бесконечностью и поэтому не является положительным целым числом.

2. Мнимое доказательство якобы немыслимости и невозможности существования множества всех кардинальных чисел Кантора в теории множеств Кантора по формальной логике не только недееспособно, но ещё и используется не в созидательных целях развития математики, а исключительно в разрушительных целях для резкого ограничения возможностей математики путём мнимого обоснования якобы невозможности существования и рассмотрения множества всех кардинальных чисел Кантора.

3. Общая методология преодоления антиномий теории множеств Кантора, основополагающей в классической математике, во многом, с одной стороны, путём возможного, если целесообразно, отождествления отношения принадлежности элемента множеству и отношения включения подмножества во множество между собой, а с другой стороны, путём возможного, если целесообразно, отождествления элемента и состоящего из этого единственного элемента одноэлементного множества между собой, освобождает теорию множеств Кантора от антиномий. Поэтому существует любое чёткое или нечёткое множество произвольных элементов, которые всего лишь мыслятся совместно, в том числе независимо от смыслового единства элементов, например множество

{экватор, прошлогодний снег, скорость света, число Эйлера}, а также (независимо от совместного восприятия) в том случае, если нет ни единого мгновения совместного существования ни единой пары элементов этого множества, например множество некоторых гениев различных времён {Гомер (VIII век до н. э.), Пифагор (ок. 570–490 до н. э.), Сократ (470/469–399 до н. э.), Аристотель (384–322 до н. э.), Архимед (ок. 287–212 до н. э.), Данте (1265–1321), Леонардо да Винчи (1452–1519), Декарт (1596–1650), Ломоносов (1711–1765), Пушкин (1799–1837), Вернадский (1863–1945)}.

В частности, существует множество всех множеств, являющееся в том числе элементом самого себя. Разумеется, существует и произвольное множество любых некоторых кардинальных чисел Кантора, в том числе и множество всех кардинальных чисел Кантора. Более того, на всякий случай общая теория использования противоречивости позволяет при необходимости и/или полезности не только допустить противоречивость, но и даже создать и/или использовать её.

4. Общие теории сверхкардиналов и сверхординалов, опираясь на общую методологию преодоления антиномий теории множеств Кантора, основополагающей в классической математике, и на всеобщую логику, именно впервые не только правильно диагностируют доказательство якобы немыслимости и невозможности существования множества всех кардинальных чисел Кантора в теории множеств Кантора по формальной логике как мнимое и всего лишь как подлинное доказательство незамкнутости множества всех кардинальных чисел Кантора относительно

сложения их всех, но и используют это подлинное доказательство исключительно в созидательных целях развития математики. А именно, в общих теориях сверхкардиналов и сверхординалов по всеобщей логике существуют и рассматриваются не только любое множество некоторых кардинальных чисел Кантора, в том числе и множество всех кардинальных чисел Кантора, но и сумма любых кардинальных чисел Кантора, в том числе и сумма всех кардинальных чисел Кантора.

5. Для придания смысла суммам кардинальных чисел Кантора, не являющимся кардинальными числами Кантора, необходимо и достаточно обобщение кардинальных чисел Кантора. С этой целью общие теории сверхкардиналов и сверхординалов вводят принципиально новые сверхмощности, или сверхкардинальные числа, или сверхкардиналы. Они являются обобщениями мощностей, или кардинальных чисел Кантора, или кардиналов, или алефов, с неотрицательными целыми индексами.

6. Общие теории сверхкардиналов и сверхординалов по определению называют (объявляют) сверхкардиналом каждую сумму кардинальных чисел Кантора, не являющуюся кардинальным числом Кантора. Множество таких сумм является непустым, поскольку такие суммы заведомо существуют. Одной из таких сумм является сумма всех различных кардинальных чисел Кантора, как это следует из подлинного доказательства незамкнутости множества всех кардинальных чисел Кантора относительно сложения их всех различных, представленного теорией множеств Кантора под

видом мнимого доказательства якобы немыслимости и невозможности существования множества всех кардинальных чисел Кантора в теории множеств Кантора по формальной логике. Требование различия элементов любого множества по Кантору, в том числе множества всех кардинальных чисел Кантора, несущественно, поскольку повторения наличных элементов вообще не учитываются множеством по Кантору. А вот сумма элементов учитывает повторения ненулевых элементов и может изменяться в зависимости от их повторений. Например, сумма, единственным

элементом которой является единица, равна единице, сумма конечного числа единиц равна этому числу, а сумма любого бесконечного множества искусственно различаемых единиц, например индексами, множество которых равномощно этому бесконечному множеству единиц, равна произведению единицы на мощность этого бесконечного множества единиц и по арифметике кардинальных чисел Кантора равна мощности этого бесконечного множества единиц. А сумма пустого множества элементов равна, естественно, нулю как мощности пустого множества.

7. Общие теории сверхкардиналов и сверхординалов по определению называют (объявляют) сверхкардиналом каждую сумму сверхкардиналов. При этом непременное их различие не требуется.

8. Если в множество всех сверхкардиналов не ввести иерархию, то сумма всех различных сверхкардиналов окажется уже не сверхкардиналом подобно тому, что сумма всех различных кардинальных чисел Кантора уже не является кардинальным числом Кантора. Поэтому потребовалось бы ввести дальнейшее обобщение сверхкардиналов под другим названием, далее понадобилось бы третье название, и так далее до бесконечности. Введение бесконечной иерархии

названий едва ли осуществимо сколько-нибудь естественным образом, да и крайне неудобно и неприемлемо для представления, запоминания и использования. Поэтому общие теории сверхкардиналов γ и сверхординалов λ вводят иерархию сверхкардиналов их рангами, которыми являются сверхординалы как обобщения порядковых чисел, или ординалов. Ранг λ сверхкардинала ${}_{(\lambda)}\gamma$ указывается его левым нижним индексом. Общая теория сверхкардиналов и общая теория сверхординалов строятся совместно.

9. Ранги λ иерархии сверхкардиналов ${}_{\lambda}\gamma$ строятся по трансфинитной индукции согласно определениям. Неотрицательные целые числа n как конечные кардинальные числа Кантора, и только они, называются сверхкардиналами ${}_{0}\gamma_{n}$ нулевого ранга, имеющими правые нижние индексы, равные этим неотрицательным целым числам. Алефы $\aleph_{n}$ с неотрицательными целыми правыми нижними индексами n, и только они, называются сверхкардиналами ${}_{1}\gamma_{n}$ первого ранга, имеющими те же самые правые нижние индексы. Вообще множество именно всех сверхкардиналов любого рассматриваемого положительного ранга λ строится по общему методу построения строго монотонно возрастающей последовательности именно всех сверхмощностей

(сверхкардиналов) подряд без промежуточных пропусков как по естественному развивающему обобщению общего метода построения строго монотонно возрастающей последовательности именно всех мощностей (кардинальных чисел) подряд без промежуточных пропусков по Кантору. Во-первых, рассматривается множество всех таких сумм непременно различных сверхкардиналов рангов

0, 1, 2, ... , λ - 1,

предшествующих рассматриваемому рангу λ, что ни одна из этих сумм не является сверхкардиналом ни одного из рангов, предшествующих рассматриваемому λ. Это множество сумм является непустым, поскольку ему принадлежит сумма всех непременно различных

сверхкардиналов всех рангов, предшествующих рассматриваемому λ. Действительно, эта сумма не меньше ни одного из этих сверхкардиналов, а равенство в этом нестрогом неравенстве исключено за отсутствием именно наибольшего сверхкардинала в множестве всех сверхкардиналов любого ранга, предшествующего рассматриваемому λ. Во-вторых, вполне упорядоченное множество всех таких сумм, непременно различных по итогам, а не только по составам слагаемых, вполне упорядочено и поэтому обязательно содержит именно первый элемент, больший всех сверхкардиналов всех рангов, предшествующих рассматриваемому, и поэтому являющийся именно самым первым, то есть наименьшим, сверхкардиналом $_\lambda\gamma_0$ рассматриваемого ранга, а значит,

имеющим именно нулевой правый нижний индекс. В-третьих, для этого самого первого и далее для каждого из следующих сверхкардиналов ${}_{\lambda}\gamma_{n}$ рассматриваемого ранга λ рассматривается класс $Z({}_{\lambda}\gamma_{n})$ всех сверхординалов (порядковых сверхчисел), имеющих именно этот сверхкардинал ${}_{\lambda}\gamma_{n}$, то есть относящихся ко всем вполне упорядоченным множествам, сверхмощность каждого из которых выражается именно этим сверхкардиналом ${}_{\lambda}\gamma_{n}$, являющийся подмножеством класса $T({}_{\lambda}\gamma_{n})$ всех порядковых сверхтипов, сверхмощность каждого из которых выражается именно этим сверхкардиналом ${}_{\lambda}\gamma_{n}$, то есть относящихся ко всем упорядоченным множествам, сверхмощность каждого из которых выражается именно этим сверхкардиналом ${}_{\lambda}\gamma_{n}$. В-четвёртых, ищется

сверхординал, непосредственно следующий за классом $Z({}_\lambda\gamma_n)$: сверхкардинал этого сверхординала и есть ${}_\lambda\gamma_{n+1}$. В качестве промежуточного итога последовательно получается очевидным образом счётное (например по диагоналям, перпендикулярным главной диагонали, или по прямоугольникам, например квадратам с этими диагоналями) множество всех сверхкардиналов всех неотрицательных целых рангов:

$$0 = {}_0\gamma_0,\ 1 = {}_0\gamma_1,\ 2 = {}_0\gamma_2,\ \dots ,\ n = {}_0\gamma_n,\ \dots;$$

$$\aleph_0 = {}_1\gamma_0,\ \aleph_1 = {}_1\gamma_1,\ \aleph_2 = {}_1\gamma_2,\ \dots ,\ \aleph_n = {}_1\gamma_n,\ \dots;$$

$${}_2\gamma_0,\ {}_2\gamma_1,\ {}_2\gamma_2,\ \dots ,\ {}_2\gamma_n,\ \dots;$$

$${}_3\gamma_0,\ {}_3\gamma_1,\ {}_3\gamma_2,\ \dots ,\ {}_3\gamma_n,\ \dots;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$${}_\lambda\gamma_0,\ {}_\lambda\gamma_1,\ {}_\lambda\gamma_2,\ \dots ,\ {}_\lambda\gamma_n,\ \dots;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Здесь к кардиналам теории множеств Кантора относятся только первые две строки, в которых можно для этого утверждения временно отвлечься от введённых обозначений сверхкардиналов нулевого и первого рангов:

$$\mathbf{0, 1, 2, \ldots , n, \ldots;}$$

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \ldots , \aleph_n, \ldots .$$

Для наглядности представляется целесообразным условно изобразить на следующем рисунке некоторые сверхкардиналы $_\lambda\gamma_n$ ранга λ соответствующими точками с абсциссами

$$x = \lambda + c\ln(1 + n)/(1 + c\ln(1 + n))$$

полуинтервала $[\lambda, \lambda + 1)$ неотрицательной полуоси,

где

положительный множитель c выбирается существенно меньшим единицы, например 0.5, чтобы уменьшить наибольший пустой промежуток между изображениями соседних сверхкардиналов с правыми нижними индексами 0 и 1;

логарифм выбран для удобства изображения степеней числа 10;

под знаком логарифма к числу n добавлена единица с двумя целями – для существования и для обнуления логарифма при n = 0;

знаменатель дроби есть её числитель, увеличенный на положительную постоянную, в качестве которой взята единица, чтобы дробь при любом неотрицательным целом n принадлежала полуинтервалу [0, 1).

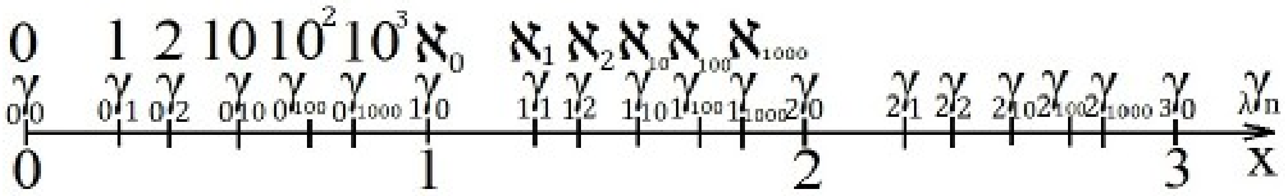

Рисунок. Условное изображение сверхкардиналов $_\lambda\gamma_n$ рангов λ = 0, 1, 2 с правыми нижними индексами n = 0, 1, 2, 10, 100, 1000, а также соответствующих конечных кардиналов и алефов с теми же правыми нижними индексами посредством соответствующих точек неотрицательной полуоси.

Даже этот промежуточный итог показывает, что теории кардиналов и ординалов по теории множеств Кантора дают лишь бесконечно малую часть даваемого общими теориями сверхкардиналов и сверхординалов. Ведь по теории множеств Кантора, во-первых, неотрицательные целые числа n могут быть не только конечными, но и бесконечными ординалами, а во-вторых, неявно представлены только первые два к тому же не введённых ранга 0 и 1. А по общим теориям сверхкардиналов и сверхординалов неотрицательные целые числа n и λ могут быть не только конечными и не только бесконечными ординалами, но и бесконечными сверхординалами. Но главное состоит в том, что сверхкардиналы и сверхординалы и далее неограниченно обобщаются по их общим теориям.

Рассмотрим сумму счётного множества всех сверхкардиналов $_\lambda\gamma_n$, частично представленных выше. Эта сумма не меньше любого из своих слагаемых и не содержит наибольшего слагаемого. Так что равенство в этом нестрогом неравенстве исключено. Следовательно, эта сумма не содержит сама себя и поэтому является сверхкардиналом, не входящим в множество всех сверхкардиналов вида $_\lambda\gamma_n$. То есть для этой суммы единственный ранг λ, принимающий все значения во множестве всех сверхординалов, включая сверхконечные (трансфинитные), является недостаточным. Это подобно былому положению перед введением самого ранга λ. Значит, теперь целесообразно опять ввести ещё один, дополнительный ранг μ с той же областью изменения во

множестве всех сверхординалов, включая сверхконечные (трансфинитные), и тем самым перейти к общему виду $_{\mu,\lambda}\gamma_n$ сверхкардиналов, причём ранг вместо одноместного (λ) становится двухместным (λ, μ), и эти подранги λ и μ идут в порядке нарастания значимости подрангов от λ к μ от γ влево, как это и указывается общим видом $_{\mu,\lambda}\gamma_n$ сверхкардиналов. Для ясности полезно иметь в виду следующее:

1) все неотрицательные целые числа n, равные соответствующим сверхкардиналам $_0\gamma_n$ нулевого одноместного ранга λ, находятся в нулевой строке λ = 0;

2) все алефы $\aleph_n$, индексированные неотрицательными целыми числами n, равные соответствующим сверхкардиналам $_1\gamma_n$ первого ранга, находятся в первой строке λ = 1;

3) впервые введённые сверхкардиналы ${}_\lambda\gamma_n$ каждого дальнейшего одноместного ранга λ образуют строку, сверхординал которой есть λ;

4) каждая из этих строк одномерна и образуется изменением единственного неотрицательного индекса n;

5) счётно бесконечная совокупность всех этих строк двухмерна и образуется изменениями индекса n и ранга λ, тоже являющегося нижним индексом, но левым, а не правым, то есть по существу образуется изменениями двух индексов λ и n, причём располагается в первом квадранте плоскости ввиду неотрицательности обоих индексов λ и n;

6) сумма всех сверхкардиналов общего вида ${}_{\lambda}\gamma_{n}$ этой плоскости является сверхкардиналом, который строго больше любого сверхкардинала этой плоскости и поэтому не имеет места на этой плоскости и который, следовательно, логично расположить именно выше этой плоскости;

7) введение составного двухместного (двухчастного) ранга (λ, μ) означает переход к системе трёх индексов (μ, λ, n) в порядке убывания значимости сверхкардиналов общего вида ${}_{\mu,\lambda}\gamma_{n}$ и тем самым к первому октанту (ввиду неотрицательности всех трёх индексов) трёхмерного пространства, причём основанием этого октанта является названный выше первый квадрант той плоскости;

8) ввиду дискретности общего множества значений всех трёх индексов (μ, λ, n) этот первый октант оказывается многоэлементным, многострочным и многоуровневым, причём многоэлементность строки, многострочность уровня и многоуровневость октанта выражаются общей областью изменения индексов n, λ, μ соответственно;

9) представляется логичным считать уровень рассмотренной выше плоскости основания октанта начальным, или нулевым, который поэтому выражается именно нулевым значением подранга μ при переходе от общего вида ${}_{\lambda}\gamma_{n}$ сверхкардиналов к их общему виду ${}_{\mu,\lambda}\gamma_{n}$ и при соответствующем переходе от двухмерности к трёхмерности, причём рассмотренные выше

сверхкардиналы этого нулевого уровня октанта приобретают следующий вид:

$$0 = {}_{00}\gamma_0,\ 1 = {}_{00}\gamma_1,\ 2 = {}_{00}\gamma_2,\ \dots ,\ n = {}_{00}\gamma_n,\ \dots;$$

$$\aleph_0 = {}_{01}\gamma_0,\ \aleph_1 = {}_{01}\gamma_1,\ \aleph_2 = {}_{01}\gamma_2,\ \dots ,\ \aleph_n = {}_{01}\gamma_n,\ \dots;$$

$${}_{02}\gamma_0,\ {}_{02}\gamma_1,\ {}_{02}\gamma_2,\ \dots ,\ {}_{02}\gamma_n,\ \dots;$$

$${}_{03}\gamma_0,\ {}_{03}\gamma_1,\ {}_{03}\gamma_2,\ \dots ,\ {}_{03}\gamma_n,\ \dots;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$${}_{0\lambda}\gamma_0,\ {}_{0\lambda}\gamma_1,\ {}_{0\lambda}\gamma_2,\ \dots ,\ {}_{0\lambda}\gamma_n,\ \dots;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

10) сумма всех сверхкардиналов этого нулевого уровня $\mu = 0$ этого октанта вынужденно находится на строящемся подобно нулевому уровню этого октанта его первом уровне $\mu = 1$:

$$_{10}\gamma_0,\ _{10}\gamma_1,\ _{10}\gamma_2,\ \ldots,\ _{10}\gamma_n,\ \ldots;$$

$$_{11}\gamma_0,\ _{11}\gamma_1,\ _{11}\gamma_2,\ \ldots,\ _{11}\gamma_n,\ \ldots;$$

$$_{12}\gamma_0,\ _{12}\gamma_1,\ _{12}\gamma_2,\ \ldots,\ _{12}\gamma_n,\ \ldots;$$

$$_{13}\gamma_0,\ _{13}\gamma_1,\ _{13}\gamma_2,\ \ldots,\ _{13}\gamma_n,\ \ldots;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$_{1\lambda}\gamma_0,\ _{1\lambda}\gamma_1,\ _{1\lambda}\gamma_2,\ \ldots,\ _{1\lambda}\gamma_n,\ \ldots;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

11) здесь и далее <u>сумма</u> <u>всех</u> <u>сверхкардиналов</u> <u>всех</u> <u>ранее</u> <u>построенных</u> уровней (в данном случае <u>нулевого</u> $\mu = 0$ и <u>первого</u> $\mu = 1$ уровней) этого октанта вынужденно находится на строящемся подобно всем ранее построенным уровням <u>следующем</u> (в данном случае втором $\mu = 2$) уровне этого октанта:

$$20\gamma 0,\ 20\gamma 1,\ 20\gamma 2,\ \cdots,\ 20\gamma n,\ \cdots;$$

$$21\gamma 0,\ 21\gamma 1,\ 21\gamma 2,\ \cdots,\ 21\gamma n,\ \cdots;$$

$$22\gamma 0,\ 22\gamma 1,\ 22\gamma 2,\ \cdots,\ 22\gamma n,\ \cdots;$$

$$23\gamma 0,\ 23\gamma 1,\ 23\gamma 2,\ \cdots,\ 23\gamma n,\ \cdots;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\lambda\gamma 0,\ 2\lambda\gamma 1,\ 2\lambda\gamma 2,\ \cdots,\ 2\lambda\gamma n,\ \cdots;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

12) по этому же правилу строится произвольный μ-й уровень этого октанта:

$$\mu 0\gamma 0,\ \mu 0\gamma 1,\ \mu 0\gamma 2,\ \cdots,\ \mu 0\gamma n,\ \cdots;$$

$$\mu 1\gamma 0,\ \mu 1\gamma 1,\ \mu 1\gamma 2,\ \cdots,\ \mu 1\gamma n,\ \cdots;$$

$$\mu 2\gamma 0,\ \mu 2\gamma 1,\ \mu 2\gamma 2,\ \cdots,\ \mu 2\gamma n,\ \cdots;$$

$$\mu 3\gamma 0,\ \mu 3\gamma 1,\ \mu 3\gamma 2,\ \cdots,\ \mu 3\gamma n,\ \cdots;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}_{\mu\lambda}\gamma_0,\ {}_{\mu\lambda}\gamma_1,\ {}_{\mu\lambda}\gamma_2,\ \dots,\ {}_{\mu\lambda}\gamma_n,\ \dots;$$

..................................;

13) сумма всех сверхкардиналов общего вида ${}_{\mu\lambda}\gamma_n$ этого трёхмерного октанта является сверхкардиналом, который строго больше любого сверхкардинала этого трёхмерного октанта и поэтому не имеет места в этом трёхмерном октанте и который, следовательно, логично расположить именно в четырёхмерном октанте. То есть для этой суммы двухместный ранг (λ, μ), система трёх индексов (μ, λ, n) в порядке убывания значимости, принимающих все значения во множестве всех сверхординалов, включая сверхконечные (трансфинитные), общий вид ${}_{\mu,\lambda}\gamma_n$ сверхкардиналов и тем самым первый октант (ввиду неотрицательности всех трёх индексов) трёхмерного

пространства являются недостаточными. Это подобно былому положению перед введением одноместного ранга λ и двухместного ранга (λ, μ). Значит, теперь целесообразно опять ввести ещё один, дополнительный ранг ν с той же областью изменения во множестве всех сверхординалов, включая сверхконечные (трансфинитные), и тем самым перейти к общему виду ${}_{\nu,\mu,\lambda}\gamma_n$ сверхкардиналов, причём ранг вместо двухместного (λ, μ) становится трёхместным (λ, μ, ν), и эти подранги λ, μ и ν идут в порядке нарастания значимости подрангов (от λ к μ и ν) от γ влево, как это и указывается общим видом ${}_{\nu,\mu,\lambda}\gamma_n$ сверхкардиналов, где, как всегда, запятые между подрангами, как и вообще между индексами, ставятся при необходимости избежать введения в заблуждение. Ввиду дискретности общего множества значений всех четырёх

индексов (ν, μ, λ, n) этот четырёхмерный октант оказывается многоэлементным, многострочным и многоуровневым;

14) этот процесс последовательного добавления подрангов продолжается неограниченно и приводит к общему виду $_{\ldots,\nu,\mu,\lambda}\gamma_n$ сверхкардиналов с бесконечноместными рангами (λ, μ, ν, ...) и бесконечными системами индексов (... , ν, μ, λ, n) в произвольно бесконечномерных октантах. Кроме того, вполне упорядоченное множество подрангов может быть и несчётным, поскольку по теореме Цермело каждое множество можно вполне упорядочить.

Таким образом, общие теории сверхкардиналов и сверхординалов являются именно бесконечными развивающими обобщениями теорий кардиналов и ординалов в теории множеств Кантора и выходят бесконечно далеко за их пределы.

8. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАЗЛИЧЕНИЯ ПОВТОРЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В МНОЖЕСТВЕ

Замечание. От канторова множества с непременным требованием попарного различия всех элементов множества, вытекающим из определения равенства канторовых множеств, последовательность существенно отличается допустимостью и возможностью даже бесконечных повторений одних и тех же элементов, поскольку они занимают непременно различные места в последовательности и тем самым различаются между собой именно по этим местам. Известные теоремы теории множеств Кантора о предельных точках и о производных как множествах всех предельных точек действенны именно

для точечных множеств, а не для последовательностей. Вполне естественной целью является использование этих теорем также для действительных последовательностей, чтобы сделать выводы обо всех частичных пределах всех сходящихся подпоследовательностей любых действительных последовательностей. Для этого достаточно для каждой действительной последовательности составить множество непременно попарно различаемых именно всех, в том числе повторяющихся, элементов этой последовательности. Для этого в совокупности достаточно:

1) придать каждому элементу любой действительной последовательности качестве его указателя (индекса) натуральный (положительный целый) порядковый номер этого элемента в этой последовательности;

2) в составляемом множестве всех индексированных элементов этой последовательности условиться различать между собой даже равные элементы, если они имеют именно различные указатели (индексы);

3) определять предельные точки и производные множества только по самим элементам этой последовательности, а натуральные (положительные целые) порядковые номера этих элементов в этой последовательности использовать только для различения именно равных элементов этой последовательности в этом множестве всех индексированных элементов этой последовательности.

Этот наиболее простой и естественный метод полной индексации для такого составления требуемого множества из всех индексированных элементов последовательности может быть заменён равносильным (эквивалентным) методом полной парной нумерации для составления множества всех упорядоченных пар, каждая из которых состоит из элемента последовательности на первом месте в этой паре и из натурального (положительного целого) порядкового номера именно этого элемента в этой последовательности на втором месте в этой паре, причём для равенства таких упорядоченных пар между собой естественным образом необходимы и в совокупности достаточны как равенство первых элементов этих пар между собой, так и равенство вторых элементов этих пар

между собой, а предельные точки и производные множества определяются только по самим элементам этой последовательности, тогда как натуральные (положительные целые) порядковые номера этих элементов в этой последовательности используются только для различения именно равных элементов этой последовательности в этом множестве всех таких упорядоченных пар. Равносильность (эквивалентность) этих обоих методов доказывается наличием очевидного взаимно однозначного соответствия любого индексированного элемента произвольной действительной последовательности упорядоченной паре из именно этого элемента и из его указателя (индекса) в этой последовательности.

Замечание. В общем случае указатель (индекс) может располагаться в круглых скобках как положительный целочисленный аргумент функции, что дополнительно обеспечивает одноуровневость индексации.

Замечание. Указанные метод полной индексации и метод полной парной нумерации являются частными случаями общей методологии присоединённой полной нумерации.

Замечание. Общая методология присоединённой полной нумерации предусматривает для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых, элементов действительной последовательности присоединение любым определённым однозначным способом именно к каждому элементу этой действительной

последовательности его порядкового номера в этой действительной последовательности.

Следствие. Метод полной индексации является частным случаем общей методологии присоединённой полной нумерации при способе присоединения именно к каждому элементу последовательности его порядкового номера в этой последовательности в качестве указателя (индекса) этого элемента, например правого нижнего указателя (индекса).

Примеры.

$$(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, \ldots) \mapsto$$
$$\{a_1, b_2, c_3, d_4, c_5, a_6, d_7, b_8, a_9, a_{10}, \ldots\};$$
$$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, \ldots) \mapsto$$
$$\{-0.3_1, 0_2, 4_3, -7_4, 4_5, -0.3_6, -7_7, 0_8, -0.3_9, -0.3_{10}, \ldots\}.$$

Замечание. Метод полной индексации обеспечивает хорошие краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод полной парной нумерации является частным случаем общей методологии присоединённой полной нумерации при способе присоединения именно к каждому элементу последовательности как первому элементу соответствующей пары его порядкового номера в этой последовательности в качестве второго элемента соответствующей пары.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦ {(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4), (c, 5), (a, 6), (d, 7), (b, 8), (a, 9), (a, 10), ...}; (-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦ {(-0.3, 1), (0, 2), (4, 3), (-7, 4), (4, 5), (-0.3, 6), (-7, 7), (0, 8), (-0.3, 9), (-0.3, 10), ...}.

Замечание. Метод полной парной нумерации НЕ обеспечивает краткости, наглядности, обозримости и удобства использования итогов.

Замечание. Представляется целесообразным рассмотреть также другие методы общей методологии присоединённой полной нумерации, ограничивающиеся постановкой всего лишь одного в той или иной степени подходящего дополнительного знака между элементом последовательности и его порядковым номером в этой последовательности.

Следствие. Метод полной нумерации после @ является частным случаем общей методологии присоединённой полной нумерации при способе присоединения именно после знака @ к каждому элементу последовательности его порядкового номера в этой последовательности.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a@1, b@2, c@3, d@4, c@5, a@6, d@7, b@8, a@9, a@10, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3@1, 0@2, 4@3, -7@4, 4@5, -0.3@6, -7@7, 0@8, -0.3@9, -0.3@10, ...}.

Замечание. Метод полной нумерации после @ обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод полной нумерации после # является частным случаем общей методологии присоединённой полной нумерации при способе присоединения именно после знака # к каждому элементу последовательности его порядкового номера в этой последовательности.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a#1, b#2, c#3, d#4, c#5, a#6, d#7, b#8, a#9, a#10, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3#1, 0#2, 4#3, -7#4, 4#5, -0.3#6, -7#7, 0#8, -0.3#9, -0.3#10, ...}.

Замечание. Метод полной нумерации после # обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод полной нумерации после & является частным случаем общей методологии присоединённой полной нумерации при способе присоединения именно после знака & к каждому элементу последовательности его порядкового номера в этой последовательности.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a&1, b&2, c&3, d&4, c&5, a&6, d&7, b&8, a&9, a&10, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3&1, 0&2, 4&3, -7&4, 4&5, -0.3&6, -7&7, 0&8, -0.3&9, -0.3&10, ...}.

Замечание. Метод полной нумерации после & обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод полной нумерации после \ является частным случаем общей методологии присоединённой полной нумерации при способе присоединения именно после знака \ к каждому элементу последовательности его порядкового номера в этой последовательности.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a\1, b\2, c\3, d\4, c\5, a\6, d\7, b\8, a\9, a\10, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3\1, 0\2, 4\3, -7\4, 4\5, -0.3\6, -7\7, 0\8, -0.3\9, -0.3\10, ...}.

Замечание. Метод полной нумерации после \ обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод полной нумерации после | является частным случаем общей методологии присоединённой полной нумерации при способе присоединения именно после знака | к каждому элементу последовательности его порядкового номера в этой последовательности.

Примеры. $(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) \mapsto$

$$\{a|1, b|2, c|3, d|4, c|5, a|6, d|7, b|8, a|9, a|10, ...\};$$

$$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) \mapsto$$

$$\{-0.3|1, 0|2, 4|3, -7|4, 4|5, -0.3|6, -7|7, 0|8, -0.3|9, -0.3|10, ...\}.$$

Замечание. Метод полной нумерации после | обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Замечание. В общей методологии присоединённой полной нумерации наилучшим является метод полной индексации, который обеспечивает хорошие краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Замечание. Общая методология присоединённой полной нумерации не является единственно возможной и даже самой простой и удобной. Нумерация присоединяется к элементам действительной последовательности с единственной целью различения в множестве между собой одинаковых элементов этой последовательности, стоящих в ней на разных местах. Поэтому достаточно ограничиться присоединением порядковых номеров только к повторяющимся элементам последовательности. Более того, для простоты, чтобы не возвращаться при

обнаружении самого первого повторения любого элемента последовательности назад, туда, где он появился впервые и где о повторении не было и речи, можно вообще отказаться от индексации именно самого первого появления любого элемента последовательности, поскольку отсутствие его индекса отличает самое первое появление любого элемента последовательности от индексированных последующих, повторных появлений этого же элемента последовательности. А сама нумерация именно и только повторных появлений одних и тех же элементов последовательности, однозначно выражаемая их индексацией, возможна определяющими соответствующие три общие методологии присоединённой различающей нумерации тремя различными естественными способами:

1) используется общая нумерация непременно всех элементов действительной последовательности, однако присоединяется только к повторным появлением элементов;

2) используется общая нумерация непременно всех только повторных появлений элементов действительной последовательности, единая и совместная для всех повторных появлений всех различных повторяющихся элементов;

3) используется семейство отдельных нумераций, каждая из которых является непременно своей для каждого из различных повторяющихся элементов действительной последовательности и даёт последовательные номера всем только его повторным появлениям в общей последовательности всех элементов вообще.

Этими тремя различными естественными способами определяются соответствующие три общие методологии присоединённой различающей нумерации:

1) общая методология присоединённой различающей общей нумерации;

2) общая методология присоединённой различающей общей повторной нумерации;

3) общая методология присоединённых различающих отдельных повторных нумераций.

Кроме того, после проведённых сопоставлений итогов применения методов общей методологии присоединённой полной нумерации следует ожидать, что и в этих общих методологиях присоединённой различающей нумерации наилучшими окажутся именно соответствующие методы

индексации, но теперь уже не полной, а соответствующим образом выборочной применительно только к повторениям элементов действительной последовательности.

Замечание. Общая методология присоединённой различающей общей нумерации предусматривает для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых, элементов действительной последовательности присоединение любым определённым однозначным способом именно общих номеров общей нумерации всей этой действительной последовательности целиком только к повторным появлениям любых элементов этой действительной последовательности.

Следствие. Метод различающей общей индексации является частным случаем общей методологии присоединённой различающей общей нумерации при способе присоединения только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в этой последовательности в качестве указателя (индекса) этого повторного появления этого элемента, например в качестве правого нижнего указателя (индекса).

Примеры. $(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, \ldots) \mapsto \{a, b, c, d, c_5, a_6, d_7, b_8, a_9, a_{10}, \ldots\}$;

$$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, \ldots) \mapsto$$
$$\{-0.3, 0, 4, -7, 4_5, -0.3_6, -7_7, 0_8, -0.3_9, -0.3_{10}, \ldots\}.$$

Замечание. Метод различающей общей индексации обеспечивает отличные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод различающей общей парной нумерации является частным случаем общей методологии присоединённой различающей общей нумерации при способе присоединения только к каждому из повторных появлений элементов последовательности как первому элементу соответствующей пары его порядкового номера в этой последовательности в качестве второго элемента соответствующей пары.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, (c, 5), (a, 6), (d, 7), (b, 8), (a, 9), (a, 10), ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, (4, 5), (-0.3, 6), (-7, 7), (0, 8), (-0.3, 9), (-0.3, 10), ...}.

Замечание. Метод различающей общей парной нумерации НЕ обеспечивает краткости, наглядности, обозримости и удобства использования итогов.

Замечание. Представляется целесообразным рассмотреть также другие методы общей методологии присоединённой различающей общей нумерации, ограничивающиеся постановкой всего лишь одного в той или иной степени подходящего дополнительного знака между элементом последовательности и его порядковым номером в этой последовательности.

Следствие. Метод различающей общей нумерации после @ является частным случаем общей методологии присоединённой различающей общей нумерации при способе присоединения именно после знака @ только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в этой последовательности.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c@5, a@6, d@7, b@8, a@9, a@10, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4@5, -0.3@6, -7@7, 0@8, -0.3@9, -0.3@10, ...}.

Замечание. Метод различающей общей нумерации после @ обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод различающей общей нумерации после # является частным случаем общей методологии присоединённой различающей общей нумерации при способе присоединения именно после знака # только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в этой последовательности.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c#5, a#6, d#7, b#8, a#9, a#10, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4#5, -0.3#6, -7#7, 0#8, -0.3#9, -0.3#10, ...}.

Замечание. Метод различающей общей нумерации после # обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод различающей общей нумерации после & является частным случаем общей методологии присоединённой различающей общей нумерации при способе присоединения именно после знака & только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в этой последовательности.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c&5, a&6, d&7, b&8, a&9, a&10, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4&5, -0.3&6, -7&7, 0&8, -0.3&9, -0.3&10, ...}.

Замечание. Метод различающей общей нумерации после & обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод различающей общей нумерации после \ является частным случаем общей методологии присоединённой различающей общей нумерации при способе присоединения именно после знака \ только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в этой последовательности.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c\5, a\6, d\7, b\8, a\9, a\10, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4\5, -0.3\6, -7\7, 0\8, -0.3\9, -0.3\10, ...}.

Замечание. Метод различающей общей нумерации после \ обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод различающей общей нумерации после | является частным случаем общей методологии присоединённой различающей общей нумерации при способе присоединения именно после знака | только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в этой последовательности.

Примеры. $(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) \mapsto$

$$\{a, b, c, d, c|5, a|6, d|7, b|8, a|9, a|10, ...\};$$

$$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) \mapsto$$

$$\{-0.3, 0, 4, -7, 4|5, -0.3|6, -7|7, 0|8, -0.3|9, -0.3|10, ...\}.$$

Замечание. Метод различающей общей нумерации после | обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Замечание. В общей методологии присоединённой различающей общей нумерации наилучшим является метод различающей общей индексации, который обеспечивает отличные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Замечание. Общая методология присоединённой различающей общей повторной нумерации предусматривает для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых, элементов действительной последовательности присоединение любым определённым однозначным способом именно общих номеров общей нумерации подпоследовательности непременно всех только повторных появлений любых элементов, единой и совместной для всех

повторных появлений всех различных повторяющихся элементов, только к повторным появлениям любых элементов этой действительной последовательности.

Следствие. Метод различающей общей повторной индексации является частным случаем общей методологии присоединённой различающей общей повторной нумерации при способе присоединения только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в последовательности только повторных появлений элементов действительной последовательности, единой и совместной для всех повторных появлений всех различных повторяющихся элементов, в качестве указателя (индекса) этого повторного появления этого элемента, например в качестве правого нижнего указателя (индекса).

Примеры. $(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, \ldots) \mapsto \{a, b, c, d, c_1, a_2, d_3, b_4, a_5, a_6, \ldots\}$;

$$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, \ldots) \mapsto$$
$$\{-0.3, 0, 4, -7, 4_1, -0.3_2, -7_3, 0_4, -0.3_5, -0.3_6, \ldots\}.$$

Замечание. Метод различающей общей повторной индексации обеспечивает отличные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод различающей общей повторной парной нумерации является частным случаем общей методологии присоединённой различающей общей повторной нумерации при способе присоединения только к каждому из повторных появлений элементов последовательности как первому элементу соответствующей пары его порядкового номера в

последовательности только повторных появлений элементов действительной последовательности, единой и совместной для всех повторных появлений всех различных повторяющихся элементов, в качестве второго элемента соответствующей пары.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, (c, 1), (a, 2), (d, 3), (b, 4), (a, 5), (a, 6), ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, (4, 1), (-0.3, 2), (-7, 3), (0, 4), (-0.3, 5), (-0.3, 6), ...}.

Замечание. Метод различающей общей повторной парной нумерации НЕ обеспечивает краткости, наглядности, обозримости и удобства использования итогов.

Замечание. Представляется целесообразным рассмотреть также другие методы общей методологии присоединённой различающей общей повторной нумерации, ограничивающиеся постановкой всего лишь одного в той или иной степени подходящего дополнительного знака между элементом последовательности и его порядковым номером в последовательности только повторных появлений элементов действительной последовательности, единой и совместной для всех повторных появлений всех различных повторяющихся элементов.

Следствие. Метод различающей общей повторной нумерации после @ является частным случаем общей методологии присоединённой различающей общей повторной нумерации при способе присоединения именно

после знака @ только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в последовательности только повторных появлений элементов действительной последовательности, единой и совместной для всех повторных появлений всех различных повторяющихся элементов.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c@1, a@2, d@3, b@4, a@5, a@6, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4@1, -0.3@2, -7@3, 0@4, -0.3@5, -0.3@6, ...}.

Замечание. Метод различающей общей повторной нумерации после @ обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод различающей общей повторной нумерации после # является частным случаем общей методологии присоединённой различающей общей повторной нумерации при способе присоединения именно после знака # только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в последовательности только повторных появлений элементов действительной последовательности, единой и совместной для всех повторных появлений всех различных повторяющихся элементов.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c#1, a#2, d#3, b#4, a#5, a#6, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4#1, -0.3#2, -7#3, 0#4, -0.3#5, -0.3#6, ...}.

Замечание. Метод различающей общей повторной нумерации после # обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод различающей общей повторной нумерации после & является частным случаем общей методологии присоединённой различающей общей повторной нумерации при способе присоединения именно после знака & только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в последовательности только повторных появлений элементов действительной последовательности, единой и совместной для всех повторных появлений всех различных повторяющихся элементов.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c&1, a&2, d&3, b&4, a&5, a&6, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4&1, -0.3&2, -7&3, 0&4, -0.3&5, -0.3&6, ...}.

Замечание. **Метод различающей общей повторной нумерации после &** обеспечивает **посредственные** краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. **Метод различающей общей повторной нумерации после ** является частным случаем **общей методологии присоединённой различающей общей повторной нумерации** при **способе присоединения** именно **после знака** \ только к каждому из **повторных** появлений элементов последовательности его порядкового **номера** в

последовательности только повторных появлений элементов действительной последовательности, единой и совместной для всех повторных появлений всех различных повторяющихся элементов.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c\1, a\2, d\3, b\4, a\5, a\6, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4\1, -0.3\2, -7\3, 0\4, -0.3\5, -0.3\6, ...}.

Замечание. Метод различающей общей повторной нумерации после \ обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод различающей общей повторной нумерации после | является частным случаем общей методологии присоединённой различающей общей повторной нумерации при способе присоединения именно после знака | только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в последовательности только повторных появлений элементов действительной последовательности, единой и совместной для всех повторных появлений всех различных повторяющихся элементов.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c|1, a|2, d|3, b|4, a|5, a|6, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4|1, -0.3|2, -7|3, 0|4, -0.3|5, -0.3|6, ...}.

Замечание. Метод различающей общей повторной нумерации после | обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Замечание. В общей методологии присоединённой различающей общей повторной нумерации наилучшим является метод различающей общей повторной индексации, который обеспечивает отличные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Замечание. Общая методология присоединённых различающих отдельных повторных нумераций предусматривает для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых, элементов действительной последовательности присоединение любым определённым однозначным способом отдельных номеров семейства отдельных нумераций, каждая из которых является непременно своей для подпоследовательности всех повторных появлений каждого из различных повторяющихся элементов действительной последовательности и даёт последовательные номера всем именно и только его повторным появлениям, лишь к повторным появлениям любых элементов этой действительной последовательности.

Следствие. Метод различающих отдельных повторных индексаций является частным случаем общей методологии присоединённых различающих отдельных повторных нумераций при способе присоединения только к каждому из повторных появлений элементов действительной последовательности его порядкового номера в отдельной последовательности только повторных появлений лишь этого элемента, причём присоединения в качестве указателя (индекса) этого повторного появления этого элемента, например в качестве правого нижнего указателя (индекса).

Примеры. $(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) \mapsto \{a, b, c, d, c_1, a_1, d_1, b_1, a_2, a_3, ...\}$;

$$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) \mapsto$$
$$\{-0.3, 0, 4, -7, 4_1, -0.3_1, -7_1, 0_1, -0.3_2, -0.3_3, ...\}.$$

Замечание. Метод различающей общей повторной индексации обеспечивает отличные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод различающей общей повторной парной нумерации является частным случаем общей методологии присоединённых различающих отдельных повторных нумераций при способе присоединения только к каждому из повторных появлений элементов последовательности как первому элементу соответствующей пары его порядкового номера в отдельной последовательности только повторных появлений лишь этого элемента, причём присоединения в качестве второго элемента соответствующей пары.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

$$\{a, b, c, d, (c, 1), (a, 1), (d, 1), (b, 1), (a, 2), (a, 3), ...\};$$

$$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) \mapsto$$

$$\{-0.3, 0, 4, -7, (4, 1), (-0.3, 1), (-7, 1), (0, 1), (-0.3, 2), (-0.3, 3), ...\}.$$

Замечание. Метод различающей общей повторной парной нумерации НЕ обеспечивает краткости, наглядности, обозримости и удобства использования итогов.

Замечание. Представляется целесообразным рассмотреть также другие методы общей методологии присоединённых различающих отдельных повторных нумераций, ограничивающиеся постановкой всего лишь одного в той или иной степени подходящего дополнительного знака между только каждым повторным появлением любого из элементов действительной последовательности и порядковым номером этого появления в отдельной последовательности только повторных появлений лишь этого элемента.

Следствие. Метод различающих отдельных повторных нумераций после @ является частным случаем общей методологии присоединённых различающих отдельных повторных нумераций при способе присоединения именно после знака @ только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в отдельной последовательности только повторных появлений лишь этого элемента.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c@1, a@1, d@1, b@1, a@2, a@3, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4@1, -0.3@1, -7@1, 0@1, -0.3@2, -0.3@3, ...}.

Замечание. Метод различающих отдельных повторных нумераций после @ обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод различающих отдельных повторных нумераций после # является частным случаем общей методологии присоединённых различающих отдельных повторных нумераций при способе присоединения именно после знака # только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в отдельной последовательности только повторных появлений лишь этого элемента.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c#1, a#1, d#1, b#1, a#2, a#3, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4#1, -0.3#1, -7#1, 0#1, -0.3#2, -0.3#3, ...}.

Замечание. Метод различающих отдельных повторных нумераций после # обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод различающих отдельных повторных нумераций после & является частным случаем общей методологии присоединённых различающих отдельных повторных нумераций при способе присоединения именно после знака & только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в отдельной последовательности только повторных появлений лишь этого элемента.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c&1, a&1, d&1, b&1, a&2, a&3, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4&1, -0.3&1, -7&1, 0&1, -0.3&2, -0.3&3, ...}.

Замечание. Метод различающих отдельных повторных нумераций после & обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод различающих отдельных повторных нумераций после \ является частным случаем общей методологии присоединённых различающих отдельных повторных нумераций при способе присоединения именно после знака \ только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в отдельной последовательности только повторных появлений лишь этого элемента.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c\1, a\1, d\1, b\1, a\2, a\3, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4\1, -0.3\1, -7\1, 0\1, -0.3\2, -0.3\3, ...}.

Замечание. Метод различающих отдельных повторных нумераций после \ обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Следствие. Метод различающих отдельных повторных нумераций после | является частным случаем общей методологии присоединённых различающих отдельных повторных нумераций при способе присоединения именно после знака | только к каждому из повторных появлений элементов последовательности его порядкового номера в отдельной последовательности только повторных появлений лишь этого элемента.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c|1, a|1, d|1, b|1, a|2, a|3, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4|1, -0.3|1, -7|1, 0|1, -0.3|2, -0.3|3, ...}.

Замечание. Метод различающих отдельных повторных нумераций после | обеспечивает посредственные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Замечание. В общей методологии присоединённых различающих отдельных повторных нумераций наилучшим является метод различающих отдельных повторных индексаций, который обеспечивает отличные краткость, наглядность, обозримость и удобство использования итогов.

Замечание. Все эти четыре общие методологии различают между собой в получаемом множестве все повторяющиеся элементы любой действительной последовательности путём присоединения непременно различных порядковых номеров хотя бы ко всем таким элементам. Однако при любом таком присоединении сохраняется чёткое разделение элементов последовательности и таких порядковых номеров между собой, присоединение используется только

для различения элементов последовательности в канторовом множестве, а в дальнейшем такие присоединённые порядковые номера не принимают никакого действенного участия, что естественно, допустимо, целесообразно и полезно. Однако представляется осмысленным расширение достигнутых возможностей, в частности путём именно действенного соединения элементов последовательности и порядковых номеров, гарантированно различающего в множестве возможные повторяющиеся элементы последовательности. Одной из простейших таких дополнительных возможностей является общая методология различающей мнимости, по которой к элементу действительной последовательности прибавляется произведение мнимой единицы и

произвольной биективной (обратимой, взаимно однозначной, например строго монотонной) функции f(n) номера n элемента. В итоге по действительной последовательности составляется множество непременно попарно различных комплексных чисел. В эту общую методологию различающей мнимости входит особенная методология бесконечно малой различающей мнимости, по которой такая биективная функция бесконечно мала, то есть стремится к нулю при бесконечном увеличении номера. Тогда все без исключения предельные точки этого множества оказываются непременно действительными числами, причём совпадающими с частичными пределами всех без исключения сходящихся подпоследовательностей исходной последовательности действительных чисел.

Замечание. Общая методология различающей мнимости предписывает для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых, элементов действительной последовательности прибавить хотя бы к каждому повторному появлению любого из элементов этой действительной последовательности произведение мнимой единицы и произвольной биективной (обратимой, взаимно однозначной, например строго монотонной) функции порядкового номера этого повторного появления этого элемента.

Замечание. Методология различающей мнимости с полной нумерацией в общей методологии различающей мнимости предписывает для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых,

элементов действительной последовательности прибавить именно к каждому элементу этой действительной последовательности произведение мнимой единицы и произвольной биективной (обратимой, взаимно однозначной, например строго монотонной) функции порядкового номера этого элемента в этой действительной последовательности целиком.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a + if(1), b + if(2), c + if(3), d + if(4), c + if(5), a + if(6), d + if(7), b + if(8), a + if(9), a + if(10), ...};

f(n) = n:

(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a + i, b + 2i, c + 3i, d + 4i, c + 5i, a + 6i, d + 7i, b + 8i, a + 9i, a + 10i, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦ {-0.3 + if(1), if(2), 4 + if(3), -7 + if(4), 4 + if(5), -0.3 + if(6), -7 + if(7), if(8), -0.3 + if(9), -0.3 + if(10), ...};

f(n) = n:

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦ {-0.3 + i, 2i, 4 + 3i, -7 + 4i, 4 + 5i, -0.3 + 6i, -7 + 7i, 8i, -0.3 + 9i, -0.3 + 10i, ...}.

Замечание. Методология различающей мнимости с полной нумерацией повторений в общей методологии различающей мнимости предписывает для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых, элементов действительной последовательности прибавить именно и только к каждому повторному появлению любого из элементов этой

действительной последовательности произведение мнимой единицы и произвольной биективной (обратимой, взаимно однозначной, например строго монотонной) функции порядкового номера этого повторного появления этого элемента в этой действительной последовательности целиком.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c + if(5), a + if(6), d + if(7), b + if(8), a + if(9), a + if(10), ...};

f(n) = n:

(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c + 5i, a + 6i, d + 7i, b + 8i, a + 9i, a + 10i, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

$$\{-0.3, 0, 4, -7, 4 + if(5), -0.3 + if(6), -7 + if(7), if(8), -0.3 + if(9), -0.3 + if(10), ...\};$$

$$f(n) = n:$$

$$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) \mapsto$$

$$\{-0.3, 0, 4, -7, 4 + 5i, -0.3 + 6i, -7 + 7i, 8i, -0.3 + 9i, -0.3 + 10i, ...\}.$$

Замечание. Методология различающей мнимости с общей нумерацией повторений в общей методологии различающей мнимости предписывает для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых, элементов действительной последовательности прибавить именно и только к каждому повторному появлению любого из элементов этой действительной последовательности произведение мнимой единицы и произвольной биективной (обратимой, взаимно

однозначной, например строго монотонной) функции порядкового номера этого повторного появления в общей подпоследовательности непременно всех только повторных появлений любых элементов, единой и совместной для всех повторных появлений всех различных повторяющихся элементов этой действительной последовательности.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c + if(1), a + if(2), d + if(3), b + if(4), a + if(5), a + if(6), ...};

f(n) = n:

(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c + i, a + 2i, d + 3i, b + 4i, a + 5i, a + 6i, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

$$\{-0.3, 0, 4, -7, 4 + if(1), -0.3 + if(2), -7 + if(3), if(4), -0.3 + if(5), -0.3 + if(6), ...\};$$

$$f(n) = n:$$

$$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) \mapsto$$

$$\{-0.3, 0, 4, -7, 4 + i, -0.3 + 2i, -7 + 3i, 4i, -0.3 + 5i, -0.3 + 6i, ...\}.$$

Замечание. Методология различающей мнимости с отдельными нумерациями повторений в общей методологии различающей мнимости предписывает для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых, элементов действительной последовательности прибавить именно и только к каждому повторному появлению любого из элементов этой действительной последовательности произведение мнимой единицы и произвольной биективной (обратимой, взаимно

однозначной, например строго монотонной) функции порядкового номера этого повторного появления этого элемента в отдельной подпоследовательности непременно всех лишь повторных появлений именно и только этого элемента этой действительной последовательности.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c + if(1), a + if(1), d + if(1), b + if(1), a + if(2), a + if(3), ...};

f(n) = n:

(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a, b, c, d, c + i, a + i, d + i, b + i, a + 2i, a + 3i, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3, 0, 4, -7, 4 + if(1), -0.3 + if(1), -7 + if(1), if(1), -0.3 + if(2), -0.3 + if(3), ...};

$$f(n) = n:$$

$$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, \ldots) \mapsto$$

$$\{-0.3, 0, 4, -7, 4 + i, -0.3 + i, -7 + i, i, -0.3 + 2i, -0.3 + 3i, \ldots\}.$$

Замечание. Особенная методология бесконечно малой различающей мнимости предписывает для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых, элементов действительной последовательности прибавить хотя бы к каждому повторному появлению любого из элементов этой действительной последовательности произведение мнимой единицы и произвольной биективной (обратимой, взаимно однозначной, например строго монотонной) бесконечно малой функции порядкового номера этого повторного появления этого элемента.

Замечание. Методология бесконечно малой различающей мнимости с полной нумерацией в особенной методологии бесконечно малой различающей мнимости предписывает для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых, элементов действительной последовательности прибавить именно к каждому элементу этой действительной последовательности произведение мнимой единицы и произвольной биективной (обратимой, взаимно однозначной, например строго монотонной) бесконечно малой функции порядкового номера этого элемента в этой действительной последовательности целиком.

Примеры. (a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a + if(1), b + if(2), c + if(3), d + if(4), c + if(5), a + if(6), d + if(7), b + if(8), a + if(9), a + if(10), ...};

f(n) = 1/n:

(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) ↦

{a + i/1, b + i/2, c + i/3, d + i/4, c + i/5, a + i/6, d + i/7, b + i/8, a + i/9, a + i/10, ...};

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3 + if(1), if(2), 4 + if(3), -7 + if(4), 4 + if(5), -0.3 + if(6), -7 + if(7), if(8), -0.3 + if(9), -0.3 + if(10), ...};

f(n) = 1/n^2:

(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) ↦

{-0.3 + i/1^2, i/2^2, 4 + i/3^2, -7 + i/4^2, 4 + i/5^2, -0.3 + i/6^2, -7 + i/7^2, i/8^2, -0.3 + i/9^2, -0.3 + i/10^2, ...}.

Замечание. Методология бесконечно малой различающей мнимости с полной нумерацией повторений в особенной методологии бесконечно малой различающей мнимости предписывает для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых, элементов действительной последовательности прибавить именно и только к каждому повторному появлению любого из элементов этой действительной последовательности произведение мнимой единицы и произвольной биективной (обратимой, взаимно однозначной, например строго монотонной) бесконечно малой функции порядкового номера этого повторного появления этого элемента в этой действительной последовательности целиком.

Примеры. $(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) \mapsto$

$\{a, b, c, d, c + if(5), a + if(6), d + if(7), b + if(8), a + if(9), a + if(10), ...\}$;

$f(n) = 1/2^n$:

$(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) \mapsto$

$\{a, b, c, d, c + i/2^5, a + i/2^6, d + i/2^7, b + i/2^8, a + i/2^9, a + i/2^{10}, ...\}$;

$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) \mapsto$

$\{-0.3, 0, 4, -7, 4 + if(5), -0.3 + if(6), -7 + if(7), if(8), -0.3 + if(9), -0.3 + if(10), ...\}$;

$f(n) = 1/n!$:

$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) \mapsto$

$\{-0.3, 0, 4, -7, 4 + i/5!, -0.3 + i/6!, -7 + i/7!, i/8!, -0.3 + i/9!, -0.3 + i/10!, ...\}$.

Замечание. Методология бесконечно малой различающей мнимости с общей нумерацией повторений в особенной методологии бесконечно малой различающей мнимости предписывает для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых, элементов действительной последовательности прибавить именно и только к каждому повторному появлению любого из элементов этой действительной последовательности произведение мнимой единицы и произвольной биективной (обратимой, взаимно однозначной, например строго монотонной) бесконечно малой функции порядкового номера этого повторного появления в общей подпоследовательности непременно всех только повторных появлений любых элементов, единой и совместной для всех

повторных появлений всех различных повторяющихся элементов этой действительной последовательности.

Примеры. $(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, \ldots) \mapsto$

$$\{a, b, c, d, c + if(1), a + if(2), d + if(3), b + if(4), a + if(5), a + if(6), \ldots\};$$

$$f(n) = 1/n^n:$$

$$(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, \ldots) \mapsto$$

$$\{a, b, c, d, c + i/1^1, a + i/2^2, d + i/3^3, b + i/4^4, a + i/5^5, a + i/6^6, \ldots\};$$

$$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, \ldots) \mapsto$$

$$\{-0.3, 0, 4, -7, 4 + if(1), -0.3 + if(2), -7 + if(3), if(4), -0.3 + if(5), -0.3 + if(6), \ldots\};$$

$$f(n) = 1/n^{1/3}:$$

$$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, \ldots) \mapsto$$

$$\{-0.3, 0, 4, -7, 4 + i/1^{1/3}, -0.3 + i/2^{1/3}, -7 + i/3^{1/3}, i/4^{1/3}, -0.3 + i/5^{1/3}, -0.3 + i/6^{1/3}, \ldots\}.$$

Замечание. Методология бесконечно малой различающей мнимости с отдельными нумерациями повторений в особенной методологии бесконечно малой различающей мнимости предписывает для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых, элементов действительной последовательности прибавить именно и только к каждому повторному появлению любого из элементов этой действительной последовательности произведение мнимой единицы и произвольной биективной (обратимой, взаимно однозначной, например строго монотонной) бесконечно малой функции порядкового номера этого повторного появления этого элемента в отдельной подпоследовательности непременно всех лишь повторных появлений именно и только этого элемента этой действительной последовательности.

Примеры. $(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) \mapsto$

$\{a, b, c, d, c + if(1), a + if(1), d + if(1), b + if(1), a + if(2), a + if(3), ...\};$

$f(n) = 1/n!^{n!}$:

$(a, b, c, d, c, a, d, b, a, a, ...) \mapsto$

$\{a, b, c, d, c + i/1!^{1!}, a + i/1!^{1!}, d + i/1!^{1!}, b + i/1!^{1!}, a + i/2!^{2!}, a + i/3!^{3!}, ...\};$

$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) \mapsto$

$\{-0.3, 0, 4, -7, 4 + if(1), -0.3 + if(1), -7 + if(1), if(1), -0.3 + if(2), -0.3 + if(3), ...\};$

$f(n) = 1/\ln(n+1)$:

$(-0.3, 0, 4, -7, 4, -0.3, -7, 0, -0.3, -0.3, ...) \mapsto$

$\{-0.3, 0, 4, -7, 4 + i/\ln(1+1), -0.3 + i/\ln(1+1), -7 + i/\ln(1+1), i/\ln(1+1), -0.3 + i/\ln(2+1), -0.3 + i/\ln(3+1), ...\}.$

Замечание. Особенная методология бесконечно малой различающей мнимости, по которой к элементу действительной последовательности прибавляется произведение мнимой единицы и произвольной именно бесконечно малой биективной (обратимой, взаимно однозначной, например строго монотонной) функции f(n) номера n элемента,

1) действенно соединяет элементы действительной последовательности и порядковые номера элементов,

2) по действительной последовательности составляет множество непременно попарно различных комплексных чисел и тем самым гарантированно различает в множестве возможные повторяющиеся элементы последовательности,

3) обеспечивает благодаря бесконечной малости изменений полное и исключительное сохранение предельности, то есть все без исключения предельные точки для этого множества оказываются непременно действительными числами, причём совпадающими с частичными пределами всех без исключения сходящихся подпоследовательностей исходной последовательности действительных чисел, а значит, множество всех этих предельных точек (то есть производная) для построенного множества комплексных чисел и множество всех частичных пределов всех без исключения сходящихся подпоследовательностей исходной последовательности действительных чисел в точности совпадают.

Замечание. Особенная методология бесконечно малой различающей мнимости, по которой к элементу действительной последовательности прибавляется произведение мнимой единицы и произвольной именно бесконечно малой биективной (обратимой, взаимно однозначной, например строго монотонной) функции f(n) номера n элемента, обеспечивает достижение именно совокупности указанных трёх пронумерованных целей путём выхода за пределы действительной числовой оси в область мнимости комплексной плоскости с переходом из одномерности в двухмерность. При этом действительные части всех элементов построенного (составленного) множества комплексных чисел в точности равны соответствующим элементам заданной действительной

последовательности. Естественно, возникает вопрос, нельзя ли добиться достижения именно совокупности указанных трёх пронумерованных целей, если во второй из этих целей ввести дополнительное ограничение лишь действительными числами (как частным случаем комплексных чисел) в составляемом множестве. Но при этом по-прежнему необходимо обеспечить непременное различение именно всех элементов составляемого множества, даже если хотя бы некоторые элементы заданной действительной последовательности повторяются. Особенная методология бесконечно малой различающей мнимости придаёт хотя бы всем повторениям элементов заданной действительной последовательности непременно различные мнимые части (изменения,

отклонения), причём бесконечно малые. Естественно, по сходству и различиям с этой методологией особенная методология бесконечно малой различающей действительности придаёт хотя бы всем повторениям элементов заданной действительной последовательности непременно различные действительные изменения (отклонения), причём бесконечно малые. Но при этом столь же естественно возникает очевидное осложнение. Ведь совокупность таких изменений повторных появлений каждого из элементов заданной действительной последовательности необходимо различает непременно все появления именно и только этого элемента между собой. Однако совершенно не исключено, что хотя бы некоторые таким образом изменённые повторные появления этого

элемента могут совпасть хотя бы с некоторыми сохранёнными или изменёнными появлениями других элементов заданной действительной последовательности. Кроме того, заданная действительная последовательность может быть ограниченной посредством принадлежности всех её элементов непустому не обязательно связному теоретико-множественному объединению S попарно непересекающихся интервалов, полуинтервалов-полуотрезков, полуотрезков-полуинтервалов и/или отрезков с непременно положительными (возможно, бесконечными) длинами. В таком случае могут оказаться естественными желательность или даже необходимость сохранить такие ограничения даже при изменениях тех или иных элементов заданной действительной

последовательности, то есть считать допустимыми только такие из этих изменений. Однако даже при таких осложнениях существует именно несчётно бесконечное множество решений задачи построения (составления) счётно бесконечного множества непременно попарно различных (возможно, бесконечно мало изменённых) всех (возможно, повторяющихся) элементов заданной счётно бесконечной действительной последовательности. А именно, мощность этого множества решений есть мощность континуума $\aleph$ в степени с показателем, равным счётно бесконечной мощности $\aleph_0$, то есть в итоге мощность континуума $\aleph$:

$$\aleph \wedge \aleph_0 = (2 \wedge \aleph_0) \wedge \aleph_0 = 2 \wedge (\aleph_0 * \aleph_0) = 2 \wedge (\aleph_0 \wedge 2) = 2 \wedge \aleph_0 = \aleph.$$

В таком теоретико-множественном объединении отрезки нулевой длины, которые являются изолированными точками, не допускаются по следующей причине. Если в заданной последовательности изолированная точка повторяется именно бесконечно и поэтому счётно бесконечно, то счётно бесконечная подпоследовательность этой последовательности, состоящая из всех появлений этой изолированной точки, тем самым тождественно сходится к этой изолированной точке, которая поэтому является одним из частичных пределов заданной последовательности в целом. Однако по определению изолированной точки множества существует её окрестность, не содержащая никаких других точек этого множества. Поэтому отсутствует какая бы то ни было

возможность обеспечить совокупность именно действительных добавлений к элементам этой подпоследовательности, различающих именно в множестве эти исходно тождественные в заданной последовательности её элементы, равные этой изолированной точке.

Замечание. Особенная методология бесконечно малой различающей действительности

1) придаёт для получения множества именно различаемых непременно всех, даже одинаковых, элементов заданной действительной последовательности хотя бы всем повторениям элементов заданной действительной последовательности непременно различные действительные изменения (отклонения), причём бесконечно малые,

2) по <u>заданной</u> <u>действительной</u> <u>последовательности</u> составляет <u>изменённую</u> <u>действительную</u> <u>последовательность</u> и именно <u>полностью</u> <u>перенимающее</u> эту <u>изменённую</u> <u>действительную</u> <u>последовательность</u> <u>множество</u> непременно попарно <u>различных</u> <u>действительных</u> чисел и тем самым гарантированно <u>различает</u> в этом <u>множестве</u> возможные <u>повторяющиеся</u> <u>элементы</u> <u>заданной</u> <u>действительной</u> <u>последовательности</u>,

3) <u>сохраняет</u> <u>принадлежность</u> <u>каждого</u> <u>изменённого</u> <u>элемента</u> <u>заданной</u> <u>действительной</u> <u>последовательности</u> именно <u>той же</u> <u>части</u> <u>заданного</u> <u>непустого</u> не обязательно связного теоретико-множественного <u>объединения</u> S попарно <u>непересекающихся</u> интервалов, полуинтервалов-полуотрезков, полуотрезков-полуинтервалов и/или

отрезков с непременно положительными (возможно, бесконечными) длинами, которой принадлежал этот элемент заданной действительной последовательности до его изменения,

4) обеспечивает благодаря бесконечной малости изменений полное и исключительное сохранение предельности, то есть все без исключения предельные точки для этого множества оказываются непременно действительными числами, причём совпадающими с частичными пределами всех без исключения сходящихся подпоследовательностей исходной последовательности действительных чисел, а значит, множество всех этих предельных точек (то есть производная) для построенного множества действительных чисел и множество всех частичных пределов всех без

исключения сходящихся подпоследовательностей исходной последовательности действительных чисел в точности совпадают.

Замечание. Общая методология бесконечно малого различения включает:

1) особенную методологию бесконечно малой различающей мнимости;

2) особенную методологию бесконечно малой различающей действительности.

Теорема. Пусть задана произвольная счётно бесконечная действительная последовательность с допустимостью повторений некоторых или даже всех её элементов и с принадлежностью всех её элементов непустому не обязательно связному теоретико-множественному

объединению S попарно непересекающихся интервалов, полуинтервалов-полуотрезков, полуотрезков-полуинтервалов и/или отрезков с непременно положительными (возможно, бесконечными) длинами. Тогда задача построения (составления) счётно бесконечного множества непременно попарно различных (возможно, бесконечно мало изменённых) непременно всех (возможно, повторяющихся) элементов заданной счётно бесконечной действительной последовательности с принадлежностью всех элементов этого множества этому теоретико-множественному объединению имеет именно несчётно бесконечное множество решений, мощность которого есть мощность континуума ℵ в степени с показателем, равным

счётно бесконечной мощности $\aleph_0$, то есть в итоге мощность континуума $\aleph$.

Определение. Совокупность изменений (в том числе отсутствующих, называемых нулевыми) всех заданных предметов называется допустимой тогда и только тогда, когда совокупность непременно всех, в том числе изменённых, предметов удовлетворяет совокупности заданных условий.

Доказательство теоремы.

Здесь допустимой является совокупность только таких бесконечно малых (в том числе отсутствующих, называемых нулевыми) изменений непременно всех элементов заданной счётно бесконечной действительной последовательности, которые, во-первых, сохраняют

принадлежность непременно всех изменённых её элементов заданному непустому не обязательно связному теоретико-множественному объединению S попарно непересекающихся интервалов, полуинтервалов-полуотрезков, полуотрезков-полуинтервалов и/или отрезков с непременно положительными (возможно, бесконечными) длинами и, во-вторых, обеспечивают необходимые для составляемого множества попарные различия непременно всех его элементов, включая как сохранённые, так и изменённые элементы заданной счётно бесконечной действительной последовательности.

Каждое решение задачи построения (составления) счётно бесконечного множества непременно попарно различных (возможно, бесконечно мало изменённых) непременно всех

(возможно, повторяющихся) элементов заданной счётно бесконечной действительной последовательности с принадлежностью всех элементов этого множества этому теоретико-множественному объединению взаимно однозначно определяется соответствующей допустимой совокупностью бесконечно малых изменений.

Поэтому рассматриваемое множество всех решений этой задачи равносильно (эквивалентно) множеству всех допустимых совокупностей таких изменений.

Множество всех допустимых совокупностей таких изменений является очевидным подмножеством множества любых действительных не обязательно бесконечно малых изменений непременно всех элементов заданной счётно бесконечной действительной последовательности.

Множество произвольных действительных изменений любого элемента заданной счётно бесконечной действительной последовательности есть множество всех действительных чисел и имеет мощность континуума $\aleph$.

Заданная действительная последовательность счётно бесконечна.

Поэтому множество любых действительных не обязательно бесконечно малых изменений непременно всех элементов заданной счётно бесконечной действительной последовательности имеет мощность, которая есть мощность континуума $\aleph$ в степени с показателем, равным счётно бесконечной мощности $\aleph_0$, то есть в итоге мощность континуума $\aleph$.

Множество всех допустимых совокупностей таких изменений как подмножество множества любых действительных не обязательно бесконечно малых изменений непременно всех элементов заданной счётно бесконечной действительной последовательности имеет мощность, которая не превышает мощности последнего множества, а она равна мощности континуума $\aleph$ в степени с показателем, равным счётно бесконечной мощности $\aleph_0$, то есть в итоге мощность континуума $\aleph$.

Поэтому для доказательства того, что множество всех допустимых совокупностей таких изменений имеет именно эту мощность, которая есть мощность континуума $\aleph$ в степени с показателем, равным счётно бесконечной мощности $\aleph_0$, то есть в итоге мощность континуума $\aleph$,

достаточно доказать, что существует подмножество этого множества, которое имеет именно эту мощность, которая есть мощность континуума $\aleph$ в степени с показателем, равным счётно бесконечной мощности $\aleph_0$, то есть в итоге мощность континуума $\aleph$.

Существование искомого подмножества доказывается именно конструктивно следующим отнюдь не необходимым, однако вполне достаточным простым алгоритмом:

1. Выбирается произвольная счётно бесконечная строго монотонно убывающая бесконечно малая необходимо положительная последовательность

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots , \delta_n, \ldots,$$

например

$$1, 1/2, 1/3, \ldots , 1/n, \ldots .$$

2. Рассматривается заданная допускающая любые повторения одинаковых элементов счётно бесконечная действительная последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n, \ldots,$$

все без исключения элементы a_n которой принадлежат одному и тому же непустому заданному теоретико-множественному объединению непересекающихся интервалов, полуинтервалов-полуотрезков, полуотрезков-полуинтервалов и/или отрезков с непременно положительными (возможно, бесконечными) длинами, не более чем счётно бесконечному, поскольку именно внутри каждой из этих объединяемых частей можно выбрать по одному непременно рациональному числу, все такие

рациональные числа попарно различны между собой ввиду пустоты взаимных пересечений всех этих частей, а множество даже всех рациональных чисел всего лишь счётно бесконечно.

3. Рассматриваются:

первый элемент a_1 заданной последовательности, принадлежащий части заданного теоретико-множественного объединения, включаемой в отрезок

$$[a_{1L}, a_{1R}] \ (a_{1L} < a_{1R}),$$

оба конца которого совпадают с концами этой части, так что этот первый элемент принадлежит этому отрезку:

$$a_1 \in [a_{1L}, a_{1R}];$$

первый элемент δ_1 выбранной последовательности, которым определяется радиус замыкания

$$[a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1]$$

окрестности

$$(a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1)$$

первого элемента a_1 заданной последовательности.

4. Определяется теоретико-множественное пересечение

$$[a_{1L}, a_{1R}] \cap [a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1] = [\max(a_{1L}, a_1 - \delta_1), \min(a_{1R}, a_1 + \delta_1)]$$

этих двух отрезков

$$[a_{1L}, a_{1R}], [a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1],$$

вместе с ними имеющее непременно положительную длину, содержащее первый элемент a_1 заданной последовательности

$$a_1 \in [\max(a_{1L}, a_1 - \delta_1), \min(a_{1R}, a_1 + \delta_1)]$$

и являющееся точечным множеством мощности континуума $\aleph$.

5. В качестве первого элемента b_1 составляемого множества выбирается (а множество возможностей этого выбора имеет мощность континуума $\aleph$) произвольное число (например a_1), принадлежащее этому теоретико-множественному пересечению:

$$b_1 \in [\max(a_{1L}, a_1 - \delta_1), \min(a_{1R}, a_1 + \delta_1)].$$

Поскольку

$$b_1 \in [\max(a_{1L}, a_1 - \delta_1), \min(a_{1R}, a_1 + \delta_1)] = [a_{1L}, a_{1R}] \cap [a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1] \subseteq [a_1 - \delta_1, a_1 + \delta_1],$$

то

$$|b_1 - a_1| \leq \delta_1.$$

6. По методу математической индукции по заданной действительной последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n, \ldots$$

строится (составляется) <u>сопредельная</u> (имеющая то же самое, что и у последовательности a_n, множество непременно <u>всех</u> <u>частичных</u> <u>пределов</u> <u>всех</u> <u>сходящихся</u> <u>подпоследовательностей</u> и также <u>допустимая</u> (с обеспечением <u>принадлежности</u> непременно <u>всех</u> элементов b_n тому же, что и все без исключения элементы a_n, требуемому заданному <u>непустому</u> не обязательно связному теоретико-множественному <u>объединению</u> S попарно <u>непересекающихся</u> интервалов, полуинтервалов-полуотрезков, полуотрезков-полуинтервалов и/или отрезков с непременно <u>положительными</u> (возможно, бесконечными) длинами, не более чем <u>счётно</u> <u>бесконечному</u>) <u>изменённая</u> <u>действительная</u> <u>последовательность</u>

$$b_1, b_2, b_3, \ldots , b_n, \ldots$$

непременно попарно <u>различных</u> элементов b_n.

Именно благодаря этому необходимому попарному <u>различию</u> эта последовательность b_n непременно <u>сопредельно</u> (с полным и исключительным <u>сохранением</u> того же <u>множества</u> <u>всех</u> <u>предельных</u> <u>точек</u>) перенимается как раз требуемым <u>множеством</u>

$$\{b_1, b_2, b_3, \ldots , b_n, \ldots\}.$$

<u>Начальный</u> шаг по методу математической индукции уже сделан. А именно, для n = 1 построен первый элемент b_1 требуемых изменённой последовательности и множества, принадлежащий требуемому заданному непустому теоретико-множественному <u>объединению</u> S и отдалённый

от соответствующего первого элемента a_1 заданной действительной последовательности не более чем на δ_1:

$$|b_1 - a_1| \leq \delta_1.$$

Далее делается допущение математической индукции о том, для любого натурального (положительного целого) числа n построена (составлена) конечная последовательность

$$b_1, b_2, b_3, \dots , b_n$$

непременно попарно различных действительных чисел как элементов, принадлежащих тому же требуемому заданному непустому теоретико-множественному объединению S и отдалённых от соответствующих, то есть имеющих те же указатели (индексы), элементов заданной последовательности не более, чем на соответствующие, то есть имеющие те же указатели (индексы), элементы δ_i

$$|b_i - a_i| \leq \delta_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots , n$$

изначально выбранной произвольной счётно бесконечной строго монотонно убывающей бесконечно малой необходимо положительной последовательности

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots , \delta_n, \ldots .$$

Теперь по методу математической индукции остаётся доказать возможность сделать индукционный шаг, то есть перейти от любого натурального (положительного целого) числа n к n + 1, подобный первому шагу, однако с тем очевидным осложнением, что на первом шаге ещё не было предыдущих ранее построенных (выбранных, составленных) элементов изменённой последовательности и множества, а на нынешнем шаге с номером n + 1 ранее уже

построены (выбраны, составлены) попарно различные предыдущие элементы

$$\mathbf{b_1, b_2, b_3, \ldots , b_n}$$

и требуется обеспечить непременное отличие следующего элемента b_{n+1} от каждого из этих предыдущих n элементов.

Рассматриваются:

имеющий требуемый номер n + 1 элемент a_{n+1} заданной действительной последовательности, принадлежащий части заданного теоретико-множественного объединения S, включаемой в отрезок (могущий быть одним и тем же для некоторых и даже для всех элементов заданной последовательности)

$$\mathbf{[a_{n+1L}, a_{n+1R}] \ (a_{n+1L} < a_{n+1R}),}$$

оба конца которого совпадают с концами этой части, так что этот элемент a_{n+1} принадлежит этому отрезку:

$$a_{n+1} \in [a_{n+1L}, a_{n+1R}];$$

имеющий требуемый номер n + 1 элемент δ_{n+1} <u>выбранной</u> последовательности, которым определяется радиус замыкания

$$[a_{n+1} - \delta_{n+1}, a_{n+1} + \delta_{n+1}]$$

окрестности

$$(a_{n+1} - \delta_{n+1}, a_{n+1} + \delta_{n+1})$$

элемента a_{n+1} <u>заданной</u> последовательности.

Определяется теоретико-множественное <u>пересечение</u>

$$[a_{n+1L}, a_{n+1R}] \cap [a_{n+1} - \delta_{n+1}, a_{n+1} + \delta_{n+1}] = [\max(a_{n+1L}, a_{n+1} - \delta_{n+1}), \min(a_{n+1R}, a_{n+1} + \delta_{n+1})]$$

этих двух отрезков

$$[a_{n+1L}, a_{n+1R}], [a_{n+1} - \delta_{n+1}, a_{n+1} + \delta_{n+1}],$$

вместе с ними имеющее непременно положительную длину, содержащее элемент a_{n+1} заданной последовательности

$$a_{n+1} \in [\max(a_{n+1L}, a_{n+1} - \delta_{n+1}), \min(a_{n+1R}, a_{n+1} + \delta_{n+1})]$$

и являющееся точечным множеством мощности континуума $\aleph$.

В качестве имеющего требуемый номер n + 1 элемента b_{n+1} составляемых изменённой последовательности и множества выбирается (а множество возможностей этого выбора имеет мощность континуума $\aleph$) произвольное число (например a_{n+1}), принадлежащее теоретико-множественной разности этого теоретико-множественного пересечения и множества всех ранее выбранных (построенных, составленных)

предыдущих элементов составляемых изменённой последовательности и множества:

$$b_{n+1} \in [\max(a_{n+1L}, a_{n+1} - \delta_{n+1}), \min(a_{n+1R}, a_{n+1} + \delta_{n+1})] \setminus \{b_1, b_2, b_3, \dots , b_n\}.$$

Поскольку

$$b_{n+1} \in [\max(a_{n+1L}, a_{n+1} - \delta_{n+1}), \min(a_{n+1R}, a_{n+1} + \delta_{n+1})] \setminus \{b_1, b_2, b_3, \dots , b_n\} = [a_{n+1L}, a_{n+1R}] \cap [a_{n+1} - \delta_{n+1}, a_{n+1} + \delta_{n+1}] \setminus \{b_1, b_2, b_3, \dots , b_n\} \subseteq [a_{n+1} - \delta_{n+1}, a_{n+1} + \delta_{n+1}],$$

то

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq \delta_{n+1}.$$

Этим доказана возможность сделать требуемый индукционный шаг.

Тем самым по методу математической индукции доказана действенность изложенного отнюдь не необходимого,

однако вполне достаточного простого алгоритма. Поэтому, разумеется, этот алгоритм позволяет построить далеко не все, однако некоторые решения требуемой задачи построения сопредельных изменённой последовательности и множества непременно попарно различных элементов, принадлежащих требуемому заданному теоретико-множественному объединению S. Тем самым этот алгоритм даёт некоторое подмножество множества непременно всех решений этой требуемой задачи.

По этому алгоритму каждый из элементов требуемых изменённой последовательности и множества выбирается произвольно из множества мощности континуума ℵ.

Мощность требуемого множества, как и заданной, и изменённой последовательностей, является счётно бесконечной мощностью $\aleph_0$.

Поэтому мощность даваемого этим алгоритмом подмножества множества непременно всех решений этой требуемой задачи имеет мощность, которая есть мощность континуума $\aleph$ в степени с показателем, равным счётно бесконечной мощности $\aleph_0$, то есть в итоге мощность континуума $\aleph$.

Кроме того, выше было доказано, что мощность множества непременно всех решений этой требуемой задачи не превышает именно этой мощности, которая есть мощность континуума $\aleph$ в степени с показателем, равным счётно

бесконечной мощности $\aleph_0$, то есть в итоге мощность континуума $\aleph$.

Следовательно, мощность множества непременно всех решений этой требуемой задачи равна именно этой мощности, которая есть мощность континуума $\aleph$ в степени с показателем, равным счётно бесконечной мощности $\aleph_0$, то есть в итоге мощность континуума $\aleph$.

Таким образом, доказательство данной теоремы полностью завершено.

Теорема. Существует имеющее сколь угодно большую мощность несчётно бесконечное множество способов различения повторений элементов последовательности в множестве. Более того, существует имеющее сколь угодно большую мощность несчётно бесконечное множество даже

единообразных способов различения повторений всех элементов последовательности в множестве.

Доказательство. Достаточно ограничиться вторым, более сильным утверждением теоремы. Ведь отказ от единообразия любого из способов различения повторений элементов последовательности в множестве позволяет в пределах всего лишь одного-единственного многообразного способа различать разные повторения даже одного и того же элемента и тем более различных элементов разными образами. Поэтому множество всех единообразных способов различения повторений всех элементов последовательности в множестве является всего лишь подмножеством множества всех вообще, то есть и единообразных, и

многообразных, способов различения повторений всех элементов последовательности в множестве.

Для доказательства данной теоремы достаточно для любой наперёд заданной мощности множеств предложить алгоритм построения таких хотя бы некоторых единообразных способов различения повторений всех элементов последовательности в множестве, что множество всех этих способов имеет мощность, которая превышает указанную наперёд заданную мощность.

По теории множеств Кантора для любой наперёд заданной мощности множеств существуют множества ещё более высокой мощности, то есть не существует никакого всеобщего ограничения сверху мощностей всевозможных множеств.

Поэтому вполне достаточен следующий алгоритм построения некоторых единообразных способов различения повторений всех элементов последовательности в множестве:

1) выбирается произвольный разделительный знак, например &, чтобы в множестве к любому повторению произвольного элемента последовательности присоединить номер этого повторения в этой последовательности;

2) для любой наперёд заданной мощности множеств строится по теории множеств Кантора любое множество ещё большей мощности;

3) к выбранному произвольному разделительному знаку, например &, присоединяется в качестве указателя (индекса), например правого нижнего, произвольный элемент построенного множества сколь угодно высокой мощности.

В итоге каждый элемент построенного множества сколь угодно высокой мощности однозначно определяет соответствующий единообразный способ различения повторений всех элементов последовательности в множестве.

Следовательно, множество всего лишь этих некоторых единообразных способов различения повторений всех элементов последовательности в множестве имеет сколь угодно большую мощность, что и требовалось доказать.

Замечание. Ранее было приведено достаточно внушительное количество, но всё-таки всего лишь конечное множество представляющихся наиболее простыми, естественными и удобными единообразных способов различения повторений всех элементов последовательности в множестве.

9. ОБЩИЕ ТЕОРИИ КОЛИЧЕСТВЕННО И/ИЛИ КАЧЕСТВЕННО ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ (ПЕРЕМЕННЫХ) ЧЁТКО-НЕЧЁТКИХ МНОЖЕСТВ, ДОМНОЖЕСТВ (ПРЕДМНОЖЕСТВ) И КВАНТИМНОЖЕСТВ (КОЛИЧЕСТВЕННЫХ МНОЖЕСТВ)

Изложенная выше общая теория различения повторений элементов последовательности в множестве имеет три следующих ограничения:

1) по характеру элементов множества, которые должны быть именно действительными числами;

2) по происхождению повторений элементов в множестве, то есть множество перенимает повторения элементов именно последовательности;

3) по мощности множества, которая непременно должна быть именно счётно бесконечной $\aleph_0$, что определяется исходной последовательностью.

Замечание. Общая теория различения повторений элементов последовательности в множестве показала невозможность непосредственного перенимания элементов последовательности множеством, если эта последовательность содержит повторения элементов. Поэтому представляется целесообразным ввести именно общее понятие домножества (предмножества) как совокупности предметов (элементов), которые могут и повторяться и при этом должны непременно полностью учитываться. Кроме того, целью общей теории домножеств (предмножеств) является снятие всех этих трёх ограничений, то есть различение любых повторений произвольных элементов в любой совокупности, которая может быть не только счётно бесконечной, но и конечной, и несчётно бесконечной.

Определение. Домножеством (предмножеством) называется совокупность предметов (элементов), которые могут и повторяться и при этом должны непременно полностью учитываться.

Определение. Квантиэлементом (количественным элементом) $_qa$ называется элемент (основа) a с количеством q, которые оба могут быть произвольными предметами.

Определение. Квантимножеством (количественным множеством) называется домножество (предмножество) как совокупность квантиэлементов (количественных элементов) $_qa$, причём все рядом стоящие одинаковые (повторяющееся) элементы, а если порядок элементов является несущественным, то и все одинаковые (повторяющееся) элементы считаются приведёнными, то

есть собранными в единые квантиэлементы (количественные элементы) $_q a$ с соответствующими количествами q элементов (основ) a.

Обозначения. В общей теории домножеств (предмножеств) используются соответствующие обозначения теории множеств Кантора с добавлением знака градуса ° непосредственно правее соответствующего обозначения.

Замечание. Представляется целесообразным сопоставить соответствующие примеры для множеств и для домножеств (предмножеств).

Таблица. Примеры теоретико-множественных обозначений для множеств, а также для домножеств (предмножеств) с добавлением знака градуса ° непосредственно справа.

Примеры теоретико-множественных обозначений для <u>множеств</u>	**Примеры теоретико-множественных обозначений для <u>домножеств</u> (<u>предмножеств</u>) с добавлением знака градуса °**
{0, 3, 3, 5, 5} = {0, 0, 0, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5} {0, -3} ∪ {1, -3} ∪ {-3} = {0, -3, 1} {-2, -2, -2, -2, -2, -2} \ {-2} = ∅ {-7, -7, -7, -7, -7} ∩ {-7, -7, -7} = {-7} {-4, -4, -4, -4, 9} Δ {-4, 9, 9} = ∅	**{0, 3, 3, 5, 5}° ≠° {0, 0, 0, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5}° {0, -3}° ∪° {1, -3}° ∪° {-3}° =° {0, -3, -3, -3, 1}° {-2, -2, -2, -2, -2, -2}° \° {-2}° =° {-2, -2, -2, -2, -2}° {-7, -7, -7, -7, -7}° ∩° {-7, -7, -7}° =° {-7, -7, -7}° {-4, -4, -4, -4, 9}° Δ° {-4, 9, 9}° =° {-4, -4, -4, 9}°**

Обозначения.

$${}_1a =^\circ \{a\}^\circ = \{a\},$$

$${}_na =^\circ \{a, a, \ldots , a\}^\circ =^\circ \{a_{(1)}, a_{(2)}, \ldots , a_{(n)}\}^\circ = \{a_{(1)}, a_{(2)}, \ldots , a_{(n)}\}$$

(n раз, для искусственного различения одинаковых элементов между собой может вводиться их нумерация правыми нижними указателями (индексами), причём на их искусственность указывает размещение их в круглых скобках,

$$n \in N = \{1, 2, 3, \ldots\}).$$

Определение. Присвоением количества q элементу a в квантиэлементе (количественном элементе) $_qa$ называется следующее количественное действие $_q$ с параметром q:

$${}_q\colon a \to {}_qa.$$

Определение. Определением количества q элемента в квантиэлементе (количественном элементе) называется следующее количественное действие Q:

$$\mathbf{Q: {}_q a \to q,}$$

$$\mathbf{Q(a \in {}_q a) = q,}$$

где

$$\mathbf{Q(b \in {}_q a) = 0,}$$

если

$$\mathbf{b \neq a.}$$

Определение. Подобными называются квантиэлементы (количественные элементы) $\mathbf{{}_q a}$ с одинаковыми элементами (основами) a.

Определение. Пустой квантиэлемент (как правило, при наличии непустых квантиэлементов равносильно

(эквивалентно) опускаемый, а при целесообразности сравнений могущий сохраняться и даже вводиться) есть пустое множество $\varnothing$, приводимое к окончательному определённому каноническому виду $_0\#$ (причём

$$Q(a \in {}_0\#) = 0$$

и

$$Q(\# \in {}_0\#) = 0),$$

когда он представлен в промежуточных неопределённых и неоднозначных видах

$${}_0a =^\circ {}_q\#,$$

где

0 есть нуль относительно сложения количеств,

 # есть пустой элемент,

$$\# \in \varnothing,$$

$$a \neq \#,$$

$$q \neq 0.$$

Определение. Квантимножество (количественное множество) есть квантиэлемент (количественный элемент) или квантисумма (количественная сумма) квантиэлементов (количественных элементов) вида $_q a$, каждый из которых состоит из своего элемента (основы), скажем a, со своим собственным, или индивидуальным, количеством, скажем q, внутри в квантимножестве (количественном множестве), причём элементы (основы) и количества элементов являются любыми предметами (возможно, нечёткими):

$$A =^\circ \{\ldots , {}_q a , \ldots , {}_r b , \ldots , {}_s c , \ldots\}^\circ =^\circ$$
$$\ldots +^\circ {}_q a +^\circ \ldots +^\circ {}_r b +^\circ \ldots +^\circ {}_s c +^\circ \ldots .$$

За исключением неприводимых квантимножеств (количественных множеств) вида

$$A^{\circ} =^{\circ} \{\ldots , {}_{q}a , \ldots , {}_{r}b , \ldots\}^{\circ\circ},$$

квантимножество (количественное множество) должно быть приведено (собрано) путём квантисложения (количественного сложения) всех подобных квантиэлементов (количественных элементов), при этом их количества складываются:

$$\ldots +^{\circ} {}_{q}a +^{\circ} \ldots +^{\circ} {}_{r}a +^{\circ} \ldots +^{\circ} {}_{s}a +^{\circ} \ldots =^{\circ}$$

$${}_{\ldots + q + \ldots + r + \ldots + s + \ldots}a.$$

Квантимножества (количественные множества) называются квантиравными, если после приведения все они содержат только общие для них всех квантиэлементы (количественные элементы).

Количеством элемента a в квантимножестве (количественном множестве) A называется количество этого элемента в единственном (если он вообще наличествует) квантиэлементе $_q$a, подобном этому элементу a, в непременно уже приведённом квантимножестве (количественном множестве) A:

$$Q(a \in A) = q.$$

Если в уже приведённом квантимножестве (количественном множестве) A нет квантиэлемента (количественного элемента), подобного элементу d, то количество такого элемента d в уже приведённом квантимножестве (количественном множестве) A равно нулю:

$$Q(d \in A) = 0.$$

Указание единичного количества не обязательно:

$$_{1}a =° a =° \{_{1}a\}° =° \{a\}° = \{a\}.$$

Сверхколичеством квантимножества (количественного множества) называется сумма количеств всех непустых элементов в этом квантимножестве (количественном множестве):

$$Q(A) =° Q\{... , {}_{q}a , ... , {}_{r}b , ...\}° =° ... + q + ...+ r + ...$$

Сверхколичество квантимножества (количественного множества) не зависит от приведения его элементов.

Находящимися во взаимно однозначном соответствии называются квантиэлементы (количественные элементы) с одинаковыми количествами, а также квантимножества (количественные множества) с одинаковыми сверхколичествами.

Присвоение внешнего количества квантимножеству (количественному множеству) означает умножение всех внутренних количеств квантимножества (количественного множества) на внешнее количество, при этом и сверхколичество квантимножества (количественного множества) умножается на это внешнее количество:

$$ {}_{t}A =^{\circ} {}_{t}\{\ldots , {}_{q}a , \ldots , {}_{r}b , \ldots , {}_{s}c , \ldots\}^{\circ} =^{\circ} \{\ldots , {}_{tq}a , \ldots , {}_{tr}b , \ldots , {}_{ts}c , \ldots\}^{\circ}, $$

$$ Q({}_{t}A) = tQ(A). $$

Определение. Одноквантиэлементным называется состоящее из единственного квантиэлемента (количественного элемента) домножество (предмножество), в частности квантимножество (количественное множество).

Примеры.

$$ \{{}_{0}a, {}_{q}\#\}^{\circ} =^{\circ} {}_{0}\# =^{\circ} \varnothing, $$

$$\{{}_q a,\ {}_{-r} a,\ {}_s\#\}^\circ =^\circ {}_{q-r} a,$$

$$\{{}_2 0\ ,\ {}_\pi\#\ ,\ {}_{-1} 0,\ {}_e 1\}^\circ =^\circ \{{}_1 0,\ {}_e 1\}^\circ =^\circ \{0,\ {}_e 1\}^\circ.$$

<u>Определение</u>. <u>Ординарным</u> называется уж<u>е</u> <u>приведённое</u> <u>квантимножество</u> (количественное множество) только с <u>единичными</u> количествами элементов.

<u>Замечание</u>. <u>Квантимножества</u> (количественные множества) естественным образом обобщают канторовские множества, частный случай которых возникает только при <u>нулевых</u> или <u>единичных</u> количествах элементов.

<u>Замечание</u>. Линейное обозначение неструктурированного <u>квантимножества</u> (количественного множества) используется только как наиболее удобное.

<u>Замечание</u>. Даже при принадлежащих отрезку от нуля до единицы <u>количествах</u> <u>элементов</u>

$$\ldots, q, \ldots, r, \ldots \in [0, 1]$$

квантимножества (количественные множества) являются обобщениями нечёткких множеств, потому что могут быть чёткими и полностью определёнными даже при таких ограниченных количествах элементов. Квантимножество (количественное множество)

$$\{{}_{1/2}\text{яблоко}, {}_{1/4}\text{груша}\}^{\circ}$$

может быть чётким и полностью определённым и состоять ровно из половины яблока и четверти груши.

Замечание. Отрицательные, дробные, иррациональные и мнимые числа, а также числа с единицами измерения естественным образом появляются в квантиэлементах (количественных элементах) и квантимножествах (количественных множествах) при вычитании (например

как потеря, пропажа, убыток, долг, доставка, продажа и расход), делении (доли), извлечении корня и измерении.

Примеры.

$$_{100\ \text{рублей}}\text{деньги} - {}_{500\ \text{рублей}}\text{деньги} =^\circ -{}_{400\ \text{рублей}}\text{деньги}$$

(например в случае поступления нового счёта, который должен быть оплачен, даже если на личном счету недостаточно денег для его оплаты; следовательно, пустое множество ∅ является не (несуществующим) самым «пустым», а только нейтральным квантимножеством (количественным множеством), как и ноль, который является нейтральным числом, но не (несуществующим) самым маленьким);

$$({}_{3}4)^{1/2} =^\circ {}_{\sqrt{3}}2;$$

$$({}_{-1}1)^{1/2} =^\circ {}_{\pm i}(\pm 1),$$

где i есть мнимая единица;

$$5 \text{ литров воды} = {}_{\text{5 литров}}\text{вода};$$

итог закупки

$$\{{}_{\text{2 буханки}}\text{хлеб}, {}_{\text{1,5 кг}}\text{мясо}, {}_{\text{ящик + 2}}\text{арбузы}, {}_{\text{-1 \% зарплаты}}\text{деньги}, {}_{\text{-2 ч}}\text{время}, {}_{\text{-1,5 л}}\text{бензин}\}°.$$

Определение. Алгебраической квантисуммой (количественной суммой) квантимножеств (количественных множеств) называется квантимножество (количественное множество), являющееся квантиитогом (количественным итогом) квантисложения (количественного сложения) всех квантиэлементов (количественных элементов) всех квантимножеств (количественных множеств) как операндов, при этом

каждое количество в вычитаемых квантимножествах (количественных множествах) меняет знак:

$$\ldots +^\circ \{\ldots , {}_q a , \ldots\}^\circ -^\circ \ldots -^\circ \{\ldots , {}_r b , \ldots\}^\circ +^\circ$$
$$\ldots +^\circ \{\ldots , {}_s c , \ldots\}^\circ -^\circ \ldots -^\circ \{\ldots , {}_t d , \ldots\}^\circ +^\circ \ldots =^\circ$$
$$\{\ldots , {}_q a , \ldots , {}_{-r} b , \ldots , {}_s c , \ldots , {}_{-t} d , \ldots\}^\circ.$$

Пример.

$$\{{}_3 1, 0, {}_\pi 2\}^\circ -^\circ \{{}_q 3, {}_e 1, {}_{-i} 0\}^\circ +^\circ \{{}_e i, {}_{-\pi} 2, {}_i 1\}^\circ =^\circ \{{}_{1+i} 0, {}_{3-e+i} 1, {}_{-q} 3, {}_e i\}^\circ.$$

Замечание. Понятие множества по Кантору недостаточно тем, что оно необходимо требует непременного отсутствия повторений элементов множества, что вытекает из определения равенства множеств по Кантору, для чего необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент любого из равных множеств был элементом любого другого из этих равных множеств.

Замечание. Понятие множества по Кантору совершенно не учитывает никаких повторений именно наличных элементов.

Следствие. Если нельзя именно гарантированно заведомо исключить возможность одинаковости хотя бы некоторых объединяемых предметов, то понятие множества по Кантору является совершенно неприемлемой математической моделью для такой совокупности предметов.

Замечание. Уже в школьном возрасте, а именно в 15-16 лет, автор настоящей научной монографии доказал триаду именно общих теорем о заведомой неприемлемости понятия множества по Кантору для совокупности предметов, хотя бы некоторые из которых являются или в принципе могут стать одинаковыми.

Теорема. Понятие множества по Кантору принципиально неприменимо к совокупности непременно всех корней алгебраического уравнения с одним неизвестным, хотя бы некоторые из которых являются кратными с кратностями, превышающими единицу.

Доказательство. По следствию основной теоремы алгебры произвольное алгебраическое уравнение положительной целой степени n с одним неизвестным имеет ровно n, вообще говоря, комплексных корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

По определению полного решения произвольной математической задачи такое решение сводится к установлению именно множества всевозможных частных решений этой задачи.

Такое определение однозначно вытекает из теоретико-множественного подхода, общепринятого в классической математике, основой которой как раз и является теория множеств Кантора.

Рассмотрим такое произвольное алгебраическое уравнение положительной целой степени n с одним неизвестным x, хотя бы некоторые из корней которого являются кратными с кратностями, превышающими единицу.

По следствию основной теоремы алгебры это уравнение имеет ровно n, вообще говоря, комплексных корней.

Составим список (перечень) именно всех этих корней, различаемых между собой посредством общепринятой соответствующей правой нижней индексации неизвестного x:

$$x_1 = c_1;$$
$$x_2 = c_2;$$
$$x_3 = c_3;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = c_n,$$

где

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$$

есть полностью сохраняющаяся по итогам решения уравнения конечная упорядоченная последовательность n алгебраических выражений именно такого общего вида с индексацией, тогда как конечная упорядоченная последовательность n алгебраических выражений

$$(c_1, c_2, c_3, \ldots , c_n)$$

по итогам решения уравнения принимает вид упорядоченной последовательности n конкретных, вообще говоря, комплексных чисел, на деле не имеющих никакой индексации, которая здесь показана чисто условно для удобства восприятия конечной последовательности именно n комплексных чисел, однако в принципе может быть выражена просто различными буквами без каких бы то ни было индексов.

Пример. Для кубического уравнения

$$(x + 4 - i)(x - 7 + 5i)^2 = 0$$

имеем:

$$n = 3;$$
$$c_1 = - 4 + i;$$
$$c_2 = 7 - 5i;$$

$$c_3 = 7 - 5i;$$

$$x_1 = - 4 + i;$$

$$x_2 = 7 - 5i;$$

$$x_3 = 7 - 5i;$$

конечная упорядоченная последовательность n = 3 алгебраических выражений

$$(x_1, x_2, x_3)$$

именно такого общего вида с индексацией полностью сохраняется по итогам решения уравнения, тогда как конечная упорядоченная последовательность n = 3 алгебраических выражений

$$(c_1, c_2, c_3)$$

по итогам решения уравнения принимает вид упорядоченной последовательности

$$(- 4 + i, 7 - 5i, 7 - 5i)$$

n = 3 конкретных комплексных чисел, не имеющих никакой индексации.

Возвращаемся к общему случаю произвольного положительного целого числа n. Все n корней уравнения даже при наличии одинаковых (кратных) его корней правильно полностью представлены выше списком (перечнем, реестром) с индексацией неизвестного x, а также конечной упорядоченной последовательностью (в случае всех именно действительных чисел равносильно (эквивалентно) n-мерным вектором)

$$(c_1, c_2, c_3, \dots , c_n)$$

n конкретных, вообще говоря, комплексных чисел, на деле не имеющих никакой индексации, которая здесь показана

чисто условно для удобства восприятия конечной последовательности именно n комплексных чисел, однако в принципе может быть показана просто различными буквами без каких бы то ни было индексов.

А вот соответствующее именно множество Кантора

$$\{c_1, c_2, c_3, \ldots , c_n\}$$

не в состоянии правильно полностью представить непременно все n корней уравнения именно при наличии одинаковых (кратных) его корней. Ведь при таком наличии оставляется множеством всего лишь по одному комплексному числу из каждой группы равных между собой комплексных чисел. Среди этих n комплексных чисел без всяких индексов есть хотя бы одна группа равных между собой комплексных чисел, содержащая не менее двух

комплексных чисел, из которых множеством оставляется только одно комплексное число. Поэтому в итоге в этом множестве останутся не более чем n - 1 различных между собой комплексных чисел. То есть соответствующее множество Кантора

$$\{c_1, c_2, c_3, \dots , c_n\}$$

не в состоянии правильно полностью представить непременно все n корней уравнения именно при наличии одинаковых (кратных) его корней. Тем самым теорема доказана.

Замечание. Зато домножество (предмножество)

$$\{c_1, c_2, c_3, \dots , c_n\}^\circ$$

как совокупность предметов (элементов), которые могут и повторяться и при этом должны непременно полностью

учитываться, в состоянии правильно полностью представить непременно все n корней уравнения именно при наличии одинаковых (кратных) его корней.

Пример. Для кубического уравнения

$$(x + 4 - i)(x - 7 + 5i)^2 = 0$$

все n = 3 корня уравнения даже при наличии одинаковых (кратных) его корней правильно полностью представлены выше списком (перечнем, реестром) с индексацией неизвестного x, а также конечной упорядоченной последовательностью

$$(c_1, c_2, c_3) = (- 4 + i, 7 - 5i, 7 - 5i)$$

n = 3 конкретных комплексных чисел, на деле не имеющих никакой индексации.

А вот соответствующее множество Кантора

$$\{c_1, c_2, c_3\} = \{- 4 + i, 7 - 5i, 7 - 5i\} = \{- 4 + i, 7 - 5i\}$$

не в состоянии правильно <u>полностью</u> представить непременно <u>все</u> n = 3 <u>корня</u> уравнения именно при <u>наличии</u> <u>одинаковых</u> (<u>кратных</u>) его корней

$$c_2 = c_3,$$

$$7 - 5i = 7 - 5i.$$

Ведь при таком наличии оставляется <u>множеством</u> всего лишь по <u>одному</u> <u>комплексному</u> числу из каждой группы равных между собой <u>комплексных</u> чисел. Среди этих n = 3 <u>комплексных</u> чисел <u>без</u> всяких <u>индексов</u> есть <u>одна</u> группа <u>равных</u> между собой <u>комплексных</u> чисел, содержащая <u>два</u> <u>комплексных</u> числ<u>а</u>, из которой <u>множеством</u> оставляется только <u>одно</u> <u>комплексное</u> число. Поэтому в итоге в этом <u>множестве</u> останутся 3 - 1 = 2 различных между собой

комплексных числа. То есть соответствующее множество Кантора

$$\{-4 + i, 7 - 5i, 7 - 5i\} = \{-4 + i, 7 - 5i\}$$

не в состоянии правильно полностью представить непременно все n = 3 корня уравнения именно при наличии одинаковых (кратных) его корней.

Замечание. Зато домножество (предмножество)

$$\{-4 + i, 7 - 5i, 7 - 5i\}^\circ =^\circ \{-4 + i, {}_2(7 - 5i)\}^\circ \ (\neq \{-4 + i, 7 - 5i\}^\circ)$$

как совокупность предметов (элементов), которые могут и повторяться и при этом должны непременно полностью учитываться, в состоянии правильно полностью представить непременно все n = 3 корня уравнения именно при наличии одинаковых (кратных) его корней.

Определение. Равноразличающим преобразованием домножества (предмножества), в частности квантимножества (количественного множества), с действительными количествами элементов называется действие непременного различения всех одинаковых элементов домножества (предмножества) между собой, причём каждый квантиэлемент (количественный элемент) с нецелым количеством элемента представляется суммой двух квантиэлементов с количествами того же элемента, равными целой и дробной частям нецелого количества того же элемента в представляемом квантиэлементе соответственно, где квантиэлемент с целой частью этого нецелого количества того же элемента представляется домножеством (предмножеством) элементов, равных этому

элементу, представленных в количестве, равном этой целой части, и искусственно различаемым между собой, а в элемент квантиэлемента с дробной частью этого нецелого количества того же элемента вносится искусственное отличие от всех искусственно различаемых элементов этого домножества (предмножества), представляющего квантиэлемент с целой частью этого нецелого количества.

Пример.

$$\{0, -3, -3, -3, -3, {}_{5.9}(-7)\}^\circ =^\circ \{0, (-3)_1, (-3)_2, (-3)_3, (-3)_4, {}_5(-7), {}_{0.9}(-7)\}^\circ =^\circ$$

$$\{0, (-3)_1, (-3)_2, (-3)_3, (-3)_4, (-7)_1, (-7)_2, (-7)_3, (-7)_4, (-7)_5, {}_{0.9}(-7)_6\}^\circ.$$

Определение. Поддомножеством (подпредмножеством) домножества (предмножества) называется домножество (предмножество), каждый элемент которого является элементом того домножества (предмножества), причём наличествует в количестве, не превышающем количества этого же элемента в том домножестве (предмножестве).

Определение. Дополнительным к поддомножеству (подпредмножеству) домножества (предмножества) называется такое поддомножество (подпредмножество) этого домножества (предмножества), что количественное сложение обоих этих поддомножеств (подпредмножеств) даёт это домножество (предмножество).

Следствие. Оба этих поддомножества (подпредмножества) домножества (предмножества) именно взаимно дополнительны.

Определение. Поддействием действия над домножеством (предмножеством) предметов действия называется это действие над поддомножеством (подпредмножеством) этого домножества (предмножества) этих предметов этого действия.

Определение. Дополнительным к поддействию над поддомножеством (подпредмножеством) домножества (предмножества) предметов действия называется поддействие этого действия над дополнительным (к поддомножеству (подпредмножеству) того поддействия) поддомножеством (подпредмножеством) этого домножества (предмножества).

Следствие. Оба этих поддействия именно взаимно дополнительны.

Определение. Подытогом итога действия над домножеством (предмножеством) предметов действия называется итог этого действия над поддомножеством (подпредмножеством) этого домножества (предмножества) этих предметов этого действия.

Определение. Дополнительным к подытогу итога действия над поддомножеством (подпредмножеством) домножества (предмножества) предметов действия называется подытог итога этого действия над дополнительным (к поддомножеству (подпредмножеству) того подытога итога действия) поддомножеством (подпредмножеством) этого домножества (предмножества).

Следствие. Оба этих подытога именно взаимно дополнительны.

Определение. Подсуммой суммы домножества (предмножества) слагаемых называется сумма поддомножества (подпредмножества) этого домножества (предмножества) слагаемых.

Замечание. Понятие подсуммы слагаемых является беспредельно глубоким обобщением принципиально суженного четырьмя искусственными ограничениями понятия частичной суммы ряда в классической математике. Во-первых, ограничен сам ряд хотя и бесконечным, однако всего лишь нигде не частым (нигде не плотным) счётно бесконечным множеством слагаемых. Во-вторых, каждая частичная сумма ряда относится только к конечному множеству слагаемых. В-третьих, это конечное множество слагаемых непременно начинается с начального

элемента ряда. В-четвёртых, это конечное множество непременно лишено внутренних пропусков элементов ряда. Разумеется, классические понятия ряда и его частичной суммы чрезвычайно полезны и плодотворны, однако имеют не просто узкие, а ещё и искусственно суженные области применимости.

Определение. Дополнительной к подсумме слагаемых называется подсумма слагаемых как сумма дополнительного (к поддомножеству (подпредмножеству) той подсуммы слагаемых) поддомножества (подпредмножества) этого домножества (предмножества) слагаемых.

Следствие. Обе эти подсуммы слагаемых именно взаимно дополнительны.

Замечание. Классическая математика основана на теории множеств Кантора, являющихся непременно неизменными (постоянными).

Замечание. Общая теория количественно и/или качественно изменяющихся (переменных) множеств рассматривает именно произвольно изменяющиеся множества, в частности не обязательно во времени и не обязательно непрерывно, но и дискретно и сочетанно (комбинированно), в том числе при предельных переходах.

Определение. Количественными изменениями множества называются изменения отдельных элементов множества при постоянстве функции принадлежности любого элемента множеству, для чего необходимо, в частности, отсутствие возникновений и исчезновений элементов множества по ходу его изменения.

Примеры. Изменения отдельных элементов числового множества. Изменения, или перемещения, отдельных точек точечного множества. Изменения отдельных уравнений и/или неравенств в множестве совместно решаемых уравнений и/или неравенств. Изменения отдельных окрестностей в множестве некоторых окрестностей некоторой топологии.

Определение. Множеством изменяющихся (переменных) элементов называется множество, допускающее только количественные изменения множества, то есть множество элементов с постоянными функциями принадлежности каждого элемента множеству, для чего необходим, в частности, непременно неизменный (постоянный) состав всех наличных элементов множества, которые могут изменяться, но не могут ни возникать, ни исчезать.

Примеры. Постоянного состава множество вещей и/или живых существ, изменяющихся со временем. Множество порций блюда в тарелках на столе. Множество изменяющихся со временем предметов в сумке после завершения покупок и до выкладывания. Множество вынутых из морозилки кусочков льда, тающих в комнате, пока ни один из них ещё не растаял полностью.

Замечание. Общая теория количественно изменяющихся (переменных) множеств развивает известные математические понятия, методы и теории применительно к таким множествам и по существу является целой математикой количественно изменяющихся (переменных) множеств.

Примеры. Теории поэлементных пределов, непрерывности, дифференцирования и интегрирования множеств.

Определение. Поэлементным пределом множества называется множество пределов всех элементов этого множества.

Пример.

$$\lim_{x \to a}\{5, x\sin(x), \pi x^2 + y^2 = S, \{(x - a)^3, \pi x - \pi a\}\} = \{5, a\sin(a), \pi a^2 + y^2 = S, \{0, 0\}\} = \{5, a\sin(a), \pi a^2 + y^2 = S, \{0\}\}.$$

Замечание. Множество по Кантору принципиально не учитывает повторений наличных элементов. В данном случае во внутреннем множестве из двух нулевых элементов множеством по Кантору оставляется только один нулевой элемент.

Определение. Множество называется поэлементно непрерывным, если все его элементы непрерывны.

Определение. Поэлементной производной множества называется множество производных всех элементов этого множества.

Пример.

$$(d/dx)\{5, x\sin(x), \pi x^2 + y^2 = S, \{\pi x - 11, \pi x + 3\}\} = \{0, \sin(x) + x\cos(x), 2\pi x = 0, \{\pi, \pi\}\} = \{0, \sin(x) + x\cos(x), 2\pi x = 0, \{\pi\}\}.$$

Замечание. Множество по Кантору принципиально не учитывает повторений наличных элементов. В данном случае во внутреннем множестве из двух элементов π множеством по Кантору оставляется только один элемент π.

Замечание. Разумеется, поэлементная производная множества принципиально отличается от производного множества по теории множеств Кантора, то есть от множественной производной множества, и поэтому непременно должна выделяться обозначениями, как это сделано в последнем примере, явно показывающем именно поэлементный смысл соответствующей производной множества ясно выделенных именно отдельных элементов.

Определение. Имеющей неотрицательный целый порядок k поэлементно-множественной производной метамножества множеств как отдельных элементов метамножества называется метамножество имеющих порядок k производных множеств всех множеств как отдельных элементов этого метамножества.

Обозначение. Неотрицательный целый порядок k поэлементно-множественной производной метамножества множеств как отдельных элементов метамножества обозначается приписыванием первых английских букв es слов element (элемент) и set (множество) справа к неотрицательному целому порядку k в круглых скобках в правом верхнем указателе (индексе).

Пример.

$$\{\{5\}, (-2, 3), (1, 5], \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}, \{-1, -1/2, -1/3, -1/4, \ldots\}\}^{(1es)}$$

$$= \{\varnothing, [-2, 3], [1, 5], \{0\}, \{0\}\} = \{\varnothing, [-2, 3], [1, 5], \{0\}\}.$$

Замечание. Множество по Кантору принципиально не учитывает повторений наличных элементов. В данном случае из двух одноэлементных внутренних множеств с единственным нулевым элементом множеством по Кантору

оставляется только одно одноэлементное внутреннее множество с единственным нулевым элементом.

Замечание. В последнем примере наличие английских букв es после единицы как порядка множественной производной показывает, что речь идёт о поэлементно-множественной производной метамножества множеств как отдельных элементов метамножества. Поэтому все элементы метамножества должны рассматриваться именно как множества. В частности, элемент (-2, 3) надлежит рассматривать как интервал, а не как упорядоченную пару, или, равносильно (эквивалентно), не как последовательность двух элементов.

Определение. Поэлементным интегралом множества называется множество интегралов всех элементов этого множества.

Пример.

$$\int_0^a\{5, \cos(x), \pi x^2 + y^2 = S, \{x, a - x\}\}dx = \{5a, \sin(a), \pi a^3/3 + ay^2 = aS, \{a^2/2, a^2/2\}\} = \{5a, \sin(a), \pi a^3/3 + ay^2 = aS, \{a^2/2\}\}.$$

Замечание. Множество по Кантору принципиально не учитывает повторений наличных элементов. В данном случае во внутреннем множестве из двух элементов $a^2/2$ множеством по Кантору оставляется только один элемент $a^2/2$.

Определение. Качественными изменениями множества называются изменения функций принадлежности элементов множеству, в частности возникновения и исчезновения элементов множества по ходу и/или в итоге его изменения.

Примеры. Рождение и смерть живого существа. Возникновение или создание нового предмета. Исчезновение или разрушение старого предмета. Вход (влёт) живого существа, внос предмета в помещение. Выход (вылет) живого существа, вынос предмета из помещения. Приём и увольнение сотрудников организации. Замены игроков во время игры. Смены спортивных коллективов на площадке во время соревнования. Смены выступающих, докладчиков, блюд. Вход предмета в поле естественного или искусственного зрения (глаза или съёмочного устройства соответственно), например при движениях предмета, помех и/или зрителя, при изменении освещения, после затмения. Выход предмета из поля естественного или искусственного зрения, например при движениях предмета,

помех и/или зрителя, при изменении освещения, при наступлении полного затмения. Вход предмета в поле непроизвольного или произвольного внимания, чувственного и/или мысленного и/или волевого рассмотрения, например при возникновении или создании нового предмета, при соответствующих переключениях внимания или рассмотрения. Выход предмета из поля внимания или рассмотрения, например при исчезновении или разрушении старого предмета, при соответствующих переключениях внимания или рассмотрения.

Определение. Нечёткими качественными изменениями множества называются изменения нечётких функций принадлежности элементов множеству, в частности возникновения и исчезновения элементов множества по ходу и/или в итоге его изменения, выражаемые нечёткими функциями принадлежности элементов множеству, свойственными нечётким множествам.

Замечание. Значение функции принадлежности элемента множеству строго между нулём и единицей может быть не только нечётким, но и чётким.

Пример. Множество сосудов с жидкостями или сыпучими веществами, причём степенью принадлежности сосуда множеству называется степень заполненности его полости соответствующим веществом, выражаемая долей

заполненной части полости. В частности, степень принадлежности множеству наполовину наполненного водой стакана равна точно 1/2 и является вполне чёткой.

Определение. Множеством изменяющегося (переменного) состава называется множество, допускающее не только количественные изменения множества, то есть изменения отдельных элементов множества, но и качественные изменения множества, то есть изменения функций принадлежности элементов множеству, в частности возникновения и исчезновения некоторых или даже всех элементов множества по ходу и/или в итоге его изменения.

Замечание. Общая теория количественно и/или качественно изменяющихся (переменных) множеств вводит понятия чёткого, нечёткого и чётко-нечёткого элементов и чётко-нечёткого множества и обобщает понятие такой функции принадлежности элемента нечёткому множеству, которая принимает не только свойственные чётким множествам значения, равные нулю при непринадлежности элемента множеству и равные единице в случае принадлежности элемента множеству, как у характеристической функции множества по Валле Пуссену, но и любые действительные значения между нулём и единицей только в случае нечёткости.

Определение. Чётким называется элемент множества, имеющий непременно чёткую постоянную или переменную функцию своей принадлежности множеству.

Определение. Нечётким называется элемент множества, имеющий непременно нечёткую постоянную или переменную функцию своей принадлежности множеству.

Определение. Чётко-нечётким называется элемент множества, имеющий переменно то чёткую, то нечёткую функцию своей принадлежности множеству.

Определение. Чётким называется множество, все элементы которого являются чёткими.

Определение. Нечётким называется множество, все элементы которого являются нечёткими.

Определение. Чётко-нечётким называется множество, имеющее или как чёткие, так и нечёткие элементы, или хотя бы один чётко-нечёткий элемент.

Замечание. Представляется целесообразным ввести краткое обозначение для стандартной функции знака действительного числа, равной единице для положительных чисел, равной нулю для нуля и равной минус единице для отрицательных чисел.

Обозначение. Функция знака действительного числа x

$$x° = \mathrm{sign}(x).$$

Примеры переменных функций принадлежности для возникновения элементов множеств.

Скачок функции принадлежности y на действительной оси от нуля до единицы в нуле x, где y = 1/2:

$$y = (1 + x^{\circ})/2.$$

Скачок функции принадлежности y на действительной оси от нуля до единицы при x = a, где y = 1/2:

$$y = (1 + (x - a)^{\circ})/2.$$

Кусочно-линейная непрерывная функция принадлежности y на действительной оси с изменением от нуля до единицы линейно только на отрезке от x = a до x = b > a:

$$y = (1 + (|x - a| - |x - b|)/(b - a))/2.$$

Проверка.

Если $x \leq a$, то

$$y = (1 + (|x - a| - |x - b|)/(b - a))/2 = (1 + (a - x - b + x)/(b - a))/2 = 0.$$

Если $a \leq x \leq b$, то

$$y = (1 + (|x - a| - |x - b|)/(b - a))/2 = (1 + (x - a - b + x)/(b - a))/2 = (x - a)/(b - a).$$

Если $x \geq b$, то

$$y = (1 + (|x - a| - |x - b|)/(b - a))/2 = (1 + (x - a - x + b)/(b - a))/2 = 1.$$

Одна из гладких функций принадлежности y на действительной оси с центрально симметричным относительно точки ((a + b)/2, 1/2) двойным параболическим изменением от нуля до единицы только на отрезке от x = a до x = b > a:

$$y = 1/2 + ((x - a)|x - a| + (x - b)|x - b| - (2x - a - b)|2x - a - b|/2)/(b - a)^2.$$

Проверка.

Если $x \leq a$, то

$$y = 1/2 + ((x - a)|x - a| + (x - b)|x - b| - (2x - a - b)|2x - a - b|/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 + (- (x - a)^2 - (x - b)^2 + (2x - a - b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 + (- x^2 + 2ax - a^2 - x^2 + 2bx - b^2 + 2x^2 - 2ax - 2bx + (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 + (- a^2 - b^2 + (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$((b - a)^2 - 2a^2 - 2b^2 + (a + b)^2)/(2(b - a)^2) = 0.$$

Если $a \leq x \leq (a + b)/2$, то

$$y = 1/2 + ((x - a)|x - a| + (x - b)|x - b| - (2x - a - b)|2x - a - b|/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 + ((x - a)^2 - (x - b)^2 + (2x - a - b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 + (x^2 - 2ax + a^2 - x^2 + 2bx - b^2 + 2x^2 - 2ax - 2bx + (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 + (- 2ax + a^2 - b^2 + 2x^2 - 2ax + (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$((b - a)^2 - 8ax + 2a^2 - 2b^2 + 4x^2 + (a + b)^2)/(2(b - a)^2) =$$

$$(a^2 - 2ab + b^2 - 8ax + 2a^2 - 2b^2 + 4x^2 + a^2 + 2ab + b^2)/(2(b - a)^2) =$$

$$(a^2 - 8ax + 2a^2 + 4x^2 + a^2)/(2(b - a)^2) = 2(x - a)^2/(b - a)^2.$$

Если $(a + b)/2 \le x \le b$, то

$$y = 1/2 + ((x - a)|x - a| + (x - b)|x - b| - (2x - a - b)|2x - a - b|/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 + ((x - a)^2 - (x - b)^2 - (2x - a - b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 + (x^2 - 2ax + a^2 - x^2 + 2bx - b^2 - 2x^2 + 2ax + 2bx - (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 + (a^2 + 2bx - b^2 - 2x^2 + 2bx - (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$((b - a)^2 + 8bx + 2a^2 - 2b^2 - 4x^2 - (a + b)^2)/(2(b - a)^2) =$$

$$(a^2 - 2ab + b^2 + 8bx + 2a^2 - 2b^2 - 4x^2 - a^2 - 2ab - b^2)/(2(b - a)^2) =$$

$$(8bx + 2a^2 - 2b^2 - 4x^2 - 4ab)/(2(b - a)^2) =$$

$$(4bx + a^2 - b^2 - 2x^2 - 2ab)/(b - a)^2 =$$

$$1 + (- (b - a)^2 + 4bx + a^2 - b^2 - 2x^2 - 2ab)/(b - a)^2 =$$

$$1 + (- a^2 + 2ab - b^2 + 4bx + a^2 - b^2 - 2x^2 - 2ab)/(b - a)^2 =$$

$$1 + (- b^2 + 4bx - b^2 - 2x^2)/(b - a)^2 =$$

$$1 - 2(b - x)^2/(b - a)^2.$$

Если $x \geq b$, то

$$y = 1/2 + ((x - a)|x - a| + (x - b)|x - b| - (2x - a - b)|2x - a - b|/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 + ((x - a)^2 + (x - b)^2 - (2x - a - b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 + (x^2 - 2ax + a^2 + x^2 - 2bx + b^2 - 2x^2 + 2ax + 2bx - (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 + (a^2 + b^2 - (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$((b - a)^2 + 2a^2 + 2b^2 - (a + b)^2)/(2(b - a)^2) =$$

$$(a^2 - 2ab + b^2 + 2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2)/(2(b - a)^2) =$$

$$(- 2ab + 2a^2 + 2b^2 - 2ab)/(2(b - a)^2) = 1.$$

Замечание. Приведённые выше некоторые простейшие функции принадлежности или скачкообразно и тем самым разрывно, или непрерывно и даже гладко возрастают от

нуля до единицы, что соответствует возникновению элементов множеств. Чтобы получить соответствующие некоторые простейшие функции принадлежности для исчезновения элементов множеств с убыванием от единицы до нуля или скачкообразно и тем самым разрывно, или непрерывно и даже гладко, достаточно из функции, которая равна единице на всей действительной оси, вычесть приведённые выше функции соответственно.

Примеры переменных функций принадлежности для исчезновения элементов множеств.

Скачок функции принадлежности y на действительной оси от единицы до нуля в нуле x, где y = 1/2:

$$y = 1 - (1 + x^\circ)/2 = (1 - x^\circ)/2.$$

Скачок функции принадлежности y на действительной оси от единицы до нуля при x = a, где y = 1/2:

$$y = 1 - (1 + (x - a)^\circ)/2 = (1 - (x - a)^\circ)/2.$$

Кусочно-линейная непрерывная функция принадлежности y на действительной оси с изменением от единицы до нуля линейно только на отрезке от x = a до x = b > a:

$$y = 1 - (1 + (|x - a| - |x - b|)/(b - a))/2 = (1 - (|x - a| - |x - b|)/(b - a))/2.$$

Проверка.

Если $x \le a$, то

$$y = (1 - (|x - a| - |x - b|)/(b - a))/2 = (1 - (a - x - b + x)/(b - a))/2 = 1.$$

Если $a \le x \le b$, то

$$y = (1 - (|x - a| - |x - b|)/(b - a))/2 = (1 - (x - a - b + x)/(b - a))/2 = (b - x)/(b - a).$$

Если $x \geq b$, то

$$y = (1 - (|x - a| - |x - b|)/(b - a))/2 = (1 - (x - a - x + b)/(b - a))/2 = 0.$$

Одна из гладких функций принадлежности y на действительной оси с центрально симметричным относительно точки ((a + b)/2, 1/2) двойным параболическим изменением от единицы до нуля только на отрезке от x = a до x = b > a:

$$y = 1 - 1/2 - ((x - a)|x - a| + (x - b)|x - b| - (2x - a - b)|2x - a - b|/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 - ((x - a)|x - a| + (x - b)|x - b| - (2x - a - b)|2x - a - b|/2)/(b - a)^2.$$

Проверка.

Если $x \leq a$, то

$$y = 1/2 - ((x - a)|x - a| + (x - b)|x - b| - (2x - a - b)|2x - a - b|/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 - (- (x - a)^2 - (x - b)^2 + (2x - a - b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 - (- x^2 + 2ax - a^2 - x^2 + 2bx - b^2 + 2x^2 - 2ax - 2bx + (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 - (- a^2 - b^2 + (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$((b - a)^2 + 2a^2 + 2b^2 - (a + b)^2)/(2(b - a)^2) = 1.$$

Если $a \le x \le (a + b)/2$, то

$$y = 1/2 - ((x - a)|x - a| + (x - b)|x - b| - (2x - a - b)|2x - a - b|/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 - ((x - a)^2 - (x - b)^2 + (2x - a - b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 - (x^2 - 2ax + a^2 - x^2 + 2bx - b^2 + 2x^2 - 2ax - 2bx + (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 - (- 2ax + a^2 - b^2 + 2x^2 - 2ax + (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$((b - a)^2 + 8ax - 2a^2 + 2b^2 - 4x^2 - (a + b)^2)/(2(b - a)^2) =$$

$$(a^2 - 2ab + b^2 + 8ax - 2a^2 + 2b^2 - 4x^2 - a^2 - 2ab - b^2)/(2(b - a)^2) =$$

$$(8ax - 2a^2 + 2b^2 - 4x^2 - 4ab)/(2(b - a)^2) =$$
$$(4ax - a^2 + b^2 - 2x^2 - 2ab)/(b - a)^2 =$$
$$1 + (- (b - a)^2 + 4ax - a^2 + b^2 - 2x^2 - 2ab)/(b - a)^2 =$$
$$1 + (- a^2 + 2ab - b^2 + 4ax - a^2 + b^2 - 2x^2 - 2ab)/(b - a)^2 =$$
$$1 + (- a^2 + 4ax - a^2 - 2x^2)/(b - a)^2 =$$
$$1 - 2(x - a)^2/(b - a)^2.$$

Если $(a + b)/2 \le x \le b$, то

$$y = 1/2 - ((x - a)|x - a| + (x - b)|x - b| - (2x - a - b)|2x - a - b|/2)/(b - a)^2 =$$
$$1/2 - ((x - a)^2 - (x - b)^2 - (2x - a - b)^2/2)/(b - a)^2 =$$
$$1/2 - (x^2 - 2ax + a^2 - x^2 + 2bx - b^2 - 2x^2 + 2ax + 2bx - (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$
$$1/2 - (a^2 + 2bx - b^2 - 2x^2 + 2bx - (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$
$$((b - a)^2 - 8bx - 2a^2 + 2b^2 + 4x^2 + (a + b)^2)/(2(b - a)^2) =$$

$$(a^2 - 2ab + b^2 - 8bx - 2a^2 + 2b^2 + 4x^2 + a^2 + 2ab + b^2)/(2(b - a)^2) =$$

$$(4b^2 - 8bx + 4x^2)/(2(b - a)^2) = 2(b - x)^2/(b - a)^2.$$

Если $x \geq b$, то

$$y = 1/2 - ((x - a)|x - a| + (x - b)|x - b| - (2x - a - b)|2x - a - b|/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 - ((x - a)^2 + (x - b)^2 - (2x - a - b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 - (x^2 - 2ax + a^2 + x^2 - 2bx + b^2 - 2x^2 + 2ax + 2bx - (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$1/2 - (a^2 + b^2 - (a + b)^2/2)/(b - a)^2 =$$

$$((b - a)^2 - 2a^2 - 2b^2 + (a + b)^2)/(2(b - a)^2) =$$

$$(a^2 - 2ab + b^2 - 2a^2 - 2b^2 + a^2 + 2ab + b^2)/(2(b - a)^2) = 0.$$

Замечание. Разумеется, функция принадлежности элемента множеству может быть произвольной переменной со сколь угодно многократными возникновениями и исчезновениями элемента, например периодической

$$y = (1 + \sin(x))/2.$$

Определение. Полными качественными изменениями непременно непустого множества называются возникновения и исчезновения множества целиком по ходу его изменения.

Замечание. Понятия полных качественных изменений применительно к пустому множеству не рассматриваются вовсе, поскольку можно считать, что пустое множество произвольно появляется и исчезает, причём эти появления и исчезновения ни на что не влияют.

Замечание. Преобразование пустого множества в непустое множество рассматривается как появление этого непустого множества.

Замечание. Преобразование непустого множества в пустое множество рассматривается как исчезновение этого непустого множества.

Определение. Устойчивостью различения всех предметов их совокупности называется непременное сохранение попарных различий всех первоначально попарно различных предметов этой совокупности при системе произвольных допустимых изменений любых предметов этой совокупности.

Определение. Множественным предельным переходом, или предельным переходом множества, называется множество предельных переходов непременно всех отдельных элементов множества.

Теорема. При множественном предельном переходе в общем случае множество по Кантору не обладает устойчивостью различения непременно всех своих предметов как элементов.

Доказательство. Для доказательства этого общего утверждения достаточен даже единственный частный контрпример потери устойчивости различения непременно всех своих предметов как элементов множеством по Кантору. Разумеется, по мере роста степени общности

такого контрпримера растут его убедительность и значимость.

Рассмотрим имеющее мощность континуума $\aleph$ множество по Кантору всех точек произвольного отрезка непременно положительной длины на действительной числовой прямой, то есть одномерное непрерывное точечное множество, или одномерный континуум.

Произвольно, то есть, возможно, хотя бы отчасти непрерывно (функционально) и/или хотя бы отчасти дискретно (в смысле последовательности отрезков), непременно монотонно (не обязательно именно строго монотонно) устремим эту положительную длину к нулю строго справа, неизменно сохраняя, во-первых, её непременную положительность и, во-вторых, обязательную

самовложенность этого отрезка при уменьшении его длины, чего вместе достаточно для существования именно единственной неподвижной точки, неизменно принадлежащей этому отрезку во всём процессе любого такого стремления этой положительной длины к нулю строго справа.

Тогда пределом этого отрезка как множества мощности континуума $\aleph$ является одноточечное множество, состоящее именно из этой единственной неподвижной точки. Это как раз весьма общий случай вырождения отрезка в точку.

То есть полностью исчезли именно все попарные различия всех первоначально попарно различных элементов этого множества.

Тем самым теорема полностью доказана.

Ещё раз докажем эту теорему ещё более общим контрпримером в произвольном конечномерном случае.

Для любого положительного целого числа n рассмотрим имеющее мощность континуума ℵ множество по Кантору всех точек произвольного n-мерного параллелепипеда с непременно положительными длинами всех его рёбер, то есть n-мерное непрерывное точечное множество, или n-мерный континуум.

Произвольно, то есть, возможно, хотя бы отчасти непрерывно (функционально) и/или хотя бы отчасти дискретно (в смысле последовательности n-мерных параллелепипедов), непременно монотонно (не обязательно именно строго монотонно) устремим положительную длину диагонали этого n-мерного параллелепипеда к нулю строго

справа, неизменно сохраняя, во-первых, непременную положительность длин всех его рёбер и, во-вторых, обязательную самовложенность этого n-мерного параллелепипеда при уменьшении длины его диагонали, чего вместе достаточно для существования именно единственной неподвижной точки, неизменно принадлежащей этому n-мерному параллелепипеду во всём процессе любого такого стремления этой положительной длины диагонали этого n-мерного параллелепипеда к нулю строго справа.

Тогда пределом этого n-мерного параллелепипеда как множества мощности континуума ℵ является одноточечное множество, состоящее именно из этой единственной

неподвижной точки. Это как раз весьма общий случай вырождения n-мерного параллелепипеда в точку.

То есть полностью исчезли именно все попарные различия всех первоначально попарно различных элементов этого множества.

Тем самым теорема ещё раз полностью доказана.

Замечание. В обоих приведённых контрпримерах все элементы соответствующего множества по Кантору являются действительными числами или состоящими из n элементов последовательностями действительных чисел соответственно. Разумеется, обобщение действительных чисел комплексными числами просто привело бы к удвоению размерности и пространства, и множества по Кантору. Более того, все элементы множества по Кантору

могут быть произвольными попарно различными произвольной природы, именно равномерно, то есть по всему множеству, сходящимися к одному общему для всех пределу, который вовсе не обязан быть элементом этого множества. Равномерность такой сходимости достаточна для существования такого непременно положительного параметра, общего для всего множества, что при устремлении этого положительного параметра монотонно (не обязательно строго монотонно) к нулю именно справа непременно каждый из элементов этого множества стремится к этому общему пределу. Тем самым и в этом случае при таком переходе к пределу множества предел оказывается именно одноэлементным множеством и

полностью исчезают именно все попарные различия элементов множества, что ещё раз доказывает теорему.

Замечание. В первых двух контрпримерах с отрезком действительной прямой и с n-мерным параллелепипедом множество по Кантору имело мощность континуума $\aleph$, которая не является необходимым условием для контрпримера. Достаточно также взять имеющее счётно бесконечную мощность множество всех точек сходящейся к той же неподвижной точке и содержащей эту неподвижную точку последовательности непременно попарно различных именно неизменных точек отрезка действительной прямой или n-мерного параллелепипеда соответственно с непременным сохранением этой принадлежности для всех этих точек с достаточно большими номерами в их

последовательности по ходу приближения к множественному пределу, отбрасывающего всё большее именно конечное число первых точек последовательности. При этом самовложенность отрезков действительной прямой или n-мерных параллелепипедов соответственно влечёт самовключение соответствующих счётно бесконечных множеств. В итоге и в этом случае при таком переходе к пределу множества предел оказывается именно одноэлементным множеством и полностью исчезают именно все попарные различия элементов множества, что ещё раз доказывает теорему.

Замечание. Но и бесконечность множества по Кантору не является необходимой для построения частного контрпримера, доказывающего данную общую теорему.

Для наличия хотя бы одного различия элементов множества необходимо и достаточно наличие хотя бы двух его элементов, естественно, различных. Поэтому любой такой контрпример непременно содержит хотя бы два различных элемента. Докажем, что требуемый контрпример вполне может ограничиться именно двумя различными элементами и в этом смысле быть как раз наименьшим (минимальным). Действительно, пусть в процессе предельного перехода непременно до достижения предела оба различных элемента двухэлементного множества сохраняют это различие и стремятся к единому общему для них пределу, не обязательно совпадающему с одним из этих двух элементов и поэтому не обязательно принадлежащему этому двухэлементному множеству по

ходу его приближения к этому множественному пределу. Тогда этим множественным пределом оказывается одноэлементное множество, естественно, лишённое каких бы то ни было различий элементов и в том числе единственного различия в двухэлементном множестве по ходу его приближения к этому множественному пределу до достижения предела. В итоге и в этом случае при таком переходе к пределу множества предел оказывается как раз одноэлементным множеством и полностью исчезают именно все попарные различия элементов множества, что ещё раз доказывает теорему.

Пример. $\lim_{b\to 0+}\{a + bi, a - 2bi\} = \{a\}$

с превращением двухэлементного множества {a + bi, a - 2bi} при его предельном переходе в одноэлементное множество {a}, что ещё раз доказывает теорему.

Следствие. Понятие множества по Кантору является превосходной математической моделью беспорядочной безотносительной совокупности непременно устойчиво попарно различных предметов.

Теорема. Понятие множества по Кантору является вообще явно непригодной математической моделью, если повторения элементов наличествуют и подлежат непременному учёту.

Доказательство. Понятие множества по Кантору недостаточно тем, что оно необходимо требует непременного отсутствия повторений элементов

множества, что вытекает из определения равенства множеств по Кантору, для чего необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент любого из равных множеств был элементом любого другого из этих равных множеств. Поэтому понятие множества по Кантору совершенно не учитывает никаких повторений именно наличных элементов. Следовательно, если нельзя именно гарантированно заведомо исключить возможность одинаковости хотя бы некоторых объединяемых предметов, то понятие множества по Кантору является совершенно неприемлемой математической моделью для такой совокупности предметов, особенно если повторения элементов не только наличествуют, но и подлежат непременному учёту. Тем самым теорема доказана.

Замечание. Повторения элементов могут быть именно целевыми и даже единственным и главным смыслом жизненно необходимых видов деятельности, в том числе ввиду явной недостаточности, нетехнологичности, неэкономичности и вообще нецелесообразности именно массового производства только уникальной продукции, то есть в единственном экземпляре, необходимом и достаточном в избранных случаях научных исследований, например космических, а также в высокой моде.

Примеры. Производство стандартных изделий и деталей, если отвлечься от эксплуатационно несущественных случайных отклонений в пределах соответствующих допусков. Тиражирование печатной продукции, например книг, журналов, газет, объявлений, стандартных бланков,

визитных карточек, открыток, этикеток, рекламы, а также машинописные копии. Потребление стандартных продуктов, если отвлечься от несущественных случайных отклонений. В финансах периодические именно постоянные приходы и расходы на текущем счету, например оклады, коммунальные платежи. Денежная наличность, если отвлечься от несущественных различий между собой металлических монет и бумажных купюр одной и той же платёжеспособности. Причём бумажные купюры одной и той же платёжеспособности в принципе отличаются друг от друга государственными номерами этих купюр, при обычных добропорядочных условиях не имеющими ни малейшего значения. А металлические монеты одной и той же платёжеспособности вообще не имеют никаких

закономерных отличий друг от друга. Все различия между такими монетами являются чисто случайными, в частности производственными отклонениями от стандартной геометрической формы, от стандартной массы, от стандартных изображений надписей и рисунков, а также эксплуатационными следами износа, отпечатков пальцев и загрязнениями. Разумеется, подобные случайные различия присущи и бумажным купюрам.

Пример. Множество, состоящее из миллиарда одинаковых (если допустимо пренебречь несущественными случайными отличиями друг от друга, поскольку существенна лишь покупательная способность) монет, по Кантору в точности равно множеству, состоящему из одной такой монеты. То есть денежные выражения богатства миллиардера и

бедности нищего по теории множеств Кантора и, в частности, по определению равенства множеств Кантора неразличимы.

Следствие. Для применимости и приемлемости теории множеств Кантора необходимо и достаточно полное отсутствие повторений элементов.

Замечание. Теория множеств Кантора необходимо требует лишь наличия каких бы то ни было попарных различий элементов множества между собой, однако не накладывает никаких ограничений на величину и/или существенность этих различий.

Следствие. Для применимости и приемлемости теории множеств Кантора при повторениях элементов в их совокупности необходимо и достаточно именно

предварительно, непременно до рассмотрения множества Кантора, внести такие естественные и/или искусственные различия хотя бы в повторения элементов этой совокупности, что после внесения всех этих различий достигается полное отсутствие повторений каких бы то ни было элементов этой совокупности, необходимое и достаточное, чтобы иметь возможность рассмотреть соответствующую совокупность всех сохранённых и изменённых элементов именно как множество по Кантору.

Замечание. Представляется нецелесообразным назвать множеством с повторениями или множеством с возможностью учёта повторений совокупность элементов с возможностью учёта их повторений ввиду самопротиворечивости (оксюморонности) любого из двух

таких названий. Ведь понятие множества весьма твёрдо сложилось в современной классической математике как основное её понятие и подразумевает именно множество по Кантору с определением равенства множеств по теории множеств Кантора, не допускающим ни малейшей возможности учёта повторений элементов. Кроме того, совокупность элементов с возможностью учёта их повторений может использоваться не только самостоятельно, но и предварительно для внесения указанных различий хотя бы в повторения элементов, то есть именно до того, или, равносильно (эквивалентно), перед тем, как можно будет применить понятие множества по Кантору. Поэтому представляется логичным именно кратко назвать домножеством, или, равносильно

(эквивалентно), предмножеством совокупность элементов, или, равносильно (эквивалентно), совокупность элементов с возможностью учёта их повторений.

Следствие. Понятие совокупности элементов, или, равносильно (эквивалентно), совокупности элементов с возможностью учёта их повторений, или, равносильно (эквивалентно), домножества, или, равносильно (эквивалентно), предмножества, является именно первичным и более общим, чем понятие множества по Кантору.

Определение (равносильное (эквивалентное) общепринятому определению множества). Множество по Кантору есть совокупность элементов с невозможностью учёта их повторений.

Определение. Домножество, или, равносильно (эквивалентно), предмножество, есть совокупность элементов, или, равносильно (эквивалентно), совокупность элементов с возможностью учёта их повторений.

Замечание. Было бы ошибкой считать, что из этих двух определений, во втором из которых используется именно и только последнее выражение (совокупность элементов с возможностью учёта их повторений) с дополнительным признаком, следуют:

1) якобы понятие совокупности элементов является именно первичным и более общим, чем понятие совокупности элементов с возможностью учёта их повторений, или, равносильно (эквивалентно), домножества, или, равносильно (эквивалентно), предмножества;

2) якобы имеет место разбиение объёма понятия совокупности элементов на объём понятия совокупности элементов с возможностью учёта их повторений и на объём понятия совокупности элементов с невозможностью учёта их повторений, то есть на объём понятия домножества, или, равносильно (эквивалентно), предмножества, и на объём понятия множества по Кантору.

Причиной такой ошибки является неучёт именно модальности возможности, что относится к модальной логике возможности и невозможности:

1) формально дополнительный признак с возможностью учёта их повторений является всего лишь разъясняющим и акцентирующим следствием основного понятия совокупности элементов и по существу очень полезным

тавтологическим признаком, не сужающим объёма основного понятия совокупности элементов, а сохраняющим этот объём;

2) дополнительный признак с невозможностью учёта их повторений действительно существенно сужает объём основного понятия совокупности элементов.

Представляется целесообразной следующая система метаопределений, то есть определений на не ограничивающихся математикой общенаучных, логических, филологических и философских метауровнях, причём такими определениями достаточно чётко, ясно и однозначно выделяются объёмы определяемых понятий.

Определение. Совокупностью предметов называется их условно отвлечённо беспорядочное безотносительное

метауровневое совмещение (обеспечение совместности). При этом метауровневость обозначает, что на метауровне это совмещение предметов рассматривается как единый новый предмет. А условные отвлечённые беспорядочность и безотносительность совокупности предметов обозначают, что эти предметы вполне могут иметь как некоторые взаимоотношения, включая взаимодействия, так и некоторую упорядоченность между собой и с их совокупностью, однако условно принимается отвлечение (абстрагирование) от всех таких упорядоченности и взаимоотношений, за исключением отношения принадлежности любого из этих предметов их совокупности и отношения содержания любого из этих предметов их совокупностью, которая из них и состоит.

Определение. Общностью предметов называется итог процесса совмещения этих предметов, или, равносильно (эквивалентно), совокупность этих предметов как итог этого процесса.

Определение. Частично упорядоченной совокупностью предметов называется итог процесса их частично упорядоченного условно отвлечённо безотносительного метауровневого совмещения (обеспечения совместности). При этом метауровневость обозначает, что на метауровне эта совокупность совмещённых предметов рассматривается как единый новый предмет. Частичная упорядоченность обозначает, что существует единое для всей совокупности предметов отношение порядка между некоторыми непременно различными предметами, тогда как любые

одинаковые предметы связаны между собой естественным отношением равенства. А условная отвлечённая безотносительность совокупности предметов обозначает, что эти предметы вполне могут иметь некоторые взаимоотношения, включая взаимодействия между собой и с их совокупностью, однако условно принимается отвлечение (абстрагирование) от всех таких взаимоотношений, за исключением отношения принадлежности любого из этих предметов их совокупности, отношения содержания любого из этих предметов их совокупностью, которая из них и состоит, отношения порядка между некоторыми непременно различными предметами и отношения равенства между любыми одинаковыми предметами.

Определение. Упорядоченной совокупностью предметов называется итог процесса их упорядоченного условно отвлечённо безотносительного метауровневого совмещения (обеспечения совместности). При этом метауровневость обозначает, что на метауровне эта совокупность совмещённых предметов рассматривается как единый новый предмет. Упорядоченность обозначает, что существует единое для всей совокупности предметов отношение порядка между любыми непременно различными предметами, тогда как любые одинаковые предметы связаны между собой естественным отношением равенства. А условная отвлечённая безотносительность совокупности предметов обозначает, что эти предметы вполне могут иметь некоторые взаимоотношения, включая

взаимодействия между собой и с их совокупностью, однако условно принимается отвлечение (абстрагирование) от всех таких взаимоотношений, за исключением отношения принадлежности любого из этих предметов их совокупности, отношения содержания любого из этих предметов их совокупностью, которая из них и состоит, отношения порядка между любыми непременно различными предметами и отношения равенства между любыми одинаковыми предметами.

Определение. Вполне упорядоченной совокупностью предметов называется такая их упорядоченная совокупность, каждая непустая часть, или, равносильно (эквивалентно), каждая непустая подсовокупность, которой, в том числе и вся совокупность целиком, имеет

хотя бы один именно первый предмет, или, равносильно (эквивалентно), элемент, причём ровно один при отсутствии его повторений и более одного при наличии его повторений.

Определение. Системой, или структурированной совокупностью, предметов называется итог процесса их структурированного метауровневого совмещения (обеспечения совместности). При этом метауровневость обозначает, что на метауровне эта совокупность совмещённых предметов рассматривается как единый новый предмет. Структурированность обозначает наличие структуры, или, равносильно (эквивалентно), строения, как совокупности непременно полностью учитываемых всех взаимоотношений, включая взаимодействия, совмещённых

предметов между собой и с их совокупностью в целом, а также отношения принадлежности любого из этих предметов их совокупности и отношения содержания любого из этих предметов их совокупностью, которая из них и состоит.

Определение. Действительным совмещением предметов называется действенное (имеющее место на самом деле) объективное или субъективное (умышленное и волевое или нечаянное, случайное, бездумное, машинальное) совмещение этих и только этих вещных предметов как целевых в пространстве и времени.

Замечание. При этом не только не исключено, но даже неизбежно наличие некоторых нецелевых, побочных

предметов, например частиц пыли, молекул жидкостей и газов, микроорганизмов.

Примеры. Размещение вещных предметов (физических тел, биологических объектов, включая живые) вместе (рядом, поблизости друг от друга, на общем участке территории, в одну общую кучу, в общую объемлющую оболочку (ёмкость), например в пакет, в мешок, в сумку, в чемодан, в коробку, в ящик, в бочку, в кузов, в вагон, в помещение, в транспортное средство). Семья. Коллектив одноклассников, одногруппников, однокурсников, спортсменов, сотрудников данного учреждения. Родительское собрание. Экипаж корабля, самолёта. Временная совокупность пассажиров данного рейса.

Определение. Образным совмещением предметов называется действенное (имеющее место на самом деле) объективное или субъективное (умышленное и волевое или нечаянное, случайное, бездумное, машинальное) совмещение этих и только этих как целевых образов вещных предметов на деле в пространстве и времени.

Примеры. Размещение образов (например фотографий, кинофильмов, видеоклипов, звукозаписей, скульптурных изображений, макетов, моделей) вещных предметов (физических тел, биологических объектов, включая живые) вместе (рядом, поблизости друг от друга, в одну общую кучу, в общую объемлющую оболочку, например в альбом, в пакет, в мешок, в сумку, в чемодан, в коробку, в ящик, в помещение, в кузов, в вагон). Фотоальбом. Грампластинка.

Коллекция грампластинок, магнитофонных записей, музея живописи, музея скульптуры.

Определение. Знаковым (символическим) совмещением вещных и/или духовных предметов называется действенное (имеющее место на самом деле) объективное или субъективное (умышленное и волевое или нечаянное, случайное, бездумное, машинальное) совмещение как целевых отвлечённых (абстрактных) знаков (символов), обозначающих эти предметы, на деле в пространстве и времени.

Примеры. Конкретные (данные, единичные, на едином материальном носителе) алфавит, таблица умножения, формула, уравнение, обозначение множества, последовательности, функции, предела, слово,

предложение, теорема, теория, статья, монография, книга, литературное произведение, стихотворение, поэма, рассказ, повесть, роман, комедия, драма, трагедия. Личная, местная, учрежденческая, государственная научная, художественная, универсальная библиотека.

Определение. Мнимым (воображаемым) совмещением предметов называется умышленное, волевое и действенное совмещение этих и только этих вещных и/или духовных предметов в совместном едином для всех этих предметов рассмотрении, то есть в мысленном и/или чувственном воображении.

Примеры. Объём отвлечённого (абстрактного) понятия, в том числе обозначаемый самим этим отвлечённым (абстрактным) понятием. Наука вообще как содержащая

отдельные науки. Художественная литература вообще как содержащая поэтические, прозаические и драматические произведения вообще. Художественная литература вообще как содержащая конкретные художественные произведения. Математика вообще как содержащая конкретные математические труды, например статьи, сборники статей, монографии, учебники, учебные пособия. Музыка вообще как содержащая отдельные музыкальные произведения. Живопись вообще как содержащая отдельные живописные произведения. Отдельные группы населения по общим признакам, например профессиональные группы: учащиеся, студенты, медсёстры, врачи, инженеры, преподаватели, учёные, кандидаты наук, доктора наук.

Замечание. Даже применительно к явно отличающимся друг от друга предметам, например к людям, животным, деревьям, необходимо и полезно именно на метауровнях полное отвлечение от каких бы то ни было индивидуальных различий. Иначе нельзя было бы говорить о численности населения, стаи, стада, деревьев в лесу, о числе пассажиров данного рейса автобуса, корабля, самолёта и так далее.

Пример. Объём бесповторного алфавита несопоставимо мал по по сравнению с общим объёмом научных, художественных, документальных, служебных произведений и вообще записей, использующих алфавит именно с многократными повторениями. Даже в отдельных достаточно длинных словах и тем более в предложениях вероятность повторов отдельных букв весьма велика.

Замечание. Приведённые выше и многие другие примеры показывают не только возможность кратности предметов, но и принципиальную необходимость непременно полного и точного учёта этой кратности.

Поэтому представляется целесообразным дать равносильное (эквивалентное) предыдущему именно отдельное дополнительное определение понятия домножества, или предмножества.

Определение. Домножеством, или предмножеством (по-английски preset, по-немецки Vormenge), называется произвольная совокупность любых, в том числе повторяющихся и при этом полностью учитываемых, предметов, называемых элементами домножества, или предмножества, которая содержит эти элементы.

Замечание. Теория множеств Кантора уникально глубока и чрезвычайно далеко продвинута. Поэтому очень полезным представляется её применение к совокупностям предметов с их повторениями и необходимостью полного и точного их учёта. Для этого необходимо различение непременно всех предметов, а для этого – внесение различий хотя бы в повторения предметов.

Замечание. Домножества, или предмножества, являются именно произвольными совокупностями предметов, допускающими повторения предметов и обеспечивающими полный и точный учёт этих повторений, и позволяют осуществить такие изменения хотя бы повторений предметов, что в итоге всех этих изменений непременно все предметы совокупности становятся попарно различными.

Этого необходимо и достаточно для применимости теории множеств Кантора к такой совокупности предметов.

Замечание. С принципиальной точки зрения различители одинаковых предметов их совокупности между собой могут быть произвольными естественными, искусственными и сочетанными (комбинированными). Однако индексация нумерацией, например справа внизу, хотя бы повторений предметов их совокупности является наиболее краткой, удобной и общей. Такое различение наиболее естественно и является чисто математическим, а математика есть всеобщий язык всей или почти всей науки, не исключающий частных языков. Кроме того, такое различение представляется наилучшим и с точки зрения психологии ввиду общей ограниченности объёма

восприятия, а также единовременной ограниченности объёма внимания буквально несколькими предметами, по разным данным от 3 до 9.

Пример. Для представления миллиарда одинаковых монет множеством по Кантору можно с принципиальной точки зрения приклеить к каждой монете описание именно её уникальных случайных естественных особенностей, включая достаточно точные массу, размеры, отклонения геометрической формы и изображений от стандартных, наличные отпечатки пальцев, следы грязи и так далее. Однако всё это меняется во времени, требует большого объёма высококвалифицированного труда даже всего лишь для одной монеты, а для их миллиарда ещё и необходимо обеспечить непременное отсутствие повторений таких

описаний. Кроме того, восприятие такого объема информации лежит далеко за пределами возможностей человеческой психики. Зато всеобщий математический способ условной, что показано круглыми скобками, индексации нумерацией позволяет немедленно, кратко, изящно и наглядно именно символически представить миллиард одинаковых монет множеством по Кантору:

$$\{1_{(1)}, 1_{(2)}, 1_{(3)}, 1_{(4)}, \ldots , 1_{(1000000000)}\},$$

а также ещё более кратко, изящно и наглядно

$$\{1_{(1)}, 1_{(2)}, 1_{(3)}, 1_{(4)}, \ldots , 1_{(10\char`^9)}\}$$

благодаря известному обозначению

$$a\char`^b = a^b.$$

Замечание. Различные способы различения нумерацией даны в предыдущем разделе «Общая теория различения повторений элементов последовательности в множестве».

Замечание. Если множество повторений предмета в совокупности предметов конечно или счётно бесконечно, то нумерация может быть дана обычными натуральными (положительными целыми) числами.

Замечание. Если множество повторений предмета в совокупности предметов несчётно бесконечно, то нумерация может быть дана сверхординалами, в частности порядковыми числами Кантора, включая сверхконечные (трансфинитные).

10. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЕДИНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА РАЗЛИЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА КОНЕЧНЫМИ СУММАМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛАГАЕМЫХ

Определение. Конечным множеством называется конечная совокупность непременно различных между собой элементов.

Следствие. Если домножество (предмножество) является именно конечным множеством квантиэлементов (количественных элементов), то итог замены в домножестве (предмножестве) непременно каждого конечного или бесконечного поддомножества (подпредмножества) всех равных между собой именно наличных элементов ровно

одним из этих элементов, причём все остальные из этих элементов, возможно, даже в бесконечном количестве, не допускаются, не учитываются и обязательно опускаются, является лишь конечной совокупностью непременно различных между собой элементов.

Определение. Конечной суммой положительных действительных элементов называется итог сложения конечного или бесконечного домножества (предмножества) неотрицательных действительных различных или повторяющихся элементов с непременно конечным поддомножеством (подпредмножеством) всех не обязательно различных строго положительных действительных элементов, причём нулевые элементы как нейтральные элементы сложения допускаются, возможно,

даже в бесконечном количестве, однако не учитываются и, можно считать, опускаются.

Определение. Представляющим конечным домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов называется домножество (предмножество) всех слагающих неотрицательных действительных элементов с непременно конечным поддомножеством (подпредмножеством) всех строго положительных действительных элементов конечной суммы положительных действительных элементов, причём нулевые элементы как нейтральные элементы сложения допускаются, возможно, даже в бесконечном количестве, однако не учитываются и, можно считать, опускаются.

Обозначение. Представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов как принципиально отличающееся от обычного домножества (предмножества) неучётом и, можно считать, опусканием допускаемых даже в бесконечном количестве нулевых элементов как нейтральных элементов сложения вместе с его отношениями и действиями над ним обозначается дополнительным правым нижним указателем (индексом) ADD (addition, сложение).

Примеры. $\{e, - e\sin^2(x) - \pi\cos^2(x), e - \pi, e/\pi, \pi/e, e, e/\pi, \pi/e, e - \pi, - e\sin^2(x) - \pi\cos^2(x)\}^{\circ}{}_{ADD}$ не существует ввиду отрицательности $e - \pi$ и $- e\sin^2(x) - \pi\cos^2(x)$ для всех действительных x;

$\{{}_{\omega}0, 0, {}_{\Omega}0\}^{\circ}{}_{ADD} =^{\circ}{}_{ADD} \varnothing$;

$$\{_{\aleph(0)}0, 7/e, 0.3, 7/e, 0.3, 7/e, 0, {}_{\aleph}0\}^{\circ}{}_{ADD} =^{\circ}{}_{ADD} \{7/e, 0.3, 7/e, 0.3, 7/e\}^{\circ}{}_{ADD} =^{\circ}{}_{ADD} \{_{2}0.3, {}_{3}(7/e)\}^{\circ}{}_{ADD}\ (\aleph(0) = \aleph_0).$$

Теорема (основная теорема общей теории единого представления конечного множества различных представлений положительного действительного числа конечными суммами положительных слагаемых). Для любого конечного множества представлений

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1j} + \ldots + a_{1n(1)} = s,$$
$$a_{21} + a_{22} + a_{23} + \ldots + a_{2j} + \ldots + a_{2n(2)} = s,$$
$$a_{31} + a_{32} + a_{33} + \ldots + a_{3j} + \ldots + a_{3n(3)} = s,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \ldots + a_{ij} + \ldots + a_{in(i)} = s,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + \ldots + a_{mj} + \ldots + a_{mn(m)} = s$$

любого положительного действительного числа s конечными суммами не обязательно различных между собой положительных чисел a_{ij} (m представлений, в i-том представлении – зависящее от i число $n(i) = n_i$ слагаемых положительных действительных чисел a_{ij}, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n(i) = n_i$, причём i, j, m, $n(i) = n_i$ – положительные целые числа) существуют такие представления

$$b_{ij1} + b_{ij2} + b_{ij3} + \ldots + b_{ijk} + \ldots + b_{ijp(i,j)} = a_{ij}$$

каждого из этих слагаемых положительных действительных чисел a_{ij} этих равных этому положительному действительному числу s и поэтому также между собой сумм конечными суммами (p(i,j) слагаемых, положительное целое число которых зависит от положительных целых чисел i, j) не обязательно различных

между собой положительных действительных чисел b_{ijk} (положительное целое число k удовлетворяет двойному нестрогому неравенству $1 \leq k \leq p(i,j)$), что после подстановки всех этих представлений этих слагаемых положительных действительных чисел a_{ij} каждая из этих m сумм, равных этому положительному действительному числу s, образуется одним и тем же представляющим конечным домножеством (предмножеством) не обязательно различных между собой слагающих положительных действительных элементов b_{ijk}, после их соответствующего переобозначения принимающим независимый от положительного целого числа i вид

$$\{c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \ldots , c_{mj}, \ldots , c_{mL(m)}\}^{\circ}{}_{ADD},$$

где зависящее не только от явно указанного положительного целого числа m, но и от всего конечного множества, состоящего из m представлений положительного действительного числа s, положительное целое число $L(m) = L_m$ не зависит от положительного целого числа i, то есть от номера представления в последовательности перечисления представлений в их конечном множестве, так что

$$c_{m1} + c_{m2} + c_{m3} + \ldots + c_{mj} + \ldots + c_{mL(m)} = s,$$

причём некоторые из элементов этого одного и того же представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \ldots , c_{mj}, \ldots , c_{mL(m)}\}^{\circ}{}_{ADD}$$

слагаемых положительных действительных чисел могут быть одинаковыми, то есть равными между собой, и поэтому наличествовать кратно с кратностью, превышающей единицу, однако не обязательно равной кратности именно всех слагающих положительных действительных элементов b_{ijk}, равных соответствующему элементу представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \ldots , c_{mj}, \ldots , c_{mL(m)}\}^{\circ}{}_{ADD}.$$

Доказательство ведётся общим дедуктивным методом иерархической математической индукции, в данном случае двухуровневой, единственный нижестоящий наинизший относительно внутренний уровень которой вложен в

единственный вышестоящий наивысший относительно внешний уровень которой, с которого как наивысшего естественно начинать.

Наивысший относительно внешний уровень двухуровневой иерархической математической индукции ведёт доказательство по положительному целому числу m представлений положительного действительного числа s конечными суммами слагаемых положительных действительных чисел.

Началом (основанием, базисом) наивысшего относительного внешнего уровня двухуровневой иерархической математической индукции является единичное как наименьшее возможное значение положительного целого числа m. Для m = 1 конечное

множество представлений положительного действительного числа s конечными суммами слагаемых положительных действительных чисел сводится к единственному представлению

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1j} + \ldots + a_{1n(1)} = s.$$

с также единственным ввиду двойного нестрогого неравенства 1 ≤ i ≤ m единичным значением положительного целого числа i. Поскольку это представление единственно, то уже само представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов a_{1j} ($1 \leq j \leq n(1) = n_1$) оказывается одним и тем же для всего конечного множества представлений положительного действительного числа s конечными суммами слагаемых

положительных действительных чисел. Поэтому достаточно представить каждое слагаемое положительное действительное число a_{1j} самим собой как частным случаем суммы, состоящей из единственного слагаемого положительного действительного числа a_{1j}, так что $i = 1$, $p(i,j) = p(1,j) = 1$,

$$b_{1j1} + b_{1j2} + b_{1j3} + \ldots + b_{1jk} + \ldots + b_{1jp(i,j)} = b_{1j1} = a_{1j}.$$

То есть для $m = 1$ утверждение теоремы очевидным образом выполняется именно сразу, то есть по существу даже без дополнительного представления каждого положительного действительного числа a_{ij} своей суммой положительных действительных чисел b_{ijk}, и является началом (основанием, базисом) наивысшего относительного

внешнего уровня двухуровневой иерархической математической индукции.

Теперь делается индукционный шаг наивысшего относительного внешнего уровня двухуровневой иерархической математической индукции. А именно, во-первых, допускается, что теорема верна для любого конечного множества, состоящего из любого положительного целого числа m представлений положительного действительного числа s конечными суммами слагаемых положительных действительных чисел, и, во-вторых, на основании этого допущения доказывается, что теорема верна для любого конечного множества, состоящего из на единицу большего положительного целого числа m + 1 представлений

положительного действительного числа s конечными суммами слагаемых положительных действительных чисел. Ввиду произвольности обозначений во избежание повторов и переобозначений достаточно считать произвольным конечным множеством, состоящим из на единицу большего положительного целого числа m + 1 представлений положительного действительного числа s конечными суммами слагаемых положительных действительных чисел, указанное выше конечное множество, состоящее из положительного целого числа m представлений положительного действительного числа s конечными суммами слагаемых положительных действительных чисел, к которому дополнительно

присоединяется ещё одно соответствующее положительному целому числу $i = m + 1$ представление

$$a_{(m+1)1} + a_{(m+1)2} + a_{(m+1)3} + \ldots + a_{(m+1)j} + \ldots + a_{(m+1)n(m+1)} = s,$$

любого положительного действительного числа s конечными суммами положительных действительных чисел a_{ij} ($m + 1$ представлений, в i-том представлении – зависящее от i число $n(i) = n_i$ слагаемых положительных действительных чисел a_{ij}, $1 \leq i \leq m + 1$, $1 \leq j \leq n(i) = n_i$, причём i, j, m, $n(i) = n_i$ – положительные целые числа). То есть требуется доказать, что существуют такие представления

$$b_{ij1} + b_{ij2} + b_{ij3} + \ldots + b_{ijk} + \ldots + b_{ijp(i,j)} = a_{ij}$$

каждого из этих слагаемых положительных действительных чисел a_{ij} этих равных этому

положительному действительному числу s и поэтому также между собой сумм конечными суммами (p(i,j) слагаемых, положительное целое число которых зависит от положительных целых чисел i, j) положительных действительных чисел b_{ijk} (положительное целое число k удовлетворяет двойному нестрогому неравенству $1 \leq k \leq p(i,j)$), что после подстановки всех этих представлений этих слагаемых положительных действительных чисел a_{ij} каждая из этих m + 1 сумм, равных этому положительному действительному числу s, образуется одним и тем же представляющим конечным домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов b_{ijk}, после их соответствующего

переобозначения принимающим независимый от положительного целого числа i вид

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \dots , c_{(m+1)j}, \dots , c_{(m+1)L(m+1)}\}^{\circ}{}_{ADD},$$

где зависящее не только от явно указанного положительного целого числа m + 1, но и от всего конечного множества, состоящего из m + 1 представлений положительного действительного числа s, положительное целое число L(m+1) = L_{m+1} не зависит от положительного целого числа i, то есть от номера представления в последовательности перечисления представлений в их конечном множестве, так что

$$c_{(m+1)1} + c_{(m+1)2} + c_{(m+1)3} + \dots + c_{(m+1)j} + \dots + c_{(m+1)L(m+1)} = s,$$

причём некоторые из элементов этого одного и того же представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1)}\}^{\circ}{}_{ADD}$$

слагаемых положительных действительных чисел могут быть одинаковыми, то есть равными между собой, и поэтому наличествовать кратно с кратностью, превышающей единицу.

Этот индукционный шаг наивысшего относительного внешнего уровня двухуровневой иерархической математической индукции как раз и делается посредством наинизшего относительного внутреннего уровня двухуровневой иерархической математической индукции по положительному целому числу $n(m+1) = n_{m+1}$ слагаемых

положительных действительных чисел в дополнительно присоединённом ещё одном соответствующем положительному целому числу $i = m + 1$ представлении

$$a_{(m+1)1} + a_{(m+1)2} + a_{(m+1)3} + \ldots + a_{(m+1)j} + \ldots + a_{(m+1)n(m+1)} = s.$$

Началом (основанием, базисом) наинизшего относительного внутреннего уровня двухуровневой иерархической математической индукции по положительному целому числу $n(m+1) = n_{m+1}$ слагаемых положительных действительных чисел в дополнительно присоединённом ещё одном соответствующем положительному целому числу $i = m + 1$ представлении

$$a_{(m+1)1} + a_{(m+1)2} + a_{(m+1)3} + \ldots + a_{(m+1)j} + \ldots + a_{(m+1)n(m+1)} = s$$

является единичное как наименьшее возможное значение положительного целого числа $n(m+1) = n_{m+1}$. Для $n(m+1) =$

$n_{m+1} = 1$ это представление с вырожденной суммой, состоящей ввиду двойного нестрогого неравенства $1 \leq j \leq n(i) = n_i$ (с также единственным единичным значением положительного целого числа j) из единственного слагаемого $a_{(m+1)1}$, есть

$$a_{(m+1)1} = s.$$

Это дополнительно присоединённое ещё одно соответствующее положительному целому числу $i = m + 1$ представление любого положительного действительного числа s именно самим собой не вносит ничего нового, в частности никаких дополнительных затруднений и усложнений, и позволяет просто перенять для $m + 1$ допущенное для m одно и то же представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных

действительных элементов b_{ijk}, после их соответствующего переобозначения принимающее независимый от положительного целого числа i вид

$$\{c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \ldots , c_{mj}, \ldots , c_{mL(m)}\}^{\circ}{}_{ADD},$$

где зависящее не только от явно указанного положительного целого числа m, но и от всего конечного множества, состоящего из m представлений положительного действительного числа s, положительное целое число $L(m) = L_m$ не зависит от положительного целого числа i, то есть от номера представления в последовательности перечисления представлений в их конечном множестве, так что

$$c_{m1} + c_{m2} + c_{m3} + \ldots + c_{mj} + \ldots + c_{mL(m)} = s,$$

причём некоторые из элементов этого одного и того же представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \ldots , c_{mj}, \ldots , c_{mL(m)}\}^{\circ}{}_{ADD}$$

слагаемых положительных действительных чисел могут быть одинаковыми, то есть равными между собой, и поэтому наличествовать кратно с кратностью, превышающей единицу. В самом деле, для такого перенимания для m + 1 допущения для m достаточно принять применительно к единственному слагаемому $a_{(m+1)1}$ дополнительно присоединённого представления

$$a_{(m+1)1} = s$$

положительного действительного числа s именно соответствующее допущению для положительного целого

числа m, то есть для всего конечного множества, состоящего из первых, то есть остальных, m представлений положительного действительного числа s, представление

$$a_{(m+1)1} = c_{m1} + c_{m2} + c_{m3} + \ldots + c_{mj} + \ldots + c_{mL(m)}$$

этого единственного слагаемого $a_{(m+1)1}$. Это промежуточное доказательство для единичного как наименьшего возможного значения положительного целого числа n(m+1) = n_{m+1} в дополнительно присоединённом ещё одном соответствующем положительному целому числу i = m + 1 представлении

$$a_{(m+1)1} + a_{(m+1)2} + a_{(m+1)3} + \ldots + a_{(m+1)j} + \ldots + a_{(m+1)n(m+1)} = s$$

с вырожденной суммой, состоящей из единственного слагаемого $a_{(m+1)1}$

$$(a_{(m+1)1} = s),$$

и является началом (основанием, базисом) наинизшего относительного внутреннего уровня двухуровневой иерархической математической индукции по положительному целому числу $n(m+1) = n_{m+1}$ слагаемых положительных действительных чисел в дополнительно присоединённом ещё одном соответствующем положительному целому числу $i = m + 1$ представлении

$$a_{(m+1)1} + a_{(m+1)2} + a_{(m+1)3} + \ldots + a_{(m+1)j} + \ldots + a_{(m+1)n(m+1)} = s.$$

Теперь делается индукционный шаг наинизшего относительного внутреннего уровня двухуровневой иерархической математической индукции.

А именно, во-первых, допускается, что теорема верна для любого конечного множества, состоящего из любого положительного целого числа m представлений

положительного действительного числа s конечными суммами слагаемых положительных действительных чисел, с дополнительно присоединённым ещё одним соответствующим положительному целому числу i = m + 1 представлением

$$a_{(m+1)1} + a_{(m+1)2} + a_{(m+1)3} + \ldots + a_{(m+1)j} + \ldots + a_{(m+1)n(m+1)} = s$$

с положительным целым числом $n(m+1) = n_{m+1}$ слагаемых положительных действительных чисел. То есть существуют такие представления

$$b_{ij1} + b_{ij2} + b_{ij3} + \ldots + b_{ijk} + \ldots + b_{ijp(i,j)} = a_{ij}$$

каждого из этих слагаемых положительных действительных чисел a_{ij} этих равных этому положительному действительному числу s и поэтому также между собой сумм конечными суммами (p(i,j) слагаемых,

положительное целое число которых зависит от положительных целых чисел i, j) положительных действительных чисел b_{ijk} (положительное целое число k удовлетворяет двойному нестрогому неравенству $1 \leq k \leq p(i,j)$), что после подстановки всех этих представлений этих слагаемых положительных действительных чисел a_{ij} каждая из этих m + 1 сумм, равных этому положительному действительному числу s, образуется одним и тем же представляющим конечным домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов b_{ijk}, после их соответствующего переобозначения принимающим независимый от положительного целого числа i вид

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD},$$

где зависящее не только от явно указанных положительных целых чисел $m + 1$ и $n(m+1) = n_{m+1}$, но и от всего конечного множества, состоящего из $m + 1$ представлений положительного действительного числа s, положительное целое число $L(m+1,n(m+1)) = L_{m+1,n(m+1)}$ не зависит от положительного целого числа i, то есть от номера представления в последовательности перечисления представлений в их конечном множестве, так что

$$c_{(m+1)1} + c_{(m+1)2} + c_{(m+1)3} + \ldots + c_{(m+1)j} + \ldots + c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))} = s,$$

причём некоторые из элементов этого одного и того же представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD}$$

слагаемых положительных действительных чисел могут быть одинаковыми, то есть равными между собой, и поэтому наличествовать кратно с кратностью, превышающей единицу.

А во-вторых, на основании этого допущения доказывается, что теорема верна для любого конечного множества, состоящего из этого любого положительного целого числа m представлений положительного действительного числа s конечными суммами слагаемых положительных действительных чисел, с дополнительно присоединённым ещё одним соответствующим положительному целому числу i = m + 1 представлением

$$a_{(m+1)1} + a_{(m+1)2} + a_{(m+1)3} + \ldots + a_{(m+1)j} + \ldots + a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = s$$

с увеличенным на единицу положительным целым числом $n(m+1)+1 = n_{m+1}+1$ слагаемых положительных действительных чисел. Ввиду произвольности обозначений во избежание противоречия, обусловленного вынужденным при сохранении прежних обозначений аннулированием последнего положительного слагаемого $a_{(m+1)n((m+1)+1)}$ в дополнительном присоединённом уравнении с увеличенным на единицу положительным целым числом $n(m+1)+1 = n_{m+1}+1$ слагаемых положительных действительных чисел, к обозначению предпоследнего положительного слагаемого $a'_{(m+1)n(m+1)}$ добавлен штрих в отличие от последнего положительного слагаемого $a_{(m+1)n(m+1)}$ в случае $n(m+1) = n_{m+1}$ слагаемых положительных

действительных чисел. То есть требуется доказать, что существуют такие представления

$$\mathbf{b_{ij1} + b_{ij2} + b_{ij3} + \ldots + b_{ijk} + \ldots + b_{ijp(i,j)} = a_{ij}}$$

каждого из этих слагаемых положительных действительных чисел a_{ij} (в том числе снабжённого штрихом положительного действительного числа $a'_{(m+1)n(m+1)}$) этих равных этому положительному действительному числу s и поэтому также между собой сумм конечными суммами (p(i,j) слагаемых, положительное целое число которых зависит от положительных целых чисел i, j) положительных действительных чисел b_{ijk} (положительное целое число k удовлетворяет двойному нестрогому неравенству $1 \le k \le p(i,j)$), что после подстановки всех этих представлений этих слагаемых положительных

действительных чисел a_{ij} каждая из этих $m + 1$ сумм, равных этому положительному действительному числу s, образуется одним и тем же представляющим конечным домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов b_{ijk}, после их соответствующего переобозначения принимающим независимый от положительного целого числа i вид

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1)+1)}\}^{\circ}{}_{ADD},$$

где зависящее не только от указанных положительных целых чисел $m + 1$ и $n(m+1)+1 = n_{m+1}+1$, но и от всего конечного множества, состоящего из $m + 1$ представлений положительного действительного числа s, положительное целое число $L(m+1,n(m+1)+1) = L_{m+1,n(m+1)+1}$ не зависит от положительного целого числа i, то есть от номера

представления в последовательности перечисления представлений в их конечном множестве, так что

$$c_{(m+1)1} + c_{(m+1)2} + c_{(m+1)3} + \ldots + c_{(m+1)j} + \ldots + c_{(m+1)L(m+1,n(m+1)+1)} = s,$$

причём некоторые из элементов этого одного и того же представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1)+1)}\}^{\circ}{}_{ADD}$$

слагаемых положительных действительных чисел могут быть одинаковыми, то есть равными между собой, и поэтому наличествовать кратно с кратностью, превышающей единицу.

Чтобы для доказательства с учётом дополнительно присоединённого ещё одного соответствующего положительному целому числу $i = m + 1$ представления

$$a_{(m+1)1} + a_{(m+1)2} + a_{(m+1)3} + \ldots + a_{(m+1)j} + \ldots + a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = s$$

с увеличенным на единицу положительным целым числом $n(m+1)+1 = n_{m+1}+1$ слагаемых положительных действительных чисел воспользоваться допущением для дополнительно присоединённого ещё одного соответствующего положительному целому числу $i = m + 1$ представления

$$a_{(m+1)1} + a_{(m+1)2} + a_{(m+1)3} + \ldots + a_{(m+1)j} + \ldots + a_{(m+1)n(m+1)} = s$$

с положительным целым числом $n(m+1) = n_{m+1}$ слагаемых положительных действительных чисел, достаточно сложить какие-нибудь два положительных действительных числа представления

$$a_{(m+1)1} + a_{(m+1)2} + a_{(m+1)3} + \ldots + a_{(m+1)j} + \ldots + a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = s$$

с увеличенным на единицу положительным целым числом $n(m+1)+1 = n_{m+1}+1$ слагаемых положительных действительных чисел, например последние два положительных действительных числа, и заменить их сумму

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)}$$

её значением

$$a_{(m+1)n(m+1)} = a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)},$$

то есть одним положительным действительным числом $a_{(m+1)n(m+1)}$ вместо двух положительных действительных чисел. При этом благодаря удобству принятых обозначений получается буквально соответствующее принятому допущению представление

$$a_{(m+1)1} + a_{(m+1)2} + a_{(m+1)3} + \ldots + a_{(m+1)j} + \ldots + a_{(m+1)n(m+1)} = s$$

с положительным целым числом $n(m+1) = n_{m+1}$ слагаемых положительных действительных чисел.

По принятому допущению существуют такие представления

$$b_{ij1} + b_{ij2} + b_{ij3} + \ldots + b_{ijk} + \ldots + b_{ijp(i,j)} = a_{ij}$$

каждого из этих слагаемых положительных действительных чисел a_{ij}, что после подстановки всех этих представлений этих слагаемых положительных действительных чисел a_{ij} каждая из этих $m + 1$ сумм, равных этому положительному действительному числу s, образуется одним и тем же представляющим конечным домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов b_{ijk}, после их

соответствующего переобозначения принимающим независимый от положительного целого числа i вид

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \dots , c_{(m+1)j}, \dots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD},$$

где зависящее не только от явно указанных положительных целых чисел $m + 1$ и $n(m+1) = n_{m+1}$, но и от всего конечного множества, состоящего из $m + 1$ представлений положительного действительного числа s, положительное целое число $L(m+1,n(m+1)) = L_{m+1,n(m+1)}$ не зависит от положительного целого числа i, то есть от номера представления в последовательности перечисления представлений в их конечном множестве, так что

$$c_{(m+1)1} + c_{(m+1)2} + c_{(m+1)3} + \dots + c_{(m+1)j} + \dots + c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))} = s,$$

причём некоторые из элементов этого одного и того же представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD}$$

слагаемых положительных действительных чисел могут быть одинаковыми, то есть равными между собой, и поэтому наличествовать кратно с кратностью, превышающей единицу.

В частности, представление суммы

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = a_{(m+1)n(m+1)}$$

одним положительным действительным числом $a_{(m+1)n(m+1)}$ вместо двух положительных действительных чисел есть

$$b_{(m+1)n(m+1)1} + b_{(m+1)n(m+1)2} + b_{(m+1)n(m+1)3} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)k} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)p(i,j)} = a_{(m+1)n(m+1)},$$

причём все эти слагаемые принадлежат одному и тому же представляющему конечному домножеству (предмножеству) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD}.$$

Ближайшей задачей является получение таких наиболее удобных представлений обоих отдельных слагаемых $a'_{(m+1)n(m+1)}$ и $a_{(m+1)n((m+1)+1)}$ по этому представлению их суммы $a_{(m+1)n(m+1)}$, что изменения этого представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD}$$

оказываются наименьшими возможными.

Особо интересен созданный общий метод построения представлений отдельных положительных действительных слагаемых по представлению их суммы. Целесообразно показать сущность этого общего метода на примере данной задачи о сумме

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = a_{(m+1)n(m+1)}$$

двух слагаемых.

Для начала можно, желательно и чрезвычайно полезно, но не обязательно, в интересах последующего упрощения проверить существование подсуммы слагаемых

$$b_{(m+1)n(m+1)1} + b_{(m+1)n(m+1)2} + b_{(m+1)n(m+1)3} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)k} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)p(i,j)} = a_{(m+1)n(m+1)},$$

равной любому из этих двух слагаемых

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = a_{(m+1)n(m+1)}$$

(в таком случае дополнительная к той подсумме подсумма слагаемых как сумма дополнительного (к представляющему конечному поддомножеству (подпредмножеству) слагающих положительных действительных элементов той подсуммы) представляющего конечного поддомножества (подпредмножества) слагающих положительных действительных элементов этого конечного домножества (предмножества) слагаемых

$$\mathbf{b}_{(m+1)n(m+1)1} + \mathbf{b}_{(m+1)n(m+1)2} + \mathbf{b}_{(m+1)n(m+1)3} + \ldots + \mathbf{b}_{(m+1)n(m+1)k} + \ldots + \mathbf{b}_{(m+1)n(m+1)p(i,j)} = \mathbf{a}_{(m+1)n(m+1)},$$

равна другому из этих двух слагаемых

$$\mathbf{a}'_{(m+1)n(m+1)} + \mathbf{a}_{(m+1)n((m+1)+1)} = \mathbf{a}_{(m+1)n(m+1)}).$$

Если такие взаимно дополнительные подсуммы слагаемых существуют, то они и выражают оба слагаемых

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = a_{(m+1)n(m+1)}.$$

Поэтому представление одного слагаемого $a_{(m+1)n(m+1)}$ суммой двух слагаемых

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)}$$

не вынуждает внесения изменений в одно и то же представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^\circ{}_{ADD},$$

так что оно просто сохраняется.

Если такие взаимно дополнительные подсуммы слагаемых не существуют, то оба слагаемых

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = a_{(m+1)n(m+1)}$$

не выражаются одним и тем же представляющим конечным домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \dots , c_{(m+1)j}, \dots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD}.$$

Поэтому представление одного слагаемого $a_{(m+1)n(m+1)}$ суммой двух слагаемых

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)}$$

вынуждает внесение изменений в одно и то же представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \dots , c_{(m+1)j}, \dots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD},$$

так что оно не сохраняется.

Одно из достаточных наименьших возможных изменений вносится созданным общим методом построения

представлений отдельных положительных действительных слагаемых по представлению их суммы. При этом оказывается достаточным вместо общего понятия подсуммы слагаемых использовать несравненно более узкое классическое понятие частичных сумм ряда, в нашем случае ещё и конечного. В данном случае двух слагаемых

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)}$$

вместо их суммы $a_{(m+1)n(m+1)}$ этот общий метод приводит к следующему простому алгоритму.

1. Берётся известное представление суммарного элемента $a_{(m+1)n(m+1)}$ суммой положительных слагаемых:

$$b_{(m+1)n(m+1)1} + b_{(m+1)n(m+1)2} + b_{(m+1)n(m+1)3} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)k} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)p(i,j)} = a_{(m+1)n(m+1)}.$$

2. Этот суммарный элемент $a_{(m+1)n(m+1)}$ представляется в виде суммы

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = a_{(m+1)n(m+1)}$$

отдельных элементов $a'_{(m+1)n(m+1)}$, $a_{(m+1)n((m+1)+1)}$, для которых ищутся представления своими суммами положительных слагаемых с наибольшим возможным использованием подсумм суммы положительных слагаемых, представляющей суммарный элемент:

$$b_{(m+1)n(m+1)1} + b_{(m+1)n(m+1)2} + b_{(m+1)n(m+1)3} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)k} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)p(i,j)} = a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)}.$$

3. Благодаря переместительному (коммутативному) закону сложения в обеих суммах выбирается и фиксируется наиболее целесообразный порядок слагаемых в зависимости от наличных данных решаемой задачи. В

общем случае можно исходить из расположения представляющих слагаемых положительных чисел в левой части последнего равенства в невозрастающем порядке, а представляемых элементов в правой части последнего равенства в неубывающем порядке. Это ведёт к ускорению получения итога, однако принципиально не обязательно. Необходимо лишь принять и зафиксировать произвольные упорядоченности слагаемых в обеих частях последнего равенства, да и переобозначить, если требуется, буквенные обозначения этих слагаемых положительных действительных чисел в обеих частях последнего равенства в соответствии с этими упорядоченностями.

4. Строго положительные действительные числа вида $b_{(m+1)n(m+1)k}$ в левой части последнего равенства

последовательно складываются, то есть по существу составляется строго монотонно возрастающая ввиду непременной строгой положительности всех этих слагаемых конечная последовательность частичных сумм конечного ряда в левой части последнего равенства, однако начинается она с нулевой суммы, соответствующей нулевому количеству слагаемых, или, равносильно (эквивалентно), пустому их множеству. Эти частичные суммы сравниваются с первым слагаемым $a'_{(m+1)n(m+1)}$ в правой части последнего равенства. Эта конечная последовательность частичных сумм составляется не обязательно до её конца, то есть до суммирования всей левой части последнего равенства целиком, а непременно до самого первого наступления превышения первого

слагаемого $a'_{(m+1)n(m+1)}$ в правой части последнего равенства частичными суммами в левой части последнего равенства. Это превышение непременно однажды наступает именно впервые. В самом деле, нулевая начальная частичная сумма строго меньше строго положительного первого слагаемого $a'_{(m+1)n(m+1)}$ в правой части последнего равенства. А последняя частичная сумма всей левой части последнего равенства целиком равна сумме обоих строго положительных слагаемых в правой части последнего равенства и поэтому строго больше строго положительного первого слагаемого $a'_{(m+1)n(m+1)}$ в правой части последнего равенства. Никакая из этих частичных сумм не может именно в точности равняться первому слагаемому $a'_{(m+1)n(m+1)}$ в правой части последнего равенства, поскольку в

противоречащем случае такого равенства она как подсумма и её дополнительная подсумма представляли бы первое и второе слагаемые в правой части последнего равенства соответственно. А это противоречит рассматриваемому случаю, когда такие взаимно дополнительные подсуммы слагаемых не существуют, так что оба слагаемых

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = a_{(m+1)n(m+1)}.$$

не выражаются одним и тем же представляющим конечным домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \dots , c_{(m+1)j}, \dots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD}.$$

Поэтому непременно существует, причём именно единственное, такое положительное целое число $k \leq p(i,j)$, что

$$b_{(m+1)n(m+1)1} + b_{(m+1)n(m+1)2} + b_{(m+1)n(m+1)3} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)(k-1)} < a'_{(m+1)n(m+1)},$$

$$b_{(m+1)n(m+1)1} + b_{(m+1)n(m+1)2} + b_{(m+1)n(m+1)3} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)(k-1)} + b_{(m+1)n(m+1)k} > a'_{(m+1)n(m+1)}.$$

Это и есть первое наступление превышения первого слагаемого $a'_{(m+1)n(m+1)}$ в правой части последнего равенства частичными суммами в левой части последнего равенства. Это превышение непременно однажды наступает именно впервые.

5. Нашей задачей является получение представления первого слагаемого $a'_{(m+1)n(m+1)}$ в правой части предпоследнего равенства, а вместе с ним и представления

второго слагаемого $a_{(m+1)n((m+1)+1)}$ в правой части предпоследнего равенства, в обоих случаях конечными суммами положительных чисел с наибольшим возможным заимствованием положительных чисел вида $b_{(m+1)n(m+1)k}$. То есть достаточно наименьшим возможным образом так изменить последние два неравенства или хотя бы одно из них, чтобы получилось именно равенство. Теперь очевидно, что достаточно заменить одно положительное действительное число $b_{(m+1)n(m+1)k}$ равной ему суммой двух положительных действительных чисел:

$$b_{(m+1)n(m+1)k} = b'_{(m+1)n(m+1)k} + b''_{(m+1)n(m+1)k}.$$

Первым $b'_{(m+1)n(m+1)k}$ из этих двух положительных действительных чисел является положительная разность

правой и левой частей предпоследнего неравенства в таком их порядке:

$$b'_{(m+1)n(m+1)k} = a'_{(m+1)n(m+1)} - (b_{(m+1)n(m+1)1} + b_{(m+1)n(m+1)2} + b_{(m+1)n(m+1)3} + \dots + b_{(m+1)n(m+1)(k-1)}).$$

А вторым $b''_{(m+1)n(m+1)k}$ из этих двух положительных действительных чисел является положительная разность левой и правой частей последнего неравенства в таком их порядке:

$$b''_{(m+1)n(m+1)k} = (b_{(m+1)n(m+1)1} + b_{(m+1)n(m+1)2} + b_{(m+1)n(m+1)3} + \dots + b_{(m+1)n(m+1)(k-1)} + b_{(m+1)n(m+1)k}) - a'_{(m+1)n(m+1)}.$$

Найденные оба слагаемых положительных действительных числа $b'_{(m+1)n(m+1)k}$ и $b''_{(m+1)n(m+1)k}$ порознь, в сумме составляющих

$$b'_{(m+1)n(m+1)k} + b''_{(m+1)n(m+1)k} = b_{(m+1)n(m+1)k},$$

позволяют представить оба слагаемых положительных действительных числа $a'_{(m+1)n(m+1)}$ и $a_{(m+1)n((m+1)+1)}$ порознь, в сумме составляющих

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = a_{(m+1)n(m+1)},$$

следующим образом:

$$a'_{(m+1)n(m+1)} = b_{(m+1)n(m+1)1} + b_{(m+1)n(m+1)2} + b_{(m+1)n(m+1)3} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)(k-1)} + b'_{(m+1)n(m+1)k};$$

$$a_{(m+1)n((m+1)+1)} = b''_{(m+1)n(m+1)k} + b_{(m+1)n(m+1)(k+1)} + b_{(m+1)n(m+1)(k+2)} + b_{(m+1)n(m+1)(k+3)} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)p(i,j)},$$

поскольку

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = a_{(m+1)n(m+1)} = b_{(m+1)n(m+1)1} + b_{(m+1)n(m+1)2} + b_{(m+1)n(m+1)3} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)k} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)p(i,j)}.$$

По принятому допущению существуют такие представления

$$b_{ij1} + b_{ij2} + b_{ij3} + \ldots + b_{ijk} + \ldots + b_{ijp(i,j)} = a_{ij}$$

каждого из этих слагаемых положительных действительных чисел a_{ij}, что после подстановки всех этих представлений этих слагаемых положительных действительных чисел a_{ij} каждая из этих m + 1 сумм, равных этому положительному действительному числу s, образуется одним и тем же представляющим конечным домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов b_{ijk}, после их соответствующего переобозначения принимающим независимый от положительного целого числа i вид

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD},$$

где зависящее не только от явно указанных положительных целых чисел $m + 1$ и $n(m+1) = n_{m+1}$, но и от всего конечного множества, состоящего из $m + 1$ представлений положительного действительного числа s, положительное целое число $L(m+1,n(m+1)) = L_{m+1,n(m+1)}$ не зависит от положительного целого числа i, то есть от номера представления в последовательности перечисления представлений в их конечном множестве, так что

$$c_{(m+1)1} + c_{(m+1)2} + c_{(m+1)3} + \ldots + c_{(m+1)j} + \ldots + c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))} = s,$$

причём некоторые из элементов этого одного и того же представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^\circ{}_{ADD}$$

слагаемых положительных действительных чисел могут быть одинаковыми, то есть равными между собой, и поэтому наличествовать кратно с кратностью, превышающей единицу.

В частности, представление суммы

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = a_{(m+1)n(m+1)}$$

одним положительным действительным числом $a_{(m+1)n(m+1)}$ **вместо двух положительных действительных чисел есть**

$$b_{(m+1)n(m+1)1} + b_{(m+1)n(m+1)2} + b_{(m+1)n(m+1)3} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)k} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)p(i,j)} = a_{(m+1)n(m+1)},$$

причём все эти слагаемые принадлежат одному и тому же представляющему конечному домножеству (предмножеству) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \dots , c_{(m+1)j}, \dots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD}.$$

То есть это одно и то же представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов достаточно для выражения всех участвовавших в этом допущении положительных действительных чисел a_{ij}, в том числе и для выражения самого положительного действительного числа $a_{(m+1)n(m+1)}$ именно целиком, однако недостаточно для выражения ни одного из обоих слагаемых $a'_{(m+1)n(m+1)}$ и $a_{(m+1)n((m+1)+1)}$, составляющих его как сумму

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = a_{(m+1)n(m+1)},$$

и своей совокупностью заменяющих его в утверждении, доказываемом на основе этого допущения, то есть при условии его принятия. Однако найденные представления

$$b'_{(m+1)n(m+1)k} = a'_{(m+1)n(m+1)} - (b_{(m+1)n(m+1)1} + b_{(m+1)n(m+1)2} + b_{(m+1)n(m+1)3} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)(k-1)}),$$

$$b''_{(m+1)n(m+1)k} = (b_{(m+1)n(m+1)1} + b_{(m+1)n(m+1)2} + b_{(m+1)n(m+1)3} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)(k-1)} + b_{(m+1)n(m+1)k}) - a'_{(m+1)n(m+1)}$$

<u>обоих</u> слагаемых <u>положительных</u> <u>действительных</u> чисел $b'_{(m+1)n(m+1)k}$ и $b''_{(m+1)n(m+1)k}$ <u>порознь</u>, в сумме составляющих

$$b'_{(m+1)n(m+1)k} + b''_{(m+1)n(m+1)k} = b_{(m+1)n(m+1)k},$$

позволяют представить <u>оба</u> слагаемых <u>положительных</u> <u>действительных</u> числ<u>а</u> $a'_{(m+1)n(m+1)}$ и $a_{(m+1)n((m+1)+1)}$ <u>порознь</u>, в сумме составляющих

$$a'_{(m+1)n(m+1)} + a_{(m+1)n((m+1)+1)} = a_{(m+1)n(m+1)},$$

следующим образом:

$$a'_{(m+1)n(m+1)} = b_{(m+1)n(m+1)1} + b_{(m+1)n(m+1)2} + b_{(m+1)n(m+1)3} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)(k-1)} + b'_{(m+1)n(m+1)k};$$

$$a_{(m+1)n((m+1)+1)} = b''_{(m+1)n(m+1)k} + b_{(m+1)n(m+1)(k+1)} + b_{(m+1)n(m+1)(k+2)} + b_{(m+1)n(m+1)(k+3)} + \ldots + b_{(m+1)n(m+1)p(i,j)}.$$

То есть в соответствующее принятому допущению одно и то же представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD}$$

достаточно дополнительно включить оба слагаемых положительных действительных числа $b'_{(m+1)n(m+1)k}$ и $b''_{(m+1)n(m+1)k}$ порознь, в сумме составляющих

$$b'_{(m+1)n(m+1)k} + b''_{(m+1)n(m+1)k} = b_{(m+1)n(m+1)k},$$

для получения требуемого соответствующего доказываемому утверждению искомого одного и того же

представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}, b'_{(m+1)n(m+1)k}, b''_{(m+1)n(m+1)k}\}^{\circ}{}_{ADD}.$$

Наличие обоих слагаемых положительных действительных чисел $b'_{(m+1)n(m+1)k}$ и $b''_{(m+1)n(m+1)k}$ порознь, в сумме составляющих

$$b'_{(m+1)n(m+1)k} + b''_{(m+1)n(m+1)k} = b_{(m+1)n(m+1)k},$$

позволяет изъять из этого требуемого соответствующего доказываемому утверждению искомого одного и того же представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}, b'_{(m+1)n(m+1)k}, b''_{(m+1)n(m+1)k}\}^{\circ}{}_{ADD}$$

их сумму

$$b'_{(m+1)n(m+1)k} + b''_{(m+1)n(m+1)k} = b_{(m+1)n(m+1)k},$$

теперь представимую с их помощью. Полезно напомнить, что все элементы соответствующего принятому допущению одного и того же представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD}$$

суть переименованные слагаемые положительные действительные числа общего вида b_{ijk}, представляющие своими суммами отдельные слагаемые положительные действительные числа общего вида a_{ij}, представляющие своими суммами положительное действительное число s. Следовательно, в частности,

$$b_{(m+1)n(m+1)k} \in \{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \dots , c_{(m+1)j}, \dots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD}.$$

Значит, после своего переобозначения <u>положительное действительное</u> число $b_{(m+1)n(m+1)k}$ является одним из элементов $c_{(m+1)j}$ соответствующего <u>принятому</u> <u>допущению</u> <u>одного и того же</u> <u>представляющего</u> <u>конечного</u> <u>домножества</u> (<u>предмножества</u>) <u>слагающих</u> <u>положительных</u> <u>действительных</u> элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \dots , c_{(m+1)j}, \dots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD}.$$

Так что этот элемент $c_{(m+1)j}$ <u>может</u> <u>быть</u> <u>опущен</u> в соответствующем <u>доказываемому</u> <u>утверждению</u> искомом <u>одном и том же</u> <u>представляющем</u> <u>конечном</u> <u>домножестве</u> (<u>предмножестве</u>) <u>слагающих</u> <u>положительных</u> <u>действительных</u> <u>элементов</u>

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}, b'_{(m+1)n(m+1)k}, b''_{(m+1)n(m+1)k}\}^{\circ}{}_{ADD}$$

благодаря наличию <u>обоих</u> слагаемых <u>положительных действительных</u> чисел $b'_{(m+1)n(m+1)k}$ и $b''_{(m+1)n(m+1)k}$ <u>порознь</u>, в сумме составляющих

$$b'_{(m+1)n(m+1)k} + b''_{(m+1)n(m+1)k} = b_{(m+1)n(m+1)k},$$

но ни в коем случае не в соответствующем <u>принятому допущению</u> <u>одном и том же</u> <u>представляющем</u> <u>конечном домножестве</u> (<u>предмножестве</u>) <u>слагающих</u> <u>положительных действительных</u> элементов

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)j}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}\}^{\circ}{}_{ADD},$$

где <u>оба</u> слагаемых <u>положительных</u> <u>действительных</u> числ<u>а</u> $b'_{(m+1)n(m+1)k}$ и $b''_{(m+1)n(m+1)k}$ <u>отсутствуют</u>.

После изъятия этого элемента $c_{(m+1)j}$ соответствующее доказываемому утверждению искомое одно и то же представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов приобретает окончательный вид

$$\{c_{(m+1)1}, c_{(m+1)2}, c_{(m+1)3}, \ldots , c_{(m+1)(j-1)}, c_{(m+1)(j+1)}, \ldots , c_{(m+1)L(m+1,n(m+1))}, b'_{(m+1)n(m+1)k}, b''_{(m+1)n(m+1)k}\}^{\circ}{}_{ADD}.$$

Тем самым сделан индукционный шаг наинизшего относительного внутреннего уровня двухуровневой иерархической математической индукции и завершён индукционный шаг наивысшего относительного внешнего уровня двухуровневой иерархической математической индукции.

Так что основная теорема общей теории единого представления конечного множества различных представлений положительного действительного числа конечными суммами положительных слагаемых полностью доказана.

Теорема. Множество единых представлений конечного множества различных представлений положительного действительного числа конечными суммами положительных слагаемых бесконечно и даже несчётно, именно непрерывно (континуально) бесконечно.

Доказательство. По предыдущей основной теореме общей теории единого представления конечного множества различных представлений положительного действительного числа конечными суммами

положительных слагаемых такое единое представление вместе с взаимно однозначно связанным с ним одним и тем же представляющим конечным домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов непременно существует.

Рассмотрим произвольное единое представление конечного множества различных представлений положительного действительного числа конечными суммами положительных слагаемых вместе с взаимно однозначно связанным с ним одним и тем же представляющим конечным домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов.

В любом таком одном и том же представляющем конечном домножестве (предмножестве) слагающих положительных

действительных элементов допустима замена любого положительного действительного элемента любой совокупностью положительных действительных элементов, сумма которых равна как раз этому положительному действительному элементу. Отсюда следует именно бесконечность и даже несчётность, а именно непрерывная (континуальная) бесконечность, множества единых представлений конечного множества различных представлений положительного действительного числа конечными суммами положительных слагаемых.

Определение. Конечным положительным дроблением представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов называется замена каждого из некоторых или всех этих

элементов (то есть хотя бы одного) любой конечной совокупностью положительных действительных элементов, сумма которых равна как раз этому положительному действительному элементу.

Определение. Конечно положительно раздробленным по отношению к исходному (данному) представляющему конечному домножеству (предмножеству) слагающих положительных действительных элементов называется представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов, полученное в итоге конечного положительного дробления исходного (данного) представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов.

Определение. Конечно положительно раздробленное по отношению к исходному (данному) представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов называется измельчением исходного (данного), более мелким, чем исходное (данное), и считается мельче исходного (данного) представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов.

Обозначение. Отношение «мельче» обозначается знаком $<_{ADD}$, то есть обычным знаком < «меньше» с правым нижним указателем (индексом) ADD (английское слово addition, сложение) в отличие от применений знака $<_{ELEM}$ для элементарной (поэлементной) упорядоченности и знака $<_{SET}$ для (до)множественной упорядоченности произвольных домножеств (предмножеств)).

Пример.

$$\{{}_{\Omega}0,\ {}_{2}e,\ {}_{\omega}0,\ {}_{3}\pi,\ 0\}^{\circ}{}_{ADD} =^{\circ}{}_{ADD} \{{}_{2}e,\ {}_{3}\pi\}^{\circ}{}_{ADD} =^{\circ}{}_{ADD} \{e,\ e,\ \pi,\ \pi,\ \pi\}^{\circ}{}_{ADD} <^{\circ}{}_{ADD} \{e + \pi,\ e + 2\pi\}^{\circ}{}_{ADD}.$$

Определение. Представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов называется укрупнением своего измельчения, более крупным, чем своё измельчение, и считается крупнее своего измельчения.

Обозначение. Отношение «крупнее» обозначается знаком $>_{ADD}$, то есть обычным знаком > «больше» с правым нижним указателем (индексом) ADD (английское слово addition, сложение) в отличие от применений знака $>_{ELEM}$ для элементарной (поэлементной) упорядоченности и знака $>_{SET}$ для (до)множественной упорядоченности произвольных домножеств (предмножеств)).

Пример.

$$\{_2 9,\ _3 3\}°_{ADD} =°_{ADD} \{9, 0, 3, 0, 3, 3, 0, 9\}°_{ADD} =°_{ADD} \{9, 3, 3, 3, 9\}°_{ADD}$$
$$>°_{ADD} \{2, 7, 2, 1, 0.3, 2.7, 2.4, 0.6, 5, 4\}°_{ADD} =°_{ADD}$$
$$\{_2 2, 7, 1, 0.3, 2.7, 2.4, 0.6, 5, 4\}°_{ADD}.$$

Определение. Отношение «не крупнее», или, равносильно (эквивалентно), отношение «мельче или равно», есть дизъюнкция отношений «мельче» и «равно».

Обозначение. Отношение «не крупнее» обозначается знаком $\leq_{ADD}$, то есть обычным знаком $\leq$ «не больше» («меньше или равно») с правым нижним указателем (индексом) ADD (английское слово addition, сложение) в отличие от применений знака $\leq_{ELEM}$ для элементарной (поэлементной) упорядоченности и знака $\leq_{SET}$ для (до)множественной упорядоченности произвольных домножеств (предмножеств)).

Пример.

$$\{4e\sin^2(x),\ e^3\pi^2\sin^2(x),\ 2\pi - e,\ 2\pi e\}^\circ{}_{ADD} \leq^\circ{}_{ADD} \{4e\sin^2(x) + e^3\pi^2\sin^2(x),\ 2\pi - e,\ 2\pi e\}^\circ{}_{ADD},$$

причём

$$\{4e\sin^2(x),\ \pi^2e^3\sin^2(x),\ 2\pi - e,\ 2\pi e\}^\circ{}_{ADD} =^\circ{}_{ADD} \{4e\sin^2(x) + e^3\pi^2\sin^2(x),\ 2\pi - e,\ 2\pi e\}^\circ{}_{ADD}$$

при

$$\sin(x) = 0,\ x = \pi z,\ z \in Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$$

и

$$\{4e\sin^2(x),\ e^3\pi^2\sin^2(x),\ 2\pi - e,\ 2\pi e\}^\circ{}_{ADD} <^\circ{}_{ADD} \{4e\sin^2(x) + e^3\pi^2\sin^2(x),\ 2\pi - e,\ 2\pi e\}^\circ{}_{ADD}$$

при

$$\sin(x) \neq 0,\ x \neq \pi z,\ z \in Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}.$$

Определение. Отношение «не мельче», или, равносильно (эквивалентно), отношение «крупнее или равно», есть дизъюнкция отношений «крупнее» и «равно».

Определение. Отношение называется безусловным отношением, или просто отношением, если оно не зависит от условий.

Определение. Отношение называется условным, если оно зависит от условий.

Замечание. Примеры безусловных и условных отношений приводятся выше и ниже, причём с указанием соответствующих условий для условных отношений.

Обозначение. Отношение «не мельче» обозначается знаком $\geq_{ADD}$, то есть обычным знаком $\geq$ «не меньше» («больше или равно») с правым нижним указателем (индексом) ADD

(английское слово addition, сложение) в отличие от применений знака $\geq_{ELEM}$ для элементарной (поэлементной) упорядоченности и знака $\geq_{SET}$ для (до)множественной упорядоченности произвольных домножеств (предмножеств)).

Пример.

$$\{e|x - \pi e| + \pi e^3(x - \pi e)^2 + 2(x - \pi e)^4, 5\pi - e\}°_{ADD} \geq°_{ADD} \{e|x - \pi e|, \pi e^3(x - \pi e)^2, 2(x - \pi e)^4, 5\pi - e\}°_{ADD},$$

причём

$$\{e|x - \pi e| + \pi e^3(x - \pi e)^2 + 2(x - \pi e)^4, 5\pi - e\}°_{ADD} =°_{ADD} \{e|x - \pi e|, \pi e^3(x - \pi e)^2, 2(x - \pi e)^4, 5\pi - e\}°_{ADD},$$

при

$$x - \pi e = 0,\ x = \pi e$$

и

$$\{e|x - \pi e| + \pi e^3(x - \pi e)^2 + 2(x - \pi e)^4, 5\pi - e\}^\circ{}_{ADD} >^\circ{}_{ADD} \{e|x - \pi e|, \pi e^3(x - \pi e)^2, 2(x - \pi e)^4, 5\pi - e\}^\circ{}_{ADD},$$

при

$$x - \pi e \neq 0,\ x \neq \pi e.$$

Определение. Отношениями порядка представляющих конечных домножеств (предмножеств) слагающих положительных действительных элементов называются отношения «мельче», «равно», «крупнее», «не крупнее», «не мельче».

Определение. Представляющие конечные домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов называются не упорядоченными, или, равносильно (эквивалентно), несравнимыми, если они не связаны отношениями порядка.

Обозначение. Отношение неупорядоченности, или, равносильно (эквивалентно), несравнимости, представляющих конечных домножеств (предмножеств) слагающих положительных действительных элементов обозначается знаком $<>_{ADD}$, то есть соединением обычных знаков < «меньше» и > «больше» с правым нижним указателем (индексом) ADD (английское слово addition, сложение) в отличие от применений знака $<>_{ELEM}$ для элементарной (поэлементной) неупорядоченности и знака $<>_{SET}$ для (до)множественной неупорядоченности произвольных домножеств (предмножеств)).

Пример.

$$\{2, 5\}°_{ADD} <>°_{ADD} \{3, 4\}°_{ADD},$$

причём

$$\{_7 1\}°_{ADD} <°_{ADD} \{2, 5\}°_{ADD} <°_{ADD} \{7\}°_{ADD},$$

$$\{_7 1\}°_{ADD} <°_{ADD} \{3, 4\}°_{ADD} <°_{ADD} \{7\}°_{ADD},$$

то есть в данном случае $\{2, 5\}°_{ADD}$ и $\{3, 4\}°_{ADD}$ являются различными промежуточными измельчениями одного и того же одноэлементного и поэтому крупнейшего представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов, единственный элемент которого представляет собой сумму именно всех слагающих положительных действительных элементов целиком, и укрупнениями одного и того же целиком состоящего из единиц и поэтому мельчайшего именно целочисленного представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов.

Определение. Крупнейшим называется такое представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов, укрупнение которого невозможно.

Теорема. При нулевой конечной сумме положительных действительных элементов единственным и поэтому крупнейшим представляющим конечным домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов является пустое множество.

Доказательство.

По определению конечной суммой положительных действительных элементов называется итог сложения конечного или бесконечного домножества (предмножества) неотрицательных действительных различных или

повторяющихся элементов с непременно конечным поддомножеством (подпредмножеством) всех строго положительных действительных элементов, причём нулевые элементы как нейтральные элементы сложения допускаются, возможно, даже в бесконечном количестве, однако не учитываются и, можно считать, опускаются.

По условию теоремы конечная сумма положительных действительных элементов является нулевой и как итог сложения конечного или бесконечного домножества (предмножества) неотрицательных действительных различных или повторяющихся элементов не может содержать ни единого строго положительного элемента, поскольку в противоречащем случае была бы строго положительной вопреки условию теоремы. Поэтому эта

сумма складывается из одних лишь нулевых элементов как нейтральных элементов сложения, которые допускаются, возможно, даже в бесконечном количестве, однако не учитываются и, можно считать, опускаются.

По определению представляющим конечным домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов называется домножество (предмножество) всех слагающих неотрицательных действительных элементов с непременно конечным поддомножеством (подпредмножеством) всех строго положительных действительных элементов конечной суммы положительных действительных элементов, причём нулевые элементы как нейтральные элементы сложения допускаются, возможно, даже в

бесконечном количестве, однако не учитываются и, можно считать, опускаются.

По следствию для конечной суммы положительных действительных элементов из условия теоремы представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов состоит из одних лишь нулевых элементов как нейтральных элементов сложения, которые допускаются, возможно, даже в бесконечном количестве, однако не учитываются и, можно считать, опускаются.

Следовательно, единственным и поэтому крупнейшим представляющим конечным домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов является пустое множество, что и требовалось доказать.

Теорема. При положительной конечной сумме положительных действительных элементов крупнейшим представляющим конечным домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов является одноэлементное представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов, единственный элемент которого представляет собой сумму именно всех слагающих положительных действительных элементов целиком.

Доказательство.

По условию теоремы и определению конечной суммы положительных действительных элементов эта сумма положительна и поэтому складывается не только из

нулевых элементов как нейтральных элементов сложения, которые допускаются, возможно, даже в бесконечном количестве, однако не учитываются и, можно считать, опускаются, но и из непременно непустой конечной подсуммы положительных действительных элементов.

Тогда по своему определению представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов включает непременно непустое конечное поддомножество (подпредмножество) всех строго положительных действительных элементов этой непременно непустой конечной подсуммы положительных действительных элементов.

Именно полную систему всевозможных случаев составляют только два следующих случая.

1. Эта непременно непустая конечная подсумма положительных действительных элементов состоит из единственного слагаемого, а это непременно непустое конечное поддомножество (подпредмножество) всех строго положительных действительных элементов одноэлементно. Тогда вся конечная сумма положительных действительных элементов складывается, во-первых, из никак не учитываемой и, можно считать, полностью опускаемой произвольной конечной или бесконечной подсуммы нулевых слагаемых и, во-вторых, из этого единственного положительного слагаемого, поэтому непременно равного ей самой целиком. А представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов является совокупностью, во-

первых, никак не учитываемого и, можно считать, полностью опускаемого произвольного конечного или бесконечного поддомножества (подпредмножества) слагающих нулевых элементов и, во-вторых, указанного в теореме одноэлементного поддомножества (подпредмножества), единственный элемент которого равен этому единственному положительному слагаемому всей конечной суммы положительных действительных элементов, поэтому непременно равному ей самой целиком.

2. Эта непременно непустая конечная подсумма положительных действительных элементов складывается из конечного числа слагаемых, не меньшего, чем два, а это непременно непустое конечное поддомножество (подпредмножество) всех строго положительных

действительных элементов состоит из конечного числа элементов, не меньшего, чем два. Тогда вся конечная сумма положительных действительных элементов складывается, во-первых, из никак не учитываемой и, можно считать, полностью опускаемой произвольной конечной или бесконечной подсуммы нулевых слагаемых и, во-вторых, из подсуммы конечного числа всех строго положительных слагаемых, не меньшего, чем два, которая поэтому непременно равна всей конечной сумме положительных действительных элементов. А представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов является совокупностью, во-первых, никак не учитываемого и, можно считать, полностью опускаемого произвольного конечного или

бесконечного поддомножества (подпредмножества) слагающих нулевых элементов и, во-вторых, непременно непустого конечного поддомножества (подпредмножества) всех строго положительных действительных элементов, которое состоит из конечного числа элементов, не меньшего, чем два, конечная сумма которых поэтому непременно равна всей конечной сумме положительных действительных элементов и вместе с ней указанному в теореме и в первом случае единственному элементу одноэлементного поддомножества (подпредмножества), равному этому единственному положительному слагаемому всей конечной суммы положительных действительных элементов, поэтому непременно равному ей самой целиком.

Поэтому по определениям измельчения и укрупнения представляющих конечных домножеств (предмножеств) слагающих положительных действительных элементов любое соответствующее второму случаю представляющее конечное домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов является измельчением своего укрупнения, а именно указанного в теореме и в первом случае представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов, значит, действительно являющегося крупнейшим, что и требовалось доказать.

Замечание. В классической математике ещё Аристотелю был известен под названием «взаимное вычитание» алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя положительных целых чисел. Геометрический алгоритм Евклида для нахождения наибольшей общей меры отрезков прилагается вместе с понятием соизмеримости и к действительным числам. Кантор называл и обозначал итог теоретико-множественного пересечения множеств делителем этих множеств.

Определение. Одноквантиэлементным называется состоящее из единственного квантиэлемента (количественного элемента) представляющее домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов.

Теорема. Если в основной теореме общей теории единого представления конечного множества различных представлений

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1j} + \ldots + a_{1n(1)} = s,$$
$$a_{21} + a_{22} + a_{23} + \ldots + a_{2j} + \ldots + a_{2n(2)} = s,$$
$$a_{31} + a_{32} + a_{33} + \ldots + a_{3j} + \ldots + a_{3n(3)} = s,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \ldots + a_{ij} + \ldots + a_{in(i)} = s,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + \ldots + a_{mj} + \ldots + a_{mn(m)} = s$$

положительного действительного числа s конечными суммами не обязательно различных между собой положительных действительных слагаемых a_{ij} представляющее домножество (предмножество) не

обязательно различных между собой слагающих положительных действительных элементов одноквантиэлементно, то все эти положительные действительные слагаемые a_{ij} попарно соизмеримы между собой, в его единственном квантиэлементе (количественном элементе)

$$_{q}a =°_{ADD} \{_{q}a\}°_{ADD}$$

элементом a является одна из общих мер всех этих положительных действительных слагаемых a_{ij}, а количеством q этого элемента является частное s/a от деления этого положительного действительного числа s на эту общую меру a.

Доказательство.

По основной теореме общей теории единого представления конечного множества различных представлений любого положительного действительного числа s конечными суммами не обязательно различных между собой положительных действительных чисел a_{ij} (m представлений, в i-том представлении – зависящее от i число $n(i) = n_i$ слагаемых положительных действительных чисел a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n(i) = n_i$, причём i, j, m, $n(i) = n_i$ – положительные целые числа) существуют такие представления

$$b_{ij1} + b_{ij2} + b_{ij3} + ... + b_{ijk} + ... + b_{ijp(i,j)} = a_{ij}$$

каждого из этих слагаемых положительных действительных чисел a_{ij} этих равных этому положительному действительному числу s и поэтому также

между собой сумм конечными суммами (p(i,j) слагаемых, положительное целое число которых зависит от положительных целых чисел i, j) не обязательно различных между собой положительных действительных чисел b_{ijk} (положительное целое число k удовлетворяет двойному нестрогому неравенству $1 \leq k \leq p(i,j)$), что после подстановки всех этих представлений этих слагаемых положительных действительных чисел a_{ij} каждая из этих m сумм, равных этому положительному действительному числу s, образуется одним и тем же представляющим домножеством (предмножеством) слагающих положительных действительных элементов b_{ijk}, после их соответствующего переобозначения принимающим независимый от положительного целого числа i вид

$$\{c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \ldots , c_{mj}, \ldots , c_{mL(m)}\}^{\circ}{}_{ADD},$$

где зависящее не только от явно указанного положительного целого числа m, но и от всего конечного множества, состоящего из m представлений положительного действительного числа s, положительное целое число L(m) = L_m не зависит от положительного целого числа i, то есть от номера представления в последовательности перечисления представлений в их конечном множестве, так что

$$c_{m1} + c_{m2} + c_{m3} + \ldots + c_{mj} + \ldots + c_{mL(m)} = s,$$

причём некоторые из элементов этого одного и того же представляющего домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \ldots , c_{mj}, \ldots , c_{mL(m)}\}^{\circ}{}_{ADD}$$

слагаемых положительных действительных чисел могут быть одинаковыми, то есть равными между собой, и поэтому наличествовать кратно с кратностью, превышающей единицу, однако не обязательно равной кратности именно всех слагающих положительных действительных элементов b_{ijk}, равных соответствующему элементу представляющего конечного домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \ldots , c_{mj}, \ldots , c_{mL(m)}\}°_{ADD}.$$

По условию данной теоремы это одно и то же представляющее домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \ldots , c_{mj}, \ldots , c_{mL(m)}\}°_{ADD} =°_{ADD} {}_{q}a =°_{ADD} \{{}_{q}a\}°_{ADD}$$

одноквантиэлементно.

Поэтому выполняется совокупность условий

$$c_{m1} = c_{m2} = c_{m3} = \ldots = c_{mj} = \ldots = c_{mL(m)} = a,$$

$$L(m) = q,$$

$$c_{m1} + c_{m2} + c_{m3} + \ldots + c_{mj} + \ldots + c_{mL(m)} = qa = s,$$

так что

$$q = s/a.$$

Кроме того, равные единственному элементу a единственного квантиэлемента $_q a$ все слагающие положительное действительное число s положительные действительные элементы

$$c_{m1} = c_{m2} = c_{m3} = \ldots = c_{mj} = \ldots = c_{mL(m)} = a$$

являются именно всеми переобозначенными положительными действительными числами b_{ijk}, поэтому

тоже равными единственному элементу a единственного квантиэлемента $_q a$.

Тогда из представления

$$b_{ij1} + b_{ij2} + b_{ij3} + \ldots + b_{ijk} + \ldots + b_{ijp(i,j)} = a_{ij}$$

каждого из этих слагаемых положительных действительных чисел a_{ij} следует, что

$$p(i,j)a = a_{ij}$$

(положительное целое число p(i,j) зависит от положительных целых чисел i, j).

Так что все эти положительные действительные слагаемые a_{ij} попарно соизмеримы между собой, в единственном квантиэлементе (количественном элементе)

$$_q a =°_{ADD} \{_q a\}°_{ADD}$$

элементом a является одна из общих мер всех этих положительных действительных слагаемых a_{ij}, а количеством q этого элемента является частное s/a от деления этого положительного действительного числа s на эту общую меру a, что и требовалось доказать.

Теорема. Соответствующее именно наибольшей общей мере всех положительных действительных слагаемых a_{ij} в предыдущей теореме одноквантиэлементное представляющее домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов является условно крупнейшим при условии одноквантиэлементности представляющего домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов.

Доказательство.

По предыдущей теореме одноквантиэлементность представляющего домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов достаточна для равенства единственного элемента a единственного квантиэлемента ${}_{q}a$ одной из общих мер всех положительных действительных слагаемых a_{ij}. Их именно наибольшая общая мера кратна любой их общей мере. Эта кратность является положительным целым числом, равным единице в том и только том случае, когда названная общая мера является непременно наибольшей общей мерой. Поэтому для любой названной общей меры наибольшая общая мера есть сумма одинаковых слагаемых, равных этой названной общей мере и взятых в

количестве, соответствующем этому числу как отношению наибольшей общей меры и этой названной общей меры. Поэтому по определениям укрупнения, измельчения и свойства быть крупнейшим, в том числе условно, соответствующее именно наибольшей общей мере всех положительных действительных слагаемых a_{ij} в предыдущей теореме одноквантиэлементное представляющее домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов является условно крупнейшим при условии одноквантиэлементности представляющего домножества (предмножества) слагающих положительных действительных элементов, что и требовалось доказать.

Теорема. Если в основной теореме общей теории единого представления конечного множества различных представлений

$$\mathbf{a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1j} + \ldots + a_{1n(1)} = s,}$$

$$\mathbf{a_{21} + a_{22} + a_{23} + \ldots + a_{2j} + \ldots + a_{2n(2)} = s,}$$

$$\mathbf{a_{31} + a_{32} + a_{33} + \ldots + a_{3j} + \ldots + a_{3n(3)} = s,}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \ldots + a_{ij} + \ldots + a_{in(i)} = s,}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + \ldots + a_{mj} + \ldots + a_{mn(m)} = s}$$

положительного действительного числа s конечными суммами положительных действительных слагаемых a_{ij} все эти a_{ij} попарно соизмеримы между собой, то существует одно и то же одноквантиэлементное каноническое

представляющее домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов, являющееся квантиэлементом (количественным элементом)

$$_{s/\mu}\mu = \{_{s/\mu}\mu\}^{\circ}{}_{ADD},$$

в котором элементом является наибольшая общая мера μ всех этих положительных действительных слагаемых a_{ij}, а количеством этого элемента является частное s/μ от деления этого положительного действительного числа s на эту наибольшую общую меру.

Доказательство.

По определению попарной соизмеримости всех положительных действительных слагаемых a_{ij} все их попарные отношения являются непременно положительными рациональными числами, то есть

правильными или неправильными обыкновенными дробями, которые после сокращений можно считать несократимыми с положительными целыми числителями и знаменателями.

Зафиксируем произвольное положительное действительное слагаемое a_{ij}, например a_{11} с единичными значениями обоих указателей (индексов), выразим отношения к нему всех положительных действительных слагаемых a_{ij}, включая a_{11} (его отношение к самому себе равно единице) такими несократимыми дробями и ввиду конечности множества всех положительных действительных слагаемых a_{ij} приведём все эти дроби к наименьшему общему знаменателю, являющемуся положительным целым числом.

Тогда являющееся положительным действительным числом частное μ от деления этого положительного действительного слагаемого a_{11} на этот наименьший общий знаменатель является наибольшей общей мерой всех положительных действительных слагаемых a_{ij}.

В самом деле, во-первых, μ есть общая мера всех положительных действительных слагаемых a_{ij}, поскольку отношение a_{ij}' каждого положительного действительного слагаемого a_{ij} к этой общей мере μ является числителем дроби, выражающей отношение a_{ij}/a_{11}, после приведения всех этих дробей к наименьшему общему знаменателю. Во-вторых, эта общая мера является именно наибольшей ввиду приведения всех этих дробей именно к наименьшему общему знаменателю.

Подстановка выражений

$$a_{ij} = a_{ij}'\mu$$

всех положительных действительных слагаемых a_{ij} через их наибольшую общую меру μ с непременно положительными целыми коэффициентами a_{ij}' во все представления положительного действительного числа s конечными суммами положительных действительных слагаемых a_{ij} конечного множества этих представлений, заданного теоремой, даёт:

$$(a_{11}' + a_{12}' + a_{13}' + \ldots + a_{1j}' + \ldots + a_{1n(1)}')\mu = s,$$
$$(a_{21}' + a_{22}' + a_{23}' + \ldots + a_{2j}' + \ldots + a_{2n(2)}')\mu = s,$$
$$(a_{31}' + a_{32}' + a_{33}' + \ldots + a_{3j}' + \ldots + a_{3n(3)}')\mu = s,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_{i1}' + a_{i2}' + a_{i3}' + \ldots + a_{ij}' + \ldots + a_{in(i)}')\mu = s,$$

……………………………………………………………

$$(a_{m1}' + a_{m2}' + a_{m3}' + \ldots + a_{mj}' + \ldots + a_{mn(m)}')\mu = s.$$

Отсюда следует, что все эти суммы в круглых скобках являются непременно <u>положительными</u> <u>целыми</u> числами вместе со всеми этими коэффициентами a_{ij}' и равны одному и тому же отношению s/μ и поэтому также между собой, что естественно, поскольку во всех случаях, как и в теореме, представляется одно и то же число s (<u>положительное действительное</u>). Поэтому левые части всех этих представлений являются одними и теми же суммами s/μ одинаковых положительных действительных слагаемых, каждое из которых есть <u>наибольшая</u> <u>общая</u> <u>мера</u> μ.

Поэтому именно <u>одним и тем же</u> для <u>всех</u> представлений одного и того же числ<u>а</u> s (<u>положительного</u> <u>действительного</u>)

их конечного множества, указанного в теореме, является одноквантиэлементное каноническое представляющее домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов, являющееся квантиэлементом (количественным элементом)

$${}_{s/\mu}\mu = \{{}_{s/\mu}\mu\}^{\circ}{}_{ADD},$$

в котором элементом является наибольшая общая мера μ всех этих положительных действительных слагаемых a_{ij}, а количеством этого элемента является частное s/μ от деления этого положительного действительного числа s на эту наибольшую общую меру μ, что и требовалось доказать.

Теорема. Существует бесконечное множество одноквантиэлементных неканонических, во всём остальном, кроме каноничности, удовлетворяющих всем условиям предыдущей теоремы и являющихся квантиэлементами (количественными элементами) представляющих домножеств (предмножеств) слагающих положительных действительных элементов.

Доказательство.

Достаточно разделить наибольшую общую меру μ в предыдущей теореме на произвольное положительное целое число

$$\nu \in N \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, 5, ...\},$$

превышающее единицу, и тем самым получить одну из общих мер μ/ν, но теперь уже не наибольшую. Все

коэффициенты a_{ij}' в предыдущей теореме умножатся именно на это положительное целое число ν, превышающее единицу. Соответствующее одноквантиэлементное неканоническое представляющее домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов, являющееся квантиэлементом (количественным элементом)

$$ {}_{s/(\mu/\nu)}(\mu/\nu)^{\circ}{}_{ADD} =^{\circ}{}_{ADD} {}_{\nu s/\mu}(\mu/\nu) =^{\circ}{}_{ADD} \{{}_{s/(\mu/\nu)}(\mu/\nu)\}^{\circ}{}_{ADD} =^{\circ}{}_{ADD} \{{}_{\nu s/\mu}(\mu/\nu)\}^{\circ}{}_{ADD}, $$

в котором элементом является общая мера μ/ν всех этих положительных действительных слагаемых a_{ij}, а количеством этого элемента является частное νs/μ от деления этого положительного действительного числа s на эту общую меру μ/ν.

Это превышающее единицу положительное целое число ν есть кратность общего знаменателя в доказательстве предыдущей теоремы, не являющегося именно наименьшим общим знаменателем, как раз относительно этого наименьшего общего знаменателя.

Если перебрать всё счётное множество

$$\mathbf{N \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, 5, ...\},}$$

то получается соответствующее счётно бесконечное множество являющихся квантиэлементами (количественными элементами) представляющих домножеств (предмножеств) слагающих положительных действительных элементов, что и требовалось доказать.

Теорема. Если в основной теореме общей теории единого представления конечного множества различных представлений конечное множество всех представлений положительного действительного числа s именно одноэлементно, то есть состоит из единственного представления положительного действительного числа s суммой всех слагаемых положительных действительных чисел a_{ij}, то все слагаемые положительные действительные числа a_{ij} сами, то есть без их дополнительных представлений своими суммами слагаемых положительных действительных чисел b_{ijk}, определяют именно крупнейшее одно и то же представляющее домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \ldots , c_{mj}, \ldots , c_{mL(m)}\}^{\circ}{}_{ADD}.$$

Доказательство.

По ходу доказательства этой основной теоремы общей теории единого представления конечного множества различных представлений было показано, что если в основной теореме общей теории единого представления конечного множества различных представлений конечное множество всех представлений положительного действительного числа s именно одноэлементно, то есть состоит из единственного представления положительного действительного числа s суммой всех слагаемых положительных действительных чисел a_{ij}, то все слагаемые положительные действительные числа a_{ij} сами, то есть без их дополнительных представлений своими конечными

суммами слагаемых положительных действительных чисел b_{ijk}, определяют одно и то же представляющее домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов

$$\{c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \ldots , c_{mj}, \ldots , c_{mL(m)}\}^{\circ}{}_{ADD}.$$

Поэтому остаётся доказать, что это одно и то же представляющее домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов является именно крупнейшим.

По своему определению одно и то же представляющее домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов должно представлять непременно все слагаемые положительные действительные числа a_{ij} своими конечными суммами слагаемых

положительных действительных чисел b_{ijk}, возможно, состоящими из единственных слагаемых, которые в таком случае равны всем соответствующим слагаемым положительным действительным числам a_{ij} целиком.

Поэтому по определению свойства быть крупнейшим все все слагаемые положительные действительные числа a_{ij} сами, то есть без их дополнительных представлений своими суммами слагаемых положительных действительных чисел b_{ijk}, определяют именно крупнейшее одно и то же представляющее домножество (предмножество) слагающих положительных действительных элементов, что и требовалось доказать.

11. ТЕОРИИ ОБЩЕ И ВСЕОБЩЕ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ, УПОРЯДОЧЕННЫХ И ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННЫХ РАЗБИЕНИЙ УПОРЯДОЧЕННЫХ И ВПОЛНЕ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Замечание. В теории множеств Кантора используются следующие виды порядков:

1) частичный порядок, свойственный частично упорядоченным множествам;

2) порядок, или, равносильно (эквивалентно), линейный порядок, свойственный упорядоченным, или, равносильно (эквивалентно), линейно упорядоченным, множествам;

3) полный порядок, свойственный вполне упорядоченным множествам.

Замечание. Полезно также напомнить, что разбиением множества называется его представление теоретико-множественным объединением непременно непересекающихся подмножеств этого множества.

Определение. Элементарной (поэлементной) частичной строгой или нестрогой упорядоченностью подмножеств упорядоченного множества называется частичная строгая или нестрогая упорядоченность взятых непременно элементарно (поэлементно) подмножеств упорядоченного множества, заключающаяся в том, что первое подмножество упорядоченного множества называется элементарно (поэлементно) предшествующим второму подмножеству этого упорядоченного множества, или, равносильно (эквивалентно), что второе подмножество

упорядоченного множества называется элементарно (поэлементно) последующим за первым подмножеством этого упорядоченного множества, если для любой наибольшей возможной по отношению включения части второго подмножества, находящейся во взаимно однозначных соответствиях с некоторыми наибольшими возможными по отношению включения частями первого подмножества, существуют хотя бы одна из таких наибольших возможных по отношению включения частей первого подмножества и хотя бы одно такое взаимно однозначное соответствие между этими частями обоих подмножеств, что в этом упорядоченном множестве каждый элемент этой части первого подмножества непременно предшествует соответствующему элементу этой части

второго подмножества. Если первое из этих двух подмножеств является одноэлементным, то его единственный элемент называется элементарно (поэлементно) предшествующим второму подмножеству в этом упорядоченном множестве. Если второе из этих двух подмножеств является одноэлементным, то первое подмножество называется элементарно (поэлементно) предшествующим единственному элементу этого второго подмножества в этом упорядоченном множестве. Если оба этих подмножества являются одноэлементными, то такое отношение их элементарной (поэлементной) строгой или нестрогой упорядоченности в этом упорядоченном множестве сводится к обычному отношению строгой или нестрогой упорядоченности единственных элементов этих

обоих подмножеств в этом упорядоченном множестве и поэтому не даёт ничего нового. При этом в любом из этих случаев именно и только при нестрогости упорядочения эти два подмножества не обязаны быть непересекающимися.

Обозначение. В случае элементарной (поэлементной) упорядоченности между приведёнными в указанном порядке предшествующим и последующим подмножествами упорядоченного множества ставится снабжённый правым нижним указателем (индексом) ELEM (ELEMENT, элемент) знак $<_{ELEM}$ (элементарно (поэлементно) меньше) при строгих предшествовании и последовании и знак $\leq_{ELEM}$ (элементарно (поэлементно) меньше или равно, элементарно (поэлементно) не больше,

элементарно (поэлементно) не превышает) при нестрогих предшествовании и последовании.

Обозначение. Равные множества соединяются обычным знаком равенства без в данном случае излишнего правого нижнего указателя (индекса) ELEM (ELEMENT, элемент). Ввиду именно частичности элементарной (поэлементной) упорядоченности множеств они часто оказываются элементарно (поэлементно) неупорядоченными, то есть несравнимыми по отношению элементарно (поэлементно) множественного порядка, и в таком случае соединяются снабжённым правым нижним указателем (индексом) ELEM (ELEMENT, элемент) сдвоенным знаком множественной неупорядоченности $<>_{ELEM}$.

Обозначение. В случае элементарной (поэлементной) упорядоченности между приведёнными в указанном порядке последующим и предшествующим подмножествами упорядоченного множества ставится снабжённый правым нижним указателем (индексом) ELEM (ELEMENT, элемент) знак $>_{ELEM}$ (элементарно (поэлементно) больше, элементарно (поэлементно) превышает) при строгих предшествовании и последовании и знак $\geq_{ELEM}$ (элементарно (поэлементно) больше или равно, элементарно (поэлементно) не меньше) при нестрогих предшествовании и последовании.

Теорема. Именно и только в случае непременной равномощности обоих этих подмножеств в последнем определении для их элементарной (поэлементной)

частичной строгой или нестрогой упорядоченности необходимо и достаточно существование такого их взаимно однозначного соответствия, что в этом упорядоченном множестве каждый элемент первого подмножества непременно предшествует соответствующему элементу второго подмножества.

Доказательство.

Необходимость высшего порядка, или безусловная необходимость, а именно необходимость равномощности обоих этих подмножеств в последнем определении для их элементарной (поэлементной) частичной строгой или нестрогой упорядоченности. При отсутствии этой равномощности принципиально не может существовать требуемое взаимно однозначное соответствие.

Достаточность высшего порядка, а именно достаточность равномощности обоих этих подмножеств в последнем определении для их элементарной (поэлементной) частичной строгой или нестрогой упорядоченности. При наличии этой равномощности по её общему определению непременно существует взаимно однозначное соответствие обоих этих подмножеств и вообще возникает возможность продолжать рассмотрение необходимых и достаточных условий существования именно требуемого взаимно однозначного соответствия обоих этих подмножеств.

Необходимость низшего порядка, или условная необходимость, а именно при выполненности достаточного условия высшего порядка. Пусть существует взаимно однозначное соответствие обоих этих подмножеств по

определению равномощности обоих этих подмножеств в последнем определении для их элементарной (поэлементной) частичной строгой или нестрогой упорядоченности, причём первое подмножество упорядоченного множества элементарно (поэлементно) предшествует второму подмножеству этого упорядоченного множества, то есть для любой наибольшей возможной по отношению включения части второго подмножества, находящейся во взаимно однозначных соответствиях с некоторыми наибольшими возможными по отношению включения частями первого подмножества, существуют хотя бы одна из таких наибольших возможных по отношению включения частей первого подмножества и хотя бы одно такое взаимно однозначное соответствие

между этими частями обоих подмножеств, что в этом упорядоченном множестве каждый элемент этой части первого подмножества непременно предшествует соответствующему элементу этой части второго подмножества. Тогда второе подмножество целиком как своя наибольшая возможная по отношению включения часть и как находящееся во взаимно однозначном соответствии с первым подмножеством целиком как своей наибольшей возможной по отношению включения частью удовлетворяет условию этого определения. Так что существует хотя бы одно такое взаимно однозначное соответствие между этими обоими подмножествами целиком, что в этом упорядоченном множестве каждый элемент первого подмножества непременно предшествует

соответствующему элементу второго подмножества. Этим завершено требуемое доказательство условной необходимости.

Достаточность низшего порядка, или условная достаточность, а именно при выполненности достаточного условия высшего порядка. Пусть существует такое взаимно однозначное соответствие обоих этих подмножеств, что в этом упорядоченном множестве каждый элемент первого подмножества непременно предшествует соответствующему элементу второго подмножества. Тогда оба этих подмножества именно целиком являются своими наибольшими возможными по отношению включения частями и удовлетворяют определению для их элементарной (поэлементной) частичной строгой или

нестрогой упорядоченности, причём первое подмножество упорядоченного множества элементарно (поэлементно) предшествует второму подмножеству этого упорядоченного множества. Этим завершено требуемое доказательство условной достаточности и теоремы в целом.

Определение. Множественной частичной строгой или нестрогой упорядоченностью подмножеств упорядоченного множества называется частичная строгая или нестрогая упорядоченность взятых непременно целиком по теории множеств Кантора подмножеств упорядоченного множества, заключающаяся в том, что первое подмножество упорядоченного множества называется множественно предшествующим второму подмножеству этого упорядоченного множества, или, равносильно

(эквивалентно), что второе подмножество упорядоченного множества называется множественно последующим за первым подмножеством этого упорядоченного множества, если в этом упорядоченном множестве каждый элемент этого первого подмножества предшествует каждому элементу этого второго подмножества. Если первое из этих двух подмножеств является одноэлементным, то его единственный элемент называется множественно предшествующим второму подмножеству. Если второе из этих двух подмножеств является одноэлементным, то первое подмножество называется множественно предшествующим единственному элементу этого второго подмножества. Если оба этих подмножества являются одноэлементными, то такое отношение их множественной

строгой или нестрогой упорядоченности сводится к обычному отношению строгой или нестрогой упорядоченности единственных элементов этих обоих подмножеств в этом упорядоченном множестве и поэтому не даёт ничего нового. При этом в любом из этих случаев именно и только при нестрогости упорядочения эти два подмножества не обязаны быть непересекающимися.

Обозначение. В случае множественной упорядоченности между приведёнными в указанном порядке предшествующим и последующим подмножествами упорядоченного множества ставится снабжённый правым нижним указателем (индексом) SET (множество) знак $<_{SET}$ (множественно меньше) при строгих предшествовании и последовании и знак $\leq_{SET}$ (множественно меньше или равно,

множественно не больше, множественно не превышает) при нестрогих предшествовании и последовании.

Обозначение. В случае множественной упорядоченности между приведёнными в указанном порядке последующим и предшествующим подмножествами упорядоченного множества ставится снабжённый правым нижним указателем (индексом) SET (множество) знак $>_{SET}$ (множественно больше, множественно превышает) при строгих предшествовании и последовании и знак $\geq_{SET}$ (множественно больше или равно, множественно не меньше) при нестрогих предшествовании и последовании.

Обозначение. Равные множества соединяются обычным знаком равенства без в данном случае излишнего правого нижнего указателя (индекса) SET (множество). Ввиду

именно частичности множественной упорядоченности множеств они часто оказываются множественно неупорядоченными, то есть несравнимыми по отношению множественного порядка, и в таком случае соединяются снабжённым правым нижним указателем (индексом) SET (множество) сдвоенным знаком множественной неупорядоченности $<>_{SET}$.

Теорема. Из множественной упорядоченности следует элементарная (поэлементная) упорядоченность, или, равносильно (эквивалентно), множественная упорядоченность не слабее элементарной (поэлементной) упорядоченности.

Доказательство.

По определению множественной частичной строгой или нестрогой упорядоченности подмножеств упорядоченного множества первое подмножество упорядоченного множества называется множественно предшествующим второму подмножеству этого упорядоченного множества, если в этом упорядоченном множестве каждый элемент этого первого подмножества предшествует каждому элементу этого второго подмножества.

По определению элементарной (поэлементной) частичной строгой или нестрогой упорядоченности подмножеств упорядоченного множества первое подмножество упорядоченного множества называется

элементарно (поэлементно) предшествующим второму подмножеству этого упорядоченного множества, если для любой наибольшей возможной по отношению включения части второго подмножества, находящейся во взаимно однозначных соответствиях с некоторыми наибольшими возможными по отношению включения частями первого подмножества, существуют хотя бы одна из таких наибольших возможных по отношению включения частей первого подмножества и хотя бы одно такое взаимно однозначное соответствие между этими частями обоих подмножеств, что в этом упорядоченном множестве каждый элемент этой части первого подмножества непременно предшествует соответствующему элементу этой части второго подмножества.

Если по определению множественной частичной строгой или нестрогой упорядоченности подмножеств упорядоченного множества в этом упорядоченном множестве каждый элемент этого первого подмножества целиком предшествует каждому элементу этого второго подмножества целиком, то это отношение порядка тем более верно для любых именно целиком взятых частей первого и второго подмножеств, а не только всего лишь в упорядоченных парах по одному из взаимно однозначных соответствий некоторых пар этих частей, что требуется определением элементарной (поэлементной) частичной строгой или нестрогой упорядоченностью подмножеств упорядоченного множества, что и требовалось доказать теоремой.

Теорема. Если хотя бы одно из обоих подмножеств упорядоченного множества в обоих последних определениях для элементарной (поэлементной) и для множественной упорядоченности подмножеств упорядоченного множества соответственно является именно одноэлементным, то оба этих определения применительно к такому случаю дают одинаковые итоги, то есть при таком условии оба этих определения оказываются равносильными (эквивалентными).

Доказательство.

Рассмотрим вначале случай, когда одноэлементным является именно первое подмножество.

По определению элементарной (поэлементной) частичной строгой или нестрогой упорядоченности подмножеств

упорядоченного множества одноэлементное первое подмножество упорядоченного множества называется элементарно (поэлементно) предшествующим второму подмножеству этого упорядоченного множества, если для любой наибольшей возможной по отношению включения части второго подмножества, находящейся во взаимно однозначных соответствиях с некоторыми наибольшими возможными по отношению включения частями первого подмножества, существуют хотя бы одна из таких наибольших возможных по отношению включения частей первого подмножества и хотя бы одно такое взаимно однозначное соответствие между этими частями обоих подмножеств, что в этом упорядоченном множестве каждый элемент этой части первого подмножества непременно

предшествует соответствующему элементу этой части второго подмножества. Если первое из этих двух подмножеств является одноэлементным, то его единственный элемент называется элементарно (поэлементно) предшествующим второму подмножеству в этом упорядоченном множестве.

Поскольку первое подмножество является именно одноэлементным, то именно и только оно является своей наибольшей возможной по отношению включения частью, причём непременно единственной, с которой во взаимно однозначных соответствиях находятся и могут находиться только и исключительно одноэлементные части второго подмножества.

Поэтому для того, чтобы одноэлементное первое подмножество элементарно (поэлементно) предшествовало второму подмножеству, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента второго подмножества этому элементу непременно предшествовал единственный элемент первого подмножества.

А это совпадает со вторым определением для множественной частичной строгой или нестрогой упорядоченности подмножеств упорядоченного множества. Первое подмножество упорядоченного множества называется множественно предшествующим второму подмножеству этого упорядоченного множества, если в этом упорядоченном множестве каждый элемент этого первого подмножества предшествует каждому элементу этого

второго подмножества. Если первое из этих двух подмножеств является одноэлементным, то его единственный элемент называется множественно предшествующим второму подмножеству и предшествует каждому элементу этого второго подмножества.

Рассмотрим теперь случай, когда одноэлементным является именно второе подмножество.

По определению элементарной (поэлементной) частичной строгой или нестрогой упорядоченности подмножеств упорядоченного множества первое подмножество упорядоченного множества называется элементарно (поэлементно) предшествующим одноэлементному второму подмножеству этого упорядоченного множества, если для любой наибольшей возможной по отношению включения

части второго подмножества, находящейся во взаимно однозначных соответствиях с некоторыми наибольшими возможными по отношению включения частями первого подмножества, существуют хотя бы одна из таких наибольших возможных по отношению включения частей первого подмножества и хотя бы одно такое взаимно однозначное соответствие между этими частями обоих подмножеств, что в этом упорядоченном множестве каждый элемент этой части первого подмножества непременно предшествует соответствующему элементу этой части второго подмножества. Если второе из этих двух подмножеств является одноэлементным, то первое подмножество называется множественно предшествующим единственному элементу этого второго подмножества.

Поскольку второе подмножество является именно одноэлементным, то именно и только оно является своей наибольшей возможной по отношению включения частью, причём непременно единственной, с которой во взаимно однозначных соответствиях находятся и могут находиться только и исключительно одноэлементные части первого подмножества.

Поэтому для того, чтобы первое подмножество элементарно (поэлементно) предшествовало одноэлементному второму подмножеству, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента первого подмножества этот элемент непременно предшествовал единственному элементу второго подмножества.

А это совпадает со вторым определением для множественной частичной строгой или нестрогой упорядоченности подмножеств упорядоченного множества. Первое подмножество упорядоченного множества называется множественно предшествующим второму подмножеству этого упорядоченного множества, если в этом упорядоченном множестве каждый элемент этого первого подмножества предшествует каждому элементу этого второго подмножества. Если второе из этих двух подмножеств является одноэлементным, то первое подмножество называется множественно предшествующим единственному элементу этого второго подмножества и предшествует единственному элементу этого второго подмножества.

Тем самым теорема полностью доказана.

Следствие. При действенности отношения множественного порядка между множествами достаточно ограничиться обозначением только отношения множественного порядка между ними, то есть просто опустить обозначение в таком случае непременно также действенного отношения элементарного (поэлементного) порядка между множествами.

Следствие. Отношение элементарного (поэлементного) порядка между множествами является не только не более сильным, но и именно поэтому не менее чувствительным, чем отношение множественного порядка между множествами.

Теорема. Элементарно (поэлементно) неупорядоченные множества непременно множественно не упорядочены.

Доказательство методом от противоречащего.

Допустим существование таких элементарно (поэлементно) неупорядоченных множеств, которые множественно упорядочены. Тогда по теореме о том, что множественная упорядоченность не слабее, чем элементарная (поэлементная) упорядоченность, эти множества тем более элементарно (поэлементно) упорядочены, что противоречит принятому допущению о их элементарной (поэлементной) неупорядоченности. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема. Множественно неупорядоченные множества могут быть элементарно (поэлементно) упорядоченными.

Доказательство. Для доказательства этого общего утверждения вполне достаточен хотя бы один частный пример множественно неупорядоченных множеств, которые, однако, элементарно (поэлементно) упорядочены. Например,

$$\{0, 2, 4, 6, 8, ...\} <_{ELEM} \{1, 3, 5, 7, 9, ...\} <_{ELEM} \{2, 4, 6, 8, 10, ...\},$$

однако

$$\{0, 2, 4, 6, 8, ...\} <>_{SET} \{1, 3, 5, 7, 9, ...\},$$

$$\{1, 3, 5, 7, 9, ...\} <>_{SET} \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}.$$

Разумеется, все множества соответствующих примеров содержат не менее двух различных элементов.

Интересный общий пример даётся множествами концов строго частично пересекающихся интервалов.

Определение. Строго частично пересекающимися множествами называются такие пересекающиеся множества, непустое теоретико-множественное пересечение которых является непременно собственным подмножеством каждого из этих множеств.

Пример. Пусть

$$a < b < c < d.$$

Тогда

$$(a, c) \cap (b, d) = (b, c),$$
$$(b, c) \subset (a, c), (b, c) \neq (a, c),$$
$$(b, c) \subset (b, d), (b, c) \neq (b, d),$$
$$\{a, c\} <_{ELEM} \{b, d\}, \{a, c\} <>_{SET} \{b, d\}.$$

Определение. Упорядоченным разбиением упорядоченного множества называется его представление теоретико-множественным объединением именно упорядоченной совокупности непременно непересекающихся подмножеств этого упорядоченного множества.

Замечание. При этом в теории множеств Кантора полный порядок является частным случаем порядка, или, равносильно (эквивалентно), линейного порядка, то есть тоже является порядком, или, равносильно (эквивалентно), линейным порядком. Таким образом, в теории множеств Кантора линейность свойственна выстраиванию непременно всех элементов множества именно в одну линию, как при линейном порядке, включая и полный порядок.

Определение. Линейным, или, равносильно (эквивалентно), одномерным, порядком множества называется выстроенность непременно всех элементов этого множества в именно одну линию порядком, или, равносильно (эквивалентно), линейным порядком, включая и полный порядок.

Определение. Линейным, или, равносильно (эквивалентно), одномерным, упорядочиванием множества называется выстраивание непременно всех элементов этого множества именно в одну линию порядком, или, равносильно (эквивалентно), линейным порядком, включая и полный порядок.

Определение. Линейно, или, равносильно (эквивалентно), одномерно, упорядоченным множеством называется множество, непременно все элементы которого выстроены именно в одну линию порядком, или, равносильно (эквивалентно), линейным порядком, включая и полный порядок.

Замечание. Однако даже в классической математике достаточно распространены совокупности, непременно все элементы которых упорядочены именно нелинейно, то есть не являются именно непосредственно этим порядком (хотя и могут быть непременно путём изменения этого порядка, то есть другим порядком) выстроенными в одну линию.

Примеры. Матрицы, не являющееся одномерными матрицами-строками или матрицами-столбцами, причём не только обычные двумерные конечные матрицы, но и бесконечные матрицы, и матрицы более высоких положительных целых размерностей n, в частности трёхмерные матрицы. Элементы таких n-мерных матриц являются элементами n-кратных последовательностей (то есть последовательностей элементов с n-кратной нумерацией, а значит, именно с нелинейным кратным собственным порядком), представляющих и самостоятельный интерес. Разумеется, все элементы кратной последовательности могут быть именно перестроены и выстроены непременно в одну линию бесконечным множеством способов, например по n-мерным

параллелепипедам с растущими рёбрами или по нарастающим равным суммам всех номеров. Для двумерного случая способы по нарастающим равным суммам номеров и по квадратам с растущей стороной предложил ещё Кантор. Однако при любом перестраивании последовательности или матрицы изменяется её порядок и она становится совершенно иной.

Замечание. Все элементы n-мерной матрицы являются элементами n-кратной последовательности. Однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Теорема. Для того, чтобы все элементы именно конечной n-кратной (n $\geq$ 2) последовательности были элементами n-мерной матрицы, необходимо и достаточно, чтобы пределы изменения каждого из отдельных номеров n-кратной

нумерации этой последовательности были неизменными по всем совокупностям всех остальных номеров n-кратной нумерации этой последовательности в пределах их изменения.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть все элементы именно конечной n-кратной (n $\geq$ 2) последовательности являются элементами n-мерной матрицы. Тогда пределы изменения каждого из отдельных номеров n-кратной нумерации элементов этой n-мерной матрицы являются неизменными по всем совокупностям всех остальных номеров n-кратной нумерации этой n-мерной матрицы в пределах их изменения. Следовательно, пределы изменения каждого из отдельных номеров n-

кратной нумерации этой последовательности были неизменными по всем совокупностям всех остальных номеров n-кратной нумерации этой последовательности в пределах их изменения. Тем самым необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть пределы изменения каждого из отдельных номеров n-кратной нумерации этой именно конечной n-кратной ($n \geq 2$) последовательности неизменны по всем совокупностям всех остальных номеров n-кратной нумерации этой последовательности в пределах их изменения. Тогда все элементы этой n-кратной последовательности являются элементами n-мерной матрицы с точно теми же пределами изменения соответствующих отдельных номеров n-кратной

нумерации элементов этой n-мерной матрицы. Тем самым достаточность доказана.

В итоге теорема доказана.

Замечание. Необходимое и достаточное условие этой теоремы выполняется далеко не всегда. Например, это условие нарушается не только в случаях, если пределы изменения одного из отдельных номеров n-кратной нумерации непременно конечной n-кратной (n ≥ 2) последовательности именно априорно зависят от текущих значений других отдельных номеров, но и если наличествуют такие другие наперёд заданные ограничения, скажем, на значения самих элементов, что возникает хотя бы одна существенная зависимость, дополнительно сокращающая допустимые пределы изменения хотя бы

одного из отдельных номеров n-кратной нумерации этой последовательности.

Замечание. За пределами математики имеется чрезвычайное многообразие именно упорядоченных совокупностей (упорядоченных домножеств, упорядоченных предмножеств), порядки которых очень редко даже в первом приближении могут рассматриваться как линейные. Это закономерно, поскольку в мироздании все вещные предметы принципиально трёхмерны.

Примеры. Порядок совокупности (домножества, предмножества) вещных предметов, по размеру достаточно малых по сравнению с расстояниями между ними и расположенных на весьма ровном участке местности, в первом приближении может рассматриваться как

двухмерный, как и на карте, отклонения которой от плоскостности пренебрежимо малы, и на сферической поверхности глобуса, однако на холмистой местности и в горах непременно должен рассматриваться как трёхмерный. Порядок совокупности (домножества, предмножества) духовных предметов, включая математические, может быть сколь угодно большой размерности и даже бесконечномерным.

Определение. Постоянной называется совокупность (домножество, предмножество) предметов, обладающая хотя бы условно или в первом приближении неизменностью состава, состояний и положений всех этих предметов.

Определение. Переменной называется совокупность (домножество, предмножество) предметов, состав которой

и/или состояния и/или положения хотя бы некоторых предметов которой существенно изменяются.

Замечание. Порядок совокупности (домножества, предмножества) предметов, хотя бы некоторые из которых существенно изменяются или хотя бы значимо двигаются относительно других предметов совокупности, является переменным и может и должен рассматриваться как функция времени.

Определение. Общим порядком совокупности (домножества, предмножества) предметов называется хотя бы условно или в первом приближении постоянный (неизменный) мгновенный порядок совокупности (домножества, предмножества) состояний и положений всех этих предметов в соответствующее мгновение.

Определение. Обще упорядоченной называется совокупность (домножество, предмножество) предметов, обладающая общим порядком.

Определение. Всеобщим порядком совокупности (домножества, предмножества) предметов называется функция изменений общего порядка совокупности (домножества, предмножества) состояний и положений всех этих предметов на имеющем непременно положительную длину отрезке времени рассмотрения.

Определение. Всеобще упорядоченной называется совокупность (домножество, предмножество) предметов, обладающая всеобщим порядком.

Пример. Мгновенно воспринимается зрением и лишь на мгновение запоминается обще упорядоченная совокупность (домножество, предмножество) видимых внешних проявлений состояний и положений всех предметов их обще упорядоченной совокупности (домножества, предмножества) в поле зрения в мгновение восприятия.

Пример. Фотография является проекцией обще упорядоченной совокупности (домножества, предмножества) внешних проявлений состояний и положений всех предметов их обще упорядоченной совокупности (домножества, предмножества) в поле зрения объектива фотоаппарата в мгновение фотосъёмки на плоскость изображения.

Пример. Кинофильм как отображение всеобще упорядоченной совокупности предметов является функцией изменений проекции обще упорядоченной совокупности (домножества, предмножества) внешних проявлений состояний и положений всех предметов их всеобще упорядоченной совокупности (домножества, предмножества) в поле зрения объектива кинокамеры на плоскость изображения на имеющем непременно положительную длину отрезке времени киносъёмки.

12. ТЕОРИИ ОБЩИХ И ВСЕОБЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В классической математике многомерной последовательностью называется функция множества натуральных (положительных целых) аргументов. В одномерном случае функции одного аргумента последовательностью называется функция натурального (положительного целого) аргумента и рассматриваются

1) конечная последовательность вида

$$(a_1, a_2, a_3, \dots , a_n) \ (n \in N = \{1, 2, 3, \dots\});$$

2) счётно бесконечная последовательность, или просто последовательность, вида

$$(a_1, a_2, a_3, \dots , a_n, \dots).$$

Замечание. В классической математике конечная последовательность и счётно бесконечная последовательность, или просто последовательность, естественно упорядочены полным порядком номеров элементов.

Определение. Общей последовательностью называется функция элементов вполне упорядоченного множества, упорядоченная отношением полного порядка этого вполне упорядоченного множества.

Замечание. Использование элементов вполне упорядоченного именно множества как значений аргумента этой функции исключает какие бы то ни было повторения значений аргумента этой функции и тем самым достаточно для однозначности этой функции. Если бы использовались

элементы вполне упорядоченной совокупности, или, равносильно (эквивалентно), вполне упорядоченной совокупности элементов с возможностью учёта их повторений, или, равносильно (эквивалентно), вполне упорядоченного домножества, или, равносильно (эквивалентно), вполне упорядоченного предмножества, то не исключались бы повторения значений аргумента функции и она могла бы потерять однозначность.

Определение. Всеобщей последовательностью называется функция элементов упорядоченного множества, упорядоченная отношением порядка этого упорядоченного множества.

Замечание. Использование элементов упорядоченного именно множества как значений аргумента этой функции

исключает какие бы то ни было повторения значений аргумента этой функции и тем самым достаточно для однозначности этой функции. Если бы использовались элементы упорядоченной совокупности, или, равносильно (эквивалентно), упорядоченной совокупности элементов с возможностью учёта их повторений, или, равносильно (эквивалентно), упорядоченного домножества, или, равносильно (эквивалентно), упорядоченного предмножества, то не исключались бы повторения значений аргумента функции и она могла бы потерять однозначность.

Замечание. Отказ от именно полного порядка в определении всеобщей последовательности позволяет использовать для индексации континуумы произвольных

размерностей, в частности естественно линейно упорядоченный одномерный континуум на действительной числовой прямой.

Следствие. Частичный предел любой сходящейся подпоследовательности произвольной действительной последовательности является как предельной точкой для множества всех индексированных элементов этой последовательности, так и предельной точкой для множества всех пар, каждая из которых состоит из элемента этой последовательности на первом месте в этой паре и из натурального (положительного целого) порядкового номера именно этого элемента в этой последовательности на втором месте в этой паре, причём в обоих случаях предельные точки для указанных множеств определяются

только по самим элементам этой последовательности, а натуральные (положительные целые) номера этих элементов в этой последовательности используются только для различения равных элементов этой последовательности между собой.

Определение. Предельной точкой любой действительной последовательности называется частичный предел любой сходящейся подпоследовательности этой последовательности.

Определение. Производная любой действительной последовательности есть множество всех предельных точек этой последовательности.

Следствие. Производная любой действительной последовательности есть замкнутое множество.

Следствие. Производная любой действительной последовательности единственным образом разбивается на свою следующую производную и на изолированное множество, любые из которых могут быть пустым множеством.

Замечание. Различные способы индексации нумерацией даны выше в разделе «Общая теория различения повторений элементов последовательности в множестве».

13. ОБЩИЕ ТЕОРИИ СВЕРХМНОЖЕСТВ, СВЕРХКОНТИНУУМА, СВЕРХПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, СВЕРХРЯДОВ, СВЕРХЧИСЕЛ И СВЕРХКОЛИЧЕСТВ, КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ МНОГОПОРЯДКОВЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДЕЛОВ

Замечание. Общие теории сверхмножеств, сверхконтинуума, сверхпоследовательностей, сверхрядов, сверхчисел и сверхколичеств методологически основаны на представленной выше всеобщей логике.

В частности, множественная всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы общеполезных исследования и развития общей теории множеств.

Сверхмножественная всеобщая логика открывает, логически учитывает и использует логику и законы общеполезных исследования и развития общей теории сверхмножеств.

Сверхмножественная всеобщая логика не только допускает, но и синергично использует противоречие между именно нулевыми размерностью и мерой каждой точки как элемента и наличием предметов с положительными размерностью и мерой, откуда следует, поскольку никакое сложение сколь угодно многих нулей принципиально не может дать ничего, кроме нуля, что такие предметы имеют отдельные указываемые точки как элементы, однако не могут именно полностью состоять и складываться (слагаться, составляться) только и исключительно из этих

точек как элементов и поэтому являются сверхмножествами как состоящими непременно из частей целыми сверхточечных, сверхэлементарных и сверхмножественных природы, сущности, строения, состава, слагаемости и сплочения. Разумеется, можно указывать произвольные множества точек как элементов сверхмножества и рассматривать такие множества как подмножества сверхмножества, неспособные, однако, ни в малейшей степени именно исчерпать ни сверхмножество целиком, ни даже какую бы то ни было его часть, имеющую непременно положительные размерность и меру.

Определение. Элементарностью и множественностью называется атрибут множеств Кантора, заключающийся в полной сводимости каждого из них к совокупности всех

принадлежащих ему его элементов, из которых оно и состоит и составлено именно целиком и полностью.

Определение. Точечностью называется атрибут точечных множеств Кантора, заключающийся в полной сводимости каждого из них к совокупности всех принадлежащих ему его точек как элементов, из которых оно и состоит и составлено именно целиком и полностью.

Определение. Сверхэлементарностью и сверхмножественностью называется атрибут предметов, заключающийся в несводимости каждого из таких предметов к совокупности всех принадлежащих ему его элементов, которые могут быть указаны, но из которых предмет не состоит и не составлен именно целиком и

<u>полностью</u>, так что каждый <u>такой</u> <u>предмет</u> есть <u>сверхэлементарное</u> и <u>сверхмножественное</u> <u>целое</u>.

<u>Определение</u>. <u>Сверхточечностью</u> называется <u>атрибут</u> <u>точечных</u> <u>предметов</u>, заключающийся в <u>несводимости</u> каждого из <u>таких</u> <u>предметов</u> к <u>совокупности</u> <u>всех</u> <u>принадлежащих</u> ему его <u>точек</u> как <u>элементов</u>, которые могут быть указаны, но из которых предмет <u>не</u> <u>состоит</u> и <u>не</u> <u>составлен</u> именно <u>целиком</u> и <u>полностью</u>, так что каждый <u>такой</u> <u>предмет</u> есть <u>сверхточечное</u>, <u>сверхэлементарное</u> и <u>сверхмножественное</u> <u>целое</u>.

<u>Определение</u>. <u>Сверхмножеством</u> называется <u>сверхэлементарное</u> и <u>сверхмножественное</u> <u>целое</u>, дополнительно являющееся <u>сверхточечным</u>, если <u>все</u> его <u>элементы</u> являются <u>точками</u>.

Теорема. Сверхмножественность части достаточна для сверхмножественности целого.

Доказательство методом от противоречащего.

Пусть в противоречии с теоремой целое множественно, а его часть сверхмножественна. Поскольку целое множественно, то по определению множественности оно сводится именно целиком и полностью к некоторому множеству точек как элементов. Рассмотрим теоретико-множественное пересечение этого множества с этой частью, являющееся, следовательно, подмножеством этого множества, так что эта часть именно целиком и полностью сводится к этому подмножеству, поэтому по определению множественности является множественной вопреки сделанному допущению. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема. Сверхмножества существуют.

Теорема. Каждый предмет, включающий континуум непременно положительных размерности и меры, является сверхмножеством.

Доказательство. Для доказательства обеих этих теорем достаточно доказать вторую из этих теорем, поскольку существует, в частности, даже бесконечное множество отрезков единичной размерности и положительной длины. Но тогда по предыдущей доказанной теореме о целом и части становится достаточным доказать следующую теорему.

Теорема. Континуум непременно положительных размерности и меры является сверхмножеством.

Доказательство. Континуум имеет положительные размерность и меру. Множество точек этого континуума не только бесконечно, но даже имеет несчётно бесконечную мощность континуума ℵ по теории множеств Кантора. Любая точка вообще, в частности любая точка этого континуума, имеет непременно нулевые размерность и меру. Сколько ни складывать одни нули, ничего иного, кроме нуля, в сумме получить невозможно. А данный континуум имеет положительные размерность и меру. И поэтому ни он, ни какая бы то ни было его часть непременно положительных размерности и меры не может именно целиком и полностью состоять и складываться из одних только точек, как бы ни была велика мощность множества этих точек. Поэтому по определению

сверхмножественности континуум непременно положительных размерности и меры является сверхмножеством, что и требовалось доказать.

Пример. Рассмотрим для простоты произвольный одномерный промежуток непременно положительной длины на числовой оси, скажем, отрезок от нуля до единицы в обоих случаях включительно. Этот отрезок имеет положительные первую размерность и единичную линейную меру. Множество всех точек этого отрезка, изображающих именно все действительные числа классической математики от нуля до единицы в обоих случаях включительно, не только бесконечно, но даже имеет несчётно бесконечную мощность континуума $\aleph$ по теореме Кантора. Любая точка вообще, в частности любая

точка этого отрезка от нуля до единицы, в том числе любая точка, изображающая какое бы то ни было действительное число классической математики от нуля до единицы в обоих случаях включительно, имеет непременно нулевые размерность и меру. Сколько ни складывать одни нули, ничего иного, кроме нуля, в сумме получить невозможно. А данный отрезок имеет единичную длину и поэтому ни он в целом, ни какая бы то ни было его часть непременно положительной длины не может именно целиком и полностью состоять и складываться из одних только точек, как бы ни была велика мощность множества этих точек. Подобно этому длина линейки с миллиметровыми делениями складывается не из суммы ширин штрихов с расстоянием 1 мм между соседними штрихами, причём для

сходства с точками нашего единичного отрезка ширину каждого штриха следует считать именно актуально (достигнуто) нулевой (тогда как потенциальный (становящийся) нуль есть произвольная бесконечно малая), что относится к размерам точек и толщинам геометрических линий, а из суммы всех миллиметровых отрезков между соседними штрихами как всего лишь границами этих отрезков, к которой ещё и добавлена сумма длин обоих концов линейки за пределами шкалы ценой деления 1 мм.

Замечание. Разумеется, любой данный отрезок непременно положительной длины именно целиком и полностью состоит и складывается именно из частей, лишь некоторые из которых могут быть одноточечными множествами (с

точками как единственными элементами) как вырожденными отрезками нулевой длины, вносящими и порознь, и все вместе именно нулевые вклады в единичную размерность и в положительную длину как меру данного отрезка. А единичную размерность и положительную длину как меру придают данному отрезку непременно наличествующие все остальные его одномерные части, являющиеся промежутками (отрезками, интервалами, полуинтервалами-полуотрезками или полуотрезками-полуинтервалами) непременно положительных длин, отнюдь не обязанных быть равными между собой, так что сумма всех этих длин как раз и равна длине данного отрезка. Причём все промежутки определяются своими концами с указанием принадлежности или

непринадлежности концов промежутку, эти концы являются именно точками как границами промежутков.

Пример разбиения отрезка положительной длины на составные части (одноточечные множества с точками как единственными элементами) как вырожденные отрезки нулевой длины и промежутки (отрезки, интервалы, полуинтервалы-полуотрезки или полуотрезки-полуинтервалы) непременно положительных длин).

$$[0, 1] = \{0\} \cup (0, 1/2) \cup \{1/2\} \cup (1/2, 2/3) \cup [2/3, 3/4) \cup [3/4, 4/5] \cup (4/5, 1].$$

$$[0, 1] = [0, 0] \cup (0, 1/2) \cup [1/2, 1/2] \cup (1/2, 2/3) \cup [2/3, 3/4) \cup [3/4, 4/5] \cup (4/5, 1].$$

Замечание. Действительными числами классической математики являются конечные или бесконечные периодические или непериодические дроби в позиционной системе счисления с превышающим единицу основанием m. Каждая такая дробь является суммой не более чем счётно бесконечного ряда, непременно сходящегося в случае бесконечности ряда. При этом все показатели степеней в знаменателях членов ряда и сами эти знаменатели являются всего лишь конечными. То есть в определениях рядов и действительных чисел классической математики не используются такие главнейшие достижения теории множеств Кантора, как сверхконечные (трансфинитные) числа. Причём сам Кантор построил лишь бесконечно малое начало иерархии только актуально бесконечно

больших сверхконечных (трансфинитных) чисел, а не просто признавал их существование, однако почему-то полагал, что именно с помощью таких бесконечно больших чисел якобы доказывается невозможность существования актуально бесконечно малых чисел. Тем не менее, путём продолжения и развития теории множеств Кантора как главного дела Кантора, причём с использованием как раз его актуально бесконечно больших чисел, именно гибко строятся также актуально бесконечно малые числа, в том числе посредством обращений бесконечно больших чисел Кантора. Оказывается достаточным всего лишь пополнить множество всех действительных чисел множеством всех или некоторых бесконечных кардинальных чисел Кантора и потребовать сохранения и распространения всех или

некоторых свойств множества всех действительных чисел и действий над ними, включая всеобщий закон сохранения с непременным полным отсутствием поглощений даже актуально бесконечно малых даже актуально бесконечно большими (вопреки тому, что бесконечные сверхкардиналы при сложении поглощают даже равные себе, хотя добавление конечных сверхординалов к бесконечным сверхординалам только справа существенно), с вынужденным естественным преобразованием одной лишь аксиомы Архимеда. А общая теория сверхчисел пополняет множество всех действительных чисел множеством всех или некоторых бесконечных сверхкардиналов, бесконечно обобщающих и развивающих кардиналы Кантора по общим теориям сверхкардиналов и

сверхординалов. При этом множество всех сверхчисел строится по трансфинитной индукции по их рангам, причём множеством всех сверхчисел нулевого ранга считается множество всех действительных чисел. Если ничто привычное не изменять, то принципиально невозможно построить что бы то ни было новое. Тогда бы и великий Кантор не построил свою теорию множеств, ставшую основой всей классической математики. Однако необходимо непременно бережное сохранение всего достигнутого. Это требование строжайшим образом соблюдается и в настоящей научной монографии, все новые предложения которой непременно альтернативны как именно дополнительные полезные возможности в придачу ко всем сохраняющимся достижениям классической математики.

Определение. Множеством всех сверхчисел нулевого ранга называется множество всех действительных чисел.

Определение. Множеством всех сверхчисел любого положительного целого ранга называется множество, состоящее из всех сверхчисел всех строго предшествующих этому рангу неотрицательных целых рангов, всех или некоторых бесконечных сверхкардиналов и всех итогов всех или некоторых сверхдействий над ними всеми, вместе со всеми или некоторыми сверхотношениями между ними всеми сохраняющих все свойства всех соответствующих действий над действительными числами и всех соответствующих отношений между действительными числами, включая всеобщий закон сохранения с полным отсутствием поглощений даже актуально бесконечно

малых даже актуально бесконечно большими, однако с единственной естественной заменой аксиомы Архимеда на сверхархимедову аксиому о том, что для любых двух положительных сверхчисел существует такое третье положительное сверхчисло, что его произведение на первое из тех двух положительных сверхчисел превышает второе из тех двух положительных сверхчисел.

Замечание. Сверхчисло, равное бесконечному сверхкардиналу, в множестве всех сверхчисел обладает принципиально другими свойствами, чем этот сверхкардинал в множестве всех сверхкардиналов. Ведь хотя бы при сложении бесконечные сверхкардиналы поглощают даже равные себе, а в множестве всех сверхчисел действует всеобщий закон сохранения с полным

отсутствием поглощений даже актуально бесконечно малых даже актуально бесконечно большими. Поэтому во избежание путаницы целесообразно обозначить такое сверхчисло иначе, чем этот сверхкардинал.

Замечание. Для построения множества всех сверхчисел любого положительного целого ранга пополнение множества всех сверхчисел всех строго предшествующих этому рангу неотрицательных целых рангов именно всеми бесконечными сверхкардиналами (все конечные сверхкардиналы имеют нулевой ранг, являются обычными неотрицательными целыми числами, то есть некоторыми элементами множества всех действительных чисел, и не дают ничего дополнительного) даёт неограниченные возможности, однако не является необходимым. Для

решения очень многих классов теоретически и практически важных задач с учётом принципов допустимой простоты и разумной достаточности можно ограничиться построением множества всех сверхчисел всего лишь первого ранга с пополнением множества всех действительных чисел только двумя бесконечными кардинальными числами Кантора, а именно, счётной мощностью $\aleph_0$ (алеф-нуль) и мощностью континуума $\aleph$ (алеф). Однако по предыдущему замечанию вводятся другие их обозначения: $\omega = \aleph_0$, $\Omega = \aleph$.

Замечание. Для построения множества всех сверхчисел любого положительного целого ранга использование непременно всевозможных действий над действительными числами и непременно всевозможных отношений между

ними, а также именно всех соответствующих сверхдействий и сверхотношений применительно ко всем сверхчислам всех строго предшествующих этому рангу неотрицательных целых рангов даёт неограниченные возможности, однако не является необходимым. Так, для расширения множества всех сверхчисел любого ранга без их сгущения достаточно ограничиться лишь сложением и вычитанием и соответствующими сверхсложением и сверхвычитанием, так что будут расширяться целые части сверхчисел и к ним добавляться всего лишь перенимаемые от сверхчисел всех предыдущих рангов дробные части сверхчисел без каких бы то ни было дополнительных сгущений этих дробных частей. Например, если ограничиться лишь сложением и вычитанием и соответствующими сверхсложением и

сверхвычитанием при пополнении множества всех действительных чисел всеми или некоторыми непременно бесконечными сверхкардиналами, то у получаемых сверхчисел первого ранга целые части могут стать соответствующими бесконечными, однако дробные части могут быть только обычными действительными числами от нуля включительно до единицы исключительно без всякого сгущения этих дробных частей какими бы то ни было дополнительными сверхчислами.

Замечание. Сверхкардиналы как бесконечные обобщения кардинальных чисел Кантора вместе с ними выражают мощности множеств и основаны на взаимно однозначном соответствии как чрезвычайно грубом отношении равносильности (эквивалентности). Ещё Галилей открыл

парадокс взаимно однозначного соответствия бесконечных множеств, способного действовать между целым и его собственной, то есть меньшей, частью вопреки тому принципу, что часть меньше целого. А именно, есть взаимно однозначное соответствие $n \leftrightarrow n^2$ ($n \in N = \{1, 2, 3, ...\}$) между множеством N всех положительных целых чисел и его собственной частью – множеством всех только квадратов положительных целых чисел. Есть и взаимно однозначное соответствие $n \leftrightarrow 2n$ между множеством N всех положительных целых чисел и его собственной частью – множеством всех только чётных положительных целых чисел. А мощность множества всех действительных точек отрезка от нуля до единицы в обоих случаях включительно как мощность континуума ℵ равна мощности множества

всех действительных точек бесконечного не более чем счётномерного пространства. Лишь конечные сверхкардинал и кардинальное число чувствительны к добавлению или удалению хотя бы одного элемента множества. То есть применительно к бесконечным сверхкардиналам не может быть и речи о действенности всеобщего закона сохранения. Зато в множестве всех сверхчисел, где отсутствует поглощение даже актуально бесконечно малых даже актуально бесконечно большими, всеобщий закон сохранения действует даже бесконечно сильнее, чем в множестве всех действительных чисел, где отсутствует поглощение одних ненулевых конечных чисел другими. Поэтому сверхчисло способно именно точно определять, то есть измерять, сверхколичество Q всех

элементов не только конечного множества, на что способен и сверхкардинал, но и бесконечного множества, на что основанный на взаимно однозначном соответствии и поэтому ограничивающийся определением мощности сверхкардинал принципиально неспособен. Любое измерение опирается на целесообразный выбор единиц измерения, измеряющих некоторые эталонные предметы. Поэтому для наших единиц измерения Q = 1, Q = ω и Q = Ω следует целесообразно выбрать эталонные множества единичной мощности 1, счётной мощности $\aleph_0$ и мощности континуума $\aleph$ соответственно.

Определение. Эталонным множеством единичной мощности 1, имеющим сверхколичество Q всех элементов, точно измеряемое сверхчислом 1, называется любое

одноэлементное множество {a}, состоящее из единственного произвольного элемента a:

$$Q\{a\} = Q(\{a\}) = 1.$$

Определение. Эталонным множеством счётной мощности $\aleph_0$, имеющим сверхколичество Q всех элементов, точно измеряемое сверхчислом ω, называется квантимножество (количественное множество) D, получаемое пополнением множества N всех положительных целых чисел квантиэлементом (количественным элементом) $_{1/2}0$:

$$D =^\circ \{_{1/2}0, 1, 2, 3, 4, ...\}^\circ,$$

$$Q(D) = Q\{_{1/2}0, 1, 2, 3, 4, ...\} = \omega.$$

Замечание. Поскольку это квантимножество (количественное множество) D представляет собой именно в точности правую половину множества Z всех целых

чисел, то можно дать равносильное (эквивалентное) последнему более простое определение, однако не для ω, а для 2ω.

Определение. Эталонным множеством счётной мощности $\aleph_0$, имеющим сверхколичество Q всех элементов, точно измеряемое сверхчислом 2ω, называется множество Z всех целых чисел:

$$Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\},$$

$$Q(Z) = Q\{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\} = 2\omega.$$

Определение. Симметричным полуотрезком-полуинтервалом называется квантимножество (количественное множество) |a, b|, являющееся промежутком от a до b, причём все промежуточные между ними числа имеют единичные количества, а оба конца

промежутка, то есть a и b, имеют половинные количества, сумма которых равна как раз единице:

$$|a, b| =^\circ {}_{1/2}a +^\circ]a, b[+^\circ {}_{1/2}b =^\circ {}_{1/2}a +^\circ (a, b) +^\circ {}_{1/2}b.$$

Замечание. Использование по Бурбаки вывернутых квадратных скобок взамен круглых скобок для интервала позволяет избежать его путаницы с упорядоченной парой как конечной последовательностью из двух элементов.

Определение. Эталонным множеством мощности континуума ℵ, имеющим сверхколичество Q всех элементов, точно измеряемое сверхчислом Ω, называется симметричный полуотрезок-полуинтервал |0, 1|, являющийся промежутком от нуля до единицы, причём все промежуточные между ними числа имеют единичные количества, а оба конца промежутка, то есть нуль и

единица, имеют половинные количества, сумма которых равна как раз единице:

$$|0, 1| =^\circ {}_{1/2}0 +^\circ]0, 1[+^\circ {}_{1/2}1 =^\circ {}_{1/2}0 +^\circ (0, 1) +^\circ {}_{1/2}1,$$

$$Q|0, 1| = \Omega.$$

<u>Замечание</u>. В последнем определении допустимы равносильные (эквивалентные) замены более удобного <u>симметричного</u> <u>полуотрезка-полуинтервала</u> |0, 1| более привычными <u>асимметричными</u> <u>полуинтервалом-полуотрезком</u> и <u>полуотрезком-полуинтервалом</u>

$$]0, 1] = (0, 1],$$

$$[0, 1[= [0, 1),$$

$$Q]0, 1] = Q(0, 1] = Q[0, 1[= Q[0, 1) = Q|0, 1| = \Omega.$$

<u>Определение</u>. <u>Сверхчисловым</u> <u>сдвигом</u> <u>сверхчислового множества</u> называются, во-первых, одно и то же

сверхчисло, прибавляемое ко всем элементам этого сверхчислового множества, а во-вторых, прибавление этого сверхчислового сдвига как сверхчисла ко всем элементам этого сверхчислового множества.

Определение. Сверхколичество всех элементов квантимножества (количественного множества) есть квантисумма (количественная сумма) собственных (внутренних) количеств всех элементов (основ, оснований) квантимножества (количественного множества)

$$Q(A) = Q\{\dots , {}_q a, \dots , {}_r b, \dots , {}_s c, \dots\}^\circ =$$

$$\dots + q + \dots + r + \dots + s + \dots,$$

которая обобщает непременно точное число элементов конечного множества, является универсальной, вполне чувствительной и даже несчётно алгебраически аддитивной

мерой (степенью) количества и удовлетворяет целому ряду следующих основных аксиом аксиоматической теории именно точно измеряемого сверхчислом сверхколичества всех элементов множества.

Аксиома алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с выполнением всегда для сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения:

$$Q(\ldots +^\circ A -^\circ \ldots -^\circ B +^\circ \ldots +^\circ C -^\circ \ldots -^\circ E +^\circ \ldots) =$$

$$\ldots + Q(A) - \ldots - Q(B) + \ldots + Q(C) - \ldots - Q(E) + \ldots .$$

Аксиома умножаемости (мультипликативности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) при присвоении ему внешнего количества. Присвоение внешнего количества t квантимножеству (количественному множеству) A влечёт умножение сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) на это внешнее количество t:

$$Q({}_tA) = tQ(A).$$

Аксиома умножаемости (мультипликативности) сверхколичества всех элементов множества при его представлении декартовым произведением множеств с выполнением всегда для сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности

(ассоциативности) умножения, а также закона распределительности (дистрибутивности) умножения относительно сложения:

$$Q(\ldots \times A \times \ldots \times B \times \ldots) = \ldots Q(A) \ldots Q(B) \ldots .$$

Аксиома неизменности (сохранения, инвариантности) сверхколичества всех элементов множества при нормировании некоторых его элементов:

$$Q\{\ldots , {}_{q}a, \ldots, {}_{r}b, \ldots , {}_{s}c, \ldots\} = Q\{\ldots , {}_{q}||a||, \ldots , {}_{r}b, \ldots , {}_{s}||c||, \ldots\}.$$

Аксиома прямой пропорциональности изменения сверхколичества всех элементов сверхчислового множества при его сверхчисловом сдвиге этому сверхчисловому сдвигу этого сверхчислового множества.

Аксиома неизменности (сохранения, инвариантности) сверхколичества всех элементов ограниченного квантимножества (количественного множества) при его изометрическом преобразовании (то есть сохраняющем все количества всех элементов квантимножества (количественного множества) и все попарные расстояния элементов квантимножества (количественного множества), в совокупности ввиду его ограниченности ограниченные сверху).

Аксиома непрерывности сверхдействия определения сверхколичества, или аксиома перестановочности (коммутативности) предельного перехода и сверхдействия определения сверхколичества.

Аксиома неизменности (сохранения, инвариантности) сверхколичества всех элементов множества при предельных переходах, не приводящих к уравниванию исходно различных его элементов.

Аксиома избрания совокупности эталонных множеств, чьи сверхколичества всех элементов измеряются сверхчислами, которые являются единицами измерения.

Теорема. Сверхколичество всех элементов пустого множества $\emptyset$ равно нулю.

Доказательство. Теоретико-множественное объединение двух пустых множеств, которые не пересекаются, есть разбиение пустого множества по общему определению разбиения множества:

$$\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \; (\emptyset \cap \emptyset = \emptyset).$$

Поэтому по аксиоме слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов множества при его разбиении на непересекающиеся (дизъюнктные) подмножества

$$Q(\emptyset) = Q(\emptyset \cup \emptyset) = Q(\emptyset) + Q(\emptyset) = 2Q(\emptyset),$$

$$Q(\emptyset) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Как всегда, все наличные элементы любого множества считаются попарно различными, поскольку по определению равенства множеств по Кантору можно и нужно полагать, что из всех равных между собой наличных элементов множество учитывает только один наличный элемент. Поэтому во избежание ошибок следует непременно перед определением сверхколичества всех элементов

любого конечного или бесконечного множества убедиться в попарном различии всех элементов множества.

Теорема. Сверхколичество всех элементов конечного множества $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots , a_n\}$ ($n \in N = \{1, 2, 3, \ldots\}$) точно измеряется сверхчислом и числом n его элементов.

Доказательство. Теоретико-множественное объединение всех попарно различных одноэлементных подмножеств конечного множества $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots , a_n\}$, которые не пересекаются ввиду попарного различия всех его элементов, есть его разбиение по общему определению разбиения множества:

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots , a_n\} = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup \{a_4\} \cup \ldots \cup \{a_n\}.$$

Поэтому по аксиоме слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов множества при его

разбиении на непересекающиеся (дизъюнктные) подмножества

$$Q\{a_1, a_2, a_3, \dots , a_n\} = Q(\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup \dots \cup \{a_n\}) =$$
$$Q\{a_1\} + Q\{a_2\} + Q\{a_3\} + \dots + Q\{a_n\}.$$

Ввиду эталонности каждого из этих n одноэлементных множеств сверхколичество Q каждого из них равно единице. Для различения всех этих единиц между собой в их сумме каждая из них условно снабжается взятым в показывающие искусственность различения круглые скобки правым нижним указателем (индексом) соответствующего элемента конечного множества:

$$Q\{a_1, a_2, a_3, \dots , a_n\} = Q\{a_1\} + Q\{a_2\} + Q\{a_3\} + \dots + Q\{a_n\} =$$
$$1_{(1)} + 1_{(2)} + 1_{(3)} + \dots + 1_{(n)} = n,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Именно точно измеряемое сверхчислом сверхколичество всех элементов любого конечного или бесконечного множества является в случае именно конечного множества, как и сверхкардинал множества, бесконечно обобщающий кардинальное число Кантора, обычным неотрицательным целым числом всех его элементов.

Теорема. Пополнение любого конечного или бесконечного множества A одним элементом b, непременно отличающимся от всех элементов множества A, увеличивает сверхколичество всех элементов множества ровно на единицу.

Доказательство. Теоретико-множественное объединение множества A и одноэлементного множества {b} (состоящего из именно этого единственного элемента b), которые не

пересекаются ввиду отличия элемента b от всех элементов этого множества A, по общему определению разбиения множества есть разбиение самого этого теоретико-множественного объединения A ∪ {b}. Поэтому по аксиоме слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов множества при его разбиении на непересекающиеся (дизъюнктные) подмножества

$$Q(A \cup \{b\}) = Q(A) + Q\{b\}.$$

Сверхколичество Q{b} всех элементов одноэлементного множества {b} (состоящего из именно этого единственного элемента b) ввиду эталонности каждого одноэлементного множества равно единице. Следовательно,

$$Q(A \cup \{b\}) = Q(A) + Q\{b\} = Q(A) + 1,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Изъятие одного любого элемента a из любого непустого конечного или бесконечного множества A уменьшает сверхколичество всех элементов множества ровно на единицу.

Доказательство. Именно это множество A есть теоретико-множественное объединение непересекающихся одноэлементного множества {a} (состоящего из именно этого единственного элемента a) и теоретико-множественной разности (A \ {a}) этого множества A и этого одноэлементного множества {a}, получающейся после изъятия этого элемента a из этого множества A, так что это теоретико-множественное объединение и есть по общему определению разбиения множества разбиение этого множества A:

$$A = \{a\} \cup (A \setminus \{a\}).$$

Поэтому по аксиоме слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов множества при его разбиении на непересекающиеся (дизъюнктные) подмножества

$$Q(A) = Q(\{a\} \cup (A \setminus \{a\})) = Q((A \setminus \{a\}) \cup \{a\}) =$$
$$Q\{a\} + Q(A \setminus \{a\}) = Q(A \setminus \{a\}) + Q\{a\}.$$

Сверхколичество $Q\{a\}$ всех элементов одноэлементного множества $\{a\}$ (состоящего из именно этого единственного элемента a) ввиду эталонности каждого одноэлементного множества равно единице. Следовательно,

$$Q(A) = Q(A \setminus \{a\}) + Q\{a\} = Q(A \setminus \{a\}) + 1,$$
$$Q(A \setminus \{a\}) = Q(A) - 1,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Только для конечных множеств сверхкардинал, бесконечно обобщающий кардинальное число Кантора, тоже, как и сверхколичество всех элементов множества, увеличивается или уменьшается на единицу при пополнении множества одним элементом, отличающимся от всех элементов множества, и при изъятии одного элемента из множества соответственно в согласии с последними двумя теоремами. Однако для бесконечных множеств об этом не может быть и речи. Любое бесконечное множество только в смысле нарушения равенства множеств чувствительно к таким пополнению и изъятию, но совершенно не чувствительно к ним в смыслах как взаимно однозначного соответствия множеств, так и основанных на нём мощности, кардинального числа и сверхкардинала.

Замечание. Ещё Галилей открыл парадокс взаимно однозначного соответствия между именно бесконечными множествами, заключающийся в возможности существования взаимно однозначного соответствия между бесконечным множеством и его собственным подмножеством как строго меньшей частью, и на этом основании сделал вывод о якобы нарушении древнего принципа «целое больше части», где имеется в виду часть, строго меньшая, чем целое. Больцано применительно к парадоксам бесконечного отметил нечувствительность взаимно однозначного соответствия между бесконечными множествами к добавлениям или удалениям (изъятиям) отдельных элементов, в частности концов промежутка положительной длины, и выразил недовольство такой

нечувствительностью. Кантор впервые доказал существование неравномощных бесконечных множеств и построил иерархии их кардинальных чисел как мощностей, однако так и не вышел за пределы взаимно однозначного соответствия и в связи с такой его нечувствительностью даже не выразил неудовольствия, в отличие от Больцано. Общая теория сверхчисел, в частности выражающих сверхколичества всех элементов любых конечных или бесконечных множеств, впервые дополнила взаимно однозначное соответствие множеств принципиально другим только в случае бесконечности множеств их отношением, а именно отношением их сверхколичеств, вполне чувствительных к любым добавлениям или удалениям (изъятиям) отдельных элементов, так что при этом

исключены нарушения древнего принципа «целое больше части», где имеется в виду часть, строго меньшая, чем целое. Более того, общая теория сверхчисел обеспечивает их сверхчувствительность в смысле полного и безоговорочного выполнения всеобщего закона сохранения с полным отсутствием каких бы то ни было поглощений даже актуально бесконечно малых актуально бесконечно большими.

Теорема. Сверхколичество всех элементов однонаправленной счётной арифметической прогрессии a + bn, где a – произвольное действительное число, b – произвольное ненулевое действительное число, n пробегает всю счётную

последовательность неотрицательных целых чисел в порядке возрастания, ввиду возможности перехода именно к множеству всех элементов последовательности, коль скоро все они попарно различны, есть

$$Q(a + bn \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, ...\}) =$$

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, ...\}\} = \omega/|b| - a/b + 1/2.$$

Доказательство.

Пусть вначале b – положительное целое число, a – неотрицательное целое число, строго меньшее числа b.

Если b = 1, то a = 0,

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0\} = \omega/|b| - a/b + 1/2;$$

$$Q\{n \mid n \in N_0\} = \omega + 1/2;$$

$$Q(N_0) = Q(N \cup \{0\}) = Q(D +^\circ {}_{1/2}0) = Q(D) + Q\{{}_{1/2}0\} = \omega + 1/2,$$

что верно.

Если $b \geq 2$, то рассмотрим совместно все b арифметических прогрессий для всевозможных остатков $a = 0, 1, 2, \ldots , b - 1$ от деления целых чисел на b:

$$Q\{0 + bn \mid n \in N_0\};$$
$$Q\{1 + bn \mid n \in N_0\};$$
$$Q\{2 + bn \mid n \in N_0\};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$Q\{b - 1 + bn \mid n \in N_0\}.$$

Эти арифметические прогрессии попарно не пересекаются и, поскольку <u>любое</u> неотрицательное целое число <u>непременно</u> <u>единственным</u> образом представляется в таком виде $a + bn$, образуют именно <u>разбиение</u> множества

$$N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

всех неотрицательных целых чисел:

$$\{0 + bn \mid n \in N_0\} \cup \{1 + bn \mid n \in N_0\} \cup \{2 + bn \mid n \in N_0\} \cup \ldots \cup \{b - 1 + bn \mid n \in N_0\} = N_0 = N \cup \{0\};$$

$$Q\{0 + bn \mid n \in N_0\} + Q\{1 + bn \mid n \in N_0\} + Q\{2 + bn \mid n \in N_0\} + \ldots + Q\{b - 1 + bn \mid n \in N_0\} = Q(N_0) = Q(N \cup \{0\}) = Q(D +^\circ {}_{1/2}0) = Q(D) + Q\{{}_{1/2}0\} = \omega + 1/2.$$

Теперь используем <u>аксиому</u> <u>прямой пропорциональности изменения</u> <u>сверхколичества</u> <u>всех</u> <u>элементов</u> <u>сверхчислового множества</u> при его <u>сверхчисловом</u> <u>сдвиге</u> этому <u>сверхчисловому</u> <u>сдвигу</u> этого <u>сверхчислового</u> <u>множества</u>. Каждая из этих арифметических прогрессий сдвинута на плюс единицу по сравнению с предыдущей. Обозначим первое из этих сверхколичеств через x, а неизвестный коэффициент пропорциональности по этой аксиоме через C.

Тогда для относящегося только к данному случаю значения коэффициента C получаем:

$$Q\{0 + bn \mid n \in N_0\} = x;$$

$$Q\{1 + bn \mid n \in N_0\} = x + C;$$

$$Q\{2 + bn \mid n \in N_0\} = x + 2C;$$

..

$$Q\{b - 1 + bn \mid n \in N_0\} = x + (b - 1)C.$$

Сдвинем последнюю из этих арифметических прогрессий ещё на плюс единицу и получим:

$$Q\{b + bn \mid n \in N_0\} = x + bC.$$

Сама эта арифметическая прогрессия имеет вид b, 2b, 3b, ...

А теперь рассмотрим самую <u>первую</u> из этих арифметических прогрессий со сверхколичеством множества всех её элементов

$$Q\{0 + bn \mid n \in N_0\} = x,$$

имеющую вид 0, b, 2b, 3b, ...

Сразу видно, что эта арифметическая прогрессия 0, b, 2b, 3b, ... есть пополнение предыдущей арифметической прогрессии b, 2b, 3b, ... нулём и поэтому имеет сверхколичество

$$Q\{0 + bn \mid n \in N_0\} = x$$

всех элементов, которое превышает сверхколичество

$$Q\{b + bn \mid n \in N_0\} = x + bC$$

предыдущей арифметической прогрессии b, 2b, 3b, ... ровно на единицу:

$$Q\{0 + bn \mid n \in N_0\} - Q\{b + bn \mid n \in N_0\} = x - (x + bC) = - bC = 1.$$

Поэтому лишь для данного положительного целого числа b в данном случае (и никоим образом не вообще во всех случаях применения этой аксиомы)

$$C = - 1/b.$$

Тогда получаем:

$$Q\{0 + bn \mid n \in N_0\} = x;$$

$$Q\{1 + bn \mid n \in N_0\} = x - 1/b;$$

$$Q\{2 + bn \mid n \in N_0\} = x - 2/b;$$

....

$$Q\{b - 1 + bn \mid n \in N_0\} = x - (b - 1)/b.$$

Теперь указанное выше разбиение множества

$$N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

всех неотрицательных целых чисел на b арифметических прогрессий даёт:

$$Q\{0 + bn \mid n \in N_0\} + Q\{1 + bn \mid n \in N_0\} + Q\{2 + bn \mid n \in N_0\} + \ldots$$

$$+ Q\{b - 1 + bn \mid n \in N_0\} =$$

$$x + x - 1/b + x - 2/b + \ldots + x - (b - 1)/b =$$

$$bx - 1/b - 2/b - \ldots - (b - 1)/b = bx - (b - 1)/2 = Q(N_0) = Q(N) \cup \{0\})$$

$$= Q(D +^\circ {}_{1/2}0) = Q(D) + Q\{{}_{1/2}0\} = \omega + 1/2;$$

$$bx - (b - 1)/2 = \omega + 1/2;$$

$$bx = \omega + b/2;$$

$$x = \omega/b + 1/2.$$

Тогда получаем:

$$Q\{0 + bn \mid n \in N_0\} = \omega/b + 1/2;$$

$$Q\{1 + bn \mid n \in N_0\} = \omega/b - 1/b + 1/2;$$

$$Q\{2 + bn \mid n \in N_0\} = \omega/b - 2/b + 1/2;$$

....

$$Q\{b - 1 + bn \mid n \in N_0\} = \omega/b - (b - 1)/b + 1/2.$$

$$Q\{b + bn \mid n \in N_0\} = \omega/b - b/b + 1/2 = \omega/b - 1 + 1/2 = \omega/b - 1/2.$$

Тем самым теорема

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0\} = \omega/|b| - a/b + 1/2$$

доказана для любого __положительного__ __целого__ числ__а__ b, если a – __неотрицательное__ __целое__ число, строго меньшее числ__а__ b. Такое ограничение множества рассматриваемых значений числ__а__ a ещё и позволило найти значение коэффициента

$$C = - 1/b$$

в данном случае, то есть зависящее от __положительного__ __целого__ числ__а__ b, но никоим образом не от значений числ__а__ a, то есть верное для любых __действительных__ значений числ__а__ a, для которых получаем:

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0\} = Q\{0 + bn \mid n \in N_0\} - a/b = \omega/b + 1/2 - a/b = \omega/b - a/b + 1/2.$$

Тем самым теорема

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0\} = \omega/|b| - a/b + 1/2$$

доказана для любых положительных целых значений числа b и для любых действительных значений числа a.

Теперь для любых положительных целых значений числа b рассмотрим множество

$$\{- bn \mid n \in N_0\}$$

чисел, попарно противоположных числам множества

$$\{bn \mid n \in N_0\},$$

имеющее по аксиоме неизменности (сохранения, инвариантности) сверхколичества всех элементов множества при нормировании некоторых его элементов, в данном случае при нормировании всех его элементов, в

точности равное последнему сверхколичество всех элементов

$$Q\{-\, bn \mid n \in N_0\} = Q\{bn \mid n \in N_0\} = \omega/b + 1/2 = \omega/|b| + 1/2 = \omega/|-\, b| + 1/2.$$

Тем самым теорема

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0\} = \omega/|b| - a/b + 1/2$$

доказана для любых <u>отрицательных</u> <u>целых</u> значений числ<u>а</u> b и <u>нулевого</u> значения числ<u>а</u> a.

Нашей ближайшей задачей является доказательство этой теоремы для любых <u>отрицательных</u> <u>целых</u> значений числ<u>а</u> b и для любых <u>действительных</u> значений числ<u>а</u> a. Однако и дальше, как и немногим выше, представляется целесообразным в случае <u>отрицательности</u> числ<u>а</u> рассматривать его как итог присоединения явно

указанного отрицательного знака к соответствующему положительному числу и многократно применять аксиому неизменности (сохранения, инвариантности) сверхколичества всех элементов множества при нормировании некоторых его элементов, в данном случае при нормировании всех его элементов.

Пусть вначале b – положительное целое число, a – неотрицательное целое число, строго меньшее числа b.

Если b = 1, то a = 0,

$$Q\{- a - bn \mid n \in N_0\} = \omega/|- b| - (- a)/(- b) + 1/2;$$

$$Q\{- n \mid n \in N_0\} = Q\{n \mid n \in N_0\} = \omega + 1/2,$$

что верно.

Если $b \geq 2$, то рассмотрим совместно все b арифметических прогрессий для всевозможных остатков $a = 0, 1, 2, \ldots, b - 1$ от деления целых чисел на b:

$$Q\{0 - bn \mid n \in N_0\} = Q\{0 + bn \mid n \in N_0\};$$
$$Q\{- 1 - bn \mid n \in N_0\} = Q\{1 + bn \mid n \in N_0\};$$
$$Q\{- 2 - bn \mid n \in N_0\} = Q\{2 + bn \mid n \in N_0\};$$

………………………………

$$Q\{- (b - 1) - bn \mid n \in N_0\} = Q\{ b - 1 + bn \mid n \in N_0\}.$$

Эти арифметические прогрессии попарно не пересекаются и, поскольку <u>любое</u> <u>неположительное</u> <u>целое</u> число <u>непременно</u> <u>единственным</u> образом представляется в таком виде $(- a - bn)$, образуют именно <u>разбиение</u> множества

$$\{0, - 1, - 2, - 3, \ldots\}$$

всех <u>неположительных</u> <u>целых</u> чисел:

$$\{0 - bn \mid n \in N_0\} \cup \{- 1 - bn \mid n \in N_0\} \cup \{- 2 - bn \mid n \in N_0\} \cup ... \cup \{- (b - 1) - bn \mid n \in N_0\} = \{0, - 1, - 2, - 3, ...\};$$

$$Q\{0 - bn \mid n \in N_0\} + Q\{- 1 - bn \mid n \in N_0\} + Q\{- 2 - bn \mid n \in N_0\} + ... + Q\{- (b - 1) - bn \mid n \in N_0\} = Q\{0, - 1, - 2, - 3, ...\} = Q(\{- 1, - 2, - 3, ...\} \cup \{0\}) = Q\{- 1, - 2, - 3, ...\} + Q\{0\} = Q\{1, 2, 3, ...\} + Q\{0\} = Q\{0, 1, 2, 3, ...\} = Q(N \cup \{0\}) = Q(D +^\circ {}_{1/2}0) = Q(D) + Q\{{}_{1/2}0\} = \omega + 1/2.$$

Теперь используем <u>аксиому</u> <u>прямой пропорциональности</u> <u>изменения</u> <u>сверхколичества</u> <u>всех</u> <u>элементов</u> <u>сверхчислового</u> <u>множества</u> при его <u>сверхчисловом</u> <u>сдвиге</u> этому <u>сверхчисловому</u> <u>сдвигу</u> этого <u>сверхчислового</u> <u>множества</u>.

Каждая из этих арифметических прогрессий сдвинута на <u>минус</u> единицу по сравнению с предыдущей. Обозначим первое из этих сверхколичеств через x, а неизвестный

коэффициент пропорциональности по этой аксиоме через C. Тогда для относящегося только к данному случаю значения коэффициента C получаем:

$$Q\{0 - bn \mid n \in N_0\} = x;$$

$$Q\{- 1 - bn \mid n \in N_0\} = x - C;$$

$$Q\{- 2 - bn \mid n \in N_0\} = x - 2C;$$

...

$$Q\{- (b - 1) - bn \mid n \in N_0\} = x - (b - 1)C.$$

Сдвинем последнюю из этих арифметических прогрессий ещё на <u>минус</u> единицу и получим:

$$Q\{- b - bn \mid n \in N_0\} = x - bC.$$

Сама эта арифметическая прогрессия имеет вид - b, - 2b, - 3b, ...

А теперь рассмотрим самую первую из этих арифметических прогрессий со сверхколичеством множества всех её элементов

$$Q\{0 - bn \mid n \in N_0\} = x,$$

имеющую вид 0, - b, - 2b, - 3b, ...

Сразу видно, что эта арифметическая прогрессия 0, - b, - 2b, - 3b, ... есть пополнение предыдущей арифметической прогрессии - b, - 2b, - 3b, ... нулём и поэтому имеет сверхколичество

$$Q\{0 - bn \mid n \in N_0\} = x$$

всех элементов, которое превышает сверхколичество

$$Q\{- b - bn \mid n \in N_0\} = x - bC$$

предыдущей арифметической прогрессии - b, - 2b, - 3b, ... ровно на единицу:

$$Q\{0 - bn \mid n \in N_0\} - Q\{- b - bn \mid n \in N_0\} = x - (x - bC) = bC = 1.$$

Поэтому лишь для данного отрицательного целого числа (- b) (и никоим образом не вообще во всех случаях применения этой аксиомы)

$$C = 1/b = - 1/(- b).$$

Тогда получаем:

$$Q\{0 - bn \mid n \in N_0\} = x;$$

$$Q\{- 1 - bn \mid n \in N_0\} = x - 1/b;$$

$$Q\{- 2 - bn \mid n \in N_0\} = x - 2/b;$$

....

$$Q\{- (b - 1) - bn \mid n \in N_0\} = x - (b - 1)/b.$$

Теперь указанное выше разбиение множества

$$N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

всех неотрицательных целых чисел на b арифметических прогрессий даёт:

$$Q\{0 - bn \mid n \in N_0\} + Q\{- 1 - bn \mid n \in N_0\} + Q\{- 2 - bn \mid n \in N_0\} + \ldots + Q\{- (b - 1) - bn \mid n \in N_0\} =$$

$$x + x - 1/b + x - 2/b + \ldots + x - (b - 1)/b = bx - 1/b - 2/b - \ldots - (b - 1)/b = bx - (b - 1)/2 = Q\{0, - 1, - 2, - 3, \ldots\} = Q(\{- 1, - 2, - 3, \ldots\} \cup \{0\}) = Q\{- 1, - 2, - 3, \ldots\} + Q\{0\} = Q\{1, 2, 3, \ldots\} + Q\{0\} = Q\{0, 1, 2, 3, \ldots\} = Q(N \cup \{0\}) = Q(D +^\circ {}_{1/2}0) = Q(D) + Q\{{}_{1/2}0\} = \omega + 1/2.$$

$$bx = \omega + b/2;$$

$$x = \omega/b + 1/2.$$

Тогда получаем:

$$Q\{0 - bn \mid n \in N_0\} = Q\{0 + bn \mid n \in N_0\} = \omega/b + 1/2 = \omega/|- b| + 1/2;$$

$$Q\{- 1 - bn \mid n \in N_0\} = Q\{1 + bn \mid n \in N_0\} = \omega/b - 1/b + 1/2 =$$

$$\omega/|- b| - (- 1)/(- b) + 1/2;$$

$$Q\{- 2 - bn \mid n \in N_0\} = Q\{2 + bn \mid n \in N_0\} = \omega/b - 2/b + 1/2 =$$
$$\omega/|- b| - (- 2/(- b) + 1/2;$$

……………………………………………………………

$$Q\{- (b - 1) - bn \mid n \in N_0\} = Q\{b - 1 + bn \mid n \in N_0\} =$$
$$\omega/b - (b - 1)/b + 1/2 = \omega/|- b| - (- (b - 1))/(- b) + 1/2.$$

$$Q\{- b - bn \mid n \in N_0\} = Q\{b + bn \mid n \in N_0\} = \omega/b - b/b + 1/2 =$$
$$\omega/b - 1 + 1/2 = \omega/b - 1/2 = \omega/|- b| - 1/2.$$

Тем самым теорема

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0\} = \omega/|b| - a/b + 1/2$$

доказана для любого отрицательного целого числа b, если a – неположительное целое число, по абсолютной величине строго меньшее числа b.

Такое ограничение множества рассматриваемых значений числа a ещё и позволило найти значение коэффициента

$$C = 1/b = - 1/(- b)$$

в данном случае, то есть зависящее от отрицательного целого числа (- b) и, что то же самое, от положительного целого числа b, но никоим образом не от значений числа a, то есть верное для любых действительных значений числа a, для которых получаем:

$$Q\{- a - bn \mid n \in N_0\} = Q\{0 - bn \mid n \in N_0\} - a/b = \omega/b + 1/2 - a/b =$$
$$\omega/|- b| - (- a)/(- b) + 1/2.$$

Тем самым теорема

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0\} = \omega/|b| - a/b + 1/2$$

доказана для любых отрицательных целых значений числа b и для любых действительных значений числа a.

Выше эта теорема была доказана для любых положительных целых значений числа b и для любых действительных значений числа a.

Так что теперь эта теорема доказана для любых ненулевых целых значений числа b и для любых действительных значений числа a.

Теперь остаётся снять ограничение целочисленности значений числа b.

Если ненулевое значение числа b рационально, то представимо в виде

$$b = p/q$$

несократимой дроби p/q, в которой числитель p и знаменатель q являются ненулевыми целыми числами, причём знаменатель q при необходимости умножением

числителя и знаменателя на минус единицу может быть сделан и поэтому может считаться положительным целым числом.

Умножение этой несократимой дроби p/q на её положительный целый знаменатель q даёт именно ненулевое целое число p. А для ненулевых целых значений числа b теорема

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0\} = \omega/|b| - a/b + 1/2$$

доказана. Поэтому, чтобы ею воспользоваться, достаточно осуществить именно разбиение арифметической прогрессии

$$\{a + bn \mid n \in N_0\} = \{a + np/q \mid n \in N_0\}$$

с ненулевым рациональным значением числа

$$b = p/q$$

на q арифметических прогрессий с одинаковой для них всех ненулевой целой разностью

$$qb = p$$

вместо ненулевой рациональной разности

$$b = p/q$$

в этой теореме, доказанной как раз для ненулевой именно целой разности b, причём начальные (для нулевых значений неотрицательного целого числа n) элементы этих прогрессий как значения числа a в этой теореме образуют конечную арифметическую прогрессию с разностью, являющейся значением числа

$$b = p/q$$

в требуемой арифметической прогрессии

$$\{a + bn \mid n \in N_0\} = \{a + np/q \mid n \in N_0\},$$

имеющую вид

$$a,\ a + p/q,\ a + 2p/q,\ a + 3p/q,\ a + 4p/q,\ ...,\ a + (q - 1)p/q.$$

Эти q <u>счётных</u> арифметических прогрессий

$$\{a + qbn \mid n \in N_0\} = \{a + pn \mid n \in N_0\},$$

$$\{a + p/q + qbn \mid n \in N_0\} = \{a + p/q + pn \mid n \in N_0\},$$

$$\{a + 2p/q + qbn \mid n \in N_0\} = \{a + 2p/q + pn \mid n \in N_0\},$$

$$\{a + 3p/q + qbn \mid n \in N_0\} = \{a + 3p/q + pn \mid n \in N_0\},$$

$$\{a + 4p/q + qbn \mid n \in N_0\} = \{a + 4p/q + pn \mid n \in N_0\},$$

....

$$\{a + (q - 1)p/q + qbn \mid n \in N_0\} = \{a + (q - 1)p/q + pn \mid n \in N_0\}$$

попарно не пересекаются ввиду отличия <u>целого</u> числ<u>а</u> p от нуля. А теоретико-множественное <u>объединение</u> их всех

$$\{a + qbn \mid n \in N_0\} \cup \{a + p/q + qbn \mid n \in N_0\} \cup \{a + 2p/q + qbn \mid n \in N_0\} \cup \{a + 3p/q + qbn \mid n \in N_0\} \cup \{a + 4p/q + qbn \mid n \in N_0\} \cup \ldots \cup \{a + (q - 1)p/q + qbn \mid n \in N_0\} =$$

$$\{a + pn \mid n \in N_0\} \cup \{a + p/q + pn \mid n \in N_0\} \cup \{a + 2p/q + pn \mid n \in N_0\} \cup \{a + 3p/q + pn \mid n \in N_0\} \cup \{a + 4p/q + pn \mid n \in N_0\} \cup \ldots \cup \{a + (q - 1)p/q + pn \mid n \in N_0\}$$

именно полностью исчерпывает требуемую счётную арифметическую прогрессию

$$\{a + bn \mid n \in N_0\} = \{a + np/q \mid n \in N_0\}$$

с произвольной <u>ненулевой</u> <u>рациональной</u> разностью

$$b = p/q$$

и является именно <u>разбиением</u> этой прогрессии:

$$\{a + bn \mid n \in N_0\} = \{a + np/q \mid n \in N_0\} =$$

$$\{a + pn \mid n \in N_0\} \cup \{a + p/q + pn \mid n \in N_0\} \cup \{a + 2p/q + pn \mid n \in N_0\} \cup \{a + 3p/q + pn \mid n \in N_0\} \cup \{a + 4p/q + pn \mid n \in N_0\} \cup \ldots \cup \{a + (q - 1)p/q + pn \mid n \in N_0\}.$$

В самой правой части одна и та же ненулевая именно целая разность p позволяет применить к каждой из q объединяемых арифметических прогрессий уже доказанную для любых ненулевых целых разностей как значений числа b теорему

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0\} = \omega/|b| - a/b + 1/2.$$

Теперь аксиома слагаемости (аддитивности) функции определения сверхколичества всех элементов множества даёт

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0\} = Q\{a + np/q \mid n \in N_0\} =$$

$$Q\{a + pn \mid n \in N_0\} + Q\{a + p/q + pn \mid n \in N_0\} + Q\{a + 2p/q + pn \mid n \in N_0\} + Q\{a + 3p/q + pn \mid n \in N_0\} + Q\{a + 4p/q + pn \mid n \in N_0\} + \ldots + Q\{a + (q - 1)p/q + pn \mid n \in N_0\} =$$

$$\omega/|p| - a/p + 1/2 + \omega/|p| - (a + p/q)/p + 1/2 + \omega/|p| - (a + 2p/q)/p + 1/2 + \omega/|p| - (a + 3p/q)/p + 1/2 + \omega/|p| - (a + 4p/q)/p + 1/2 + \ldots + \omega/|p| - (a + (q - 1)p/q)/p + 1/2 =$$

$$\omega q/|p| - aq/p + q/2 - 1/q - 2/q - 3/q - 4/q - \ldots - (q - 1)/q =$$

$$\omega/|p/q| - a/(p/q) + q/2 - (q - 1)/2 =$$

$$\omega/|p/q| - a/(p/q) + 1/2 =$$

$$\omega/|b| - a/b + 1/2.$$

Тем самым теорема

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0\} = \omega/|b| - a/b + 1/2$$

доказана для любых <u>действительных</u> значений числ<u>а</u> a и для любых <u>ненулевых</u> <u>рациональных</u> значений числ<u>а</u> b.

Теперь остаётся доказать эту теорему для любых действительных значений числа a и для любых ненулевых действительных значений числа b.

Любое ненулевое иррациональное, в частности трансцендентное, значение числа b является пределом бесконечного множества последовательностей именно ненулевых рациональных чисел, принадлежащих некоторой настолько малой окрестности этого именно ненулевого иррационального числа, что эта окрестность не содержит нуля. Одной из таких последовательностей является лежащая в любой из таких окрестностей подпоследовательность последовательности десятичных приближений этого ненулевого иррационального числа b.

Рассмотрим произвольную именно такую последовательность непременно ненулевых рациональных чисел:

$$b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_m, \dots, m \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\},$$

$$\lim_{m\to\infty} b_m = b.$$

Для каждого из таких ненулевых рациональных чисел b_m и для любых действительных значений числа a теорема

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0\} = \omega/|b| - a/b + 1/2$$

уже доказана. Поэтому

$$Q\{a + b_0n \mid n \in N_0\} = \omega/|b_0| - a/b_0 + 1/2,$$

$$Q\{a + b_1n \mid n \in N_0\} = \omega/|b_1| - a/b_1 + 1/2,$$

$$Q\{a + b_2n \mid n \in N_0\} = \omega/|b_2| - a/b_2 + 1/2,$$

$$Q\{a + b_3n \mid n \in N_0\} = \omega/|b_3| - a/b_3 + 1/2,$$

$$Q\{a + b_4n \mid n \in N_0\} = \omega/|b_4| - a/b_4 + 1/2,$$

……………………………………………………………

$$Q\{a + b_m n \mid n \in N_0\} = \omega/|b_m| - a/b_m + 1/2,$$

……………………………………………………………

Аксиома непрерывности сверхдействия определения сверхколичества, или аксиома перестановочности (коммутативности) предельного перехода и сверхдействия определения сверхколичества, если здесь устремить неотрицательное целое число m к плюс бесконечности, ведёт теперь уже для любого ненулевого иррационального, в частности трансцендентного, значения числа b к следующему итогу:

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0\} = Q\{a + (\lim_{m\to\infty} b_m)n \mid n \in N_0\} =$$

$$\lim_{m\to\infty} Q\{a + b_m n \mid n \in N_0\} =$$

$$\lim_{m\to\infty} (\omega/|b_m| - a/b_m + 1/2) = \omega/|(\lim_{m\to\infty} b_m)| - a/(\lim_{m\to\infty} b_m) + 1/2$$
$$= \omega/|b| - a/b + 1/2,$$

что и требовалось доказать.

Тем самым полностью завершено доказательство теоремы, утверждающей, что сверхколичество всех элементов однонаправленной счётной арифметической прогрессии a + bn, где a – произвольное действительное число, b – произвольное ненулевое действительное число, n пробегает всю счётную последовательность неотрицательных целых чисел в порядке возрастания, есть

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}\} =$$
$$\omega/|b| - a/b + 1/2.$$

Замечание. Эта доказанная теорема позволяет доказать подобные теоремы с ограничениями множества всех

неотрицательных целых чисел множеством всех непременно положительных целых чисел или этим же множеством, расширенным посредством добавления нуля в количестве 1/2.

Теорема. Сверхколичество всех элементов однонаправленной счётной арифметической прогрессии a + bn, где a – произвольное действительное число, b – произвольное ненулевое действительное число, n пробегает всю счётную последовательность положительных целых чисел в порядке возрастания, есть

$$Q\{a + bn \mid n \in N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}\} = \omega/|b| - a/b - 1/2.$$

Доказательство.

Выделение нуля из множества

$$N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

всех неотрицательных целых чисел ведёт к разбиению этого множества на множество N всех непременно положительных целых чисел и на одноэлементное множество, состоящее из одного лишь нуля:

$$N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, ... \} = N \cup \{0\} = \{1, 2, 3, 4, ... \} \cup \{0\}.$$

Поскольку b – произвольное именно ненулевое действительное число, то это разбиение влечёт соответствующее разбиение однонаправленной счётной арифметической прогрессии в предыдущей теореме для множества всех неотрицательных целых чисел:

$$\{a + bn \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ... \}\} =$$
$$\{a + bn \mid n \in N = \{1, 2, 3, 4, ... \}\} \cup \{a + bn \mid n = 0\} =$$
$$\{a + bn \mid n \in N = \{1, 2, 3, 4, ... \}\} \cup \{a\}.$$

Поэтому по аксиоме слагаемости (аддитивности) сверхколичества Q всех элементов множества при его разбиении

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}\} =$$
$$Q\{a + bn \mid n \in N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}\} + Q\{a\} =$$
$$Q\{a + bn \mid n \in N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}\} + 1.$$

Теперь предыдущая теорема для множества всех неотрицательных целых чисел даёт

$$Q\{a + bn \mid n \in N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}\} =$$
$$Q\{a + bn \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}\} - 1 =$$
$$\omega/|b| - a/b + 1/2 - 1 = \omega/|b| - a/b - 1/2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Сверхколичество всех элементов однонаправленной счётной арифметической прогрессии a + bn, где a – произвольное действительное число, b – произвольное ненулевое действительное число, n пробегает всю расширенную посредством добавления нуля в количестве 1/2 счётную последовательность положительных целых чисел в порядке возрастания, есть

$$Q\{a + bn \mid n \in D =^\circ \{_{1/2}0, 1, 2, 3, 4, \dots\}^\circ\} = \omega/|b| - a/b.$$

Доказательство.

Выделение нуля в количестве 1/2 из квантимножества (количественного множества)

$$D =^\circ \{_{1/2}0, 1, 2, 3, 4, \dots\}^\circ$$

ведёт к разбиению этого квантимножества (количественного множества) на множество N всех

непременно положительных целых чисел и на одноэлементное квантимножество (количественное множество), состоящее из одного лишь нуля в количестве 1/2:

$$D =^\circ \{_{1/2}0, 1, 2, 3, 4, \ldots \}^\circ =^\circ N +^\circ \{_{1/2}0\}^\circ =^\circ$$
$$\{1, 2, 3, 4, \ldots \} +^\circ \{_{1/2}0\}^\circ.$$

Поскольку b – произвольное именно ненулевое действительное число, то это разбиение влечёт соответствующее разбиение однонаправленной счётной арифметической прогрессии в этой теореме:

$$\{a + bn \mid n \in D = {}^\circ\{_{1/2}0, 1, 2, 3, 4, \ldots \}\}^\circ =^\circ$$
$$\{a + bn \mid n \in N = \{1, 2, 3, 4, \ldots \}\} +^\circ \{a + bn \mid n = {}_{1/2}0\}^\circ =^\circ$$
$$\{a + bn \mid n \in N = \{1, 2, 3, 4, \ldots \}\} +^\circ \{_{1/2}a\}^\circ.$$

Поэтому по аксиоме слагаемости (аддитивности) сверхколичества Q всех элементов квантимножества (количественного множества) при его разбиении

$$Q\{a + bn \mid n \in D =^\circ \{_{1/2}0, 1, 2, 3, 4, ... \}\}^\circ =$$
$$Q\{a + bn \mid n \in N = \{1, 2, 3, 4, ... \}\} + Q\{_{1/2}a\} =$$
$$Q\{a + bn \mid n \in N = \{1, 2, 3, 4, ... \}\} + 1/2.$$

Теперь предыдущая теорема для множества всех положительных целых чисел даёт

$$Q\{a + bn \mid n \in D =^\circ \{_{1/2}0, 1, 2, 3, 4, ... \}\}^\circ =$$
$$Q\{a + bn \mid n \in N = \{1, 2, 3, 4, ... \}\} + Q\{_{1/2}a\} =$$
$$Q\{a + bn \mid n \in N = \{1, 2, 3, 4, ... \}\} + 1/2 =$$
$$\omega/|b| - a/b - 1/2 + 1/2 = \omega/|b| - a/b,$$

что и требовалось доказать.

Определение. Двусторонняя (двунаправленная, обоюдонаправленная) счётная арифметическая прогрессия есть упорядоченное множество вида

$$\{a + bz \mid z \in Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}\},$$

где a – произвольное действительное число, b – произвольное ненулевое действительное число, z пробегает в порядке возрастания всю счётную последовательность Z целых чисел, имеющую сверхколичество Q всех элементов, точно измеряемое сверхчислом 2ω, как эталонное множество счётной мощности $\aleph_0$:

$$Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\},$$

$$Q(Z) = Q\{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\} = 2\omega.$$

Теорема. Сверхколичество Q всех элементов двусторонней (двунаправленной, обоюдонаправленной) счётной арифметической прогрессии вида

$$\{a + bz \mid z \in Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}\},$$

где a – произвольное действительное число, b – произвольное ненулевое действительное число, z пробегает в порядке возрастания всю счётную последовательность Z целых чисел, имеющую сверхколичество Q всех элементов, точно измеряемое сверхчислом 2ω, как эталонное множество счётной мощности $\aleph_0$, есть 2ω/|b| независимо от произвольного действительного числа a:

$$Q\{a + bz \mid z \in Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}\} = 2\omega/|b|.$$

Доказательство.

Рассмотрим разбиение

$$Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\} =$$

$$\{..., -4, -3, -2, -1\} \cup \{0, 1, 2, 3, 4, ...\} =$$

$$Z_{<0} \cup Z_{\geq 0} = Z_{<0} \cup N_0$$

множества всех целых чисел

$$Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

на множество всех отрицательных целых чисел

$$Z_{<0} = \{..., -4, -3, -2, -1\}$$

и на множество всех неотрицательных целых чисел

$$Z_{\geq 0} = N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Ввиду отличия от нуля разности b двусторонней (двунаправленной, обоюдонаправленной) счётной арифметической прогрессии вида

$$\{a + bz \mid z \in Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}\}$$

этому разбиению непременно взаимно однозначно соответствует разбиение

$$\{a + bz \mid z \in Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}\} =$$
$$\{a + bz \mid z \in Z_{<0} = \{..., -4, -3, -2, -1\}\} \cup$$
$$\{a + bz \mid z \in Z_{\geq 0} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}\} =$$
$$\{a + (- b)z \mid z \in Z_{>0} = N = \{..., 4, 3, 2, 1\}\} \cup$$
$$\{a + bn \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}\}.$$

Поэтому по аксиоме слагаемости (аддитивности) сверхколичества Q всех элементов множества при его разбиении

$$Q\{a + bz \mid z \in Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}\} =$$
$$Q\{a + bz \mid z \in Z_{<0} = \{..., -4, -3, -2, -1\}\} +$$
$$Q\{a + bz \mid z \in Z_{\geq 0} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}\} =$$
$$Q\{a + (- b)z \mid z \in Z_{>0} = N = \{..., 4, 3, 2, 1\}\} +$$

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}\}.$$

Теперь предыдущие теоремы для множества всех положительных целых чисел и для множества всех неотрицательных целых чисел дают

$$Q\{a + bz \mid z \in Z = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}\} =$$
$$Q\{a + (- b)z \mid z \in Z_{>0} = N = \{..., 4, 3, 2, 1\}\} +$$
$$Q\{a + bn \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}\} =$$
$$Q\{a + (- b)z \mid z \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}\} +$$
$$Q\{a + bn \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}\} =$$
$$\omega/|- b| - a/(- b) - 1/2 + \omega/|b| - a/b + 1/2 = 2\omega/|b|,$$

что и требовалось доказать.

Следствия теоремы, утверждающей, что сверхколичество всех элементов однонаправленной счётной арифметической прогрессии a + bn, где a – произвольное действительное

число, b – произвольное ненулевое действительное число, n пробегает всю счётную последовательность неотрицательных целых чисел в порядке возрастания, есть

$$Q\{a + bn \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ... \}\} =$$
$$\omega/|b| - a/b + 1/2,$$

для некоторых арифметических прогрессий с действительными a, b ≠ 0:

$$Q\{1, 3, 5, ...\} = Q\{1 + 2n \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ... \}\} =$$
$$\omega/|2| - 1/2 + 1/2 = \omega/2;$$
$$Q\{2, 4, 6, ...\} = Q\{2 + 2n \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ... \}\} =$$
$$\omega/|2| - 2/2 + 1/2 = \omega/2 - 1/2;$$
$$Q\{1, 4, 7, ...\} = Q\{1 + 3n \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ... \}\} =$$
$$\omega/|3| - 1/3 + 1/2 = \omega/3 + 1/6;$$

$$Q\{2, 5, 8, ...\} = Q\{2 + 3n \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ... \}\} = \omega/|3| - 2/3 + 1/2 = \omega/3 - 1/6;$$

$$Q\{3, 6, 9, ...\} = Q\{3 + 3n \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ... \}\} = \omega/|3| - 3/3 + 1/2 = \omega/3 - 1/2;$$

$$Q(H^-) = Q\{-1/2, -3/2, -5/2, ...\} = Q\{-1/2 + (-1)n \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ... \}\} = \omega/|-1| - (-1/2)/(-1) + 1/2 = \omega;$$

$$Q(H^+) = Q\{1/2, 3/2, 5/2, ...\} = Q\{1/2 + 1n \mid n \in N_0 = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, ... \}\} = \omega/|1| - (1/2)/1 + 1/2 = \omega.$$

Теорема. Сверхколичество Q всех элементов симметричного полуотрезка-полуинтервала

$$|a, b| =^\circ {}_{1/2}a +^\circ]a, b[+^\circ {}_{1/2}b =^\circ {}_{1/2}a +^\circ (a, b) +^\circ {}_{1/2}b,$$

являющегося промежутком от a до b с произвольными действительными числами a и b ≥ a, причём все промежуточные между ними числа имеют единичные

количества, а оба конца промежутка, то есть a и b, имеют половинные количества, сумма которых равна как раз единице, равно

$$Q|a, b| = (b - a)\Omega.$$

Доказательство.

Вначале докажем теорему для произвольных b = a.

По аксиоме алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с выполнением всегда для сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения

$$|a, b| =^\circ {}_{1/2}a +^\circ]a, b[+^\circ {}_{1/2}b =^\circ -^\circ {}_{1/2}a +^\circ [a, b] -^\circ {}_{1/2}b,$$

$$|a, a| =^\circ {}_{1/2}a +^\circ]a, a[+^\circ {}_{1/2}a =^\circ -^\circ {}_{1/2}a +^\circ [a, a] -^\circ {}_{1/2}a =^\circ$$

$$-^\circ{}_{1/2}a +^\circ{}_{1}a -^\circ{}_{1/2}a =^\circ{}_{1-1/2-1/2}a =^\circ{}_{0}a,$$

$$Q|a, b| = Q|a, a| = 0 = (a - a)\Omega = (b - a)\Omega,$$

теорема для произвольных $b = a$ доказана, и впредь можно ограничиться случаем $b > a$.

Далее докажем теорему для $a = 0$ и произвольного положительного целого числа $b = n \in N = \{1, 2, 3, ...\}$.

Достаточно осуществить именно разбиение

$$|a, b| =^\circ |0, n| =^\circ |0, 1| +^\circ |1, 2| +^\circ |2, 3| +^\circ ... +^\circ |n - 1, n|.$$

Теперь аксиома слагаемости (аддитивности) функции определения сверхколичества всех элементов множества даёт

$$Q|a, b| = Q|0, n| = Q(|0, 1| +^\circ |1, 2| +^\circ |2, 3| +^\circ ... +^\circ |n - 1, n|) =$$

$$Q|0, 1| + Q|1, 2| + Q|2, 3| + ... + Q|n - 1, n| = nQ|0, 1| = n\Omega =$$

$$(n - 0)\Omega = (b - a)\Omega.$$

Тем самым теорема для $a = 0$ и произвольного положительного целого числа $b = n \in N = \{1, 2, 3, ...\}$ доказана.

Если положительное значение числа b рационально, то представимо в виде

$$b = p/q$$

несократимой дроби p/q, в которой числитель p и знаменатель q являются положительными целыми числами.

Умножение этой несократимой дроби p/q дроби на её положительный целый знаменатель q даёт именно положительное целое число p. А для положительных целых значений числа b теорема

$$Q|a, b| = (b - a)\Omega$$

доказана. Поэтому, чтобы ею воспользоваться, достаточно осуществить именно разбиение

$$|a, b| =^\circ |0, p| =^\circ$$

$$|0, p/q| +^\circ |p/q, 2p/q| +^\circ |2p/q, 3p/q| +^\circ \ldots +^\circ |(q - 1)p/q, qp/q|.$$

Теперь аксиома слагаемости (аддитивности) функции определения сверхколичества всех элементов множества даёт

$$Q|a, b| = Q|0, p| = Q(|0, p/q| +^\circ |p/q, 2p/q| +^\circ |2p/q, 3p/q| +^\circ \ldots +^\circ |(q - 1)p/q, qp/q|) =$$

$$Q|0, p/q| + Q|p/q, 2p/q| + Q|2p/q, 3p/q| + \ldots + Q|(q - 1)p/q, qp/q|)$$

$$= qQ(|0, p/q| = (p - 0)\Omega,$$

$$Q(|0, p/q| = (p/q)\Omega.$$

Тем самым теорема для a = 0 и произвольного положительного рационального числа b доказана.

Если положительное значение числа b иррационально, то является пределом бесконечного множества последовательностей именно положительных рациональных чисел, принадлежащих некоторой настолько малой окрестности этого именно положительного иррационального числа, что эта окрестность не содержит нуля. Одной из таких последовательностей является лежащая в любой из таких окрестностей подпоследовательность последовательности десятичных приближений этого положительного иррационального числа b.

Рассмотрим произвольную именно такую последовательность непременно положительных рациональных чисел:

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \dots , b_m, \dots , m \in N = \{1, 2, 3, 4, \dots \},$$

$$\lim_{m\to\infty} b_m = b.$$

Для каждого из таких положительных рациональных чисел b_m и для $a = 0$ теорема

$$Q|a, b| = (b - a)\Omega$$

уже доказана. Поэтому

$$Q|0, b_m| = (b_m - 0)\Omega, m \in N = \{1, 2, 3, 4, \dots \}.$$

Аксиома непрерывности сверхдействия определения сверхколичества, или аксиома перестановочности (коммутативности) предельного перехода и сверхдействия определения сверхколичества, если здесь устремить положительное целое число m к плюс бесконечности, ведёт теперь уже для любого положительного иррационального, в

частности трансцендентного, значения числа b к следующему итогу:

$$Q|0, b| = Q|0, \lim_{m\to\infty} b_m| = \lim_{m\to\infty} Q|0, b_m| = \lim_{m\to\infty} (b_m - 0)\Omega = (b - 0)\Omega,$$

Тем самым теорема для a = 0 и произвольного положительного действительного числа b доказана.

Остаётся отказаться от ограничения условием a = 0 и считать a и b > a произвольными действительными числами.

Аксиома неизменности (сохранения, инвариантности) сверхколичества всех элементов ограниченного квантимножества (количественного множества) при его изометрическом преобразовании (то есть сохраняющем все количества всех элементов квантимножества

(количественного множества) и все попарные расстояния элементов квантимножества (количественного множества), в совокупности ввиду его ограниченности ограниченные сверху) при являющемся изометрическим преобразованием вычитании a из каждого элемента ограниченного квантимножества (количественного множества) |a, b| даёт

$$Q|a, b| = Q|0, b - a| = (b - a - 0)\Omega = (b - a)\Omega.$$

Тем самым полностью завершено доказательство теоремы, утверждающей, что сверхколичество Q всех элементов симметричного полуотрезка-полуинтервала

$$|a, b| =^\circ {}_{1/2}a +^\circ]a, b[+^\circ {}_{1/2}b =^\circ {}_{1/2}a +^\circ (a, b) +^\circ {}_{1/2}b,$$

являющегося промежутком от a до b с произвольными действительными числами a и b $\geq$ a, причём все промежуточные между ними числа имеют единичные

количества, а оба конца промежутка, то есть a и b, имеют половинные количества, сумма которых равна как раз единице, равно

$$Q|a, b| = (b - a)\Omega.$$

Замечание. Эта доказанная теорема позволяет доказать подобные теоремы для всех конечных и бесконечных промежутков действительной числовой прямой и для неё целиком, а также для их степеней на основе прямого произведения.

Теорема. Сверхколичество Q всех элементов отрезка

$$[a, b]$$

от a до b с произвольными действительными числами a и b $\geq$ a равно

$$Q[a, b] = (b - a)\Omega + 1.$$

Доказательство.

$$|a, b| =° {}_{1/2}a +°]a, b[+° {}_{1/2}b =° {}_{1/2}a +° (a, b) +° {}_{1/2}b,$$

$$[a, b] =° {}_{1}a +°]a, b[+° {}_{1}b =° {}_{1}a +° (a, b) +° {}_{1}b,$$

$$[a, b] =° {}_{1/2}a +° |a, b| +° {}_{1/2}b.$$

По аксиоме алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с выполнением всегда для сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения

$$Q[a, b] = Q({}_{1/2}a +° |a, b| +° {}_{1/2}b) = 1/2 + Q|a, b| + 1/2 =$$

$$(b - a)\Omega + 1,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Сверхколичество Q всех элементов интервала

$$]a, b[\,=^\circ (a, b)$$

от a до b с произвольными действительными числами a и b ≥ a равно

$$Q[a, b] = (b - a)\Omega - 1.$$

Доказательство.

$$|a, b| =^\circ {}_{1/2}a +^\circ]a, b[+^\circ {}_{1/2}b =^\circ {}_{1/2}a +^\circ (a, b) +^\circ {}_{1/2}b,$$

$$]a, b[\,=^\circ -^\circ {}_{1/2}a +^\circ |a, b| -^\circ {}_{1/2}b.$$

По аксиоме алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с выполнением всегда для сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения

$$Q]a, b[= Q(-^\circ {}_{1/2}a +^\circ |a, b| -^\circ {}_{1/2}b) = - 1/2 + Q|a, b| - 1/2 = (b - a)\Omega - 1,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Сверхколичество Q всех элементов полуотрезка-полуинтервала

$$[a, b[= [a, b)$$

от a до b с произвольными действительными числами a и b ≥ a равно

$$Q[a, b[= (b - a)\Omega.$$

Доказательство.

$$|a, b| =^\circ {}_{1/2}a +^\circ]a, b[+^\circ {}_{1/2}b =^\circ {}_{1/2}a +^\circ (a, b) +^\circ {}_{1/2}b,$$

$$[a, b[=^\circ {}_{1}a +^\circ]a, b[=^\circ {}_{1}a +^\circ (a, b),$$

$$[a, b[=^\circ {}_{1/2}a +^\circ |a, b| -^\circ {}_{1/2}b.$$

По аксиоме алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с выполнением всегда для сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения

$$Q[a, b[= Q({}_{1/2}a +^\circ |a, b| -^\circ {}_{1/2}b) = 1/2 + Q|a, b| - 1/2 = (b - a)\Omega,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Сверхколичество Q всех элементов полуинтервала-полуотрезка

$$]a, b] = (a, b]$$

от a до b с произвольными действительными числами a и b $\geq$ a равно

$$Q]a, b] = (b - a)\Omega.$$

Доказательство.

$$|a, b| =^\circ {}_{1/2}a +^\circ]a, b[+^\circ {}_{1/2}b =^\circ {}_{1/2}a +^\circ (a, b) +^\circ {}_{1/2}b,$$

$$]a, b] =^\circ]a, b[+^\circ {}_{1}b =^\circ (a, b) +^\circ {}_{1}b,$$

$$]a, b] =^\circ -^\circ {}_{1/2}a +^\circ |a, b| +^\circ {}_{1/2}b.$$

По аксиоме алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с выполнением всегда для сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения

$$Q]a, b] = Q(-^\circ {}_{1/2}a +^\circ |a, b| +^\circ {}_{1/2}b) = - 1/2 + Q|a, b| + 1/2 =$$

$$(b - a)\Omega,$$

что и требовалось доказать.

Обозначение. В бесконечных и полубесконечных промежутках наряду с неправомерным привычным использованием в ролях актуальных бесконечностей общепринятых символов $-\infty$ и $+\infty$ куч различных потенциальных бесконечностей, не принадлежащих этим промежуткам, используются конкретные именно актуальные бесконечности $-\omega$ и $+\omega$ соответственно, причём принадлежащие этим промежуткам ровно наполовину, то есть с количествами 1/2, что оправдывается обобщением на бесконечные и полубесконечные промежутки формул теорем для соответствующих конечных промежутков.

Теорема. Сверхколичество Q всех элементов действительной числовой прямой

$$R =]-\infty, +\infty[= (-\infty, +\infty) =^\circ |-\omega, +\omega|$$

равно

$$Q(R) = Q]-\infty, +\infty[= Q|-\omega, +\omega| = 2\omega\Omega.$$

Доказательство.

$$R =]-\infty, +\infty[= (-\infty, +\infty) =^\circ |-\omega, +\omega| =^\circ$$

$$\ldots +^\circ |-3, -2| +^\circ |-2, -1| +^\circ |-1, 0| +^\circ |0, 1| +^\circ |1, 2| +^\circ |2, 3| +^\circ \ldots .$$

Сверхколичество всех слагаемых в правой части равно сверхколичеству всех целых чисел

$$Q(Z) = Q\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} = 2\omega.$$

По аксиоме алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с выполнением всегда для сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения

$$Q(R) = Q]-\infty, +\infty[= Q|-\omega, +\omega| = Q(\ldots +^\circ |-3, -2| +^\circ |-2, -1| +^\circ |-1, 0| +^\circ |0, 1| +^\circ |1, 2| +^\circ |2, 3| +^\circ \ldots) = \ldots + Q|-3, -2| + Q|-2, -1| + Q|-1, 0| + Q|0, 1| + Q|1, 2| + Q|2, 3| + \ldots = Q(Z)Q|0, 1| = 2\omega\Omega,$$

поскольку по аксиоме неизменности (сохранения, инвариантности) сверхколичества всех элементов ограниченного квантимножества (количественного множества) при его изометрическом преобразовании (то есть сохраняющем все количества всех элементов квантимножества (количественного множества) и все попарные расстояния элементов квантимножества (количественного множества), в совокупности ввиду его ограниченности ограниченные сверху) при являющемся изометрическим преобразованием прибавлении соответствующих целых чисел к каждому элементу

ограниченного квантимножества (количественного множества) |0, 1| даёт

$$= ... = Q|-3, -2| = Q|-2, -1| = Q|-1, 0| = Q|0, 1| = Q|1, 2| = Q|2, 3|$$

$$= ... = Q|0, 1| = \Omega.$$

Тем самым теорема доказана.

Теорема. Сверхколичество

$$Q]-\infty, 0| = Q(-\infty, 0| = Q|-\omega, 0| = \omega\Omega$$

всех элементов неположительной действительной числовой полупрямой

$$]-\infty, 0| =^\circ (-\infty, 0| =^\circ |-\omega, 0|$$

и сверхколичество

$$Q|0, +\infty[= Q|0, +\infty) = Q|0, \omega| = \omega\Omega$$

всех элементов неотрицательной действительной числовой полупрямой

$$|0, +\infty[\ = |0, +\infty) =^\circ |0, \omega|$$

равны половине сверхколичества

$$Q(R) = Q]-\infty, +\infty[\ = Q|-\omega, +\omega| = 2\omega\Omega$$

всех элементов действительной числовой прямой

$$R =]-\infty, +\infty[\ = (-\infty, +\infty) =^\circ |-\omega, +\omega|.$$

Доказательство.

Во-первых, действительная числовая прямая

$$R =]-\infty, +\infty[\ = (-\infty, +\infty) =^\circ |-\omega, +\omega| =^\circ |-\omega, 0| +^\circ |0, \omega|$$

есть количественная сумма неположительной действительной числовой полупрямой

$$]-\infty, 0| =^\circ (-\infty, 0| =^\circ |-\omega, 0|$$

и неотрицательной действительной числовой полупрямой

$$|0, +\infty[\ = |0, +\infty) =^\circ |0, \omega|.$$

Во-вторых, имеет место равенство

$$Q|-\omega, 0| = Q|0, \omega|$$

сверхколичества

$$Q]-\infty, 0| = Q(-\infty, 0| = Q|-\omega, 0| = \omega\Omega$$

всех элементов неположительной действительной числовой полупрямой

$$]-\infty, 0| =^\circ (-\infty, 0| =^\circ |-\omega, 0|$$

и сверхколичества

$$Q|0, +\infty[= Q|0, +\infty) = Q|0, \omega| = \omega\Omega$$

всех элементов неотрицательной действительной числовой полупрямой

$$|0, +\infty[= |0, +\infty) =^\circ |0, \omega|$$

по аксиоме неизменности (сохранения, инвариантности) сверхколичества всех элементов множества при

нормировании некоторых его элементов, в данном случае сверхколичества

$$Q]-\infty, 0| = Q(-\infty, 0| = Q|-\omega, 0| = \omega\Omega$$

всех элементов неположительной действительной числовой полупрямой

$$]-\infty, 0| =^\circ (-\infty, 0| =^\circ |-\omega, 0|$$

при нормировании всех его элементов.

Тем самым теорема доказана.

Теорема. Сверхколичество Q всех элементов полубесконечного слева симметричного полуотрезка-полуинтервала

$$]-\infty, b| =^\circ (-\infty, b| =^\circ]-\infty, b[+^\circ {}_{1/2}b =^\circ (-\infty, b) +^\circ {}_{1/2}b =^\circ |-\omega, b|$$

с произвольным действительным числом b равно

$$Q]-\infty, b| = Q(-\infty, b| = Q]-\infty, b[+ Q({}_{1/2}b) =^\circ Q(-\infty, b) + Q({}_{1/2}b) = Q|-\omega, b| = (\omega + b)\Omega.$$

<u>Доказательство</u>.

<u>Замечание</u>. Эта теорема является обобщением получающейся при b = 0 первой части доказанной предыдущей теоремы о <u>сверхколичестве</u>

$$Q]-\infty, 0| = Q(-\infty, 0| = Q|-\omega, 0| = \omega\Omega$$

<u>всех элементов неположительной действительной числовой полупрямой</u>

$$]-\infty, 0| =^\circ (-\infty, 0| =^\circ |-\omega, 0|.$$

Поэтому при b = 0 настоящая <u>теорема доказана</u>.

Если b > 0, то

$$|-\omega, b| =^\circ |-\omega, 0| +^\circ |0, b|.$$

По аксиоме алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с выполнением всегда для сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения

$$Q|-\omega, b| = Q(|-\omega, 0| +^\circ |0, b|) = Q|-\omega, 0| + Q|0, b| = \omega\Omega + (b - 0)\Omega = (\omega + b)\Omega.$$

Поэтому при $b > 0$ настоящая теорема доказана.

Если $b < 0$, то

$$|-\omega, b| =^\circ |-\omega, 0| -^\circ |b, 0|.$$

По аксиоме алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с выполнением всегда для

сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения

$$Q|-\omega, b| = Q(|-\omega, 0| -^\circ |b, 0|) = Q|-\omega, 0| - Q|b, 0| = \omega\Omega - (0 - b)\Omega = (\omega + b)\Omega.$$

Поэтому при b < 0 настоящая теорема доказана.

Тем самым настоящая теорема доказана полностью.

Теорема. Сверхколичество Q всех элементов полубесконечного справа симметричного полуотрезка-полуинтервала

$$|a, +\infty[\ =^\circ |a, +\infty) =^\circ {}_{1/2}a +^\circ]a, +\infty[\ =^\circ {}_{1/2}a +^\circ (a, +\infty) =^\circ |a, +\omega|$$

с произвольным действительным числом a равно

$$Q|a, +\infty[\ = Q|a, +\infty) = Q({}_{1/2}a) + Q]a, +\infty[\ =^\circ Q({}_{1/2}a) + Q(a, +\infty) = Q|a, +\omega| = (\omega - a)\Omega.$$

Доказательство.

Замечание. Эта теорема является обобщением получающейся при a = 0 второй части доказанной передпредыдущей теоремы о сверхколичестве

$$Q|0, +\infty[= Q|0, +\infty) = Q|0, \omega| = \omega\Omega$$

всех элементов неотрицательной действительной числовой полупрямой

$$|0, +\infty[= |0, +\infty) =^\circ |0, \omega|.$$

Поэтому при a = 0 настоящая теорема доказана.

Если a < 0, то

$$|a, +\omega| =^\circ |a, 0| +^\circ |0, +\omega|.$$

По аксиоме алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с выполнением всегда для

сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения

$$Q|a, +\omega| = Q(|a, 0| +^\circ |0, +\omega|) = Q|a, 0| + Q|0, +\omega| =$$
$$(0 - a)\Omega + \omega\Omega = (\omega - a)\Omega.$$

Поэтому при a < 0 настоящая теорема доказана.

Если a > 0, то

$$|a, +\omega| =^\circ |0, +\omega| -^\circ |0, a|.$$

По аксиоме алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с выполнением всегда для сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения

$$Q|a, +\omega| = Q(|0, +\omega| -^\circ |0, a|) = Q|0, +\omega| - Q|0, a| = \omega\Omega - (a - 0)\Omega = (\omega - a)\Omega.$$

Поэтому при a > 0 настоящая теорема доказана.

Тем самым настоящая теорема доказана полностью.

Теорема. Сверхколичество Q всех элементов полубесконечного слева интервала

$$]-\infty, b[= (-\infty, b) =^\circ |-\omega, b| -^\circ {}_{1/2}b$$

с произвольным действительным числом b равно

$$Q]-\infty, b[= Q(-\infty, b) = Q|-\omega, b| - Q({}_{1/2}b) = (\omega + b)\Omega - 1/2.$$

Доказательство.

Эта теорема является следствием доказанной теоремы о сверхколичестве

$$Q]-\infty, b| = Q(-\infty, b| = Q]-\infty, b[+ Q({}_{1/2}b) =^\circ Q(-\infty, b) + Q({}_{1/2}b) = Q|-\omega, b| = (\omega + b)\Omega$$

всех элементов полубесконечного слева симметричного полуотрезка-полуинтервала

$$]-\infty, b| =^\circ (-\infty, b| =^\circ]-\infty, b[+^\circ {}_{1/2}b =^\circ (-\infty, b) +^\circ {}_{1/2}b =^\circ |-\omega, b|$$

с произвольным действительным числом b.

$$]-\infty, b[= (-\infty, b) =^\circ |-\omega, b| -^\circ {}_{1/2}b.$$

Поэтому по аксиоме алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с выполнением всегда для сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения

$$Q]-\infty, b[= Q(-\infty, b) = Q(|-\omega, b| -^\circ {}_{1/2}b) = Q|-\omega, b| - Q({}_{1/2}b) = (\omega + b)\Omega - 1/2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Сверхколичество Q всех элементов полубесконечного слева полуинтервала-полуотрезка

$$]-\infty, b] = (-\infty, b] =^\circ |-\omega, b| +^\circ {}_{1/2}b$$

с произвольным действительным числом b равно

$$Q]-\infty, b] = Q(-\infty, b] = Q|-\omega, b| + Q({}_{1/2}b) = (\omega + b)\Omega + 1/2.$$

Доказательство.

Эта теорема является следствием доказанной теоремы о сверхколичестве

$$Q]-\infty, b| = Q(-\infty, b| = Q]-\infty, b[+ Q({}_{1/2}b) =^\circ Q(-\infty, b) + Q({}_{1/2}b) = Q|-\omega, b| = (\omega + b)\Omega$$

всех элементов полубесконечного слева симметричного полуотрезка-полуинтервала

$$]-\infty, b| =^\circ (-\infty, b| =^\circ]-\infty, b[+^\circ {}_{1/2}b =^\circ (-\infty, b) +^\circ {}_{1/2}b =^\circ |-\omega, b|$$

с произвольным действительным числом b.

$$]-\infty, b] = (-\infty, b] =^\circ |-\omega, b| +^\circ {}_{1/2}b.$$

Поэтому по аксиоме алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с выполнением всегда для сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения

$$Q]-\infty, b] = Q(-\infty, b] = Q(|-\omega, b| +^\circ {}_{1/2}b) = Q|-\omega, b| + Q({}_{1/2}b) = (\omega + b)\Omega + 1/2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Сверхколичество Q всех элементов полубесконечного справа интервала

$$]a, +\infty[=^\circ (a, +\infty) =^\circ |a, +\omega| -^\circ {}_{1/2}a$$

с произвольным действительным числом a равно

$$Q]a, +\infty[= Q(a, +\infty) = Q|a, +\omega| - Q({}_{1/2}a) = (\omega - a)\Omega - 1/2.$$

Доказательство.

Эта теорема является следствием доказанной теоремы о сверхколичестве

$$Q|a, +\infty[= Q|a, +\infty) = Q({}_{1/2}a) + Q]a, +\infty[=^\circ Q({}_{1/2}a) + Q(a, +\infty) = Q|a, +\omega| = (\omega - a)\Omega$$

всех элементов полубесконечного слева симметричного полуотрезка-полуинтервала

$$|a, +\infty[=^\circ |a, +\infty) =^\circ {}_{1/2}a +^\circ]a, +\infty[=^\circ {}_{1/2}a +^\circ (a, +\infty) =^\circ |a, +\omega|$$

с произвольным действительным числом a.

$$]a, +\infty[=^\circ (a, +\infty) =^\circ |a, +\omega| -^\circ {}_{1/2}a.$$

Поэтому по аксиоме алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с

выполнением всегда для сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения

$$Q]a, +\infty[= Q(a, +\infty) = Q(|a, +\omega| -^\circ {}_{1/2}a) = Q|a, +\omega| - Q({}_{1/2}a) = (\omega - a)\Omega - 1/2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Сверхколичество Q всех элементов полубесконечного справа полуотрезка-полуинтервала

$$[a, +\infty[=^\circ [a, +\infty) =^\circ |a, +\omega| +^\circ {}_{1/2}a$$

с произвольным действительным числом a равно

$$Q[a, +\infty[= Q[a, +\infty) = Q|a, +\omega| - Q({}_{1/2}a) = (\omega - a)\Omega + 1/2.$$

Доказательство.

Эта теорема является следствием доказанной теоремы о сверхколичестве

$$Q|a, +\infty[= Q|a, +\infty) = Q({}_{1/2}a) + Q]a, +\infty[=^\circ Q({}_{1/2}a) + Q(a, +\infty) = Q|a, +\omega| = (\omega - a)\Omega$$

всех элементов полубесконечного слева симметричного полуотрезка-полуинтервала

$$|a, +\infty[=^\circ |a, +\infty) =^\circ {}_{1/2}a +^\circ]a, +\infty[=^\circ {}_{1/2}a +^\circ (a, +\infty) =^\circ |a, +\omega|$$

с произвольным действительным числом a.

$$[a, +\infty[=^\circ [a, +\infty) =^\circ |a, +\omega| +^\circ {}_{1/2}a.$$

Поэтому по аксиоме алгебраической слагаемости (аддитивности) сверхколичества всех элементов квантимножества (количественного множества) с выполнением всегда для сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) алгебраического сложения

$$Q[a, +\infty[= Q[a, +\infty) = Q(|a, +\omega| +^\circ {}_{1/2}a) = Q|a, +\omega| + Q({}_{1/2}a) =$$

$$(\omega - a)\Omega + 1/2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Сверхколичество всех элементов прямоугольного параллелепипеда произвольной положительной целочисленной размерности с рёбрами, являющимися произвольными конечными, полубесконечными или бесконечными промежутками действительной числовой прямой, есть произведение сверхколичеств всех элементов всех рёбер параллелепипеда.

Доказательство.

Эта теорема является следствием аксиомы умножаемости (мультипликативности) сверхколичества всех элементов множества при его представлении декартовым произведением множеств с выполнением всегда для

сверхколичеств законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) умножения, а также закона распределительности (дистрибутивности) умножения относительно сложения:

$$Q(\ldots \times A \times \ldots \times B \times \ldots) = \ldots Q(A) \ldots Q(B) \ldots .$$

Следствие. Сверхколичество всех элементов n-мерного пространства

$$Q(R^n) = Q]-\infty, +\infty[^n = Q|-\omega, +\omega|^n = (2\omega\Omega)^n \ (n \in N = \{1, 2, 3, \ldots\}).$$

Следствие. Сверхколичество всех элементов n-й степени ($n \in N = \{1, 2, 3, \ldots\}$) конечного симметричного полуотрезка-полуинтервала с произвольными действительными числами a и $b \geq a$

$$Q|a, b|^n = (b - a)^n\Omega^n.$$

Следствие. Сверхколичество всех элементов n-й степени ($n \in N = \{1, 2, 3, ...\}$) конечного отрезка с произвольными действительными числами a и $b \geq a$

$$Q[a, b]^n = [(b - a)\Omega + 1]^n.$$

Следствие. Сверхколичество всех элементов n-й степени ($n \in N = \{1, 2, 3, ...\}$) конечного интервала с произвольными действительными числами a и $b \geq a$

$$Q]a, b[^n = [(b - a)\Omega - 1]^n.$$

Следствие. Сверхколичество всех элементов n-й степени ($n \in N = \{1, 2, 3, ...\}$) конечного полуотрезка-полуинтервала с произвольными действительными числами a и $b \geq a$

$$Q[a, b[^n = (b - a)^n\Omega^n.$$

Следствие. Сверхколичество всех элементов n-й степени ($n \in N = \{1, 2, 3, ...\}$) конечного полуинтервала-полуотрезка с произвольными действительными числами a и $b \geq a$

$$Q]a, b]^n = (b - a)^n\Omega^n.$$

Следствие. Сверхколичество всех элементов n-й степени ($n \in N = \{1, 2, 3, ...\}$) полубесконечного слева симметричного полуотрезка-полуинтервала с произвольным действительным числом b

$$Q|-\omega, b|^n = (\omega + b)^n\Omega^n.$$

Следствие. Сверхколичество всех элементов n-й степени ($n \in N = \{1, 2, 3, ...\}$) полубесконечного справа симметричного полуотрезка-полуинтервала с произвольным действительным числом a

$$Q|a, \omega|^n = (\omega - a)^n\Omega^n.$$

Следствие. Сверхколичество всех элементов n-й степени ($n \in N = \{1, 2, 3, ...\}$) полубесконечного слева интервала с произвольным действительным числом b

$$Q]-\infty, b[^n = Q|-\omega, b[^n = [(\omega + b)\Omega - 1/2]^n.$$

Следствие. Сверхколичество всех элементов n-й степени ($n \in N = \{1, 2, 3, ...\}$) полубесконечного слева полуинтервала-полуотрезка с произвольным действительным числом b

$$Q]-\infty, b]^n = Q|-\omega, b]^n = [(\omega + b)\Omega + 1/2]^n.$$

Следствие. Сверхколичество всех элементов n-й степени ($n \in N = \{1, 2, 3, ...\}$) полубесконечного справа интервала с произвольным действительным числом a

$$Q]a, +\infty[^n = Q]a, +\omega|^n = [(\omega - a)\Omega - 1/2]^n.$$

Следствие. Сверхколичество всех элементов n-й степени ($n \in N = \{1, 2, 3, ...\}$) полубесконечного справа полуотрезка-полуинтервала с произвольным действительным числом a

$$Q[a, +\infty[^n = Q[a, +\omega|^n = [(\omega - a)\Omega + 1/2]^n.$$

Определение. Всеобщим количеством нулевого порядка, или всеобщей мерой нулевого порядка, или всеобщей мерой счёта, называется сверхколичество всех элементов квантимножества (количественного множества):

$$Q_0 = Q.$$

Определение. Всеобщим количеством k-го порядка, или всеобщей мерой k-го порядка ($k \in N = \{1, 2, 3, ...\}$), называется сверхколичество всех элементов квантимножества (количественного множества), делённое на Ω^k:

$$Q_k = Q/\Omega^k.$$

Определение. Всеобщей длиной называется всеобщее количество первого порядка, или всеобщая мера первого порядка (k = 1), или сверхколичество всех элементов квантимножества (количественного множества), делённое на Ω:

$$Q_1 = Q/\Omega.$$

Примеры. Для произвольных действительных чисел a и b ≥ a

всеобщая длина симметричного полуотрезка-полуинтервала, полуотрезка-полуинтервала и полуинтервала-полуотрезка

$$Q_1|a, b| = Q_1[a, b[= Q_1]a, b] = b - a,$$

всеобщая длина интервала

$$Q_1]a, b[= b - a - 1/\Omega,$$

всеобщая длина отрезка

$$Q_1[a, b] = b - a + 1/\Omega.$$

Замечание. Тем самым удалось осуществить мечту Бернарда Больцано, выражавшего недовольство как одним из парадоксов бесконечного отсутствием известной меры, чувствительной к добавлению или удалению любого из концов любого промежутка положительный длины.

Определение. Полной чувствительностью называется чувствительность даже к актуально бесконечно малым.

Следствие. Все всеобщие количества и всеобщие меры вместе со всеми сверхколичествами вполне чувствительны.

Теорема. Континуум положительных размерности и меры может целиком состоять из актуально бесконечного

множества актуально бесконечно малых всеобщих частиц и тем самым разбиваться на них.

Доказательство.

Для доказательства этой общей теоремы достаточен частный пример, особенно если он является легко обобщаемым на произвольные размерности и меры в данном случае с единичных размерности и меры при правильном разбиении единичного симметричного полуотрезка-полуинтервала поровну по всеобщему закону сохранения:

$$|0, 1| =^\circ |0, 1/\Omega| +^\circ |1/\Omega, 2/\Omega| +^\circ \ldots +^\circ |(\Omega - 1)/\Omega, 1| =^\circ$$

$$\Sigma^\circ{}_{i=1}{}^{\Omega}|(i - 1)/\Omega, i/\Omega|.$$

Теорема. Континуум положительных размерности и меры принципиально не может именно целиком состоять из одних только точек.

Доказательство.

Каждая точка имеет именно нулевые размерность и меру.

Сложение любого множества нулей принципиально не может дать ничего отличного от нуля.

Тем самым теорема доказана.

Следствие. Множество всех отдельных точек континуума положительных размерности и меры не только существует, но и имеет несчётно бесконечную мощность континуума, однако вносит именно и только нулевой вклад элементов в размерность и меру континуума положительных размерности и меры.

Следствие. Все континуумы положительных размерности и меры непременно являются сверхточечными, сверхэлементарными, сверхмножественными и сверхканторовыми.

Следствие. Открыто явление сверхточечности, сверхэлементарности, сверхмножественности и сверхканторовости.

Определение. Сверхпоследовательностью, или сверхконечной последовательностью, или трансфинитной последовательностью, называется функция порядковых чисел как аргументов:

$$(a_0, a_1, a_2, \dots , a_\omega, a_{\omega+1}, a_{\omega+2}, \dots).$$

Определение. Кратной называется сверхпоследовательность, или сверхконечная

последовательность, или трансфинитная последовательность, занумерованная упорядоченным множеством индексов, мощность которого равна соответствующей кратности:

$$(a_{\dots,i,\dots,j,\dots,k,\dots} | \dots,i,\dots,j,\dots,k,\dots \in \Theta = (0, 1, 2, \dots , \omega, \omega+1, \omega+2, \dots , \omega_1, \omega_1+1, \omega_1+2, \dots)).$$

Определение. Сверхрядом, или сверхконечным рядом, или трансфинитным рядом, называется сумма сверхпоследовательности как функции порядковых чисел как аргументов:

$$\Sigma(a_0, a_1, a_2, \dots , a_\omega, a_{\omega+1}, a_{\omega+2}, \dots) = \Sigma_{\theta\in\Theta}\, a_\theta,\ \Theta = (0, 1, 2, \dots , \omega, \omega+1, \omega+2, \dots , \omega_1, \omega_1+1, \omega_1+2, \dots).$$

Замечание. По теории множеств Кантора сверхпоследовательность порядковых чисел есть

$$\Theta = (0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega_1, \omega_1+1, \omega_1+2, \ldots, \omega_2, \omega_2+1, \omega_2+2, \ldots, \omega_3, \omega_3+1, \omega_3+2, \ldots)$$

и именно __иерархически__ __бесконечно__ обобщается и продолжается (причём здесь показано только самое __начало__ обобщения и продолжения всего лишь __одноместным__ __рангом__ в левом нижнем индексе) по __общим__ __теориям__ __сверхкардиналов__ и __сверхординалов__ __сверхпоследовательностью__ __сверхординалов__

$$\Phi = ({}_0\varphi_0, {}_0\varphi_1, {}_0\varphi_2, \ldots, {}_1\varphi_0, {}_1\varphi_0+1, {}_1\varphi_0+2, \ldots, {}_1\varphi_1, {}_1\varphi_1+1, {}_1\varphi_1+2, \ldots, {}_1\varphi_2, {}_1\varphi_2+1, {}_1\varphi_2+2, \ldots, {}_1\varphi_3, {}_1\varphi_3+1, {}_1\varphi_3+2, \ldots, {}_2\varphi_0, {}_2\varphi_0+1, {}_2\varphi_0+2, \ldots, {}_2\varphi_1, {}_2\varphi_1+1, {}_2\varphi_1+2, \ldots, {}_2\varphi_2, {}_2\varphi_2+1, {}_2\varphi_2+2, \ldots, {}_2\varphi_3, {}_2\varphi_3+1, {}_2\varphi_3+2, \ldots),$$

где пошагово увеличиваемый каждый раз на единицу непременно справа __начальный__ __сверхординал__ ${}_\lambda\varphi_n$ имеет сверхкардинал ${}_\lambda\gamma_n$.

Определение. Началом сверхпоследовательности строго до её указанного элемента называется часть сверхпоследовательности, содержащая все элементы сверхпоследовательности, строго предшествующие указанному элементу, который при этом исключается, в прежнем их порядке в сверхпоследовательности.

Определение. Началом сверхпоследовательности нестрого до её указанного элемента называется часть сверхпоследовательности, содержащая все элементы сверхпоследовательности, нестрого предшествующие указанному элементу, который при этом включается, в прежнем их порядке в сверхпоследовательности.

Определение. Остатком сверхпоследовательности строго от её указанного элемента называется часть

сверхпоследовательности, содержащая все элементы сверхпоследовательности, строго следующие за указанным элементом, который при этом исключается, в прежнем их порядке в сверхпоследовательности.

Определение. Остатком сверхпоследовательности нестрого от её указанного элемента называется часть сверхпоследовательности, содержащая все элементы сверхпоследовательности, нестрого следующие за указанным элементом, который при этом включается, в прежнем их порядке в сверхпоследовательности.

Определение. Началом сверхряда строго до его указанного элемента называется часть сверхряда, содержащая все элементы сверхряда, строго предшествующие указанному

элементу, который при этом исключается, в прежнем их порядке в сверхряду.

Определение. Началом сверхряда нестрого до его указанного элемента называется часть сверхряда, содержащая все элементы сверхряда, нестрого предшествующие указанному элементу, который при этом включается, в прежнем их порядке в сверхряду.

Определение. Остатком сверхряда строго от его указанного элемента называется часть сверхряда, содержащая все элементы сверхряда, строго следующие за указанным элементом, который при этом исключается, в прежнем их порядке в сверхряду.

Определение. Остатком сверхряда нестрого от его указанного элемента называется часть сверхряда,

содержащая все элементы сверхряда, нестрого следующие за указанным элементом, который при этом включается, в прежнем их порядке в сверхряду.

Определение. Приближением ранга λ (к (для)) приближаемой сверхпоследовательности называется приближающая(ся) сверхпоследовательность, являющаяся началом приближаемой сверхпоследовательности, включающим все и только все элементы приближаемой сверхпоследовательности, соответствующие всем не превышающим этого ранга λ рангам сверхкардиналов и сверхординалов.

Следствие. Приближением нулевого ранга (к (для)) приближаемой сверхпоследовательности является обычная счётно бесконечная последовательность.

Определение. Приближением ранга λ (для) приближаемого сверхряда (к приближаемому сверхряду) называется приближающий(ся) сверхряд, являющийся началом приближаемого сверхряда, включающим все и только все элементы приближаемого сверхряда, соответствующие всем не превышающим этого ранга λ рангам сверхкардиналов и сверхординалов.

Следствие. Приближением нулевого ранга (для) приближаемого сверхряда (к приближаемому сверхряду) является обычный счётно бесконечный ряд.

Определение. Приближением ранга λ к приближаемой сверхтеории (сверхнауке) (для приближаемой сверхтеории (сверхнауки)) называется приближающая(ся) сверхтеория (сверхнаука соответственно), включающая все и только все элементы приближаемой сверхтеории (сверхнауки соответственно), соответствующие всем не превышающим этого ранга λ рангам сверхкардиналов и сверхординалов.

Следствие. Приближением нулевого ранга к приближаемой сверхтеории (сверхнауке) (для приближаемой сверхтеории (сверхнауки)) является обычная теория (наука соответственно).

Всеобщие математические теории и методологии конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов создают синергию анализа и синтеза конечных и бесконечных пределов и асимптотических формул, включающих асимптотические равенства (эквивалентности), асимптотические разложения и асимптотические ряды, для бесконечно больших и бесконечно малых величин различных порядков.

Замечание. В классической математике для бесконечных и полубесконечных промежутков действительной числовой прямой используются бесконечные элементы -∞ и +∞ как именно актуальные (достигнутые) бесконечности. В настоящей монографии выше была предложена замена их символами -ω и +ω соответственно с равными половине

количествами (функциями принадлежности). Кроме того, в классической математике $-\infty$ и $+\infty$ также используются как потенциальные (становящиеся) бесконечности, а именно как пределы бесконечно больших величин, стремящихся к бесконечностям соответствующих знаков с чрезвычайно различными скоростями. Так, сумма гармонического ряда

$$\Sigma_{n=1}{}^{+\infty} 1/n = +\infty$$

растёт частичной суммой

$$H_n = \Sigma_{i=1}{}^{n} 1/i = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n \ (\gamma = 0.57721566490..., \ \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0)$$

к плюс бесконечности со скоростью натурального логарифма $\ln(n)$, то есть весьма медленно:

$$H_{1000} \approx 7.485,$$

$$H_{1000000} \approx 14.393.$$

Ещё медленнее растёт к плюс бесконечности натуральный логарифм суммы единицы и натурального логарифма ln(1 + ln(n)) как сложная функция с дальнейшим замедлением роста при таком же дальнейшем её усложнении ln(1 + ln(1 + ln(1 + ln(n)))). Зато чрезвычайно быстро стремятся к плюс бесконечности последовательность $n!^{n!}$ факториалов в степенях факториалов и последовательность самотетраций ($^{1}1 = 1$, $^{2}2 = 2^2 = 2 \wedge 2$, $^{3}3 = 3 \wedge 3 \wedge 3$, $^{4}4 = 4 \wedge 4 \wedge 4 \wedge 4$, ... , ^{n}n, ...) положительных целых чисел.

Поэтому в классической математике применительно к пределам символы потенциальных (становящихся) бесконечностей ∞, +∞ и -∞ по существу обозначают кучи чрезвычайно различных потенциальных (становящихся) бесконечностей, в которые свалены пределы любых

бесконечно больших величин (соответствующего знака в случае указания знака бесконечности) независимо от скоростей бесконечного возрастания норм (в частности модулей) бесконечно больших величин. Грубые различия в эти кучи вносятся классическими асимптотическими формулами, которые можно уточнить.

Примеры для положительной целочисленной переменной n и положительной действительной переменной x:

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty;$$

$$\lim_{n\to+\infty} n!^{n!} = \lim_{x\to+\infty} \Gamma(x+1)^{\Gamma(x+1)} = +\infty.$$

В классической математике применительно к пределам символы потенциальных (становящихся) нулей 0, +0 = 0+ и -0 = 0- по существу обозначают кучи чрезвычайно различных потенциальных (становящихся) нулей, в

которые свалены пределы любых бесконечно малых величин (соответствующего знака в случае указания знака нуля) независимо от скорости бесконечного убывания абсолютной величины.

Примеры для положительной целочисленной переменной n и положительной действительной переменной x:

$$\lim_{n\to+\infty} 1/\ln(n) = \lim_{x\to+\infty} 1/\ln(x) = +0 = 0+;$$

$$\lim_{n\to+\infty} 1/n!^{n!} = \lim_{x\to+\infty} 1/\Gamma(x+1)^{\Gamma(x+1)} = +0 = 0+.$$

Следствие. В классической математике, а именно применительно к конечным пределам переменных величин, разности этих переменных величин и их конечных пределов являются бесконечно малыми величинами, так что скорости приближения к этим пределам тоже никак не выражаются и не учитываются.

Всеобщие математические теории и методологии конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов, или общих пределов glim, вводят измерение, выражение и учёт скоростей бесконечно большого возрастания норм (в частности модулей) бесконечно больших величин, скоростей бесконечно малого убывания норм (в частности модулей) бесконечно малых величин и скоростей бесконечного приближения переменных величин к конечным пределам. Введение общих пределов осуществляется только в случае их целесообразности и полезности, причём именно как дополнительное к известному использованию классических пределов и собирательных символов ∞, $+\infty$, $-\infty$, 0, $+0 = 0+$ и $-0 = 0-$ при их целесообразности и полезности.

Для измерения этих скоростей необходимо выбрать единицу их измерения.

Замечание. Последующая стандартизация скоростей независимых переменных вообще не распространяется напрямую на скорости зависимых переменных. Однако и применительно к независимым переменным стандартизация их скоростей является лишь кажущимся ограничением общности. Действительно, если по условиям решаемой задачи скорость независимой переменной величины отличается от стандартной скорости, то достаточно рассмотреть эту независимую переменную величину как зависимую переменную величину, а именно как переменную величину, зависящую от подходящей независимой переменной величины со стандартной скоростью приближения к соответствующему пределу.

При этом исходная зависимая переменная величина окажется сложной функцией этой введённой независимой переменной величины со стандартной скоростью стремления к пределу этой введённой величины.

Пример. Вместо стандартной строго монотонно возрастающей последовательности всех без исключения положительных целых чисел рассматривается некоторая подпоследовательность этой последовательности. Тогда эта подпоследовательность рассматривается как соответствующая дискретная функция этой последовательности, а именно функция начинающегося непременно с единицы порядкового номера элемента этой подпоследовательности.

Определение. Стандартной скоростью ω_d стремления дискретной положительной бесконечно большой переменной величины к плюс бесконечности считается скорость стремления строго монотонно возрастающей последовательности всех положительных целых чисел к плюс бесконечности:

$$n \in (1, 2, 3, 4, 5, ...), n \to +\infty;$$

$$\mathrm{glim}_{n\in(1, 2, 3, 4, 5, ...)\to+\infty}\, n = \mathrm{glim}_{n\in(1, 2, 3, 4, 5, ...)\to+\infty}(n) = \omega_d = \omega(d).$$

Определение. Стандартной скоростью ω_c стремления непрерывной положительной бесконечно большой переменной величины к плюс бесконечности считается скорость строго монотонно возрастающего стремления всех не меньших единицы положительных действительных чисел именно и непременно как континуализации строго

монотонно возрастающей последовательности всех положительных целых чисел к плюс бесконечности:

$$x \in [1, +\infty),\ x \to +\infty;$$

$$\mathrm{glim}_{x\in[1,\ +\infty)\to+\infty}\ x = \mathrm{glim}_{x\in[1,\ +\infty)\to+\infty}(x) = \omega_c = \omega(c).$$

Следствие. Обе стандартные скорости ω_d стремления дискретной положительной бесконечно большой переменной величины к плюс бесконечности и ω_c стремления непрерывной положительной бесконечно большой переменной величины к плюс бесконечности равномерны и по существу совпадают, причём стандартная скорость ω_c является непрерывным обобщением скачкообразной стандартной скорости ω_d (с именно единичными скачками).

Определение. При определении общего предела зависимой переменной величины как функции независимых переменных скорость стремления каждой независимой положительной бесконечно большой переменной величины к плюс бесконечности считается стандартной:

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} f(n) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} f(n);$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} f(x).$$

Определение. Общим пределом зависимой переменной величины, зависящей только от положительных бесконечно больших переменных величин, считается соответствующая этой величине как функции функция стандартной скорости ω_d стремления дискретной положительной бесконечно большой переменной величины и/или стандартной скорости ω_c стремления непрерывной положительной

бесконечно большой переменной величины соответственно, подставляемых вместо соответствующих независимых переменных как аргументов функции, выражающей зависимую переменную:

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} f(n) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} f(n) = f(\omega_d);$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} f(x) = f(\omega_c).$$

Примеры для положительной целочисленной переменной n, положительной действительной переменной x и положительных действительных постоянных a и b:

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} n = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} n = \omega_d;$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty} x = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} x = \omega_c;$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} an + b = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} an + b = a\omega_d + b;$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty} ax + b = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} ax + b = a\omega_c + b;$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} \ln(n) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} \ln(n) = \ln(\omega_d);$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty} \ln(x) = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} \ln(x) = \ln(\omega_c);$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} \exp(n) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} \exp(n) = \exp(\omega_d);$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty} \exp(x) = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} \exp(x) = \exp(\omega_c);$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} \exp(an + b) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} \exp(an + b) = \exp(a\omega_d + b);$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty} \exp(ax + b) = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} \exp(ax + b) = \exp(a\omega_c + b);$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} n!^{n!} = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} n!^{n!} = \omega_d!^{\omega(d)!};$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty} \Gamma(x+1)^{\Gamma(x+1)} = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} \Gamma(x+1)^{\Gamma(x+1)} = \Gamma(\omega_c+1)^{\Gamma(\omega(c)+1)}.$$

Примеры для положительной целочисленной переменной n:

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty}(n) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)}(n) = \omega_d;$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty}(-1 + 2n) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)}(-1 + 2n) = -1 + 2\omega_d;$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty}(2n) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)}(2n) = 2\omega_d;$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty}(-2 + 3n) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)}(-2 + 3n) = -2 + 3\omega_d;$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty}(-1 + 3n) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)}(-1 + 3n) = -1 + 3\omega_d;$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty}(3n) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)}(3n) = 3\omega_d.$$

Замечание. Увеличение a и положительного b в арифметической прогрессии a + bn со сверхколичеством

$$Q(a + bn \mid n \in N = \{1, 2, 3, ...\}) = \omega/|b| - a/b - 1/2$$

тех же последовательностей

$$Q(n \mid n \in N = \{1, 2, 3, ...\}) = \omega - 1/2;$$
$$Q(-1 + 2n \mid n \in N = \{1, 2, 3, ...\}) = \omega/2;$$
$$Q(2n \mid n \in N = \{1, 2, 3, ...\}) = \omega/2 - 1/2;$$
$$Q(-2 + 3n \mid n \in N = \{1, 2, 3, ...\}) = \omega/3 + 1/6;$$
$$Q(-1 + 3n \mid n \in N = \{1, 2, 3, ...\}) = \omega/3 - 1/6;$$
$$Q(3n \mid n \in N = \{1, 2, 3, ...\}) = \omega/3 - 1/2$$

в предыдущем разделе и с общим пределом

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty}\ a + bn = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)}\ a + bn = a + b\omega_d$$

естественным образом, во-первых, снижает сверхколичество Q сдвигом вправо и прореживанием элементов арифметической прогрессии и, во-вторых, увеличивает общий предел.

Примеры для положительной целочисленной переменной n:

$$\lim_{n\to+\infty}(3/n - 2^{-n}) = \lim_{n\to+\omega(d)}(3/n - 2^{-n}) = 3/\omega_d - 2^{-\omega(d)};$$

$$\lim_{n\to+\infty}[(n^2 - 3n + 14)/(5n^2 - 2n + 7)] = \lim_{n\to+\omega(d)}[(n^2 - 3n + 14)/(5n^2 - 2n + 7)] = (\omega_d{}^2 - 3\omega_d + 14)/(5\omega_d{}^2 - 2\omega_d + 7);$$

$$\lim_{n\to+\infty}(2^n + 5) = \lim_{n\to+\omega(d)}(2^n + 5) = 2^{\omega(d)} + 5.$$

Определение. Стандартной скоростью $-\omega_d$ стремления дискретной отрицательной бесконечно большой по модулю переменной величины к минус бесконечности считается скорость стремления строго монотонно убывающей последовательности всех отрицательных целых чисел к минус бесконечности:

$$z \in (-1, -2, -3, -4, -5, \ldots),\ z \to -\infty;$$

$$\mathrm{glim}_{z\in(-1, -2, -3, -4, -5, \ldots)\to-\infty}\ z = \mathrm{glim}_{z\in(-1, -2, -3, -4, -5, \ldots)\to-\infty}(z) = -\omega_d = -\omega(d);$$

$$\mathrm{glim}_{n\in(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)\to+\infty}\ -n = \mathrm{glim}_{n\in(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)\to+\infty}(-n) = \mathrm{glim}_{n\in(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)\to+\omega(d)}(-n) = -\omega_d = -\omega(d).$$

Определение. Стандартной скоростью $-\omega_c$ стремления непрерывной отрицательной бесконечно большой по модулю переменной величины к минус бесконечности считается скорость строго монотонно убывающего стремления всех не бо́льших минус единицы отрицательных действительных чисел как континуализации строго монотонно убывающей последовательности всех не бо́льших минус единицы отрицательных целых чисел к минус бесконечности:

$$y \in]-\infty, -1] = (-\infty, -1], y \to -\infty;$$

$$\mathrm{glim}_{y\in(-\infty,\, -1]\to-\infty}\ y = \mathrm{glim}_{y\in(-\infty,\, -1]\to-\infty}(y) = \mathrm{glim}_{y\in(-\infty,\, -1]\to-\omega(c)}(y) =$$

$$-\omega_c = -\omega(c);$$

$$\mathrm{glim}_{x\in[1,\, +\infty)\to+\infty}\ -x = \mathrm{glim}_{x\in[1,\, +\infty)\to+\infty}(-x) = \mathrm{glim}_{x\in[1,\, +\infty)\to+\omega(c)}(-x) =$$

$$-\omega_c = -\omega(c).$$

Определение. При определении общего предела зависимой переменной величины скорость стремления каждой независимой отрицательной бесконечно большой по модулю переменной величины к минус бесконечности считается стандартной:

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} f(z) = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} f(z);$$
$$\mathrm{glim}_{y\to-\infty} f(y) = \mathrm{glim}_{y\to-\omega(c)} f(y).$$

Определение. Общим пределом зависимой переменной величины, зависящей только от положительных бесконечно больших переменных величин и/или отрицательных бесконечно больших по модулю переменных величин, считается соответствующая этой величине как функции функция стандартной скорости ω_d стремления дискретной положительной бесконечно большой переменной величины,

и/или стандартной скорости $-\omega_d$ стремления дискретной отрицательной бесконечно большой по модулю переменной величины, и/или стандартной скорости ω_c стремления непрерывной положительной бесконечно большой переменной величины, и/или стандартной скорости $-\omega_c$ стремления непрерывной отрицательной бесконечно большой по модулю переменной величины соответственно, подставляемых вместо соответствующих независимых переменных:

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty,\ z\to-\infty,\ x\to+\infty,\ y\to-\infty} f(n, z, x, y) =$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\omega(d),\ z\to-\omega(d),\ x\to+\omega(c),\ y\to-\omega(c)} f(n, z, x, y) =$$

$$f(+\omega(d), -\omega(d), +\omega(c), -\omega(c)).$$

Примеры для положительной целочисленной переменной n, отрицательной целочисленной переменной z, положительной действительной переменной x, отрицательной действительной переменной y и любых действительных (положительных, отрицательных или нулевых) постоянных a и b:

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} -n = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} -n = -\omega_d;\ \mathrm{glim}_{x\to+\infty} -x = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} -x = -\omega_c;$$

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} z = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} z = -\omega_d;\ \mathrm{glim}_{y\to-\infty} y = \mathrm{glim}_{y\to-\omega(c)} y = -\omega_c;$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} an + b = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} an + b = a\omega_d + b;$$

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} az + b = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} az + b = -a\omega_d + b;$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty} ax + b = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} ax + b = a\omega_c + b;$$

$$\mathrm{glim}_{y\to-\infty} ay + b = \mathrm{glim}_{y\to-\omega(c)} ay + b = -a\omega_c + b;$$

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} \ln(-z) = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} \ln(-z) = \ln(\omega_d);$$

$$\mathrm{glim}_{y\to-\infty} \ln(-y) = \mathrm{glim}_{y\to-\omega(c)} \ln(-y) = \ln(\omega_c);$$

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} \exp(z) = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} \exp(z) = \exp(-\omega_d) = 1/\exp(\omega_d);$$

$$\mathrm{glim}_{y\to-\infty} \exp(y) = \mathrm{glim}_{y\to-\omega(c)} \exp(y) = \exp(-\omega_c) = 1/\exp(\omega_c);$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} \exp(an + b) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} \exp(an + b) = \exp(a\omega_d + b);$$

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} \exp(az + b) = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} \exp(az + b) = \exp(-a\omega_d + b);$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty} \exp(ax + b) = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} \exp(ax + b) = \exp(a\omega_c + b);$$

$$\mathrm{glim}_{y\to-\infty} \exp(ay + b) = \mathrm{glim}_{y\to-\omega(c)} \exp(ay + b) = \exp(-a\omega_c + b);$$

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} (-z)!^{(-z)!} = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} (-z)!^{(-z)!} = \omega_d!^{\omega(d)!}.$$

Определение. Стандартной скоростью $+1/\omega_d$ стремления дискретной положительной бесконечно малой переменной величины к плюс нулю считается скорость стремления строго монотонно убывающей последовательности обращений всех положительных целых чисел к плюс нулю:

$$t = 1/n \in (1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots), \ t \to +0 = 0+;$$

$$\mathrm{glim}_{n\in(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)\to+\infty} 1/n = \mathrm{glim}_{n\in(1, 2, 3, 4, 5, \ldots)\to+\infty}(1/n) = 1/\omega_d = 1/\omega(d).$$

Определение. Стандартной скоростью $-1/\omega_d$ стремления дискретной отрицательной бесконечно малой переменной величины к минус нулю считается скорость стремления строго монотонно возрастающей последовательности обращений всех отрицательных целых чисел к минус нулю:

$$u = 1/z = -1/n \in (-1/1, -1/2, -1/3, -1/4, -1/5, ...),\ u \to -0 = 0-;$$

$$\mathrm{glim}_{z\in(-1, -2, -3, -4, -5, ...)\to-\infty}\ 1/z = \mathrm{glim}_{z\in(-1, -2, -3, -4, -5, ...)\to-\infty}(1/z) =$$

$$\mathrm{glim}_{z\in(-1, -2, -3, -4, -5, ...)\to-\omega(d)}(1/z) = -1/\omega_d = -1/\omega(d);$$

$$\mathrm{glim}_{n\in(1, 2, 3, 4, 5, ...)\to+\infty}\ -1/n = \mathrm{glim}_{n\in(1, 2, 3, 4, 5, ...)\to+\infty}(-1/n) =$$

$$\mathrm{glim}_{n\in(1, 2, 3, 4, 5, ...)\to+\omega(d)}(-1/n) = -1/\omega_d = -1/\omega(d).$$

Определение. Стандартной скоростью $+1/\omega_c$ стремления непрерывной положительной бесконечно малой переменной величины к плюс нулю считается скорость строго монотонно убывающего стремления обращений всех не

меньших единицы положительных действительных чисел как континуализации строго монотонно убывающей последовательности обращений всех положительных целых чисел к плюс нулю:

$$v = 1/x,\ x \in [1, +\infty),\ x \to +\infty,\ v \to +0 = 0+;$$

$$\mathrm{glim}_{x\in[1,\ +\infty)\to+\infty}\ 1/x = \mathrm{glim}_{x\in[1,\ +\infty)\to+\infty}(1/x) = \mathrm{glim}_{x\in[1,\ +\infty)\to+\omega(c)}(1/x) = 1/\omega_c = 1/\omega(c).$$

Определение. Стандартной скоростью $-1/\omega_c$ стремления непрерывной отрицательной бесконечно малой переменной величины к минус нулю считается скорость строго монотонно возрастающего стремления обращений всех не больших минус единицы отрицательных действительных чисел как континуализации строго монотонно

возрастающей последовательности обращений всех отрицательных целых чисел к минус нулю:

$$w = 1/y,\ y \in (-\infty, -1],\ y \to -\infty,\ w \to -0 = 0-;$$

$$\mathrm{glim}_{y\in(-\infty, -1]\to-\infty}\ 1/y = \mathrm{glim}_{y\in(-\infty, -1]\to-\infty}(1/y) = \mathrm{glim}_{y\in(-\infty, -1]\to-\omega(c)}(1/y) = -1/\omega_c = -1/\omega(c);$$

$$\mathrm{glim}_{x\in[1, +\infty)\to+\infty}\ -1/x = \mathrm{glim}_{x\in[1, +\infty)\to+\infty}(-1/x) = \mathrm{glim}_{x\in[1, +\infty)\to+\omega(c)}(-1/x) = -1/\omega_c = -1/\omega(c).$$

Определение. При определении общего предела зависимой переменной величины скорость стремления каждой независимой положительной бесконечно малой переменной величины к плюс нулю и каждой независимой отрицательной бесконечно малой переменной величины к минус нулю считается стандартной:

$$\mathrm{glim}_{t\to+0}\ f(t) = \mathrm{glim}_{t\to+1/\omega(d)}\ f(t);$$

$$\mathrm{glim}_{u\to-0}\, f(u) = \mathrm{glim}_{t\to-1/\omega(d)}\, f(u);$$

$$\mathrm{glim}_{v\to+0}\, f(v) = \mathrm{glim}_{v\to+1/\omega(c)}\, f(v);$$

$$\mathrm{glim}_{w\to-0}\, f(w) = \mathrm{glim}_{w\to-1/\omega(c)}\, f(w).$$

Определение. При определении общего предела независимой переменной величины скорость её стремления к её пределу считается стандартной.

Определение. При определении общего предела зависимой переменной величины скорость стремления каждой независимой переменной величины к её пределу считается стандартной.

Определение. Общим пределом зависимой переменной величины как функции независимых переменных величин при считающимися стандартными скоростями их стремлений к их общим пределам считается

соответствующая этой зависимой переменной величине функция, в качестве аргументов которой все эти независимые переменные величины заменяются соответствующими стандартными скоростями стремлений к общим пределам соответствующих независимых переменных величин.

Пример для зависимой переменной величины как функции независимых положительной целочисленной переменной n, отрицательной целочисленной переменной z, положительной действительной переменной x, отрицательной действительной переменной y, дискретной положительной бесконечно малой переменной величины t, дискретной отрицательной бесконечно малой переменной величины u, непрерывной положительной бесконечно

малой переменной величины v и непрерывной отрицательной бесконечно малой переменной величины w:

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty,\ z\to-\infty,\ x\to+\infty,\ y\to-\infty,\ t\to+0,\ u\to-0,\ v\to+0,\ w\to-0} f(n, z, x, y, t, u, v, w) =$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\omega(d),\ z\to-\omega(d),\ x\to+\omega(c),\ y\to-\omega(c),\ t\to+1/\omega(d),\ u\to-1/\omega(d),\ v\to+1/\omega(c),\ w\to-1/\omega(c)} f(n, z, x, y, t, u, v, w) =$$

$$f(+\omega(d), -\omega(d), +\omega(c), -\omega(c), +1/\omega(d), -1/\omega(d), +1/\omega(c), -1/\omega(c)) =$$

$$f(\omega_d, -\omega_d, \omega_c, -\omega_c, 1/\omega_d, -1/\omega_d, 1/\omega_c, -1/\omega_c).$$

Замечание. При стремлении переменной величины к конечному пределу разность этой величины и этого предела является бесконечно малой согласно классическому определению предела.

Определение. При определении общих пределов независимых или зависимых переменных величин скорость одностороннего стремления каждой независимой

переменной величины к её конечному общему пределу считается стандартной в смысле стандартности скорости стремления бесконечно малой разности этой дискретной или непрерывной независимой переменной величины и её конечного предела к положительному или отрицательному нулю.

Примеры для зависимой переменной величины как функции независимых дискретной независимой переменной величины r и непрерывной независимой переменной величины s:

$$\mathbf{glim}_{r\to-\pi+0,\ s\to e-0}\, f(r, s) = \mathbf{glim}_{r\to-\pi+1/\omega(d),\ s\to e-1/\omega(c)}\, f(r, s) =$$

$$f(-\pi + 1/\omega(d), e - 1/\omega(c)) =$$

$$f(-\pi + 1/\omega_d, e - 1/\omega_c).$$

Замечание. Общие верхние пределы и общие нижние пределы последовательностей (как дискретных зависимых переменных величин) и функций (как непрерывных зависимых переменных величин) определяются аналогично классическим верхним и нижним пределам последовательностей и функций при условиях именно стандартных скоростей стремлений независимых переменных величин к их конечным, бесконечно большим или бесконечно малым пределам. При этом ввиду уточнения классических пределов общими пределами при едином классическом пределе общие верхний и нижний пределы могут различаться между собой.

Пример. Последовательность

$$a_n = (\ln(1), \exp(2), \ln(3), \exp(4), \ln(5), \exp(6), \ln(7), \exp(8), \ldots , \ln(2n - 1), \exp(2n), \ldots),$$

$$n \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots);$$

существует единый классический бесконечный предел

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty,$$

которому, естественно, равны классический верхний предел

$$\lim_{n\to+\infty} \sup a_n = +\infty$$

и классический нижний предел

$$\lim_{n\to+\infty} \inf a_n = +\infty;$$

существуют (уточняющие классические верхний и нижний пределы) именно различные между собой общий верхний предел

$$\text{glim}_{n\to+\infty} \sup a_n = \text{glim}_{n\to+\omega(d)} \sup a_n = \exp(+\omega(d)) = \exp(\omega_d)$$

и общий нижний предел

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} \inf a_n = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} \inf a_n = \ln(+\omega(d)) = \ln(\omega_d),$$

поэтому единый общий предел

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} a_n = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} a_n$$

не существует.

Таким образом, всеобщие математические теории и методологии конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов, или общих пределов glim, вводят измерение, выражение и учёт скоростей бесконечно большого возрастания норм (в частности модулей) бесконечно больших величин, скоростей бесконечно малого убывания норм (в частности модулей) бесконечно малых величин и скоростей бесконечного приближения переменных величин к конечным пределам и тем самым

существенно дополняют, обобщают, уточняют и развивают классическую теорию пределов.

Замечание. Общие теории сверхпоследовательностей и сверхрядов и всеобщие математические теории и методологии конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов позволяют, в частности, продолжить построение общей теории сверхчисел.

Замечание. В классической математике теория действительных чисел пренебрегает актуально (достигнуто) бесконечно малыми величинами и вообще не рассматривает актуально (достигнуто) бесконечно большие величины. В частности, классическая математика считает, что любая периодическая дробь в любой позиционной системе счисления (так что сразу или через некоторое

конечное количество цифр после разделителя (в настоящей научной монографии точки) целой и дробной частей абсолютной величины действительного числа одна и та же цифра или непременно конечная последовательность цифр бесконечно повторяется именно подряд) есть как обычный предел именно в точности равная этому пределу обыкновенная дробь.

Обозначение. Отношения именно сверхчисловых равенств и неравенств с полным и точным учётом даже актуально (достигнуто) бесконечно малых различий обозначаются знаками соответствующих равенств и неравенств с добавлением знака градуса ° справа:

$$=^\circ, \approx^\circ, \neq^\circ, \equiv^\circ, <^\circ, >^\circ, \leq^\circ, \geq^\circ.$$

Теорема. В общей теории сверхчисел любая периодическая дробь с ненулевым периодом в любой позиционной системе счисления есть как общий предел именно в точности действительное сверхчисло, не являющееся действительным числом и отличающееся от равной обычному пределу обыкновенной дроби на актуально (достигнуто) бесконечно малую величину.

Доказательство.

Пусть

$$0.a_{(1)}a_{(2)}a_{(3)}\ldots a_{(n)}(b_{(1)}b_{(2)}b_{(3)}\ldots b_{(p)})$$

$$(n \in N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}, p \in N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\})$$

есть состоящая только из неотрицательных цифр с положительными целыми номерами в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых

нижних указателях (индексах) соответствующих цифр, во-первых, $a_{(1)}a_{(2)}a_{(3)}...a_{(n)}$ до периода и, во-вторых, в периоде произвольная периодическая дробь с непременно ненулевым периодом

$$b_{(1)}b_{(2)}b_{(3)}...b_{(p)}$$

в произвольной m-ичной ($m \in N \setminus \{1\} = \{2, 3, 4, ...\}$) позиционной системе счисления, так что хотя бы одна из цифр

$$b_{(1)}, b_{(2)}, b_{(3)}, ..., b_{(p)}$$

отличается от нуля.

Эта дробь есть ограниченная сверху единицей как дробная часть действительного числа сумма неотрицательного ряда

$$0.a_{(1)}a_{(2)}a_{(3)}\dots a_{(n)}(b_{(1)}b_{(2)}b_{(3)}\dots b_{(p)}) = a_{(1)}/m^1 + a_{(2)}/m^2 + a_{(3)}/m^3 + \dots + a_{(n)}/m^n + b_{(1)}/m^{n+1} + b_{(2)}/m^{n+2} + b_{(3)}/m^{n+3} + \dots + b_{(p)}/m^{n+p} + b_{(1)}/m^{n+p+1} + b_{(2)}/m^{n+p+2} + b_{(3)}/m^{n+p+3} + \dots + b_{(p)}/m^{n+2p} + \dots$$

с неубывающей и поэтому сходящейся последовательностью всех частичных сумм.

Именно к пределу этой последовательности сходится её подпоследовательность с указателями (индексами), сравнимыми с n по модулю p, берущая каждый период дроби именно целиком и поэтому являющаяся последовательностью всех частичных сумм ряда подсумм для всех цифр до самого первого периода и далее для всех цифр каждого из периодов:

$$0.a_{(1)}a_{(2)}a_{(3)}\dots a_{(n)}(b_{(1)}b_{(2)}b_{(3)}\dots b_{(p)}) = (a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + \dots + a_{(n)})/m^n + (b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + \dots + b_{(p)})/m^{n+p} + (b_{(1)}m^{p-1} +$$

$$b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + ... + b_{(p)})/m^{n+2p} + (b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + ... + b_{(p)})/m^{n+3p} + (b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + ... + b_{(p)})/m^{n+4p} + ... = (a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + ... + a_{(n)})/m^n + (b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + ... + b_{(p)})(1 + 1/m^p + 1/m^{2p} + 1/m^{3p} + ...)/m^{n+p}.$$

В <u>классической</u> <u>математике</u> сумма внутреннего ряда в последних круглых скобках есть <u>обычный</u> <u>предел</u> частичной суммы:

$$1 + 1/m^p + 1/m^{2p} + 1/m^{3p} + ... = \lim_{r\to+\infty} (1 - 1/m^{pr})/(1 - 1/m^p) = 1/(1 - 1/m^p) = m^p/(m^p - 1),$$

так что рассматриваемая дробь есть именно в точности обыкновенная дробь с явно указанными положительными целыми числителем и знаменателем:

$$0.a_{(1)}a_{(2)}a_{(3)}...a_{(n)}(b_{(1)}b_{(2)}b_{(3)}...b_{(p)}) = (a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + ... + a_{(n)})/m^n + (b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + ... + b_{(p)})/(m^{n+p} - m^n) =$$

$$((a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + \ldots + a_{(n)})(m^p - 1) + b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + \ldots + b_{(p)})/(m^{n+p} - m^n).$$

В <u>общей</u> <u>теории</u> <u>сверхчисел</u> <u>сумма</u> того же внутреннего ряда со всеми именно и только строго <u>меньшими</u>, чем заданный произвольный конечный или бесконечный номер ν, <u>положительными</u> целыми номерами в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых нижних указателях (индексах) соответствующих цифр как <u>общий</u> <u>предел</u> есть

$$(1)_{(1)} + (1/m^p)_{(2)} + (1/m^{2p})_{(3)} + (1/m^{3p})_{(4)} + \ldots_{(<\nu)} =$$
$$\mathrm{glim}_{r\to+\nu-1} (1 - 1/m^{pr})/(1 - 1/m^p) = (1 - 1/m^{p(\nu-1)})/(1 - 1/m^p) =$$
$$m^p(1 - 1/m^{p(\nu-1)})/(m^p - 1) = m^p/(m^p - 1) - m^{p(2-\nu)}/(m^p - 1)$$

и именно в <u>точности</u> меньше <u>обычного</u> предела

$$1 + 1/m^p + 1/m^{2p} + 1/m^{3p} + \ldots = \lim_{r\to+\infty} (1 - 1/m^{pr})/(1 - 1/m^p) =$$

$$1/(1 - 1/m^p) = m^p/(m^p - 1)$$

частичной суммы того же внутреннего ряда со всеми именно и только конечными положительными целыми номерами на положительную актуально (достигнуто) бесконечно малую величину

$$m^{p(2-\nu)}/(m^p - 1).$$

В общей теории сверхчисел общий предел той подпоследовательности с указателями (индексами), сравнимыми с n по модулю p, берущей каждый период дроби именно целиком и поэтому являющейся последовательностью всех частичных сумм ряда подсумм для всех цифр до самого первого периода и далее для всех цифр каждого из периодов, даёт:

$$0.a_{(1)}a_{(2)}a_{(3)}\ldots a_{(n)}(b_{(1)}b_{(2)}b_{(3)}\ldots b_{(p)}) = (a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + \ldots + a_{(n)})/m^n + (b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + \ldots + b_{(p)})(1 + 1/m^p + 1/m^{2p} + 1/m^{3p} + \ldots_{(<\nu)})/m^{n+p} = (a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + \ldots + a_{(n)})/m^n + (b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + \ldots + b_{(p)})(m^p/(m^p - 1) - m^{p(2-\nu)}/(m^p - 1))/m^{n+p} = (a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + \ldots + a_{(n)})/m^n + (b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + \ldots + b_{(p)})(m^{-n} - m^{p-n-\nu p})/(m^p - 1),$$

так что рассматриваемая дробь как <u>общий</u> <u>предел</u> той <u>подпоследовательности</u> именно в <u>точности</u> меньше <u>обычного</u> <u>предела</u>, равного обыкновенной дроби с явно указанными положительными целыми числителем и знаменателем

$$((a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + \ldots + a_{(n)})(m^p - 1) + b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + \ldots + b_{(p)})/(m^{n+p} - m^n),$$

на положительную актуально (достигнуто) бесконечно малую величину

$$(b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + \ldots + b_{(p)})m^{p-n-\nu p}/(m^p - 1).$$

Если, в частности, рассмотреть соответствующий случаю того же внутреннего ряда со всеми именно и только конечными положительными целыми номерами всех цифр выбор ν = ω, то в общей теории сверхчисел сумма того же внутреннего ряда со всеми именно и только строго меньшими, чем заданный произвольный конечный или бесконечный номер ν = ω, положительными целыми номерами в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых нижних указателях (индексах) соответствующих цифр как общий предел есть

$$(1)_{(1)} + (1/m^p)_{(2)} + (1/m^{2p})_{(3)} + (1/m^{3p})_{(4)} + \ldots_{(<\omega)} = \mathrm{glim}_{r\to+\omega-1} (1 - 1/m^{pr})/(1 - 1/m^p) = (1 - 1/m^{p(\omega-1)})/(1 - 1/m^p) = m^p(1 - 1/m^{p(\omega-1)})/(m^p - 1) = m^p/(m^p - 1) - m^{p(2-\omega)}/(m^p - 1)$$

и именно в точности меньше обычного предела

$$1 + 1/m^p + 1/m^{2p} + 1/m^{3p} + \ldots = \lim_{r\to+\infty} (1 - 1/m^{pr})/(1 - 1/m^p) = 1/(1 - 1/m^p) = m^p/(m^p - 1)$$

последовательности всех частичных сумм того же внутреннего ряда со всеми именно и только конечными положительными целыми номерами на положительную актуально (достигнуто) бесконечно малую величину

$$m^{p(2-\omega)}/(m^p - 1).$$

В общей теории сверхчисел общий предел той подпоследовательности с указателями (индексами), сравнимыми с n по модулю p, берущей каждый период

дроби именно целиком и поэтому являющейся последовательностью всех частичных сумм ряда подсумм для всех цифр до самого первого периода и далее для всех цифр каждого из периодов, даёт:

$$0.a_{(1)}a_{(2)}a_{(3)}...a_{(n)}(b_{(1)}b_{(2)}b_{(3)}...b_{(p)}) = (a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + ... + a_{(n)})/m^n + (b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + ... + b_{(p)})(1 + 1/m^p + 1/m^{2p} + 1/m^{3p} + ..._{(<\omega)})/m^{n+p} = (a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + ... + a_{(n)})/m^n + (b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + ... + b_{(p)})(m^p/(m^p - 1) - m^{p(2-\omega)}/(m^p - 1))/m^{n+p} = (a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + ... + a_{(n)})/m^n + (b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + ... + b_{(p)})(m^{-n} - m^{p-n-\omega p})/(m^p - 1),$$

так что рассматриваемая дробь как общий предел именно в точности меньше обычного предела, равного обыкновенной дроби с явно указанными положительными целыми числителем и знаменателем

$$((a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + \ldots + a_{(n)})(m^p - 1) + b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + \ldots + b_{(p)})/(m^{n+p} - m^n),$$

на положительную актуально (достигнуто) бесконечно малую величину

$$(b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + \ldots + b_{(p)})m^{p-n-\omega p}/(m^p - 1).$$

В общей теории сверхчисел сумма того же внутреннего ряда со всеми именно и только не бóльшими, чем заданный произвольный конечный или бесконечный номер ν, положительными целыми номерами в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых нижних указателях (индексах) соответствующих цифр как общий предел есть

$$(1)_{(1)} + (1/m^p)_{(2)} + (1/m^{2p})_{(3)} + (1/m^{3p})_{(4)} + \ldots_{(\leq\nu)} =$$

$$\mathrm{glim}_{r\to+\nu} (1 - 1/m^{pr})/(1 - 1/m^p) = (1 - 1/m^{p\nu})/(1 - 1/m^p) =$$

$$m^p(1 - 1/m^{p\nu})/(m^p - 1) = m^p/(m^p - 1) - m^{p(1-\nu)}/(m^p - 1)$$

и именно в точности меньше обычного предела

$$1 + 1/m^p + 1/m^{2p} + 1/m^{3p} + ... = \lim_{r\to+\infty} (1 - 1/m^{pr})/(1 - 1/m^p) = 1/(1 - 1/m^p) = m^p/(m^p - 1)$$

последовательности всех частичных сумм того же внутреннего ряда со всеми именно и только конечными положительными целыми номерами на положительную актуально (достигнуто) бесконечно малую величину

$$m^{p(1-\nu)}/(m^p - 1).$$

В общей теории сверхчисел общий предел той подпоследовательности с указателями (индексами), сравнимыми с n по модулю p, берущей каждый период дроби именно целиком и поэтому являющейся последовательностью частичных сумм ряда подсумм для

всех цифр до самого первого периода и далее для всех цифр каждого из периодов, даёт:

$$0.a_{(1)}a_{(2)}a_{(3)}\ldots a_{(n)}(b_{(1)}b_{(2)}b_{(3)}\ldots b_{(p)}) = (a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + \ldots + a_{(n)})/m^n + (b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + \ldots + b_{(p)})(1 + 1/m^p + 1/m^{2p} + 1/m^{3p} + \ldots_{(\leq\nu)})/m^{n+p} = (a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + \ldots + a_{(n)})/m^n + (b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + \ldots + b_{(p)})(m^p/(m^p - 1) - m^{p(1-\nu)}/(m^p - 1))/m^{n+p} = (a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + \ldots + a_{(n)})/m^n + (b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + \ldots + b_{(p)})(m^{-n} - m^{-n-\nu p})/(m^p - 1),$$

так что рассматриваемая дробь как общий предел именно в точности меньше обычного предела, равного обыкновенной дроби с явно указанными положительными целыми числителем и знаменателем

$$((a_{(1)}m^{n-1} + a_{(2)}m^{n-2} + a_{(3)}m^{n-3} + \ldots + a_{(n)})(m^p - 1) + b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + \ldots + b_{(p)})/(m^{n+p} - m^n),$$

на положительную актуально (достигнуто) бесконечно малую величину

$$(b_{(1)}m^{p-1} + b_{(2)}m^{p-2} + b_{(3)}m^{p-3} + \ldots + b_{(p)})m^{-n-\nu p}/(m^p - 1).$$

Теорема доказана.

Следствие. Открыто и доказано явление, заключающееся в том, что любая периодическая дробь с ненулевым периодом в любой позиционной системе счисления есть как общий предел именно в точности действительное сверхчисло, не являющееся действительным числом и отличающееся от равной обычному (классическому) пределу обыкновенной дроби на актуально (достигнуто) бесконечно малую величину.

Пример. Классическая математика считает, что бесконечная периодическая десятичная дробь

$$0.(9) = 0.99999...$$

есть обычный предел

$$\lim_{n\to+\infty} 0.9(1 - 10^{-n})/(1 - 10^{-1}) = \lim_{n\to+\infty}(1 - 10^{-n}) = 1$$

последовательности десятичных приближений с недостатком

$$(0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, ...)$$

и именно в точности единица как дополнительное другое её представление:

$$0.(9) = 0.99999... = 1.$$

Общий пример. В общей теории сверхчисел бесконечная периодическая десятичная дробь с девятками на позициях со всеми именно и только не большими, чем заданный произвольный конечный или бесконечный номер ν, положительными целыми номерами в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых нижних указателях (индексах) соответствующих цифр

$$0.(9)_{(\leq\nu)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots9_{(\nu)}$$

есть

$$0.(9)_{(\leq\nu)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots9_{(\nu)} =^\circ 0.9(1 -^\circ 10^{-\nu})/(1 - 10^{-1}) =^\circ 1 -^\circ 10^{-\nu}$$

и именно в точности меньше единицы на актуально (достигнуто) бесконечно малую величину $10^{-\nu}$:

$$0.(9)_{(\leq\nu)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots9_{(\nu)} =^\circ 1 -^\circ 10^{-\nu},$$

$$0.(9)_{(\leq\nu)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots9_{(\nu)} \neq^\circ 1,$$

$$0.(9_{)(\le\nu)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots9_{(\nu)} \approx^\circ 1,$$

$$0.(9_{)(\le\nu)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots9_{(\nu)} <^\circ 1.$$

Общий пример. В общей теории сверхчисел бесконечная периодическая десятичная дробь с девятками на позициях со всеми именно и только строго меньшими, чем заданный произвольный конечный или бесконечный номер ν, положительными целыми номерами в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых нижних указателях (индексах) соответствующих цифр

$$0.(9)_{(<\nu)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots_{(<\nu)}$$

есть общий предел

$$\mathrm{glim}_{n\to+\nu-1}\ 0.9(1 - 10^{-n})/(1 - 10^{-1}) =^\circ \mathrm{glim}_{n\to+\omega-1}(1 - 10^{-n}) =^\circ 1 -^\circ 10^{-\nu+1}$$

последовательности десятичных приближений с недостатком

$$(0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, \ldots_{(<\nu)})$$

и именно в точности меньше единицы на актуально (достигнуто) бесконечно малую величину $10^{-\nu+1}$:

$$0.(9)_{(<\nu)} =^\circ 0.9_{(1)}9(2)9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots_{(<\nu)} =^\circ 1 -^\circ 10^{-\nu+1},$$

$$0.(9)_{(<\nu)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)})9_{(5)}\ldots_{(<\nu)} \neq^\circ 1,$$

$$0.(9)_{(<\nu)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots_{(<\nu)} \approx^\circ 1,$$

$$0.(9)_{(<\nu)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots_{(<\nu)} <^\circ 1.$$

Пример. В общей теории сверхчисел бесконечная периодическая десятичная дробь с девятками на позициях со всеми именно и только конечными (то есть строго меньшими, чем ω) положительными целыми номерами в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых нижних указателях (индексах) соответствующих цифр

$$0.(9)_{(<\omega)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots_{(<\omega)}$$

есть <u>общий</u> <u>предел</u>

$$\mathrm{glim}_{n\to+\omega-1}\, 0.9(1 - 10^{-n})/(1 - 10^{-1}) =^\circ \mathrm{glim}_{n\to+\omega-1}(1 - 10^{-n}) =^\circ 1 -^\circ 10^{-\omega+1}$$

последовательности десятичных приближений с недостатком

$$(0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ 0.9999,\ 0.99999,\ \ldots_{(<\omega)})$$

и именно в <u>точности</u> меньше единицы на <u>актуально</u> (<u>достигнуто</u>) <u>бесконечно</u> <u>малую</u> величину $10^{-\omega+1}$:

$$0.(9)_{(<\omega)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots_{(<\omega)} =^\circ 1 -^\circ 10^{-\omega+1},$$

$$0.(9)_{(<\omega)} =^\circ 0.99999\ldots_{(<\omega)} \neq^\circ 1,$$

$$0.(9)_{(<\omega)} =^\circ 0.99999\ldots_{(<\omega)} \approx^\circ 1,$$

$$0.(9)_{(<\omega)} =^\circ 0.99999\ldots_{(<\omega)} <^\circ 1.$$

Пример. В общей теории сверхчисел бесконечная периодическая десятичная дробь с девятками на позициях со всеми именно и только не большими, чем ω, положительными целыми номерами в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых нижних указателях (индексах) соответствующих цифр

$$0.(9)_{(\le\omega)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots_{(<\omega)}9_{(\omega)}$$

есть по первому способу просто

$$0.(9)_{(\le\omega)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots_{(<\omega)}9_{(\omega)} =^\circ 0.9(1 -^\circ 10^{-\omega})/(1 - 10^{-1}) =^\circ 1 -^\circ 10^{-\omega}$$

и по второму способу (увеличенный на $9*10^{-\omega}$) общий предел

$$\mathrm{glim}_{n\to+\omega-1}\ 0.9(1 - 10^{-n})/(1 - 10^{-1}) + 9*10^{-\omega} =^\circ \mathrm{glim}_{n\to+\omega-1}(1 - 10^{-n}) + 9*10^{-\omega} =^\circ 1 -^\circ 10^{-\omega+1} +^\circ 9*10^{-\omega} =^\circ 1 -^\circ 10^{-\omega}$$

последовательности десятичных приближений с недостатком

$$(0.9,\ 0.99,\ 0.999,\ 0.9999,\ 0.99999,\ \ldots_{(<\omega)}\ ,\ 0.99999\ldots 9_{(\omega)})$$

и именно в <u>точности</u> меньше единицы на <u>актуально</u> (<u>достигнуто</u>) <u>бесконечно</u> <u>малую</u> величину $10^{-\omega}$:

$$0.(9)_{(\leq\omega)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots_{(<\omega)}9_{(\omega)} =^\circ 1 - 10^{-\omega},$$

$$0.(9)_{(\leq\omega)} =^\circ 0.99999\ldots 9_{(\omega)} \neq^\circ 1,$$

$$0.(9)_{(\leq\omega)} =^\circ 0.99999\ldots 9_{(\omega)} \approx^\circ 1,$$

$$0.(9)_{(\leq\omega)} =^\circ 0.99999\ldots 9_{(\omega)} <^\circ 1.$$

<u>Пример</u>. В <u>общей</u> <u>теории</u> <u>сверхчисел</u> <u>бесконечная</u> <u>периодическая</u> десятичная дробь с девятками на позициях со всеми именно и только <u>строго</u> <u>меньшими</u>, чем 2ω, положительными целыми номерами в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых нижних указателях (индексах) соответствующих цифр

$$0.(9)_{(<2\omega)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots_{(<\omega)}9_{(\omega)}9_{(\omega+1)}9_{(\omega+2)}9_{(\omega+3)}9_{(\omega+4)}\ldots_{(<2\omega)}$$

есть общий предел

$$\mathrm{glim}_{n\to+2\omega-1}\ 0.9(1 - 10^{-n})/(1 - 10^{-1}) =^\circ \mathrm{glim}_{n\to+2\omega}(1 - 10^{-n}) =^\circ 1 -^\circ 10^{-2\omega+1}$$

последовательности десятичных приближений с недостатком

$$(0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, \ldots_{(<2\omega)})$$

и именно в точности меньше единицы на актуально (достигнуто) бесконечно малую величину $10^{-2\omega+1}$:

$$0.(9)_{(<2\omega)} =^\circ 0.9_{(1)}9_{(2)}9_{(3)}9_{(4)}9_{(5)}\ldots_{(<\omega)}9_{(\omega)}9_{(\omega+1)}9_{(\omega+2)}9_{(\omega+3)}9_{(\omega+4)}\ldots_{(<2\omega)} =^\circ 1 -^\circ 10^{-2\omega+1},$$

$$0.(9)_{(<2\omega)} =^\circ 0.99999\ldots_{(<2\omega)} \neq^\circ 1,$$

$$0.(9)_{(<2\omega)} =^\circ 0.99999\ldots_{(<2\omega)} \approx^\circ 1,$$

$$0.(9)_{(<2\omega)} =^\circ 0.99999\ldots_{(<2\omega)} <^\circ 1.$$

Общий пример. В общей теории сверхчисел актуально (достигнуто) бесконечно большое периодическое целое десятичное число с девятками на позициях со всеми именно и только не большими, чем заданный произвольный конечный или бесконечный номер μ, неотрицательными целыми номерами в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых нижних указателях (индексах) соответствующих цифр

$$(9)_{(\leq\mu)} =^\circ 9_{(\mu)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}$$

есть

$$(9)_{(\leq\mu)} =^\circ 9_{(\mu)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)} =^\circ 9(10^{\mu+1} -^\circ 1)/(10 - 1) =^\circ 10^{\mu+1} -^\circ 1.$$

Общий пример. В общей теории сверхчисел актуально (достигнуто) бесконечно большое периодическое целое десятичное число с девятками на позициях со всеми именно

и только строго меньшими, чем заданный произвольный конечный или бесконечный номер μ, неотрицательными целыми номерами в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых нижних указателях (индексах) соответствующих цифр

$$(9)_{(<\mu)} =° 9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}$$

есть

$$(9)_{(<\mu)} =° 9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)} =° 9(10^{\mu} -° 1)/(10 - 1) =° 10^{\mu} -° 1.$$

Общий пример. В общей теории сверхчисел актуально (достигнуто) бесконечно большое периодическое число с девятками в целой и дробной частях на позициях со всеми именно и только не большими, чем заданный произвольный конечный или бесконечный номер μ, и не меньшими, чем взятый с отрицательным знаком заданный

произвольный конечный или бесконечный номер ν, целыми номерами λ в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых нижних указателях (индексах) соответствующих цифр

$$(9)_{(-\nu\le\lambda\le\mu)} =° 9_{(\mu)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu)}$$

есть

$$(9)_{(-\nu\le\lambda\le\mu)} =° 9_{(\mu)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu)} =° (9)_{(0\le\lambda\le\mu)} +° (9)_{(-\nu\le\lambda\le -1)} =° 9_{(\mu)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)} +° 0.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu)} =° 9(10^{\mu+1} -° 1)/(10 - 1) +° 0.9(1 -° 10^{-\nu})/(1 - 10^{-1}) =° 10^{\mu+1} -° 1 +° 1 -° 10^{-\nu} =° 10^{\mu+1} -° 10^{-\nu}$$

и именно в точности меньше актуально (достигнуто) бесконечно большого целого десятичного числа $10^{\mu+1}$ на актуально (достигнуто) бесконечно малую величину $10^{-\nu}$:

$$(9)_{(-\nu\le\lambda\le\mu)} =° 9_{(\mu)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu)} =°$$

$$10^{\mu+1} -^\circ 10^{-\nu},$$

$$(9)_{(-\nu\leq\lambda\leq\mu)} =^\circ 9_{(\mu)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu)} \neq^\circ 10^{\mu+1},$$

$$(9)_{(-\nu\leq\lambda\leq\mu)} =^\circ 9_{(\mu)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu)} \approx^\circ 10^{\mu+1},$$

$$(9)_{(-\nu\leq\lambda\leq\mu)} =^\circ 9_{(\mu)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu)} <^\circ 10^{\mu+1}.$$

Общий пример. В общей теории сверхчисел актуально (достигнуто) бесконечно большое периодическое число с девятками в целой и дробной частях на позициях со всеми именно и только строго меньшими, чем заданный произвольный конечный или бесконечный номер μ, и строго большими, чем взятый с отрицательным знаком заданный произвольный конечный или бесконечный номер ν, целыми номерами λ в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых нижних указателях (индексах) соответствующих цифр

$$(9)_{(-\nu<\lambda<\mu)} =^\circ 9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu+1)}$$

есть

$$(9)_{(-\nu<\lambda<\mu)} =^\circ 9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu+1)} =^\circ$$

$$(9)_{(0\le\lambda\le\mu-1)} +^\circ (9)_{(-\nu+1\le\lambda\le-1)} =^\circ$$

$$9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)} +^\circ 0.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu+1)} =^\circ$$

$$9(10^\mu -^\circ 1)/(10 - 1) +^\circ 0.9(1 -^\circ 10^{-\nu+1})/(1 - 10^{-1}) =^\circ$$

$$10^\mu -^\circ 1 +^\circ 1 -^\circ 10^{-\nu+1} =^\circ 10^\mu -^\circ 10^{-\nu+1}$$

и именно в точности меньше актуально (достигнуто) бесконечно большого целого десятичного числа 10^μ на актуально (достигнуто) бесконечно малую величину $10^{-\nu+1}$:

$$(9)_{(-\nu<\lambda<\mu)} =^\circ 9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu+1)} =^\circ$$

$$10^\mu -^\circ 10^{-\nu+1},$$

$$(9)_{(-\nu<\lambda<\mu)} =^\circ 9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu+1)} \neq^\circ 10^\mu,$$

$$(9)_{(-\nu<\lambda<\mu)} =^\circ 9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu+1)} \approx^\circ 10^\mu,$$

$$(9)_{(-\nu<\lambda<\mu)} =^\circ 9_{(\mu-1)}\dots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\dots 9_{(-\nu+1)} <^\circ 10^\mu.$$

Общий пример. В общей теории сверхчисел актуально (достигнуто) бесконечно большое периодическое число с девятками в целой и дробной частях на позициях со всеми именно и только не большими, чем заданный произвольный конечный или бесконечный номер μ, и большими, чем взятый с отрицательным знаком заданный произвольный конечный или бесконечный номер ν, целыми номерами λ в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых нижних указателях (индексах) соответствующих цифр

$$(9)_{(-\nu<\lambda\le\mu)} =^\circ 9_{(\mu)}\dots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\dots 9_{(-\nu+1)}$$

есть

$$(9)_{(-\nu<\lambda\le\mu)} =^\circ 9_{(\mu)}\dots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\dots 9_{(-\nu+1)} =^\circ$$

$$(9)_{(0\leq\lambda\leq\mu)} +^\circ (9)_{(-\nu+1\leq\lambda\leq-1)} =^\circ$$

$$9_{(\mu)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)} +^\circ 0.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu+1)} =^\circ$$

$$9(10^{\mu+1} -^\circ 1)/(10 - 1) +^\circ 0.9(1 -^\circ 10^{-\nu+1})/(1 - 10^{-1}) =^\circ$$

$$10^{\mu+1} -^\circ 1 +^\circ 1 -^\circ 10^{-\nu+1} =^\circ 10^{\mu+1} -^\circ 10^{-\nu+1}$$

и именно в <u>точности</u> меньше <u>актуально</u> (<u>достигнуто</u>) <u>бесконечно</u> <u>большого</u> <u>целого</u> десятичного числ<u>а</u> $10^{\mu+1}$ на <u>актуально</u> (<u>достигнуто</u>) <u>бесконечно</u> <u>малую</u> величину $10^{-\nu}$:

$$(9)_{(-\nu<\lambda\leq\mu)} =^\circ 9_{(\mu)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu+1)} =^\circ$$

$$10^{\mu+1} -^\circ 10^{-\nu+1},$$

$$(9)_{(-\nu<\lambda\leq\mu)} =^\circ 9_{(\mu)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu+1)} \neq^\circ 10^{\mu+1},$$

$$(9)_{(-\nu<\lambda\leq\mu)} =^\circ 9_{(\mu)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu+1)} \approx^\circ 10^{\mu+1},$$

$$(9)_{(-\nu<\lambda\leq\mu)} =^\circ 9_{(\mu)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu+1)} <^\circ 10^{\mu+1}.$$

Общий пример. В общей теории сверхчисел актуально (достигнуто) бесконечно большое периодическое число с девятками в целой и дробной частях на позициях со всеми именно и только меньшими, чем заданный произвольный конечный или бесконечный номер μ, и не меньшими, чем взятый с отрицательным знаком заданный произвольный конечный или бесконечный номер ν, целыми номерами λ в показывающих искусственность нумерации круглых скобках в правых нижних указателях (индексах) соответствующих цифр

$$(9)_{(-\nu\le\lambda<\mu)} =^\circ 9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu)}$$

есть

$$(9)_{(-\nu\le\lambda<\mu)} =^\circ 9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu)} =^\circ$$

$$(9)_{(0\le\lambda\le\mu-1)} +^\circ (9)_{(-\nu\le\lambda\le-1)} =^\circ$$

$$9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)} +^\circ 0.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu)} =^\circ$$
$$9(10^\mu -^\circ 1)/(10 - 1) +^\circ 0.9(1 -^\circ 10^{-\nu})/(1 - 10^{-1}) =^\circ$$
$$10^\mu -^\circ 1 +^\circ 1 -^\circ 10^{-\nu} =^\circ 10^\mu -^\circ 10^{-\nu}$$

и именно в точности меньше актуально (достигнуто) бесконечно большого целого десятичного числа 10^μ на актуально (достигнуто) бесконечно малую величину $10^{-\nu}$:

$$(9)_{(-\nu\le\lambda<\mu)} =^\circ 9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu)} =^\circ$$
$$10^\mu -^\circ 10^{-\nu},$$
$$(9)_{(-\nu\le\lambda<\mu)} =^\circ 9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu)} \neq^\circ 10^\mu,$$
$$(9)_{(-\nu\le\lambda<\mu)} =^\circ 9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu)} \approx^\circ 10^\mu,$$
$$(9)_{(-\nu\le\lambda<\mu)} =^\circ 9_{(\mu-1)}\ldots 9_{(5)}9_{(4)}9_{(3)}9_{(2)}9_{(1)}9_{(0)}.9_{(-1)}9_{(-2)}9_{(-3)}9_{(-4)}9_{(-5)}\ldots 9_{(-\nu)} <^\circ 10^\mu.$$

Следствие. Открыто явление цифровой выражаемости актуально (достигнуто) бесконечно больших чисел.

14. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОНЕЧНЫМ ПЕРЕШАГИВАНИЕМ С ИЗБИРАТЕЛЬНОЙ (ВЫБОРОЧНОЙ) ПРЕДЕЛЬНОСТЬЮ БЕСКОНЕЧНО МАЛОГО ПЕРЕШАГИВАНИЯ

Известна теорема Больцано–Коши о принятии непрерывной на действительном промежутке функцией всех её промежуточных значений.

Для дискретной функции это свойство, вообще говоря, не имеет места ввиду перешагивания (перескакивания, перепрыгивания) значений как независимой переменной, так и зависимой переменной.

Общая теория наилучшего приближения промежуточных значений конечным перешагиванием с избирательной (выборочной) предельностью бесконечно малого перешагивания состоит из теории наилучшего приближения промежуточных значений конечным перешагиванием и из теории избирательной (выборочной) предельности бесконечно малого перешагивания.

Теория наилучшего приближения промежуточных значений конечным перешагиванием включает метод наилучшего приближения промежуточных значений конечным монотонным перешагиванием и метод наилучшего приближения промежуточных значений конечным монотонным или возвратно-поступательным перешагиванием.

Теория избирательной (выборочной) предельности бесконечно малого перешагивания включает метод охватывающих колебаний монотонных конечных групп бесконечно малых шагов и метод охватывающих колебаний монотонных или возвратно-поступательных конечных групп бесконечно малых шагов.

Сущность метода наилучшего приближения промежуточных значений конечным монотонным перешагиванием заключается в следующем. Ввиду монотонности конечного перешагивания имеет место именно конечное разбиение промежутка между значениями дискретной функции на шаговые подпромежутки. Придание направления этой монотонности этим промежутку и подпромежуткам превращает их в вектор и

подвекторы с направлением этой монотонности соответственно. Из принадлежности промежуточного значения промежутку, превращающемуся включением обоих его концов в отрезок, следует принадлежность этого промежуточного значения или в первом случае ровно одному из этих подпромежутков, превращающемуся включением обоих его концов в подотрезок, тогда и только тогда, когда это промежуточное значение не принимается именно в точности этой дискретной функцией, или во втором случае сразу паре смежных подпромежутков, превращающихся включением всех их концов в подотрезки, тогда и только тогда, когда это промежуточное значение принимается именно в точности этой дискретной функцией. В первом случае наилучшим приближением к

этому промежуточному значению является именно ближайший к этому промежуточному значению конец этого подпромежутка, причём абсолютная погрешность этого наилучшего приближения не превышает половины длины этого подпромежутка, а при этом промежуточном значении точно в середине этого подпромежутка сразу оба его конца являются именно наилучшими приближениями этого промежуточного значения, так что возможен произвольный выбор любого из этих концов. Во втором случае это промежуточное значение именно в точности принимается этой дискретной функцией, наилучшим приближением этого промежуточного значения является соответствующее значение этой дискретной функции, причём именно точным, так что его абсолютная погрешность равна нулю.

Сущность метода наилучшего приближения промежуточных значений конечным монотонным или возвратно-поступательным перешагиванием заключается в следующем. Ввиду возможной немонотонности конечного перешагивания может не иметь места именно конечное разбиение промежутка между значениями дискретной функции на шаговые подпромежутки. Однако придание направления оси значений этой дискретной функции этому промежутку превращает его в вектор, при этом поступательные подпромежутки превращаются в подвекторы с направлением этой оси, а возвратные подпромежутки превращаются в подвекторы с направлением, противоположным направлению этой оси, причём этот вектор равен векторной сумме этих

подвекторов. Кроме того, именно множество Кантора всех значений этой дискретной функции с выбрасыванием всех повторяющихся значений и упорядочение этого множества в направлении оси значений этой дискретной функции обеспечивает именно конечное разбиение промежутка между значениями дискретной функции на шаговые и/или нешаговые подпромежутки, то есть не во всём соответствующие шагам. Из принадлежности промежуточного значения промежутку, превращающемуся включением обоих его концов в отрезок, следует принадлежность этого промежуточного значения или в первом случае ровно одному из этих шаговых и/или нешаговых подпромежутков, превращающемуся включением обоих его концов в подотрезок, тогда и только

тогда, когда это промежуточное значение не принимается именно в точности этой дискретной функцией, или во втором случае сразу паре смежных из этих шаговых и/или нешаговых подпромежутков, превращающихся включением всех их концов в подотрезки, тогда и только тогда, когда это промежуточное значение принимается именно в точности этой дискретной функцией. В первом случае наилучшим приближением к этому промежуточному значению является именно ближайший к этому промежуточному значению конец этого подпромежутка, причём абсолютная погрешность этого наилучшего приближения не превышает половины длины этого подпромежутка, а при этом промежуточном значении точно в середине этого подпромежутка сразу оба его конца

являются именно наилучшими приближениями этого промежуточного значения, так что возможен произвольный выбор любого из этих концов. Во втором случае это промежуточное значение именно в точности принимается этой дискретной функцией, так что наилучшим приближением этого промежуточного значения является соответствующее значение этой дискретной функции, причём именно точным, то есть его абсолютная погрешность равна нулю.

Сущность метода охватывающих колебаний монотонных конечных групп бесконечно малых шагов заключается в следующем. Счётно бесконечная последовательность всех шагов представляется счётно бесконечным именно последовательным объединением монотонных конечных

групп именно последовательных бесконечно малых шагов. Необходимым и достаточным условием применимости этого метода является счётная бесконечность множества всех таких групп, которые обеспечивают именно колебания, охватывающие требуемое промежуточное значение, при этом принадлежащее промежутку между крайними значениями дискретной функции на каждой такой группе шагов с добавлением после неё первого элемента непосредственно следующей группы. Теперь к каждой такой группе шагов применяется метод наилучшего приближения промежуточных значений конечным монотонным перешагиванием, находящий именно наилучшее приближение требуемого промежуточного значения на каждой такой группе шагов с добавлением

после неё первого элемента непосредственно следующей группы. Тогда счётно бесконечная последовательность всех этих наилучших приближений требуемого промежуточного значения на каждой такой группе шагов с добавлением после неё первого элемента непосредственно следующей группы необходимо сходится именно к этому требуемому промежуточному значению ввиду бесконечной малости последовательности всех шагов.

Сущность метода охватывающих колебаний монотонных или возвратно-поступательных конечных групп бесконечно малых шагов заключается в следующем. Счётно бесконечная последовательность всех шагов представляется счётно бесконечным именно последовательным объединением монотонных или

возвратно-поступательных конечных групп именно последовательных бесконечно малых шагов. Необходимым и достаточным условием применимости этого метода является счётная бесконечность множества всех таких групп, которые обеспечивают именно колебания, охватывающие требуемое промежуточное значение, при этом принадлежащее промежутку между крайними значениями дискретной функции на каждой такой группе шагов с добавлением после неё первого элемента непосредственно следующей группы. Теперь к каждой такой группе шагов применяется метод наилучшего приближения промежуточных значений конечным монотонным или возвратно-поступательным перешагиванием, находящий именно наилучшее

приближение требуемого промежуточного значения на каждой такой группе шагов с добавлением после неё первого элемента непосредственно следующей группы. Тогда счётно бесконечная последовательность всех этих наилучших приближений требуемого промежуточного значения на каждой такой группе шагов с добавлением после неё первого элемента непосредственно следующей группы необходимо сходится именно к этому требуемому промежуточному значению ввиду бесконечной малости последовательности всех шагов.

Все изложенные в настоящем разделе теории и методы применяются в следующем разделе.

15. ОБЩИЕ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ И ДОМНОЖЕСТВ (ПРЕДМНОЖЕСТВ) С ОБОБЩЕНИЕМ НИЖНЕГО И ВЕРХНЕГО ПРЕДЕЛОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И С ДОЛЕВОЙ ТЕОРИЕЙ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВСЕХ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

В классической математике хорошо известны понятия:

1) нижнего предела lim inf последовательности как наименьшего из пределов её сходящихся подпоследовательностей;

2) верхнего предела lim sup последовательности как наибольшего из пределов её сходящихся подпоследовательностей.

Однако при этом не рассматриваются:

1) доли, даже если они существуют, и всегда существующие нижние и верхние доли соответствующих крайних сходящихся к нижнему пределу lim inf и к верхнему пределу lim sup подпоследовательностей в полной последовательности;

2) возможные промежуточные частичные пределы lim part остальных сходящихся подпоследовательностей последовательности;

3) доли, даже если они существуют, и всегда существующие нижние и верхние доли соответствующих промежуточных сходящихся подпоследовательностей в полной последовательности;

4) (верхне и нижне) долевое количественное множество всевозможных частичных пределов сходящихся подпоследовательностей последовательности.

Представляется целесообразным заменить понятие «для почти всех натуральных чисел» в смысле «для всех достаточно больших натуральных чисел» именно этим точным последним понятием, а освободившееся понятие «для почти всех натуральных чисел» использовать именно правильно в буквальном смысле наподобие общепринятого понятия «для почти всех действительных чисел», то есть для всех действительных чисел, кроме принадлежащих множеству нулевой меры исключённых действительных чисел. Таким образом, понятие «для почти всех натуральных чисел» означает, что относительная доля всех

исключённых натуральных чисел на отрезке натуральных чисел от единицы до n включительно ($n \in N = (1, 2, 3, ...)$) бесконечно мала, то есть стремится к нулю при неограниченном увеличении натурального числа n. Таким образом, при понятии «для почти всех натуральных чисел» множество (последовательность) всех исключённых натуральных чисел может быть не только конечным (конечной), как при понятии «для всех достаточно больших натуральных чисел», но и бесконечным (бесконечной), например множеством (последовательностью)

$$\{m^1, m^2, m^3, m^4, ...\} \ ((m^1, m^2, m^3, m^4, ...))$$

степеней превышающего единицу натурального числа m со всеми последовательными натуральными показателями, множеством (последовательностью)

$$\{1!, 2!, 3!, 4!, ...\} ((1!, 2!, 3!, 4!, ...))$$

факториалов всех последовательных натуральных чисел, множеством (последовательностью)

$$\{1^1, 2^2, 3^3, 4^4, ...\} ((1^1, 2^2, 3^3, 4^4, ...))$$

степеней всех последовательных натуральных чисел с равными им показателями, множеством (последовательностью) всех простых чисел

$$\{2, 3, 5, ...\} ((2, 3, 5, ...)).$$

После изложения этих идеи и нескольких примеров представляются целесообразными следующие обобщения.

<u>Определение</u>. <u>Относительной частотой</u> <u>упорядоченной пары</u> (A, B) последовательностей <u>некоторых действительных</u> чисел на содержащем <u>конечное</u> множество элементов последовательности A и <u>ненулевое</u> <u>конечное</u>

множество элементов последовательности B конечном действительном отрезке [a, b] (a ≤ b) называется отношение количеств элементов теоретико-множественных пересечений этих последовательностей A и B с этим отрезком:

$$\delta_{[a,b]}(A, B) = |A \cap [a, b]|/|B \cap [a, b]|.$$

Определение. Долей подпоследовательности A последовательности B некоторых действительных чисел на содержащем ненулевое конечное множество элементов последовательности B конечном действительном отрезке [a, b] (a ≤ b) называется отношение количеств элементов теоретико-множественных пересечений этих подпоследовательности A и последовательности B с этим отрезком:

$$\delta_{[a,b]}(A \subseteq B) = |A \cap [a, b]|/|B \cap [a, b]|.$$

Определение. Долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел на содержащем хотя бы один элемент последовательности N конечном действительном отрезке [a, b] (a ≤ b) называется отношение количеств элементов теоретико-множественных пересечений подпоследовательности M и последовательности N с этим отрезком [a, b]:

$$\delta_{[a,b]}(M \subseteq N) = |M \cap [a, b]|/|N \cap [a, b]|.$$

Определение. Долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) (n ≥ 1) последовательности N называется отношение количества

m_n элементов теоретико-множественного пересечения подпоследовательности M с этой начально конечной подпоследовательностью (1, 2, 3, ... , n) последовательности N к количеству n элементов теоретико-множественного пересечения последовательности N с этой начально конечной подпоследовательностью (1, 2, 3, ... , n) последовательности N:

$$\delta_n(M\subseteq N) = |M \cap (1, 2, 3, \ldots , n)|/|N \cap (1, 2, 3, \ldots , n)| =$$
$$|M \cap (1, 2, 3, \ldots , n)|/|(1, 2, 3, \ldots , n)| = m_n/n.$$

Следствие. Счётно бесконечная долевая последовательность

$$(\delta_1(M\subseteq N), \delta_2(M\subseteq N), \delta_3(M\subseteq N), \ldots , \delta_n(M\subseteq N), \ldots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на

последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), \ldots , (1, 2, 3, \ldots , n), \ldots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности является последовательностью некоторых рациональных чисел m_n/n между нулём и единицей включительно, не обязана сходиться к единственному действительному пределу, однако необходимо имеет действительные нижний и верхний пределы соответственно между нулём и единицей включительно:

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) \le \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) \le 1.$$

Следствие. Для сходимости счётно бесконечной долевой последовательности

$$(\delta_1(M\subseteq N),\ \delta_2(M\subseteq N),\ \delta_3(M\subseteq N),\ \dots,\ \delta_n(M\subseteq N),\ \dots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1),\ (1, 2),\ (1, 2, 3),\ \dots,\ (1, 2, 3, \dots, n),\ \dots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности необходимо и достаточно равенство этих действительных нижнего и верхнего пределов соответственно между собой:

$$\lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M \subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M \subseteq N).$$

При этом условии счётно бесконечная долевая последовательность

$$(\delta_1(M \subseteq N), \delta_2(M \subseteq N), \delta_3(M \subseteq N), \ldots , \delta_n(M \subseteq N), \ldots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), \ldots , (1, 2, 3, \ldots , n), \ldots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности сходится к общему значению этих действительных нижнего и верхнего пределов как к

единственному действительному пределу между нулём и единицей включительно:

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) \le 1.$$

Определение. Нижней долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел называется нижний предел

$$\lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N)$$

счётно бесконечной долевой последовательности

$$(\delta_1(M\subseteq N), \delta_2(M\subseteq N), \delta_3(M\subseteq N), \dots , \delta_n(M\subseteq N), \dots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), \ldots , (1, 2, 3, \ldots , n), \ldots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности.

Определение. Верхней долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел называется верхний предел

$$\lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N)$$

счётно бесконечной долевой последовательности

$$(\delta_1(M\subseteq N), \delta_2(M\subseteq N), \delta_3(M\subseteq N), \ldots , \delta_n(M\subseteq N), \ldots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на

последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), ... , (1, 2, 3, ... , n), ...)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности.

Определение. Долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел называется общее (единое, совместное) значение

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N)$$

нижнего предела

$$\lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N)$$

и верхнего предела

$$\lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N)$$

счётно бесконечной долевой последовательности

$$(\delta_1(M\subseteq N), \delta_2(M\subseteq N), \delta_3(M\subseteq N), \ldots , \delta_n(M\subseteq N), \ldots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), \ldots , (1, 2, 3, \ldots , n), \ldots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности.

Следствие. Нижняя доля

$$\lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N)$$

и верхняя доля

$$\lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N)$$

любой подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), \dots , (1, 2, 3, \dots , n), \dots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности всегда существуют и выражаются действительными числами в пределах от нуля до единицы включительно.

Следствие. Доля

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), ... , (1, 2, 3, ... , n), ...)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности существует тогда и только тогда, когда нижняя доля

$$\lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N)$$

и верхняя доля

$$\lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N)$$

этой подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

((1), (1, 2), (1, 2, 3), ... , (1, 2, 3, ... , n), ...)

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности равны между собой, и в случае своего существования выражается действительным числом в пределах от нуля до единицы включительно.

Определение. Долевая иерархия подпоследовательностей последовательности

N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)

всех натуральных чисел есть частичное упорядочение этих подпоследовательностей по их (нижней и/или верхней) долям.

Определение. Полная подпоследовательность последовательности

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

всех натуральных чисел есть сама последовательность N.

Определение. Начально усечённая подпоследовательность последовательности

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

всех натуральных чисел есть одна из подпоследовательностей последовательности N без конечного множества первых элементов именно подряд.

Определение. Конечно сокращённая подпоследовательность последовательности

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

всех натуральных чисел есть одна из подпоследовательностей последовательности N без конечного множества некоторых элементов последовательности N.

Определение. Полно долевая подпоследовательность последовательности

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

всех натуральных чисел есть одна из подпоследовательностей последовательности N, доля каждой из которых существует и равна единице.

Определение. Верхне полно долевая подпоследовательность последовательности

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

всех натуральных чисел есть одна из подпоследовательностей последовательности N, верхняя доля каждой из которых равна единице.

Определение. Нижне частично долевая подпоследовательность последовательности

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

всех натуральных чисел есть одна из подпоследовательностей последовательности N, нижняя доля каждой из которых находится строго между нулём и единицей.

Определение. Частично долевая подпоследовательность последовательности

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

всех натуральных чисел есть одна из подпоследовательностей последовательности N, доля каждой из которых существует и находится строго между нулём и единицей.

Определение. Верхне частично долевая подпоследовательность последовательности

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

всех натуральных чисел есть одна из подпоследовательностей последовательности N, верхняя доля каждой из которых находится строго между нулём и единицей.

Определение. Нижне бездолевая (нижне обездоленная) подпоследовательность последовательности

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

всех натуральных чисел есть одна из подпоследовательностей последовательности N, нижняя доля каждой из которых равна нулю.

Определение. Бездолевая (обездоленная) подпоследовательность последовательности

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

всех натуральных чисел есть одна из подпоследовательностей последовательности N, доля каждой из которых существует и равна нулю.

Определение. Начально конечная подпоследовательность последовательности

$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$

всех натуральных чисел есть одна из подпоследовательностей последовательности N, каждая из которых состоит из конечного множества первых элементов последовательности N именно подряд.

Определение. Конечная подпоследовательность последовательности

$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$

всех натуральных чисел есть одна из подпоследовательностей последовательности N, каждая из которых состоит из конечного множества некоторых элементов последовательности N.

Определение. Пустая подпоследовательность последовательности

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

всех натуральных чисел есть пустое множество ∅.

Теорема. Для любого действительного числа

$$b\ (0 \le b \le 1)$$

от нуля до единицы включительно существует такая подпоследовательность M последовательности N всех натуральных чисел, доля которой в точности равна этому действительному числу b:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M \subseteq N) = b.$$

Доказательство.

Необходимо и достаточно построить такую подпоследовательность M последовательности N всех натуральных чисел, доля которой

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M \subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M \subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M \subseteq N)$$

существует и равна этому действительному числу b:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = b.$$

Если

$$b = 0,$$

то <u>достаточно</u> взять обладающие <u>нулевыми</u> доли<u>я</u>ми <u>пустую</u> <u>подпоследовательность</u> ∅ или <u>любую</u> <u>конечную</u> <u>подпоследовательность</u> M <u>последовательности</u> N <u>всех</u> <u>натуральных</u> чисел, в частности <u>любую</u> <u>начально</u> <u>конечную</u> <u>подпоследовательность</u> M <u>последовательности</u> N <u>всех</u> <u>натуральных</u> чисел.

Если

$$b = 1,$$

то в качестве подпоследовательности M достаточно взять обладающие единичными долями саму последовательность N всех натуральных чисел целиком или без любого конечного множества некоторых элементов, в частности без любой начально конечной подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел.

Теперь остаётся рассмотреть случай строгой промежуточности этого действительного числа b между нулём и единицей:

$$0 < b < 1.$$

Применяется общая теория наилучшего приближения промежуточных значений конечным перешагиванием с избирательной (выборочной) предельностью бесконечно малого перешагивания с её теорией наилучшего

приближения промежуточных значений конечным перешагиванием и теорией избирательной (выборочной) предельности бесконечно малого перешагивания и с их методом наилучшего приближения промежуточных значений конечным монотонным перешагиванием и методом охватывающих колебаний монотонных конечных групп бесконечно малых шагов.

Для построения одной из таких подпоследовательностей M последовательности N всех натуральных чисел, доля которой

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N)$$

существует и равна этому действительному числу b:

$$0 < \lim_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = b < 1,$$

достаточен следующий алгоритм именно последовательного рассмотрения всех подряд элементов последовательности N

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

всех натуральных чисел на предмет их или включения, или невключения в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных чисел для обеспечения указанного предела

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = b$$

счётно бесконечной долевой последовательности

$$(\delta_1(M\subseteq N), \delta_2(M\subseteq N), \delta_3(M\subseteq N), ... , \delta_n(M\subseteq N), ...)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на

последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

((1), (1, 2), (1, 2, 3), ... , (1, 2, 3, ... , n), ...)

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности.

Определение. Попарно групповой математической индукцией называется математическая индукция, последовательные значения индукционного параметра которой могут объединяться в группы, эти группы могут объединяться в смежные пары групп, выборочное доказательство утверждения осуществляется для целых групп последовательных значений индукционного

параметра проверкой утверждения для начальной пары групп последовательных значений индукционного параметра и доказательством утверждения при переходе к любой следующей паре групп последовательных значений индукционного параметра, а на основе этого выборочного доказательства осуществляется сплошное доказательство утверждения именно для всех отдельных значений индукционного параметра.

Общая сущность обоих способов построения одной из таких подпоследовательностей $_{(1)}M$ по первому способу или $_{(2)}M$ по второму способу последовательности N всех натуральных чисел и доказательства достаточности этого построения попарно групповой математической индукцией заключается в следующем.

По предложенному алгоритму именно однозначно строится своя для каждого из обоих этих способов некоторая непременно строго монотонно возрастающая последовательность

$$(n_1 = n(1),\ n_2 = n(2),\ n_3 = n(3),\ n_4 = n(4),\ \dots ,\ n_{2k-1} = n(2k-1),\ n_{2k} = n(2k),\ n_{2k+1} = n(2k+1),\ n_{2k+2} = n(2k+2),\ \dots)$$

некоторых положительных целых чисел с последовательностью

$$N = (1, 2, 3, 4, \dots , 2k-1, 2k, 2k+1, 2k+2, \dots)$$

всех положительных целых чисел именно подряд в указателях (индексах) как номеров будущих групп

$$G_j = (n_{j-1}+1, n_{j-1}+2, n_{j-1}+3, \dots , n_j)\ (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots), n_0 = 0)$$

с именно последовательным разбиением

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots) = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5 \cup \ldots \cup G_j \cup \ldots =$$
$$G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup \ldots \cup G_{2k-1} \cup G_{2k} \cup G_{2k+1} \cup G_{2k+2} \cup \ldots =$$
$$(1, 2, 3, \ldots , n_1) \cup (n_1+1, n_1+2, n_1+3, \ldots , n_2) \cup (n_2+1, n_2+2, n_2+3, \ldots , n_3) \cup (n_3+1, n_3+2, n_3+3, \ldots , n_4) \cup \ldots \cup (n_{2k-2}+1, n_{2k-2}+2, n_{2k-2}+3, \ldots , n_{2k-1}) \cup (n_{2k-1}+1, n_{2k-1}+2, n_{2k-1}+3, \ldots , n_{2k}) \cup (n_{2k}+1, n_{2k}+2, n_{2k}+3, \ldots , n_{2k+1}) \cup (n_{2k+1}+1, n_{2k+1}+2, n_{2k+1}+3, \ldots , n_{2k+2}) \cup \ldots$$

последовательности N <u>всех</u> <u>положительных</u> целых чисел на <u>смежные</u> <u>конечные</u> <u>группы</u> именно <u>последовательных</u> <u>положительных</u> целых чисел, <u>завершающиеся</u> элементами построенной последовательности

$$(n_1 = n(1), n_2 = n(2), n_3 = n(3), n_4 = n(4), \ldots ,$$
$$n_{2k-1} = n(2k-1), n_{2k} = n(2k), n_{2k+1} = n(2k+1), n_{2k+2} = n(2k+2), \ldots)$$

именно с <u>номерами</u>

$$1, 2, 3, 4, \ldots , 2k-1, 2k, 2k+1, 2k+2, \ldots$$

групп.

В подпоследовательность M последовательности N всех натуральных чисел включаются именно целиком эти группы непременно через одну, то есть по первому способу именно и только группы с нечётными номерами

$$ {}_{(1)}M = {}_{(1)}G_1 \cup {}_{(1)}G_3 \cup \ldots \cup {}_{(1)}G_{2k-1} \cup {}_{(1)}G_{2k+1} \cup \ldots = (1, 2, 3, \ldots , {}_{(1)}n_1) \cup ({}_{(1)}n_2+1, {}_{(1)}n_2+2, {}_{(1)}n_2+3, \ldots , {}_{(1)}n_3) \cup \ldots \cup ({}_{(1)}n_{2k-2}+1, {}_{(1)}n_{2k-2}+2, {}_{(1)}n_{2k-2}+3, \ldots , {}_{(1)}n_{2k-1}) \cup ({}_{(1)}n_{2k}+1, {}_{(1)}n_{2k}+2, {}_{(1)}n_{2k}+3, \ldots , {}_{(1)}n_{2k+1}) \cup \ldots $$

либо по второму способу именно и только группы с чётными номерами

$$ {}_{(2)}M = {}_{(2)}G_2 \cup {}_{(2)}G_4 \cup \ldots {}_{(2)}\cup G_{2k} \cup {}_{(2)}G_{2k+2} \cup \ldots = ({}_{(2)}n_1+1, {}_{(2)}n_1+2, {}_{(2)}n_1+3, \ldots , {}_{(2)}n_2) \cup ({}_{(2)}n_3+1, {}_{(2)}n_3+2, {}_{(2)}n_3+3, \ldots , {}_{(2)}n_4) \cup \ldots \cup ({}_{(2)}n_{2k-1}+1, {}_{(2)}n_{2k-1}+2, {}_{(2)}n_{2k-1}+3, \ldots , {}_{(2)}n_{2k}) \cup ({}_{(2)}n_{2k+1}+1, {}_{(2)}n_{2k+1}+2, {}_{(2)}n_{2k+1}+3, \ldots , {}_{(2)}n_{2k+2}) \cup \ldots . $$

Случай строгой промежуточности действительного числа b между нулём и единицей

$$0 < b < 1$$

позволяет обеспечить в каждом из этих обоих способов именно строгое чередование знаков разностей в их счётно бесконечных последовательностях

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(3)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(4)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b, \dots ,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b, \dots)$$

по первому способу с непременно положительной первой разностью ввиду включения в подпоследовательность ${}_{(1)}M$ первой группы и

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(3)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(4)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ \dots ,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ \dots)$$

по <u>второму</u> способу с непременно <u>отрицательной</u> <u>первой</u> <u>разностью</u> ввиду <u>невключения</u> в <u>подпоследовательность</u> ${}_{(2)}M$ <u>первой</u> группы.

Непременная <u>однозначность</u> именно <u>своей</u> для <u>каждого</u> из <u>обоих</u> этих <u>способов</u> некоторой непременно <u>строго</u> <u>монотонно</u> <u>возрастающей</u> <u>счётно</u> <u>бесконечной</u> <u>последовательности</u>

$$({}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1),\ {}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),\ {}_{(1)}n_3 = {}_{(1)}n(3),\ {}_{(1)}n_4 = {}_{(1)}n(4),\ \dots ,\ {}_{(1)}n_{2k-1} = {}_{(1)}n(2k-1),\ {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k),\ {}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),\ {}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2),\ \dots)$$

по <u>первому</u> способу и

$$({}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1),\ {}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2),\ {}_{(2)}n_3 = {}_{(2)}n(3),\ {}_{(2)}n_4 = {}_{(2)}n(4),\ \ldots\ ,$$
$${}_{(2)}n_{2k-1} = {}_{(2)}n(2k-1),\ {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k),$$
$${}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1),\ {}_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2),\ \ldots)$$

по второму способу обеспечивается именно минимальностью каждого элемента каждой из обеих этих последовательностей при необходимом и достаточном условии обеспечения в совокупности, во-первых, определённого знака первой разности и, во-вторых, строгого чередования знаков всех разностей каждой из обеих последовательностей этих разностей.

Первый из двух способов построения одной из таких подпоследовательностей ${}_{(1)}M$ последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел и доказательства достаточности этого построения попарно

групповой математической индукцией для случая существования единой доли b строго между нулём и единицей подпоследовательности $_{(1)}M$ последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то есть для случая равенства нижней и верхней долей подпоследовательности $_{(1)}M$ строго между нулём и единицей

$$0 < b < 1,$$

заключается в следующем.

В подпоследовательность $_{(1)}M$ включается начинающаяся с единицы первая группа последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел. Самый первый элемент 1 первой группы обеспечивает соответствующую долю

$$_{(1)}\delta_1(_{(1)}M \subseteq N) = 1$$

и определённый, в данном случае положительный, знак первой разности

$$_{(1)}\delta_1({}_{(1)}M \subseteq N) - b > 0,$$

что необходимо и достаточно для первого элемента

$$_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1) = 1$$

непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной последовательности

$$({}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1),\ {}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),\ {}_{(1)}n_3 = {}_{(1)}n(3),\ {}_{(1)}n_4 = {}_{(1)}n(4),\ \dots ,$$
$${}_{(1)}n_{2k-1} = {}_{(1)}n(2k-1),\ {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k),$$
$${}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),\ {}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2),\ \dots)$$

именно наименьших возможных последних элементов всех групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел. Так что начинающаяся с единицы наименьшая возможная первая группа

последовательности N всех натуральных чисел состоит именно целиком из этой единицы.

А модуль этой разности

$$|{}_{(1)}\delta_1({}_{(1)}M\subseteq N) - b| < 1 = 1/{}_{(1)}n_1 = 1/{}_{(1)}n(1),$$

поскольку

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(1)}({}_{(1)}M\subseteq N) = {}_{(1)}\delta_1({}_{(1)}M\subseteq N) = 1 = 1/{}_{(1)}n_1 = 1/{}_{(1)}n(1) > b > 0.$$

Теперь в подпоследовательность $_{(1)}M$ не включаются именно подряд образующие вторую группу второй и следующие элементы

$$2, 3, 4, 5, \ldots , {}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2)$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел с таким наименьшим натуральным числом

$${}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),$$

что именно впервые достигается чередование знаков разностей, так что вторая разность

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b < 0$$

должна именно впервые стать непременно отрицательной, для чего необходимо и достаточно

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M\subseteq N) < b.$$

Во-первых, множество всех удовлетворяющих неравенству

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M\subseteq N) < b$$

натуральных (положительных целых) чисел n не пусто, поскольку при невключении в подпоследовательность $_{(1)}M$ всех подряд превышающих единицу элементов последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел последовательность

$$({}_{(1)}\delta_1({}_{(1)}M\subseteq N) = 1,\ {}_{(1)}\delta_2({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_3({}_{(1)}M\subseteq N),\ \ldots ,\ {}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M\subseteq N),\ \ldots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности $_{(1)}M$ последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), \ldots , (1, 2, 3, \ldots , n), \ldots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности именно строго монотонно убывает и при неограниченном продолжении стремится к нулю, так что неравенство

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) < b$$

выполнено для всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел n,

$$n \in N = (1, 2, 3, \ldots).$$

Во-вторых, непустое множество всех удовлетворяющих неравенству

$${}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) < b$$

натуральных (положительных целых) чисел n именно вполне упорядочено и поэтому непременно содержит первый элемент, обозначенный посредством

$${}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),$$

причём

$${}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2) \geq 2,$$

обеспечивающий чередование знаков разностей, в данном случае отрицательный знак второй разности

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b < 0.$$

А модуль второй разности

$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b| \le ({}_{(1)}n_2 - 1)/{}_{(1)}n_2 - ({}_{(1)}n_2 - 2)/({}_{(1)}n_2 - 1) = ({}_{(1)}n_2{}^2 - 2{}_{(1)}n_2 + 1 - {}_{(1)}n_2{}^2 + 2{}_{(1)}n_2)/({}_{(1)}n_2({}_{(1)}n_2 - 1)) = 1/({}_{(1)}n_2({}_{(1)}n_2 - 1)) \le 1/{}_{(1)}n_2,$$

поскольку ввиду <u>минимальности</u> натурального числ<u>а</u>

$$ {}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2)$$

со свойством

$${}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M\subseteq N) < b$$

выполнено для предыдущего натурального числ<u>а</u>

$${}_{(1)}n_2 - 1 = {}_{(1)}n(2) - 1$$

условие

$${}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M\subseteq N) \ge b.$$

Принимается следующее <u>допущение</u> <u>математической индукции</u>.

Пусть для произвольного положительного целого числа k построена непременно строго монотонно возрастающая конечная последовательность

$$({}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1) = 1,\ {}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),\ {}_{(1)}n_3 = {}_{(1)}n(3),\ {}_{(1)}n_4 = {}_{(1)}n(4),\ \dots,\ {}_{(1)}n_{2k-1} = {}_{(1)}n(2k-1),\ {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k))$$

именно наименьших возможных последних элементов всех первых 2k групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающая непременно строгое чередование знаков разностей

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(j)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b) = (-1)^{j-1}\ (j \in (1, 2, 3, 4, \dots, 2k-1, 2k))$$

в их конечной последовательности

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(3)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(4)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b,\ \dots,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b)$$

по первому способу с непременно положительной первой разностью, причём модуль каждой из этих разностей не превышает $1/_{(1)}n_j$:

$$|_{(1)}\delta_{(1)n(j)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b| \leq 1/_{(1)}n_j,\ j \in (1, 2, 3, 4, \ldots , 2k\text{-}1, 2k).$$

Для k = 1 такое построение уже выполнено выше.

Поэтому по методу математической индукции остаётся с опорой на это допущение для произвольного положительного целого числа k доказать возможность перехода от k к k + 1. Итогом достраивания ещё двух последних элементов должна стать непременно строго монотонно возрастающая конечная последовательность

$$({}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1) = 1,\ {}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),\ {}_{(1)}n_3 = {}_{(1)}n(3),\ {}_{(1)}n_4 = {}_{(1)}n(4), \ldots ,$$
$${}_{(1)}n_{2k-1} = {}_{(1)}n(2k\text{-}1),\ {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k),$$
$${}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),\ {}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2))$$

именно наименьших возможных последних элементов всех первых 2k+2 групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающая именно строгое чередование знаков разностей

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(j)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b) = (-1)^{j-1}$$

$$(j \in (1, 2, 3, 4, \ldots , 2k-1, 2k, 2k+1, 2k+2))$$

в их конечной последовательности

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(3)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(4)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b, \ldots ,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b)$$

по первому способу с непременно положительной первой разностью, причём модуль каждой из этих разностей не превышает $1/{}_{(1)}n_j$:

$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(j)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b| \le 1/{}_{(1)}n_j,$$

$$j \in (1, 2, 3, 4, \ldots , 2k-1, 2k, 2k+1, 2k+2).$$

По допущению математической индукции для положительного целого числа k и j = 2k

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b) = (-1)^{2k-1} = -1,$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b < 0,$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) < b < 1.$$

Теперь в подпоследовательность $_{(1)}M$ включаются именно подряд образующие группу $_{(1)}G_{2k+1}$ с нечётным номером 2k+1 элементы

$${}_{(1)}n_{2k}+1,\ {}_{(1)}n_{2k}+2,\ {}_{(1)}n_{2k}+3,\ \ldots ,\ {}_{(1)}n_{2k+1}$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел с таким наименьшим натуральным числом

$${}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),$$

что

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N) > b.$$

Во-первых, множество <u>всех</u> удовлетворяющих <u>совместным</u> неравенствам

$$n > {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k),$$
$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M\subseteq N) > b$$

<u>натуральных</u> чисел n <u>не</u> <u>пусто</u>.

Ведь при <u>включении</u> в <u>подпоследовательность</u> $_{(1)}M$ <u>всех</u> <u>подряд</u> <u>превышающих</u>

$$_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k)$$

элементов

$$_{(1)}n_{2k}+1,\ {}_{(1)}n_{2k}+2,\ {}_{(1)}n_{2k}+3,\ \ldots$$

<u>последовательности</u> N <u>всех</u> <u>натуральных</u> (<u>положительных</u> целых) чисел последовательность

$$(\delta_1(M \subseteq N), \delta_2(M \subseteq N), \delta_3(M \subseteq N), \dots , \delta_n(M \subseteq N), \dots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), \dots , (1, 2, 3, \dots , n), \dots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности именно строго монотонно возрастает при $n \geq {}_{(1)}n_{2k}$ и при неограниченном продолжении стремится к единице, так что неравенство

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) > b$$

выполнено для всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел

$$n \in N = (1, 2, 3, ...).$$

Во-вторых, непустое множество всех удовлетворяющих неравенству

$${}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) > b$$

натуральных (положительных целых) чисел

$$n > {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k)$$

именно вполне упорядочено и поэтому непременно содержит первый элемент, обозначенный посредством

$${}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),$$

обеспечивающий смену, в данном случае на положительный, знака разности

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b > 0$$

для последнего элемента

$$_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1)$$

группы с нечётным номером 2k+1

$$_{(1)}G_{2k+1} = ({}_{(1)}n_{2k}+1, {}_{(1)}n_{2k}+2, {}_{(1)}n_{2k}+3, \ldots , {}_{(1)}n_{2k+1})$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел.

Ввиду минимальности натурального числа

$$_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1) > {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k)$$

со свойством

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) > b$$

выполнено для предыдущего натурального числа

$$_{(1)}n_{2k+1} - 1 = {}_{(1)}n(2k+1) - 1$$

условие

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) \leq b.$$

${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с натуральными (положительными целыми) числителем ${}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}$ и знаменателем ${}_{(1)}n_{2k+1}$, так что

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N) = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}/{}_{(1)}n_{2k+1} > b.$$

${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)-1}({}_{(1)}M\subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с ровно на единицу меньшими предыдущих неотрицательным целым числителем $({}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)} - 1)$ и натуральным (положительным целым) знаменателем $({}_{(1)}n_{2k+1} - 1)$, так что

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)-1}({}_{(1)}M\subseteq N) = ({}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)} - 1)/({}_{(1)}n_{2k+1} - 1) \leq b.$$

Отсюда следует, что модуль этой разности

$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b| = {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b = {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}$$
$$({}_{(1)}M\subseteq N) - {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)-1}({}_{(1)}M\subseteq N) + {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)-1}({}_{(1)}M\subseteq N) - b \leq$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)-1}({}_{(1)}M\subseteq N) = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}/{}_{(1)}n_{2k+1} - ({}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)} - 1)/({}_{(1)}n_{2k+1} - 1) = ({}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}n_{2k+1} - 1) - ({}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)} - 1){}_{(1)}n_{2k+1})/({}_{(1)}n_{2k+1}({}_{(1)}n_{2k+1} - 1)) = ({}_{(1)}n_{2k+1} - {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)})/({}_{(1)}n_{2k+1}({}_{(1)}n_{2k+1} - 1)) \le ({}_{(1)}n_{2k+1} - 1)/({}_{(1)}n_{2k+1}({}_{(1)}n_{2k+1} - 1)) = 1/{}_{(1)}n_{2k+1}.$$

Поэтому, как и требовалось, для <u>положительного</u> целого числ<u>а</u> k и $j = 2k+1$

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b) = (-1)^{2k+1-1} = (-1)^{2k} = +1,$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b > 0,$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N) > b,$$

$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b| \le 1/{}_{(1)}n_{2k+1}.$$

Тем самым построение ${}_{(1)}n_{2k+1}$ завершено и обосновано.

Теперь в <u>подпоследовательность</u> ${}_{(1)}M$ <u>не</u> <u>включаются</u> именно <u>подряд</u> образующие <u>группу</u> ${}_{(1)}G_{2k+2}$ с <u>чётным</u> номером 2k+2 элементы

$${}_{(1)}n_{2k+1}+1,\ {}_{(1)}n_{2k+1}+2,\ {}_{(1)}n_{2k+1}+3,\ \dots,\ {}_{(1)}n_{2k+2}$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел с таким наименьшим натуральным числом

$${}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2),$$

что

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) < b < 1.$$

Во-первых, множество всех удовлетворяющих совместным неравенствам

$$n > {}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),$$
$${}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) < b < 1$$

натуральных чисел n не пусто.

Ведь при невключении в подпоследовательность $_{(1)}M$ всех подряд превышающих

$${}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1)$$

элементов

$$_{(1)}n_{2k+1}+1,\ _{(1)}n_{2k+1}+2,\ _{(1)}n_{2k+1}+3,\ \ldots$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечная долевая последовательность

$$(\delta_1(M \subseteq N), \delta_2(M \subseteq N), \delta_3(M \subseteq N), \ldots , \delta_n(M \subseteq N), \ldots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), \ldots , (1, 2, 3, \ldots , n), \ldots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их

последовательности именно строго монотонно убывает при $n \geq {}_{(1)}n_{2k+1}$ и при неограниченном продолжении стремится к нулю, так что неравенство

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) < b$$

выполнено для всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел

$$n \in N = (1, 2, 3, ...).$$

Во-вторых, непустое множество всех удовлетворяющих неравенству

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) < b$$

натуральных чисел

$$n > {}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1)$$

именно вполне упорядочено и поэтому непременно содержит первый элемент, обозначенный посредством

$${}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2),$$

обеспечивающий смену, в данном случае на отрицательный, знака разности

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b < 0$$

для последнего элемента

$${}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2)$$

группы с чётным номером 2k+2

$${}_{(1)}G_{2k+2} = ({}_{(1)}n_{2k+1}+1, {}_{(1)}n_{2k+1}+2, {}_{(1)}n_{2k+1}+3, \dots , {}_{(1)}n_{2k+2})$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел.

Ввиду минимальности натурального числа

$${}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2) > {}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1)$$

со свойством

$${}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M\subseteq N) < b$$

выполнено для предыдущего натурального числа

$$_{(1)}n_{2k+2} - 1 = {}_{(1)}n(2k+2) - 1$$

условие

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) \geq b.$$

$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с натуральными (положительными целыми) числителем

$$_{(1)}m_{(1)n(2k+2)} = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}$$

и знаменателем $_{(1)}n_{2k+2}$, так что

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+2)}/{}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}/{}_{(1)}n_{2k+2} < b < 1.$$

$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)-1}({}_{(1)}M \subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с предыдущим натуральным (положительным целым) числителем

$$_{(1)}m_{(1)n(2k+2)-1} = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+2)} = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}$$

и с ровно на единицу меньшим предыдущего натуральным (положительным целым) знаменателем ($({}_{(1)}n_{2k+2} - 1)$), так что

$$ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)-1}({}_{(1)}M \subseteq N) = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+2)-1}/({}_{(1)}n_{2k+1} - 1) = $$
$$ {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}/({}_{(1)}n_{2k+1} - 1) \geq b. $$

Отсюда следует, что модуль этой разности

$$ |{}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b| = b - {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) = $$
$$ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)-1}({}_{(1)}M \subseteq N) - {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) + b - {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)-1}({}_{(1)}M \subseteq N) $$
$$ \leq {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)-1}({}_{(1)}M \subseteq N) - {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}/({}_{(1)}n_{2k+2} - 1) $$
$$ - {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}/{}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}n_{2k+2} - ({}_{(1)}n_{2k+2} - 1))/({}_{(1)}n_{2k+2}({}_{(1)}n_{2k+2} $$
$$ - 1)) = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}/({}_{(1)}n_{2k+2}({}_{(1)}n_{2k+2} - 1)) \leq $$
$$ ({}_{(1)}n_{2k+2} - 1)/({}_{(1)}n_{2k+2}({}_{(1)}n_{2k+2} - 1)) = 1/{}_{(1)}n_{2k+2}. $$

Поэтому, как и требовалось, для положительного целого числа k и $j = 2k+2$

$$ \mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b) = (-1)^{2k+2-1} = (-1)^{2k+1} = -1, $$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b < 0,$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M\subseteq N) < b,$$

$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b| \leq 1/{}_{(1)}n_{2k+2}.$$

Тем самым построение ${}_{(1)}n_{2k+2}$ завершено и обосновано.

В итоге завершены и обоснованы построение ${}_{(1)}n_{2k+1}$ и ${}_{(1)}n_{2k+2}$, <u>индукционный</u> <u>шаг</u> от произвольного <u>натурального</u> (<u>положительного</u> целого) числ<u>а</u> k к k+1 и благодаря <u>методу</u> <u>математической</u> <u>индукции</u> построение и обоснование такой непременно <u>строго</u> <u>монотонно</u> <u>возрастающей</u> <u>счётно</u> <u>бесконечной</u> <u>последовательности</u>

$$({}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1) = 1,\ {}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),\ {}_{(1)}n_3 = {}_{(1)}n(3),\ {}_{(1)}n_4 = {}_{(1)}n(4),\ \dots,$$

$${}_{(1)}n_{2k-1} = {}_{(1)}n(2k-1),\ {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k),$$

$${}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),\ {}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2),\ \dots)$$

именно наименьших возможных последних элементов всех групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, что обеспечивается непременно строгое чередование знаков разностей

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(j)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b) = (-1)^{j-1}$$

$$(j \in (1, 2, 3, 4, \ldots , 2k-1, 2k, 2k+1, 2k+2, \ldots))$$

в их счётно бесконечной последовательности

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(3)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(4)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b,\ \ldots ,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b,\ \ldots)$$

по первому способу с непременно положительной первой разностью, причём модуль каждой из этих разностей не превышает $1/{}_{(1)}n_j$:

$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(j)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b| \leq 1/{}_{(1)}n_j,$$

$$j \in (1, 2, 3, 4, \ldots , 2k-1, 2k, 2k+1, 2k+2, \ldots).$$

Остаётся перейти от доказательства для избранной непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подпоследовательности

$$({}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1) = 1, {}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2), {}_{(1)}n_3 = {}_{(1)}n(3), {}_{(1)}n_4 = {}_{(1)}n(4), \ldots ,$$
$${}_{(1)}n_{2k-1} = {}_{(1)}n(2k-1), {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k),$$
$${}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1), {}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2), \ldots)$$

именно наименьших возможных последних элементов всех групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел к доказательству для последовательности N именно всех натуральных чисел.

Каждое натуральное число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел непременно принадлежит одной и только одной из указанных групп с рассматриваемыми поочерёдно то ли нечётным номером 2k-1, то ли чётным номером 2k для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...).$$

Пусть вначале натуральное число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

принадлежит полностью включённой в подпоследовательность ${}_{(1)}M$ группе

$${}_{(1)}G_{2k-1} = ({}_{(1)}n_{2k-2}+1, {}_{(1)}n_{2k-2}+2, {}_{(1)}n_{2k-2}+3, ... , {}_{(1)}n_{2k-1}) \ ({}_{(1)}n_0 = 0)$$

с нечётным номером 2k-1 для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

и непременно <u>строго</u> <u>монотонно</u> <u>возрастающей</u> <u>конечной</u> <u>долевой</u> <u>последовательностью</u>

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+1}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+2}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+3}({}_{(1)}M\subseteq N),\ ...\ ,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N)).$$

Тогда

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b) = (-1)^{2k-2-1} = -1,$$

$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b| \le 1/{}_{(1)}n_{2k-2},$$

$$b - {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)}({}_{(1)}M\subseteq N) \le 1/{}_{(1)}n_{2k-2},$$

$$b - 1/{}_{(1)}n_{2k-2} \le {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)}({}_{(1)}M\subseteq N),$$

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b) = (-1)^{2k-1-1} = +1,$$

$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b| \le 1/{}_{(1)}n_{2k-1},$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b \le 1/{}_{(1)}n_{2k-1},$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) \le b + 1/{}_{(1)}n_{2k-1},$$

$$b - 1/{}_{(1)}n_{2k-2} \le {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)}({}_{(1)}M\subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) \le b + 1/{}_{(1)}n_{2k-1},$$

$$b - 1/{}_{(1)}n_{2k-2} \le {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)}({}_{(1)}M\subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+1}({}_{(1)}M\subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+2}({}_{(1)}M\subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+3}({}_{(1)}M\subseteq N) < \ldots < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) \le b + 1/{}_{(1)}n_{2k-1}.$$

При стремящемся к плюс бесконечности положительном целом числе k в силу последней цепочки строгих и нестрогих неравенств положительные целые числа $_{(1)}n_{2k-2}$ и $_{(1)}n_{2k-1}$ также стремятся к плюс бесконечности, миноранта $b - 1/{}_{(1)}n_{2k-2}$ и мажоранта $b + 1/{}_{(1)}n_{2k-1}$ стремятся к b вместе с заключёнными между ними долями

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+1}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+2}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+3}({}_{(1)}M\subseteq N),\ \ldots,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N)$$

для всех элементов группы

$${}_{(1)}G_{2k-1} = ({}_{(1)}n_{2k-2}+1,\ {}_{(1)}n_{2k-2}+2,\ {}_{(1)}n_{2k-2}+3,\ \ldots,\ {}_{(1)}n_{2k-1})\ ({}_{(1)}n_0 = 0)$$

с нечётным номером 2k-1 для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...).$$

Пусть теперь натуральное число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

принадлежит полностью не включённой в подпоследовательность $_{(1)}M$ группе

$$_{(1)}G_{2k} = ({}_{(1)}n_{2k-1}+1, {}_{(1)}n_{2k-1}+2, {}_{(1)}n_{2k-1}+3, ... , {}_{(1)}n_{2k})$$

с чётным номером 2k для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

и непременно строго монотонно убывающей конечной последовательностью

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+1}({}_{(1)}M \subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+2}({}_{(1)}M \subseteq N),$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+3}({}_{(1)}M \subseteq N),\ \dots ,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N)).$$

Тогда

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b) = (-1)^{2k-1-1} = +1,$$
$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b| \le 1/{}_{(1)}n_{2k-1},$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b \le 1/{}_{(1)}n_{2k-1},$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) \le b + 1/{}_{(1)}n_{2k-1},$$
$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b) = (-1)^{2k-1} = -1,$$
$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b| \le 1/{}_{(1)}n_{2k},$$
$$b - {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) \le 1/{}_{(1)}n_{2k},$$
$$b - 1/{}_{(1)}n_{2k} \le {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N),$$
$$b - 1/{}_{(1)}n_{2k} \le {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) \le b + 1/{}_{(1)}n_{2k-1},$$
$$b - 1/{}_{(1)}n_{2k} \le {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) < \dots < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+3}({}_{(1)}M \subseteq N) <$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+2}({}_{(1)}M \subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+1}({}_{(1)}M \subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) \le$$

$$b + 1/{}_{(1)}n_{2k-1}.$$

При стремящемся к плюс бесконечности положительном целом числе k в силу последней цепочки строгих и нестрогих неравенств положительные целые числа ${}_{(1)}n_{2k-1}$ и ${}_{(1)}n_{2k}$ также стремятся к плюс бесконечности, миноранта $b - 1/{}_{(1)}n_{2k}$ и мажоранта $b + 1/{}_{(1)}n_{2k-1}$ стремятся к b вместе с заключёнными между ними долями

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+1}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+2}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+3}({}_{(1)}M\subseteq N),\ \dots ,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N)$$

для всех элементов группы

$${}_{(1)}G_{2k} = ({}_{(1)}n_{2k-1}+1,\ {}_{(1)}n_{2k-1}+2,\ {}_{(1)}n_{2k-1}+3,\ \dots ,\ {}_{(1)}n_{2k})$$

с чётным номером 2k для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots).$$

Тем самым полностью завершён первый способ доказательства теоремы для случая существования единой доли b строго между нулём и единицей подпоследовательности ${}_{(1)}M$ последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то есть для случая равенства нижней и верхней долей подпоследовательности ${}_{(1)}M$ строго между нулём и единицей:

$$0 < b < 1.$$

Второй из двух способов построения одной из таких подпоследовательностей ${}_{(2)}M$ последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел и доказательства достаточности этого построения попарно групповой математической индукцией для случая

существования единой доли b строго между нулём и единицей подпоследовательности $_{(2)}M$ последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то есть для случая равенства нижней и верхней долей подпоследовательности $_{(2)}M$ строго между нулём и единицей

$$0 < b < 1,$$

заключается в следующем.

В подпоследовательность $_{(2)}M$ не включается начинающаяся с единицы первая группа последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел. Самый первый элемент 1 первой группы обеспечивает соответствующую долю

$$_{(2)}\delta_1({}_{(2)}M \subseteq N) = 0$$

и определённый, в данном случае отрицательный, знак первой разности

$$_{(2)}\delta_1({}_{(2)}M \subseteq N) - b < 0,$$

что необходимо и достаточно для первого элемента

$$_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1) = 1$$

непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной последовательности

$$({}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1), {}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2), {}_{(2)}n_3 = {}_{(2)}n(3), {}_{(2)}n_4 = {}_{(2)}n(4), \ldots ,$$

$$_{(2)}n_{2k-1} = {}_{(2)}n(2k-1), {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k),$$

$$_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1), {}_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2), \ldots)$$

именно наименьших возможных последних элементов всех групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел. Так что начинающаяся с единицы наименьшая возможная первая группа

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел состоит именно целиком из этой единицы.

А модуль этой разности

$$|{}_{(2)}\delta_1({}_{(2)}M \subseteq N) - b| < 1 = 1/{}_{(2)}n_1 = 1/{}_{(2)}n(1),$$

поскольку

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(1)}({}_{(2)}M \subseteq N) = {}_{(2)}\delta_1({}_{(2)}M \subseteq N) = 0 < b < 1.$$

Теперь в подпоследовательность ${}_{(2)}M$ включаются именно подряд образующие вторую группу второй и следующие элементы

$$2, 3, 4, 5, \ldots , {}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2)$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел с таким наименьшим натуральным числом

$${}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2),$$

что именно впервые достигается чередование знаков разностей, так что вторая разность

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b > 0$$

должна именно впервые стать непременно положительной, для чего необходимо и достаточно

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M \subseteq N) > b.$$

Во-первых, множество всех удовлетворяющих неравенству

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) > b$$

натуральных чисел n не пусто, поскольку при включении в подпоследовательность $_{(2)}M$ всех подряд превышающих единицу элементов последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечная долевая последовательность

$$({}_{(2)}\delta_1({}_{(2)}M \subseteq N) = 0,\ {}_{(2)}\delta_2({}_{(2)}M \subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_3({}_{(2)}M \subseteq N),\ \dots ,\ {}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N),\ \dots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности $_{(2)}M$ последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), \ldots , (1, 2, 3, \ldots , n), \ldots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности именно строго монотонно возрастает и при неограниченном продолжении стремится к единице, так что неравенство

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) > b$$

выполнено для всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел n,

$$n \in N = (1, 2, 3, ...).$$

Во-вторых, непустое множество всех удовлетворяющих неравенству

$$_{(2)}\delta_n(_{(2)}M \subseteq N) > b$$

натуральных (положительных целых) чисел n именно вполне упорядочено и поэтому непременно содержит первый элемент, обозначенный посредством

$$_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2),$$

причём

$$_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2) \geq 2,$$

обеспечивающий чередование знаков разностей, в данном случае положительный знак второй разности

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2)}(_{(2)}M \subseteq N) - b > 0.$$

А модуль второй разности

$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b| \le ({}_{(2)}n_2 - 1)/{}_{(2)}n_2 - ({}_{(2)}n_2 - 2)/({}_{(2)}n_2 - 1) = ({}_{(2)}n_2{}^2 - 2{}_{(2)}n_2 + 1 - {}_{(2)}n_2{}^2 + 2{}_{(2)}n_2)/({}_{(2)}n_2({}_{(2)}n_2 - 1)) = 1/({}_{(2)}n_2({}_{(2)}n_2 - 1)) \le 1/{}_{(2)}n_2,$$

поскольку ввиду минимальности натурального числа

$${}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2)$$

со свойством

$${}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M\subseteq N) > b$$

выполнено для предыдущего натурального числа

$${}_{(2)}n_2 - 1 = {}_{(2)}n(2) - 1$$

условие

$${}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M\subseteq N) \le b < 1.$$

Принимается следующее допущение математической индукции.

Пусть для произвольного положительного целого числа k построена непременно строго монотонно возрастающая конечная последовательность

$$({}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1) = 1,\ {}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2),\ {}_{(2)}n_3 = {}_{(2)}n(3),\ {}_{(2)}n_4 = {}_{(2)}n(4),\ \dots ,\ {}_{(2)}n_{2k-1} = {}_{(2)}n(2k-1),\ {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k))$$

именно наименьших возможных последних элементов всех первых 2k групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающая непременно строгое чередование знаков разностей

$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(j)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b) = (-1)^j\ (j \in (1, 2, 3, 4, \dots , 2k-1, 2k))$$

в их конечной последовательности

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(3)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(4)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ \dots ,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b)$$

по второму способу с непременно отрицательной первой разностью, причём модуль каждой из этих разностей не превышает $1/_{(2)}n_j$:

$$|_{(2)}\delta_{(2)n(j)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b| \leq 1/_{(2)}n_j,\ j \in (1, 2, 3, 4, \ldots , 2k\text{-}1, 2k).$$

Для k = 1 такое построение уже выполнено выше.

Поэтому по методу математической индукции остаётся с опорой на это допущение для произвольного положительного целого числа k доказать возможность перехода от k к k + 1. Итогом достраивания ещё двух последних элементов должна стать непременно строго монотонно возрастающая конечная последовательность

$$({}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1) = 1,\ {}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2),\ {}_{(2)}n_3 = {}_{(2)}n(3),\ {}_{(2)}n_4 = {}_{(2)}n(4), \ldots ,$$
$${}_{(2)}n_{2k-1} = {}_{(2)}n(2k-1),\ {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k),$$
$${}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1),\ {}_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2))$$

именно наименьших возможных последних элементов всех первых 2k+2 групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающая именно строгое чередование знаков разностей

$$\operatorname{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(j)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b) = (-1)^j$$

$$(j \in (1, 2, 3, 4, \dots , 2k-1, 2k, 2k+1, 2k+2))$$

в их конечной последовательности

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(3)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(4)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ \dots ,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b)$$

по второму способу с непременно отрицательной первой разностью, причём модуль каждой из этих разностей не превышает $1/{}_{(2)}n_j$:

$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(j)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b| \le 1/{}_{(2)}n_j,$$

$$j \in (1, 2, 3, 4, \dots , 2k\text{-}1, 2k, 2k+1, 2k+2).$$

По допущению математической индукции для положительного целого числа k и j = 2k

$$\operatorname{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b) = (-1)^{2k} = +1,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b > 0,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N) > b.$$

Теперь в подпоследовательность ${}_{(2)}M$ не включаются именно подряд образующие группу ${}_{(2)}G_{2k+1}$ с нечётным номером 2k+1 элементы

$${}_{(2)}n_{2k}+1,\ {}_{(2)}n_{2k}+2,\ {}_{(2)}n_{2k}+3,\ \dots ,\ {}_{(2)}n_{2k+1}$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел с таким наименьшим натуральным числом

$${}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1),$$

что

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N) < b < 1.$$

Во-первых, множество всех удовлетворяющих совместным неравенствам

$$n > {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k),$$

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) < b < 1$$

натуральных (положительных целых) чисел n не пусто.

Ведь при невключении в подпоследовательность $_{(2)}M$ всех подряд превышающих

$$_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k)$$

элементов

$$_{(2)}n_{2k}+1,\ {}_{(2)}n_{2k}+2,\ {}_{(2)}n_{2k}+3,\ \ldots$$

последовательности N всех натуральных чисел последовательность

$$(\delta_1(M \subseteq N), \delta_2(M \subseteq N), \delta_3(M \subseteq N), \ldots , \delta_n(M \subseteq N), \ldots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), \ldots , (1, 2, 3, \ldots , n), \ldots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности именно строго монотонно убывает при $n \geq {}_{(2)}n_{2k}$ и при неограниченном продолжении стремится к нулю, так что неравенство

$${}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) < b$$

выполнено для всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел

$$n \in N = (1, 2, 3, ...).$$

Во-вторых, непустое множество всех удовлетворяющих неравенству

$${}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) < b$$

натуральных чисел

$$n > {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k)$$

именно вполне упорядочено и поэтому непременно содержит первый элемент, обозначенный посредством

$${}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1),$$

обеспечивающий смену, в данном случае на отрицательный, знака разности

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b < 0$$

для последнего элемента

$$_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1)$$

группы с нечётным номером 2k+1

$$_{(2)}G_{2k+1} = ({}_{(2)}n_{2k}+1, {}_{(2)}n_{2k}+2, {}_{(2)}n_{2k}+3, \ldots , {}_{(2)}n_{2k+1})$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел.

Ввиду минимальности натурального числа

$$_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1) > {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k)$$

со свойством

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) < b$$

выполнено для предыдущего натурального числа

$$_{(2)}n_{2k+1} - 1 = {}_{(2)}n(2k+1) - 1$$

условие

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) \geq b.$$

${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с натуральными (положительными целыми) числителем

$${}_{(2)}m_{(2)n(2k+1)} = {}_{(2)}m_{(2)n(2k)}$$

и знаменателем ${}_{(2)}n_{2k+1}$, так что

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) = {}_{(2)}m_{(2)n(2k+1)}/{}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}m_{(2)n(2k)}/{}_{(2)}n_{2k+1} < b.$$

${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)-1}({}_{(2)}M\subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с предыдущим натуральным (положительным целым) числителем

$${}_{(2)}m_{(2)n(2k+1)-1} = {}_{(2)}m_{(2)n(2k+1)} = {}_{(2)}m_{(2)n(2k)}$$

и с ровно на единицу меньшим предыдущего натуральным (положительным целым) знаменателем (${}_{(2)}n_{2k+1}$ - 1), так что

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)-1}({}_{(2)}M\subseteq N) = {}_{(2)}m_{(2)n(2k+1)-1}/({}_{(2)}n_{2k+1} - 1) =$$

$${}_{(2)}m_{(2)n(2k)}/({}_{(2)}n_{2k+1} - 1) \geq b.$$

Отсюда следует, что модуль этой разности

$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b| = b - {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N) = {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)-1}({}_{(2)}M \subseteq N) - {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N) + b - {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)-1}({}_{(2)}M \subseteq N) \le {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)-1}({}_{(2)}M \subseteq N) - {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N) = {}_{(2)}m_{(2)n(2k)}/({}_{(2)}n_{2k+1} - 1) - {}_{(2)}m_{(2)n(2k)}/{}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}m_{(2)n(2k)}({}_{(2)}n_{2k+1} - ({}_{(2)}n_{2k+1} - 1))/({}_{(2)}n_{2k+1}({}_{(2)}n_{2k+1} - 1)) = {}_{(2)}m_{(2)n(2k)}/({}_{(2)}n_{2k+1}({}_{(2)}n_{2k+1} - 1)) \le ({}_{(2)}n_{2k+1} - 1)/({}_{(2)}n_{2k+1}({}_{(2)}n_{2k+1} - 1)) = 1/{}_{(2)}n_{2k+1}.$$

Поэтому, как и требовалось, для положительного целого числа k и $j = 2k+1$

$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b) = (-1)^{2k+1} = -1,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b < 0,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N) < b < 1,$$

$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b| \le 1/{}_{(2)}n_{2k+1}.$$

Тем самым построение ${}_{(2)}n_{2k+1}$ завершено и обосновано.

Теперь в подпоследовательность $_{(2)}M$ включаются именно подряд образующие группу $_{(2)}G_{2k+2}$ с чётным номером 2k+2 элементы

$$_{(2)}n_{2k+1}+1,\ _{(2)}n_{2k+1}+2,\ _{(2)}n_{2k+1}+3,\ \dots ,\ _{(2)}n_{2k+2}$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел с таким наименьшим натуральным числом

$$_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2),$$

что

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) > b.$$

Во-первых, множество всех удовлетворяющих совместным неравенствам

$$n > {}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1),$$
$$_{(2)}\delta_{n}({}_{(2)}M\subseteq N) > b$$

натуральных (положительных целых) чисел n не пусто.

Ведь при включении в подпоследовательность $_{(2)}M$ всех подряд превышающих

$$_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1)$$

элементов

$$_{(2)}n_{2k+1}+1,\ {}_{(2)}n_{2k+1}+2,\ {}_{(2)}n_{2k+1}+3,\ \ldots$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечная долевая последовательность

$$(\delta_1(M\subseteq N),\ \delta_2(M\subseteq N),\ \delta_3(M\subseteq N),\ \ldots,\ \delta_n(M\subseteq N),\ \ldots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1),\ (1, 2),\ (1, 2, 3),\ \ldots,\ (1, 2, 3, \ldots, n),\ \ldots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности именно строго монотонно возрастает при n $\geq$ $_{(2)}n_{2k+1}$ и при неограниченном продолжении стремится к единице, так что неравенство

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M\subseteq N) > b$$

выполнено для всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел

$$n \in N = (1, 2, 3, ...).$$

Во-вторых, непустое множество всех удовлетворяющих неравенству

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M\subseteq N) > b$$

натуральных чисел

$$n > {}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1)$$

именно вполне упорядочено и поэтому непременно содержит первый элемент, обозначенный посредством

$${}_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2),$$

обеспечивающий смену, в данном случае на положительный, знака разности

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b > 0$$

для последнего элемента

$${}_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2)$$

группы с чётным номером 2k+2

$${}_{(2)}G_{2k+2} = ({}_{(2)}n_{2k+1}+1, {}_{(2)}n_{2k+1}+2, {}_{(2)}n_{2k+1}+3, \ldots , {}_{(2)}n_{2k+2})$$

последовательности N всех натуральных чисел.

Ввиду минимальности натурального числа

$${}_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2) > {}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1)$$

со свойством

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) > b$$

выполнено для предыдущего натурального числа

$$_{(2)}n_{2k+2} - 1 = {}_{(2)}n(2k+2) - 1$$

условие

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) \le b.$$

$_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M \subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с натуральными (положительными целыми) числителем $_{(2)}m_{(2)n(2k+2)}$ и знаменателем $_{(2)}n_{2k+2}$, так что

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M \subseteq N) = {}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)}/{}_{(2)}n_{2k+2} > b.$$

$_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)-1}({}_{(2)}M \subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с ровно на единицу меньшими предыдущих неотрицательным целым числителем

$({}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)} - 1)$ и натуральным (положительным целым) знаменателем $({}_{(2)}n_{2k+2} - 1)$, так что

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)-1}({}_{(2)}M\subseteq N) = ({}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)} - 1)/({}_{(2)}n_{2k+2} - 1) \le b.$$

Отсюда следует, что модуль этой разности

$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b| = {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b = {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)-1}({}_{(2)}M\subseteq N) + {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)-1}({}_{(2)}M\subseteq N) - b \le {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)-1}({}_{(2)}M\subseteq N) = {}_{(1)}m_{(2)n(2k+2)}/{}_{(2)}n_{2k+2} - ({}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)} - 1)/({}_{(2)}n_{2k+2} - 1) = ({}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}n_{2k+2} - 1) - ({}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)} - 1){}_{(2)}n_{2k+2})/({}_{(2)}n_{2k+2}({}_{(2)}n_{2k+2} - 1)) = ({}_{(2)}n_{2k+2} - {}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)})/({}_{(2)}n_{2k+2}({}_{(2)}n_{2k+2} - 1)) \le ({}_{(2)}n_{2k+2} - 1)/({}_{(2)}n_{2k+2}({}_{(2)}n_{2k+2} - 1)) = 1/{}_{(2)}n_{2k+2}.$$

Поэтому, как и требовалось, для положительного целого числа k и $j = 2k+2$

$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b) = (-1)^{2k+2} = +1,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b > 0,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) > b,$$

$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b| \le 1/{}_{(2)}n_{2k+2}.$$

Тем самым построение ${}_{(2)}n_{2k+2}$ завершено и обосновано.

В итоге завершены и обоснованы построение ${}_{(2)}n_{2k+1}$ и ${}_{(2)}n_{2k+2}$, индукционный шаг от произвольного натурального (положительного целого) числа k к k+1 и благодаря методу математической индукции построение и обоснование такой непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной последовательности

$$({}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1) = 1, {}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2), {}_{(2)}n_3 = {}_{(2)}n(3), {}_{(2)}n_4 = {}_{(2)}n(4), \dots ,$$

$${}_{(2)}n_{2k-1} = {}_{(2)}n(2k-1), {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k),$$

$${}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1), {}_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2), \dots)$$

именно наименьших возможных последних элементов всех групп последовательности N всех натуральных чисел, что

обеспечивается непременно строгое чередование знаков разностей

$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(j)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b) = (-1)^j$$
$$(j \in (1, 2, 3, 4, \ldots, 2k-1, 2k, 2k+1, 2k+2, \ldots))$$

в их счётно бесконечной последовательности

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(1)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(3)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(4)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b, \ldots, {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b, \ldots)$$

по второму способу с непременно отрицательной первой разностью, причём модуль каждой из этих разностей не превышает $1/{}_{(2)}n_j$:

$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(j)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b| \le 1/{}_{(2)}n_j,$$
$$j \in (1, 2, 3, 4, \ldots, 2k-1, 2k, 2k+1, 2k+2, \ldots).$$

Остаётся перейти от доказательства для избранной непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подпоследовательности

$$({}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1) = 1,\ {}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2),\ {}_{(2)}n_3 = {}_{(2)}n(3),\ {}_{(2)}n_4 = {}_{(2)}n(4),\ \dots ,$$
$${}_{(2)}n_{2k-1} = {}_{(2)}n(2k-1),\ {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k),$$
$${}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1),\ {}_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2),\ \dots)$$

именно наименьших возможных последних элементов всех групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел к доказательству для последовательности N именно всех натуральных чисел.

Каждое натуральное число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

последовательности N всех натуральных чисел непременно принадлежит одной и только одной из указанных групп с

рассматриваемыми поочерёдно то ли нечётным номером 2k-1, то ли чётным номером 2k для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...).$$

Пусть вначале натуральное число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

принадлежит полностью не включённой в подпоследовательность ${}_{(2)}M$ группе

$${}_{(2)}G_{2k-1} = ({}_{(2)}n_{2k-2}+1, {}_{(2)}n_{2k-2}+2, {}_{(2)}n_{2k-2}+3, ... , {}_{(2)}n_{2k-1}) \ ({}_{(2)}n_0 = 0)$$

с нечётным номером 2k-1 для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

и непременно строго монотонно убывающей конечной долевой последовательностью

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+1}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+2}({}_{(2)}M\subseteq N),$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+3}({}_{(2)}M\subseteq N), \dots ,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N)).$$

Тогда

$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b) = (-1)^{2k-2} = +1,$$
$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b| \le 1/{}_{(2)}n_{2k-2},$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b \le 1/{}_{(2)}n_{2k-2},$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)}({}_{(2)}M\subseteq N) \le b + 1/{}_{(2)}n_{2k-2},$$
$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b) = (-1)^{2k-1} = -1,$$
$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b| \le 1/{}_{(2)}n_{2k-1},$$
$$b - {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) \le 1/{}_{(2)}n_{2k-1},$$
$$b - 1/{}_{(2)}n_{2k-1} \le {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N),$$
$$b - 1/{}_{(2)}n_{2k-1} \le {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)}({}_{(2)}M\subseteq N) \le b + 1/{}_{(2)}n_{2k-2},$$
$$b - 1/{}_{(2)}n_{2k-1} \le {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) < \dots < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+3}({}_{(2)}M\subseteq N) <$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+2}({}_{(2)}M\subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+1}({}_{(2)}M\subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)}({}_{(2)}M\subseteq N) \le$$

$$b + 1/{}_{(2)}n_{2k-2}.$$

При стремящемся к плюс бесконечности положительном целом числе k в силу последней цепочки строгих и нестрогих неравенств положительные целые числа ${}_{(2)}n_{2k-2}$ и ${}_{(2)}n_{2k-1}$ также стремятся к плюс бесконечности, миноранта $b - 1/{}_{(2)}n_{2k-1}$ и мажоранта $b + 1/{}_{(2)}n_{2k-2}$ стремятся к b вместе с заключёнными между ними долями

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+1}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+2}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+3}({}_{(2)}M\subseteq N),\ \dots,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N)$$

для всех элементов группы

$${}_{(2)}G_{2k-1} = ({}_{(2)}n_{2k-2}+1,\ {}_{(2)}n_{2k-2}+2,\ {}_{(2)}n_{2k-2}+3,\ \dots,\ {}_{(2)}n_{2k-1})$$

с нечётным номером 2k-1 для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots).$$

Пусть теперь натуральное число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

принадлежит полностью включённой в подпоследовательность $_{(2)}M$ группе

$${}_{(2)}G_{2k} = ({}_{(2)}n_{2k-1}+1, {}_{(2)}n_{2k-1}+2, {}_{(2)}n_{2k-1}+3, ... , {}_{(2)}n_{2k})$$

с чётным номером 2k для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

и непременно строго монотонно возрастающей конечной последовательностью

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N), {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+1}({}_{(2)}M\subseteq N), {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+2}({}_{(2)}M\subseteq N),$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+3}({}_{(2)}M\subseteq N), ... , {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N)).$$

Тогда

$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b) = (-1)^{2k-1} = -1,$$

$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b| \leq 1/{}_{(2)}n_{2k-1},$$

$$b - {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) \leq 1/{}_{(2)}n_{2k-1},$$

$$b - 1/{}_{(2)}n_{2k-1} \leq {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N),$$

$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b) = (-1)^{2k} = +1,$$

$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b| \leq 1/{}_{(2)}n_{2k},$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b \leq 1/{}_{(2)}n_{2k},$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) \leq b + 1/{}_{(2)}n_{2k},$$

$$b - 1/{}_{(2)}n_{2k-1} \leq {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) \leq b + 1/{}_{(2)}n_{2k},$$

$$b - 1/{}_{(2)}n_{2k-1} \leq {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+1}({}_{(2)}M\subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+2}({}_{(2)}M\subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+3}({}_{(2)}M\subseteq N) < \ldots < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) \leq b + 1/{}_{(2)}n_{2k}.$$

При стремящемся к плюс бесконечности положительном целом числе k в силу последней цепочки строгих и нестрогих неравенств положительные целые числа ${}_{(2)}n_{2k-1}$ и

${}_{(2)}n_{2k}$ также стремятся к плюс бесконечности, миноранта $b - 1/{}_{(2)}n_{2k-1}$ и мажоранта $b + 1/{}_{(2)}n_{2k}$ стремятся к b вместе с заключёнными между ними долями

$$ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+1}({}_{(2)}M \subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+2}({}_{(2)}M \subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+3}({}_{(2)}M \subseteq N),\ \dots,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N) $$

для всех элементов группы

$$ {}_{(2)}G_{2k} = ({}_{(2)}n_{2k-1}+1,\ {}_{(2)}n_{2k-1}+2,\ {}_{(2)}n_{2k-1}+3,\ \dots,\ {}_{(2)}n_{2k}) $$

с чётным номером $2k$ для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$ k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots). $$

Тем самым полностью завершён второй способ доказательства теоремы для случая существования единой доли b строго между нулём и единицей подпоследовательности ${}_{(2)}M$ последовательности N всех

натуральных чисел, то есть для случая равенства нижней и верхней долей подпоследовательности $_{(2)}M$ строго между нулём и единицей:

$$0 < b < 1.$$

В итоге полностью доказана теорема о том, что для любого действительного числа

$$b\ (0 \le b \le 1)$$

от нуля до единицы включительно существует такая подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, доля которой в точности равна этому действительному числу b:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M \subseteq N) = b.$$

Определение. Множественным пределом последовательности, или производным множеством

последовательности, называется множество всех частичных пределов последовательности, то есть множество пределов всех сходящихся подпоследовательностей этой последовательности.

Определение. Домножественным (предмножественным) пределом последовательности называется домножество (предмножество) всех частичных пределов последовательности, то есть домножество (предмножество) пределов всех сходящихся подпоследовательностей этой последовательности.

Обозначение. Множественный предел последовательности, или производное множество последовательности, обозначается либо выраженным прописными буквами LIM обозначением обычного предела lim, либо взятием

выраженного то ли строчными {lim}, то ли прописными буквами {LIM} обозначения обычного предела lim в обозначающие множество фигурные скобки {}.

Обозначение. Домножественный (предмножественный) предел последовательности обозначается с дополнительным обозначением знаком градуса ° справа либо выраженным прописными буквами LIM° обозначением обычного предела lim, либо взятием выраженного то ли строчными {lim}°, то ли прописными буквами {LIM}° обозначения обычного предела lim в обозначающие множество фигурные скобки {}.

Определение. Множественной суммой ряда называется множественный предел, или производное множество, последовательности всех частичных сумм ряда, то есть

множество всех частичных пределов последовательности всех частичных сумм ряда, то есть множество пределов всех сходящихся подпоследовательностей последовательности всех частичных сумм ряда.

Определение. Домножественной (предмножественной) суммой ряда называется домножественный (предмножественный) предел последовательности всех частичных сумм ряда, то есть домножество (предмножество) всех частичных пределов последовательности всех частичных сумм ряда, то есть домножество (предмножество) пределов всех сходящихся подпоследовательностей последовательности всех частичных сумм ряда.

Обозначение. Множественная сумма ряда обозначается взятым в обозначающие множество фигурные скобки {} знаком {Σ} обычной суммы ряда Σ.

Пример, весьма показательный для расходящихся рядов вообще.

$$\{\Sigma\}_{n=1}^{+\infty}(-1)^n = \mathrm{LIM}_{n\to+\infty} (-1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, \ldots) =$$
$$\{\mathrm{LIM}\}_{n\to+\infty} (-1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, \ldots) =$$
$$\{\lim\}_{n\to+\infty} (-1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, 0, \ldots) = \{-1, 0\}.$$

Примеры, показывающие недостаточность множеств Кантора и необходимость домножеств (предмножеств) с дополнительным обозначением знаком градуса ° справа, коль скоро элементы a, b, c, d вообще не обязаны быть различными.

$$\mathrm{LIM}^\circ_{n\to+\infty} (a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, \ldots) =$$

$$\{LIM\}^\circ_{n\to+\infty} (a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, \ldots) = \{lim\}^\circ_{n\to+\infty} (a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, a, b, c, \ldots) = \{a, b, c\}^\circ.$$

$$LIM^\circ_{n\to+\infty} (a + 1, b - 1, c + 1, d - 1, a + 1/2, b - 1/2, c + 1/2, d - 1/2, a + 1/3, b - 1/3, c + 1/3, d - 1/3, \ldots) = \{LIM\}^\circ_{n\to+\infty} (a + 1, b - 1, c + 1, d - 1, a + 1/2, b - 1/2, c + 1/2, d - 1/2, a + 1/3, b - 1/3, c + 1/3, d - 1/3, \ldots) = \{lim\}^\circ_{n\to+\infty} (a + 1, b - 1, c + 1, d - 1, a + 1/2, b - 1/2, c + 1/2, d - 1/2, a + 1/3, b - 1/3, c + 1/3, d - 1/3, \ldots) = \{a, b, c, d\}^\circ.$$

Следствие. Равносильны (эквивалентны) равенство предела последовательности некоторому определённому элементу и равенство множественного предела этой последовательности одноэлементному множеству, целиком состоящему из этого единственного элемента:

$$lim_{n\to+\infty} a_n = a \Leftrightarrow LIM_{n\to+\infty} a_n = \{a\}.$$

Следствие. Равносильны (эквивалентны) в последней теореме равенство предела последовательности $\delta_n(M \subseteq N)$ некоторому действительному числу b отрезка от нуля до единицы включительно и равенство множественного предела этой последовательности одноэлементному множеству, целиком состоящему из этого единственного действительного числа b отрезка от нуля до единицы включительно, дополнительно выраженному также вырожденным отрезком, начало и конец которого совпадают и равны действительному числу b:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M \subseteq N) = b \Leftrightarrow \mathrm{LIM}_{n\to\infty} \delta_n(M \subseteq N) = \{b\} = [b, b].$$

Теорема. Множественный предел любой последовательности является непременно замкнутым множеством.

Доказательство.

Необходимо и достаточно доказать, что любая предельная точка для множества, являющегося множественным пределом любой данной последовательности, непременно принадлежит этому множеству.

Эта предельная точка для этого множества по следствию из её определения непременно является пределом некоторой последовательности различных точек этого множества, по определению этого множества являющихся пределами некоторых сходящихся подпоследовательностей данной последовательности.

Очевидным образом стремится к этой предельной точке строящаяся по диагональному процессу Кантора подпоследовательность, элемент которой с каждым положительным целочисленным номером равен элементу с этим номером подпоследовательности, стремящейся к элементу с этим номером последовательности различных точек этого множества, стремящейся к этой предельной точке.

Существование построенной подпоследовательности свидетельствует о непременной принадлежности этой предельной точки этому множеству, являющемуся множественным пределом данной последовательности, что и требовалось доказать.

Теорема. Для любой пары действительных чисел

$$(a, b)\ (0 \le a \le b \le 1)$$

от нуля до единицы включительно существует такая подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, нижняя доля которой в точности равна не большему из этой пары действительных чисел и совместно с этим верхняя доля которой в точности равна не меньшему из этой пары действительных чисел:

$$\lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M \subseteq N) = a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M \subseteq N) = b,$$

причём множественным пределом

$$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}\, \delta_n(M \subseteq N) = [a, b]$$

последовательности

$$\delta_n(M \subseteq N) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$$

является отрезок [a, b] непременно целиком.

Доказательство.

Применяется общая теория наилучшего приближения промежуточных значений конечным перешагиванием с избирательной (выборочной) предельностью бесконечно малого перешагивания с её теорией наилучшего приближения промежуточных значений конечным перешагиванием и теорией избирательной (выборочной) предельности бесконечно малого перешагивания и с их методом наилучшего приближения промежуточных значений конечным монотонным перешагиванием и методом охватывающих колебаний монотонных конечных групп бесконечно малых шагов.

При одинаковых нижней доле a и верхней доле b как действительных числах от нуля до единицы включительно

$$0 \leq a = b \leq 1$$

доля подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N)$$

существует и равна этому общему значению:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = a = b.$$

Тогда по предыдущей теореме существует такая подпоследовательность M последовательности N всех натуральных чисел, доля которой в точности равна этому общему значению a = b:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = a = b,$$

причём указанному пределу равносилен (эквивалентен) множественный предел

$$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}\ \delta_n(M\subseteq N) = \{a\} = \{b\} = [a, b] = [a, a] = [b, b].$$

Поэтому остаётся доказать настоящую теорему при различных нижней доле

$$\lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a$$

и верхней доле

$$\lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = b$$

как действительных числах от нуля до единицы включительно

$$0 \le a < b \le 1,$$

так что доля подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N)$$

не существует.

Для построения одной из таких подпоследовательностей M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, нижняя доля которой

$$\lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M \subseteq N) = a$$

и совместно с этим верхняя доля которой

$$\lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M \subseteq N) = b,$$

достаточен следующий алгоритм именно последовательного рассмотрения всех подряд элементов последовательности N

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

всех натуральных чисел на предмет их или включения, или невключения в подпоследовательность M

последовательности N всех натуральных чисел для обеспечения указанных нижнего предела

$$\lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M \subseteq N) = a$$

и совместно с этим верхнего предела

$$\lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M \subseteq N) = b$$

счётно бесконечной долевой последовательности

$$(\delta_1(M \subseteq N), \delta_2(M \subseteq N), \delta_3(M \subseteq N), \dots , \delta_n(M \subseteq N), \dots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), \dots , (1, 2, 3, \dots , n), \dots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной

подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности.

Общая сущность обоих способов построения одной из таких подпоследовательностей $_{(1)}M$ по первому способу или $_{(2)}M$ по второму способу последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел и доказательства достаточности этого построения математической индукцией заключается в следующем.

По предложенному алгоритму именно однозначно строится своя для каждого из обоих этих способов некоторая непременно строго монотонно возрастающая последовательность

$$(n_1 = n(1), n_2 = n(2), n_3 = n(3), n_4 = n(4), \dots ,$$
$$n_{2k-1} = n(2k-1), n_{2k} = n(2k), n_{2k+1} = n(2k+1), n_{2k+2} = n(2k+2), \dots)$$

некоторых положительных целых чисел с последовательностью

$$N = (1, 2, 3, 4, \ldots , 2k-1, 2k, 2k+1, 2k+2, \ldots)$$

всех положительных целых чисел именно подряд в указателях (индексах) как номеров будущих групп

$$G_j = (n_{j-1}+1, n_{j-1}+2, n_{j-1}+3, \ldots , n_j) \ (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots), n_0 = 0)$$

с именно последовательным разбиением

$$N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots) = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5 \cup \ldots \cup G_j \cup \ldots =$$
$$G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup \ldots \cup G_{2k-1} \cup G_{2k} \cup G_{2k+1} \cup G_{2k+2} \cup \ldots =$$
$$(1, 2, 3, \ldots , n_1) \cup (n_1+1, n_1+2, n_1+3, \ldots , n_2) \cup (n_2+1, n_2+2,$$
$$n_2+3, \ldots , n_3) \cup (n_3+1, n_3+2, n_3+3, \ldots , n_4) \cup \ldots \cup (n_{2k-2}+1, n_{2k-2}+2,$$
$$n_{2k-2}+3, \ldots , n_{2k-1}) \cup (n_{2k-1}+1, n_{2k-1}+2, n_{2k-1}+3, \ldots , n_{2k}) \cup (n_{2k}+1,$$
$$n_{2k}+2, n_{2k}+3, \ldots , n_{2k+1}) \cup (n_{2k+1}+1, n_{2k+1}+2, n_{2k+1}+3, \ldots , n_{2k+2}) \cup \ldots$$

последовательности N всех положительных целых чисел на смежные конечные группы именно последовательных положительных целых чисел, завершающиеся элементами построенной последовательности

$$(n_1 = n(1),\ n_2 = n(2),\ n_3 = n(3),\ n_4 = n(4),\ \dots ,$$
$$n_{2k-1} = n(2k-1),\ n_{2k} = n(2k),\ n_{2k+1} = n(2k+1),\ n_{2k+2} = n(2k+2),\ \dots)$$

именно с номерами

$$1, 2, 3, 4, \dots , 2k-1, 2k, 2k+1, 2k+2, \dots$$

групп.

В подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел включаются именно целиком эти группы непременно через одну, то есть по первому способу именно и только группы с нечётными номерами

$$_{(1)}M = {}_{(1)}G_1 \cup {}_{(1)}G_3 \cup \ldots \cup {}_{(1)}G_{2k-1} \cup {}_{(1)}G_{2k+1} \cup \ldots = (1, 2, 3, \ldots , {}_{(1)}n_1) \cup ({}_{(1)}n_2+1, {}_{(1)}n_2+2, {}_{(1)}n_2+3, \ldots , {}_{(1)}n_3) \cup \ldots \cup ({}_{(1)}n_{2k-2}+1, {}_{(1)}n_{2k-2}+2, {}_{(1)}n_{2k-2}+3, \ldots , {}_{(1)}n_{2k-1}) \cup ({}_{(1)}n_{2k}+1, {}_{(1)}n_{2k}+2, {}_{(1)}n_{2k}+3, \ldots , {}_{(1)}n_{2k+1}) \cup \ldots$$

либо по <u>второму</u> способу именно и только группы с <u>чётными</u> номерами

$$_{(2)}M = {}_{(2)}G_2 \cup {}_{(2)}G_4 \cup \ldots {}_{(2)}\cup G_{2k} \cup {}_{(2)}G_{2k+2} \cup \ldots = ({}_{(2)}n_1+1, {}_{(2)}n_1+2, {}_{(2)}n_1+3, \ldots , {}_{(2)}n_2) \cup ({}_{(2)}n_3+1, {}_{(2)}n_3+2, {}_{(2)}n_3+3, \ldots , {}_{(2)}n_4) \cup \ldots \cup ({}_{(2)}n_{2k-1}+1, {}_{(2)}n_{2k-1}+2, {}_{(2)}n_{2k-1}+3, \ldots , {}_{(2)}n_{2k}) \cup ({}_{(2)}n_{2k+1}+1, {}_{(2)}n_{2k+1}+2, {}_{(2)}n_{2k+1}+3, \ldots , {}_{(2)}n_{2k+2}) \cup \ldots .$$

<u>Различие</u> действительных чисел a и b между нулём и единицей в обоих случаях включительно

$$0 \leq a < b \leq 1$$

позволяет обеспечить в <u>каждом</u> из этих <u>обоих</u> способов именно <u>строгое</u> <u>чередование</u> элементов

подпоследовательностей, стремящихся к указанным нижнему и верхнему пределам, в счётно бесконечных долевых последовательностях

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(1)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(3)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(4)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ \dots,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ \dots)$$

по первому способу со стремящейся к указанному верхнему пределу подпоследовательностью для ${}_{(1)}n(j)$ со всеми нечётными j и со стремящейся к указанному нижнему пределу подпоследовательностью для ${}_{(1)}n(j)$ со всеми чётными j ввиду включения в подпоследовательность ${}_{(1)}M$ групп именно и только со всеми нечётными j и

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(1)}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(3)}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(4)}({}_{(2)}M\subseteq N),\ \ldots ,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N),\ \ldots)$$

по <u>второму</u> способу со стремящейся к указанному <u>нижнему пределу</u> <u>подпоследовательностью</u> для ${}_{(1)}n(j)$ со всеми <u>нечётными</u> j и со стремящейся к указанному <u>верхнему пределу</u> <u>подпоследовательностью</u> для ${}_{(1)}n(j)$ со всеми <u>чётными</u> j ввиду <u>включения</u> в <u>подпоследовательность</u> ${}_{(2)}M$ <u>групп</u> именно и только со всеми <u>чётными</u> j.

Для этого обеспечивается в <u>каждом</u> из этих <u>обоих</u> способов именно <u>строгое</u> <u>чередование</u> <u>знаков</u> указанных <u>разностей</u> с <u>определённостью</u> <u>знака</u> <u>первой</u> <u>разности</u> для элементов <u>подпоследовательностей</u>, стремящихся к указанным

нижнему и верхнему пределам, в счётно бесконечных последовательностях разностей

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - (b - 1/1),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - (a + 1/2),$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(3)}({}_{(1)}M\subseteq N) - (b - 1/3),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(4)}({}_{(1)}M\subseteq N) - (a + 1/4), \ldots ,$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - (b - 1/(2k-1)),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N) - (a + 1/(2k)),$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - (b - 1/(2k+1)),$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - (a + 1/(2k+2)), \ldots)$$

по первому способу со стремящейся к указанному верхнему пределу подпоследовательностью для ${}_{(1)}n(j)$ со всеми нечётными j и со стремящейся к указанному нижнему пределу подпоследовательностью для ${}_{(1)}n(j)$ со всеми чётными j ввиду включения в подпоследовательность ${}_{(1)}M$ групп именно и только со всеми нечётными j и

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/1),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/2),$$

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(3)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/3),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(4)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/4),\ \dots,$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/(2k-1)),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/(2k)),$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/(2k+1)),$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/(2k+2)),\ \dots)$$

по <u>второму</u> способу со стремящейся к указанному <u>нижнему</u> <u>пределу</u> <u>подпоследовательностью</u> для ${}_{(2)}n(j)$ со всеми <u>нечётными</u> j и со стремящейся к указанному <u>верхнему</u> <u>пределу</u> <u>подпоследовательностью</u> для ${}_{(2)}n(j)$ со всеми <u>чётными</u> j ввиду <u>включения</u> в <u>подпоследовательность</u> ${}_{(2)}M$ <u>групп</u> именно и только со всеми <u>чётными</u> j.

Непременная <u>однозначность</u> именно <u>своей</u> для <u>каждого</u> из <u>обоих</u> этих <u>способов</u> некоторой непременно <u>строго</u> <u>монотонно</u> <u>возрастающей</u> <u>счётно</u> <u>бесконечной</u> <u>последовательности</u>

$$({}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1),\ {}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),\ {}_{(1)}n_3 = {}_{(1)}n(3),\ {}_{(1)}n_4 = {}_{(1)}n(4),\ \ldots ,$$
$${}_{(1)}n_{2k-1} = {}_{(1)}n(2k-1),\ {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k),$$
$${}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),\ {}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2),\ \ldots)$$

по <u>первому</u> способу и

$$({}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1),\ {}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2),\ {}_{(2)}n_3 = {}_{(2)}n(3),\ {}_{(2)}n_4 = {}_{(2)}n(4),\ \ldots ,$$
$${}_{(2)}n_{2k-1} = {}_{(2)}n(2k-1),\ {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k),$$
$${}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1),\ {}_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2),\ \ldots)$$

по <u>второму</u> способу обеспечивается именно <u>минимальностью</u> <u>каждого</u> элемента <u>каждой</u> из <u>обеих</u> <u>этих</u> <u>последовательностей</u> при необходимом и достаточном условии обеспечения в совокупности указанных <u>пределов</u> указанных <u>подпоследовательностей</u> при <u>непустоте</u> <u>каждой</u> <u>группы</u>.

Первый из двух способов построения одной из таких подпоследовательностей $_{(1)}M$ последовательности N всех натуральных чисел и доказательства достаточности этого построения математической индукцией для случая несуществования единой доли между нулём и единицей в обоих случаях включительно подпоследовательности $_{(1)}M$ последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то есть для случая неравенства нижней a и верхней b долей подпоследовательности $_{(1)}M$ между нулём и единицей в обоих случаях включительно

$$0 \leq a < b \leq 1,$$

заключается в следующем.

Обеспечивается именно строгое чередование знаков указанных разностей с определённостью знака первой

разности для элементов подпоследовательностей, стремящихся к указанным нижнему и верхнему пределам, в счётно бесконечной последовательности разностей

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - (b - 1/1),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - (a + 1/2),$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(3)}({}_{(1)}M \subseteq N) - (b - 1/3),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(4)}({}_{(1)}M \subseteq N) - (a + 1/4), \ldots ,$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - (b - 1/(2k-1)),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) - (a + 1/(2k)),$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - (b - 1/(2k+1)),$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - (a + 1/(2k+2)), \ldots)$$

со стремящейся к указанному верхнему пределу b подпоследовательностью для ${}_{(1)}n(j)$ со всеми нечётными j и со стремящейся к указанному нижнему пределу a подпоследовательностью для ${}_{(1)}n(j)$ со всеми чётными j ввиду включения в подпоследовательность ${}_{(1)}M$ групп именно и только со всеми нечётными j.

В подпоследовательность ${}_{(1)}M$ включается начинающаяся с единицы первая группа последовательности N всех натуральных чисел. Самый первый элемент 1 первой группы обеспечивает соответствующую долю

$$ {}_{(1)}\delta_1({}_{(1)}M \subseteq N) = 1 $$

и положительный знак первой разности

$$ {}_{(1)}\delta_1({}_{(1)}M \subseteq N) - (b - 1/1) > 0 $$

(поскольку

$$ 0 \leq a < b \leq 1), $$

для чего необходимо и достаточно

$$ {}_{(1)}\delta_1({}_{(1)}M \subseteq N) > b - 1/1 = b - 1, $$

что необходимо и достаточно для первого элемента

$$ {}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1) = 1 $$

непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной последовательности

$$({}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1),\ {}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),\ {}_{(1)}n_3 = {}_{(1)}n(3),\ {}_{(1)}n_4 = {}_{(1)}n(4),\ \ldots,$$
$${}_{(1)}n_{2k-1} = {}_{(1)}n(2k-1),\ {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k),$$
$${}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),\ {}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2),\ \ldots)$$

именно наименьших возможных последних элементов всех групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел. Так что начинающаяся с единицы наименьшая возможная первая группа последовательности N всех натуральных чисел состоит именно целиком из этой единицы.

Теперь в подпоследовательность ${}_{(1)}M$ не включаются именно подряд образующие группу ${}_{(1)}G_2$ с чётным номером 2 элементы

$$_{(1)}n_1+1 = 2,\ _{(1)}n_1+2 = 3,\ _{(1)}n_1+3 = 4,\ \dots ,\ _{(1)}n_2$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел с таким наименьшим натуральным числом

$$_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),$$

что именно впервые достигается чередование знаков разностей, так что вторая разность

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - (a + 1/2) < 0$$

должна именно впервые стать непременно отрицательной, для чего необходимо и достаточно

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M \subseteq N) < a + 1/2.$$

Во-первых, множество всех удовлетворяющих совместным неравенствам

$$n > {}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1) = 1,$$

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) < a + 1/2$$

натуральных чисел n не пусто.

Ведь при невключении в подпоследовательность $_{(1)}M$ всех подряд превышающих

$$_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1) = 1$$

элементов

$$_{(1)}n_1+1 = 2,\ {}_{(1)}n_1+2 = 3,\ {}_{(1)}n_1+3 = 4,\ ...$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечная долевая последовательность

$$(\delta_1(M\subseteq N),\ \delta_2(M\subseteq N),\ \delta_3(M\subseteq N),\ ...\ ,\ \delta_n(M\subseteq N),\ ...)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), \ldots , (1, 2, 3, \ldots , n), \ldots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности именно строго монотонно убывает при $n \geq {}_{(1)}n_1$ и при неограниченном продолжении стремится к нулю, так что неравенство

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) < a + 1/2$$

выполнено для всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел

$$n \in N = (1, 2, 3, \ldots).$$

Во-вторых, непустое множество всех удовлетворяющих неравенству

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) < a + 1/2$$

натуральных чисел

$$n > {}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1) = 1$$

именно вполне упорядочено и поэтому непременно содержит первый элемент, обозначенный посредством

$${}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),$$

обеспечивающий смену, в данном случае на отрицательный, знака разности

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/2 < 0$$

для последнего элемента

$${}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2)$$

группы с чётным номером 2

$${}_{(1)}G_2 = ({}_{(1)}n_1 + 1 = 2,\ {}_{(1)}n_1 + 2 = 3,\ {}_{(1)}n_1 + 3 = 4,\ \ldots\ ,\ {}_{(1)}n_2)$$

последовательности N всех натуральных чисел.

Ввиду минимальности натурального числа

$$_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2) > {}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1) = 1$$

со свойством

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) < a + 1/2$$

выполнено для предыдущего натурального числа

$$_{(1)}n_2 - 1 = {}_{(1)}n(2) - 1$$

условие

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) \geq a + 1/2.$$

$_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M \subseteq N)$ **есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с натуральными (положительными целыми) числителем**

$$_{(1)}m_{(1)n(2)} = {}_{(1)}m_{(1)n(1)} = {}_{(1)}m_1$$

и знаменателем $_{(1)}n_2$, так что

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M \subseteq N) = {}_{(1)}m_{(1)n(2)}/{}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}m_{(1)n(1)}/{}_{(1)}n_2 < a + 1/2.$$

${}_{(1)}\delta_{(1)n(2)-1}({}_{(1)}M\subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с предыдущим натуральным (положительным целым) числителем

$$ {}_{(1)}m_{(1)n(2)-1} = {}_{(1)}m_{(1)n(2)} = {}_{(1)}m_{(1)n(1)} $$

и с ровно на единицу меньшим предыдущего натуральным (положительным целым) знаменателем (${}_{(1)}n_2$ - 1), так что

$$ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)-1}({}_{(1)}M\subseteq N) = {}_{(1)}m_{(1)n(2)-1}/({}_{(1)}n_2 - 1) = {}_{(1)}m_{(1)n(1)}/({}_{(1)}n_2 - 1) \geq a + 1/2. $$

Отсюда следует, что разность

$$ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - a = {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)-1}({}_{(1)}M\subseteq N) + {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)-1}({}_{(1)}M\subseteq N) - a \geq {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)-1}({}_{(1)}M\subseteq N) + 1/2 = {}_{(1)}m_{(1)n(1)}/{}_{(1)}n_2 - {}_{(1)}m_{(1)n(1)}/({}_{(1)}n_2 - 1) + 1/2 = - {}_{(1)}m_{(1)n(1)}({}_{(1)}n_2 - ({}_{(1)}n_2 - 1))/({}_{(1)}n_2({}_{(1)}n_2 - 1)) + 1/2 = - {}_{(1)}m_{(1)n(1)}/({}_{(1)}n_2({}_{(1)}n_2 - 1)) + 1/2 \geq - ({}_{(1)}n_2 - 1)/({}_{(1)}n_2({}_{(1)}n_2 - 1)) + 1/2 = - 1/{}_{(1)}n_2 + 1/2. $$

Объединение полученных границ снизу и сверху даёт

$$- 1/{}_{(1)}n_2 + 1/2 \leq {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a < 1/2.$$

Тем самым построение ${}_{(1)}n_2$ завершено и обосновано.

Принимается следующее допущение математической индукции.

Пусть для произвольного положительного целого числа k построена непременно строго монотонно возрастающая конечная последовательность

$$({}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1) = 1,\ {}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),\ {}_{(1)}n_3 = {}_{(1)}n(3),\ {}_{(1)}n_4 = {}_{(1)}n(4),\ \dots ,$$
$${}_{(1)}n_{2k-1} = {}_{(1)}n(2k-1),\ {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k))$$

именно наименьших возможных последних элементов всех первых 2k групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающая непременно строгое чередование знаков разностей

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2i-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b + 1/(2i-1)) = (-1)^{2i-1-1} = (-1)^{2i-2} = +1,$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2i-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b + 1/(2i-1) > 0,$$

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2i)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/(2i)) = (-1)^{2i-1} = -1,$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2i)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/(2i) < 0,$$

$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots , k)$$

в их <u>конечной</u> <u>последовательности</u>

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b + 1/1,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/2,$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(3)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b + 1/3,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(4)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/4, \ldots ,$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b + 1/(2k-1),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/(2k))$$

по <u>первому</u> способу с непременно <u>положительной</u> <u>первой</u> <u>разностью</u>, причём имеет место следующая совокупность двойных неравенств, в первом из которых правая сторона действует именно и только при указанном правым индексом при знаке соответствующего неравенства ≤

условии $i \geq 2$, поскольку при $i = 1$ $_{(1)}n_1 = 1$ и не имеет предыдущего натурального (положительного целого) числа:

$$- 1/(2i-1) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2i-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b \leq_{i\geq 2} 1/{}_{(1)}n_{2i-1} - 1/(2i-1),$$

$$- 1/{}_{(1)}n_{2i} + 1/(2i) \leq {}_{(1)}\delta_{(1)n(2i)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a < 1/(2i),$$

$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, ... , k).$$

Для $k = 1$ такое построение уже выполнено выше.

Поэтому по методу математической индукции остаётся с опорой на это допущение для произвольного положительного целого числа k доказать возможность перехода от k к $k + 1$. Итогом достраивания ещё двух последних элементов должна стать непременно строго монотонно возрастающая конечная последовательность

$$({}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1) = 1,\ {}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),\ {}_{(1)}n_3 = {}_{(1)}n(3),\ {}_{(1)}n_4 = {}_{(1)}n(4),\ ... ,$$

$$_{(1)}n_{2k-1} = {}_{(1)}n(2k-1),\ {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k),$$
$$_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),\ {}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2))$$

именно наименьших возможных последних элементов всех первых 2k+2 групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающая именно строгое чередование знаков разностей

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2i-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b + 1/(2i-1)) = (-1)^{2i-1-1} = (-1)^{2i-2} = +1,$$
$$_{(1)}\delta_{(1)n(2i-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b + 1/(2i-1) > 0,$$
$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2i)}({}_{(1)}M\subseteq N) - a - 1/(2i)) = (-1)^{2i-1} = -1,$$
$$_{(1)}\delta_{(1)n(2i)}({}_{(1)}M\subseteq N) - a - 1/(2i) < 0,$$
$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots , k, k+1)$$

в их конечной последовательности

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b + 1/1,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - a - 1/2,$$

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(3)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b + 1/3,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(4)}({}_{(1)}M\subseteq N) - a - 1/4,\ \dots ,$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b + 1/(2k-1),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N) - a - 1/(2k),$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - b + 1/(2k+1),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M\subseteq N) - a - 1/(2k+2))$$

по <u>первому</u> способу с непременно <u>положительной</u> <u>первой</u> <u>разностью</u>, причём <u>модуль</u> каждой из этих <u>разностей</u> не превышает $1/{}_{(1)}n_j$:

$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(j)}({}_{(1)}M\subseteq N) - a| \le 1/{}_{(1)}n_j,$$
$$j \in (1, 2, 3, 4, \dots , 2k-1, 2k, 2k+1, 2k+2).$$

По <u>допущению</u> <u>математической</u> <u>индукции</u> для <u>положительного</u> целого числ<u>а</u> k и j = 2k

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N) - a - 1/(2k)) = (-1)^{2k-1} = -1,$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N) - a - 1/(2k) < 0,$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N) < a + 1/(2k).$$

Теперь в подпоследовательность $_{(1)}M$ включаются именно подряд образующие группу $_{(1)}G_{2k+1}$ с нечётным номером 2k+1 элементы

$$_{(1)}n_{2k}+1,\ _{(1)}n_{2k}+2,\ _{(1)}n_{2k}+3,\ \ldots ,\ _{(1)}n_{2k+1}$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел с таким наименьшим натуральным числом

$$_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),$$

что

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M\subseteq N) > b - 1/(2k+1).$$

Во-первых, множество всех удовлетворяющих совместным неравенствам

$$n > {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k),$$

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M\subseteq N) > b - 1/(2k+1)$$

натуральных (положительных целых) чисел n не пусто.

Ведь при включении в подпоследовательность ${}_{(1)}M$ всех подряд превышающих

$$_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k)$$

элементов

$$_{(1)}n_{2k}+1,\ {}_{(1)}n_{2k}+2,\ {}_{(1)}n_{2k}+3,\ \ldots$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечная долевая последовательность

$$(\delta_1(M\subseteq N),\ \delta_2(M\subseteq N),\ \delta_3(M\subseteq N),\ \ldots\ ,\ \delta_n(M\subseteq N),\ \ldots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1),\ (1, 2),\ (1, 2, 3),\ \ldots\ ,\ (1, 2, 3,\ \ldots\ , n),\ \ldots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности именно строго монотонно возрастает при $n \geq {}_{(1)}n_{2k}$ и при неограниченном продолжении стремится к единице, так что неравенство

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) > b - 1/(2k+1)$$

выполнено для всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел

$$n \in N = (1, 2, 3, ...).$$

Во-вторых, непустое множество всех удовлетворяющих неравенству

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) > b - 1/(2k+1)$$

натуральных (положительных целых) чисел

$$n > {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k)$$

именно вполне упорядочено и поэтому непременно содержит первый элемент, обозначенный посредством

$${}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),$$

обеспечивающий смену, в данном случае на положительный, знака разности

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b + 1/(2k+1) > 0$$

для последнего элемента

$${}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1)$$

группы с нечётным номером 2k+1

$${}_{(1)}G_{2k+1} = ({}_{(1)}n_{2k}+1, {}_{(1)}n_{2k}+2, {}_{(1)}n_{2k}+3, \dots , {}_{(1)}n_{2k+1})$$

последовательности N всех натуральных чисел.

Ввиду минимальности натурального числа

$${}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1) > {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k)$$

со свойством

$$_{(1)}\delta_n(_{(1)}M\subseteq N) > b - 1/(2k+1)$$

выполнено для предыдущего натурального числа

$$_{(1)}n_{2k+1} - 1 = {}_{(1)}n(2k+1) - 1$$

условие

$$_{(1)}\delta_n(_{(1)}M\subseteq N) \le b - 1/(2k+1).$$

$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}(_{(1)}M\subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с натуральными (положительными целыми) числителем $_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}$ и знаменателем $_{(1)}n_{2k+1}$, так что

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}(_{(1)}M\subseteq N) = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}/{}_{(1)}n_{2k+1} > b - 1/(2k+1).$$

$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)-1}(_{(1)}M\subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с ровно на единицу меньшими предыдущих неотрицательным целым числителем

$({}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)} - 1)$ и натуральным (положительным целым) знаменателем $({}_{(1)}n_{2k+1} - 1)$, так что

$$ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)-1}({}_{(1)}M \subseteq N) = ({}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)} - 1)/({}_{(1)}n_{2k+1} - 1) \le b - 1/(2k+1). $$

Отсюда следует, что разность

$$ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b = $$
$$ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)-1}({}_{(1)}M \subseteq N) + {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)-1}({}_{(1)}M \subseteq N) - b $$
$$ \le {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)-1}({}_{(1)}M \subseteq N) - 1/(2k+1) = $$
$$ {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}/{}_{(1)}n_{2k+1} - ({}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)} - 1)/({}_{(1)}n_{2k+1} - 1) - 1/(2k+1) = $$
$$ ({}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}n_{2k+1} - 1) - ({}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)} - 1){}_{(1)}n_{2k+1})/({}_{(1)}n_{2k+1}({}_{(1)}n_{2k+1} - 1)) - $$
$$ 1/(2k+1) = ({}_{(1)}n_{2k+1} - {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)})/({}_{(1)}n_{2k+1}({}_{(1)}n_{2k+1} - 1)) - 1/(2k+1) \le $$
$$ ({}_{(1)}n_{2k+1} - 1)/({}_{(1)}n_{2k+1}({}_{(1)}n_{2k+1} - 1)) - 1/(2k+1) = 1/{}_{(1)}n_{2k+1} - 1/(2k+1). $$

Объединение полученных границ снизу и сверху даёт

$$ - 1/(2k+1) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b \le 1/{}_{(1)}n_{2k+1} - 1/(2k+1). $$

Поэтому, как и требовалось, для положительного целого числа k и j = 2k+1

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b + 1/(2k+1)) = (-1)^{2k+1-1} = (-1)^{2k} = +1,$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b + 1/(2k+1) > 0,$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N) > b - 1/(2k+1),$$

$$- 1/(2k+1) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b \leq 1/{}_{(1)}n_{2k+1} - 1/(2k+1).$$

Тем самым построение ${}_{(1)}n_{2k+1}$ завершено и обосновано.

Теперь в подпоследовательность ${}_{(1)}M$ не включаются именно подряд образующие группу ${}_{(1)}G_{2k+2}$ с чётным номером 2k+2 элементы

$${}_{(1)}n_{2k+1}+1,\ {}_{(1)}n_{2k+1}+2,\ {}_{(1)}n_{2k+1}+3,\ \dots,\ {}_{(1)}n_{2k+2}$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел с таким наименьшим натуральным числом

$${}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2),$$

что

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M\subseteq N) < a + 1/(2k+2).$$

Во-первых, множество всех удовлетворяющих совместным неравенствам

$$n > {}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),$$

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M\subseteq N) < a + 1/(2k+2)$$

натуральных (положительных целых) чисел n не пусто. Ведь при невключении в подпоследовательность $_{(1)}M$ всех подряд превышающих

$$_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1)$$

элементов

$$_{(1)}n_{2k+1}+1,\ {}_{(1)}n_{2k+1}+2,\ {}_{(1)}n_{2k+1}+3,\ \ldots$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечная долевая последовательность

$$({}_{(1)}\delta_1(M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_2(M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_3(M\subseteq N),\ \dots ,\ {}_{(1)}\delta_n(M\subseteq N),\ \dots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), \dots , (1, 2, 3, \dots , n), \dots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности именно строго монотонно убывает при

$n \geq {}_{(1)}n_{2k+1}$ и при неограниченном продолжении стремится к нулю, так что неравенство

$${}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) < a + 1/(2k+2)$$

выполнено для всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел

$$n \in N = (1, 2, 3, ...).$$

Во-вторых, непустое множество всех удовлетворяющих неравенству

$${}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) < a + 1/(2k+2)$$

натуральных чисел

$$n > {}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1)$$

именно вполне упорядочено и поэтому непременно содержит первый элемент, обозначенный посредством

$${}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2),$$

обеспечивающий смену, в данном случае на отрицательный, знака разности

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/(2k+2) < 0$$

для последнего элемента

$$_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2)$$

группы с чётным номером 2k+2

$$_{(1)}G_{2k+2} = ({}_{(1)}n_{2k+1}+1, {}_{(1)}n_{2k+1}+2, {}_{(1)}n_{2k+1}+3, \ldots , {}_{(1)}n_{2k+2})$$

последовательности N всех натуральных чисел.

Ввиду минимальности натурального числа

$$_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2) > {}_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1)$$

со свойством

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) < a + 1/(2k+2)$$

выполнено для предыдущего натурального числа

$$_{(1)}n_{2k+2} - 1 = {}_{(1)}n(2k+2) - 1$$

условие

$$_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M\subseteq N) \geq a + 1/(2k+2).$$

$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M\subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с натуральными (положительными целыми) числителем

$$_{(1)}m_{(1)n(2k+2)} = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}$$

и знаменателем $_{(1)}n_{2k+2}$, так что

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M\subseteq N) = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+2)}/{}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}/{}_{(1)}n_{2k+2} < a + 1/(2k+2).$$

$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)-1}({}_{(1)}M\subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с предыдущим натуральным (положительным целым) числителем

$$_{(1)}m_{(1)n(2k+2)-1} = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+2)} = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}$$

и с ровно на единицу меньшим предыдущего натуральным (положительным целым) знаменателем ($_{(1)}n_{2k+2} - 1$), так что

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)-1}(_{(1)}M \subseteq N) = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+2)-1}/(_{(1)}n_{2k+2} - 1) =$$

$$_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}/(_{(1)}n_{2k+2} - 1) \geq a + 1/(2k+2).$$

Отсюда следует, что разность

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}(_{(1)}M \subseteq N) - a = {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}(_{(1)}M \subseteq N) - {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)-1}(_{(1)}M \subseteq N) +$$

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)-1}(_{(1)}M \subseteq N) - a \geq {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}(_{(1)}M \subseteq N) - {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)-1}(_{(1)}M \subseteq N)$$

$$+ 1/(2k+2) = {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}/{}_{(1)}n_{2k+2} - {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}/(_{(1)}n_{2k+2} - 1) + 1/(2k+2) =$$

$$- {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}(_{(1)}n_{2k+2} - (_{(1)}n_{2k+2} - 1))/(_{(1)}n_{2k+2}(_{(1)}n_{2k+2} - 1)) + 1/(2k+2) =$$

$$- {}_{(1)}m_{(1)n(2k+1)}/(_{(1)}n_{2k+2}(_{(1)}n_{2k+2} - 1)) + 1/(2k+2) \geq$$

$$- (_{(1)}n_{2k+2} - 1)/(_{(1)}n_{2k+2}(_{(1)}n_{2k+2} - 1)) + 1/(2k+2) = - 1/{}_{(1)}n_{2k+2} + 1/(2k+2).$$

Объединение полученных границ снизу и сверху даёт

$$- 1/{}_{(1)}n_{2k+2} + 1/(2k+2) \leq {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}(_{(1)}M \subseteq N) - a < 1/(2k+2).$$

Поэтому, как и требовалось, для положительного целого числа k и j = 2k+2

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/(2k+2)) = (-1)^{2k+2-1} = (-1)^{2k+1} = -1,$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/(2k+2) < 0,$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) < a + 1/(2k+2),$$

$$- 1/{}_{(1)}n_{2k+2} + 1/(2k+2) \le {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a < 1/(2k+2).$$

Тем самым построение ${}_{(1)}n_{2k+2}$ завершено и обосновано.

В итоге завершены и обоснованы построение ${}_{(1)}n_{2k+1}$ и ${}_{(1)}n_{2k+2}$, индукционный шаг от произвольного натурального (положительного целого) числа k к k+1 и благодаря методу математической индукции построение и обоснование такой непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной последовательности

$$({}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1) = 1,\ {}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),\ {}_{(1)}n_3 = {}_{(1)}n(3),\ {}_{(1)}n_4 = {}_{(1)}n(4),\ \dots ,$$

$$_{(1)}n_{2k-1} = {}_{(1)}n(2k-1),\ {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k),$$
$$_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),\ {}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2), \ldots)$$

именно наименьших возможных последних элементов всех групп последовательности N всех натуральных чисел, что обеспечивается непременно строгое чередование знаков разностей

$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2i-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b + 1/(2i-1)) = (-1)^{2i-1-1} = (-1)^{2i-2} = +1,$$
$$_{(1)}\delta_{(1)n(2i-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b + 1/(2i-1) > 0,$$
$$\mathrm{sign}({}_{(1)}\delta_{(1)n(2i)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/(2i)) = (-1)^{2i-1} = -1,$$
$$_{(1)}\delta_{(1)n(2i)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/(2i) < 0,$$
$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots , k)$$

в их счётно бесконечной последовательности

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b + 1/1,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/2,$$
$$_{(1)}\delta_{(1)n(3)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b + 1/3,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(4)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/4, \ldots ,$$

$$ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b + 1/(2k-1),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/(2k), $$
$$ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b + 1/(2k+1), $$
$$ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+2)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a - 1/(2k+2), \ldots) $$

по <u>первому</u> способу с непременно <u>положительной</u> <u>первой</u> <u>разностью</u>, причём имеет место следующая совокупность двойных неравенств, в первом из которых правая сторона действует именно и только при указанном правым индексом при знаке соответствующего неравенства $\leq$ условии $i \geq 2$, поскольку при $i = 1$ ${}_{(1)}n_1 = 1$ и <u>не</u> <u>имеет</u> <u>предыдущего</u> <u>натурального</u> (положительного целого) числ<u>а</u>:

$$ -1/(2i-1) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2i-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) - b \leq_{i \geq 2} 1/{}_{(1)}n_{2i-1} - 1/(2i-1), $$
$$ -1/{}_{(1)}n_{2i} + 1/(2i) \leq {}_{(1)}\delta_{(1)n(2i)}({}_{(1)}M \subseteq N) - a < 1/(2i), $$
$$ i \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots , k, k+1, \ldots). $$

Равносильна (эквивалентна) предыдущей совокупность двойных неравенств

$$b - 1/(2i-1) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2i-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) \le_{i\ge2} b - 1/(2i-1) + 1/{}_{(1)}n_{2i-1},$$

$$a + 1/(2i) - 1/{}_{(1)}n_{2i} \le {}_{(1)}\delta_{(1)n(2i)}({}_{(1)}M \subseteq N) < a + 1/(2i),$$

$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, \dots , k, k+1, \dots).$$

Ввиду <u>непустоты</u> <u>каждой</u> <u>группы</u> $_{(1)}G_j$, поэтому содержащей хотя бы один элемент, <u>каждая</u> <u>группа</u> $_{(1)}G_j$ наращивает $_{(1)}n_j$ хотя бы на единицу, так что имеет место нестрогое неравенство

$$_{(1)}n_j \ge j,$$

$$j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots).$$

При стремлении <u>положительного</u> целого числ<u>а</u> i к плюс бесконечности к ней стремятся также 2i-1 и $_{(1)}n_{2i-1}$, 2i и $_{(1)}n_{2i}$, их обращения 1/(2i-1) и $1/{}_{(1)}n_{2i-1}$, 1/(2i) и $1/{}_{(1)}n_{2i}$ стремятся к

нулю, миноранта $b - 1/(2i-1)$ и мажоранта $b - 1/(2i-1) + 1/{}_{(1)}n_{2i-1}$ вместе с промежуточной для них подпоследовательностью

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2i-1)}({}_{(1)}M \subseteq N)$$

стремятся к b, миноранта $a + 1/(2i) - 1/{}_{(1)}n_{2i}$ и мажоранта $a + 1/(2i)$ вместе с промежуточной для них подпоследовательностью

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2i)}({}_{(1)}M \subseteq N)$$

стремятся к a.

Остаётся перейти от доказательства для <u>избранной</u> непременно <u>строго</u> <u>монотонно</u> <u>возрастающей</u> <u>счётно</u> <u>бесконечной</u> <u>подпоследовательности</u>

$$({}_{(1)}n_1 = {}_{(1)}n(1) = 1,\ {}_{(1)}n_2 = {}_{(1)}n(2),\ {}_{(1)}n_3 = {}_{(1)}n(3),\ {}_{(1)}n_4 = {}_{(1)}n(4),\ \dots ,$$
$$_{(1)}n_{2k-1} = {}_{(1)}n(2k-1),\ {}_{(1)}n_{2k} = {}_{(1)}n(2k),$$
$$_{(1)}n_{2k+1} = {}_{(1)}n(2k+1),\ {}_{(1)}n_{2k+2} = {}_{(1)}n(2k+2),\ \dots)$$

именно наименьших возможных последних элементов всех групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел к доказательству для последовательности N именно всех натуральных (положительных целых) чисел.

Каждое натуральное число

$$\mathbf{n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)}$$

последовательности N всех натуральных чисел непременно принадлежит одной и только одной из указанных групп с рассматриваемыми поочерёдно то ли нечётным номером 2k-1, то ли чётным номером 2k для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$\mathbf{k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...).}$$

Пусть вначале натуральное число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

принадлежит полностью включённой в подпоследовательность $_{(1)}M$ группе

$$_{(1)}G_{2k-1} = ({}_{(1)}n_{2k-2}+1, {}_{(1)}n_{2k-2}+2, {}_{(1)}n_{2k-2}+3, ... , {}_{(1)}n_{2k-1}) \ ({}_{(1)}n_0 = 0)$$

с нечётным номером 2k-1 для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

и непременно строго монотонно возрастающей конечной долевой последовательностью

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)}({}_{(1)}M\subseteq N), {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+1}({}_{(1)}M\subseteq N), {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+2}({}_{(1)}M\subseteq N),$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+3}({}_{(1)}M\subseteq N), ... , {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N)).$$

Тогда

$$b - 1/(2i-1) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2i-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) \leq_{i\geq 2} b - 1/(2i-1) + 1/{}_{(1)}n_{2i-1},$$
$$a + 1/(2i) - 1/{}_{(1)}n_{2i} \leq {}_{(1)}\delta_{(1)n(2i)}({}_{(1)}M\subseteq N) < a + 1/(2i),$$

$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots , k, k+1, \ldots),$$

так что при $k \geq 2$

$$a \leq a + 1/(2k-2) - 1/{}_{(1)}n_{2k-2} \leq {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)}({}_{(1)}M \subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N)$$

$$\leq b - 1/(2k-1) + 1/{}_{(1)}n_{2k-1} \leq b,$$

$$a \leq a + 1/(2k-2) - 1/{}_{(1)}n_{2k-2} \leq {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)}({}_{(1)}M \subseteq N) <$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+1}({}_{(1)}M \subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+2}({}_{(1)}M \subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+3}({}_{(1)}M \subseteq N)$$

$$< \ldots < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) \leq b - 1/(2k-1) + 1/{}_{(1)}n_{2k-1} \leq b.$$

При стремящемся к плюс бесконечности положительном целом числе k в силу последней цепочки строгих и нестрогих неравенств положительные целые числа $2k-2$ и ${}_{(1)}n_{2k-2}$, $2k-1$ и ${}_{(1)}n_{2k-1}$ также стремятся к плюс бесконечности, их обращения $1/(2k-2)$ и $1/{}_{(1)}n_{2k-2}$, $1/(2k-1)$ и $1/{}_{(1)}n_{2k-1}$ стремятся к нулю.

Доли

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+1}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+2}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+3}({}_{(1)}M\subseteq N),\ \dots,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N)$$

для всех элементов группы

$$_{(1)}G_{2k-1} = ({}_{(1)}n_{2k-2}+1,\ {}_{(1)}n_{2k-2}+2,\ {}_{(1)}n_{2k-2}+3,\ \dots,\ {}_{(1)}n_{2k-1})\ ({}_{(1)}n_0 = 0)$$

с нечётным номером 2k-1 для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

заключены между минорантой

$$a + 1/(2k-2) - 1/{}_{(1)}n_{2k-2},$$

которая стремится к a именно сверху, и мажорантой

$$b - 1/(2k-1) + 1/{}_{(1)}n_{2k-1},$$

которая стремится к b именно снизу, причём обе эти односторонности обусловлены нестрогим неравенством

$$_{(1)}n_j \geq j\ (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)).$$

Пусть теперь натуральное число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

принадлежит полностью не включённой в подпоследовательность $_{(1)}M$ группе

$$_{(1)}G_{2k} = ({}_{(1)}n_{2k-1}+1, {}_{(1)}n_{2k-1}+2, {}_{(1)}n_{2k-1}+3, ... , {}_{(1)}n_{2k})$$

с чётным номером 2k для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

и непременно строго монотонно убывающей конечной долевой последовательностью

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N), {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+1}({}_{(1)}M\subseteq N), {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+2}({}_{(1)}M\subseteq N),$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+3}({}_{(1)}M\subseteq N), ... , {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N)).$$

Тогда

$$b - 1/(2i-1) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2i-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) \leq_{i\geq 2} b - 1/(2i-1) + 1/{}_{(1)}n_{2i-1},$$

$$a + 1/(2i) - 1/{}_{(1)}n_{2i} \leq {}_{(1)}\delta_{(1)n(2i)}({}_{(1)}M\subseteq N) < a + 1/(2i),$$

$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots , k, k+1, \ldots),$$

так что при $k \geq 2$

$$a \leq a + 1/(2k) - 1/{}_{(1)}n_{2k} \leq {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) \leq$$
$$b - 1/(2k-1) + 1/{}_{(1)}n_{2k-1} \leq b,$$

$$a \leq a + 1/(2k) - 1/{}_{(1)}n_{2k} \leq {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N) < \ldots <$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+3}({}_{(1)}M\subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+2}({}_{(1)}M\subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+1}({}_{(1)}M\subseteq N) <$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) \leq b - 1/(2k-1) + 1/{}_{(1)}n_{2k-1} \leq b.$$

При стремящемся к плюс бесконечности <u>положительном</u> целом числе k в силу последней цепочки строгих и нестрогих неравенств <u>положительные</u> целые ч<u>и</u>сла $2k-1$ и ${}_{(1)}n_{2k-1}$, $2k$ и ${}_{(1)}n_{2k}$ также стремятся к плюс бесконечности, их обращения $1/(2k-1)$ и $1/{}_{(1)}n_{2k-1}$, $1/(2k)$ и $1/{}_{(1)}n_{2k}$ стремятся к <u>нулю</u>.

Доли

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+1}({}_{(1)}M \subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+2}({}_{(1)}M \subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+3}({}_{(1)}M \subseteq N),\ \ldots,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N)$$

для всех элементов <u>группы</u>

$$_{(1)}G_{2k-1} = ({}_{(1)}n_{2k-2}+1,\ {}_{(1)}n_{2k-2}+2,\ {}_{(1)}n_{2k-2}+3,\ \ldots,\ {}_{(1)}n_{2k-1})\ ({}_{(1)}n_0 = 0)$$

с <u>нечётным</u> номером 2k-1 для некоторого <u>натурального</u> (<u>положительного</u> целого) числ<u>а</u>

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$$

заключены между минорантой

$$a + 1/(2k) - 1/{}_{(1)}n_{2k},$$

которая стремится к a именно сверху, и мажорантой

$$b - 1/(2k-1) + 1/{}_{(1)}n_{2k-1},$$

которая стремится к b именно снизу, причём обе эти односторонности обусловлены нестрогим неравенством

$$ {}_{(1)}n_j \geq j \ (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)). $$

Следовательно, для любого

$$ n \in (2, 3, 4, 5, ...) $$

имеет место двойное нестрогое неравенство

$$ a \leq {}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) \leq b. $$

При стремящемся к плюс бесконечности натуральном (положительном целом) числе

$$ k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...) $$

в двойном нестрого-строгом неравенстве

$$ a + 1/(2k) - 1/{}_{(1)}n_{2k} \leq {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) < a + 1/(2k) $$

положительные целые числа 2k и $_{(1)}n_{2k}$ также стремятся к плюс бесконечности, их обращения 1/(2k) и 1/$_{(1)}n_{2k}$ стремятся к нулю, доли

$$ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) $$

для последних элементов ${}_{(1)}n_{2k}$ групп

$$_{(1)}G_{2k} = ({}_{(1)}n_{2k-1}+1,\ {}_{(1)}n_{2k-1}+2,\ {}_{(1)}n_{2k-1}+3,\ \dots ,\ {}_{(1)}n_{2k})$$

с чётными номерами 2k заключены между соответствующими минорантами

$$a + 1/(2k) - 1/{}_{(1)}n_{2k}$$

и мажорантами

$$a + 1/(2k),$$

которые именно совместно и поэтому вместе с долями

$$_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N)$$

стремятся к одному и тому же пределу a именно сверху, причём эта односторонность минорант обусловлена нестрогим неравенством

$$_{(1)}n_j \geq j\ (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)),$$

так что

$$\lim_{k\to+\infty} {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N) = a.$$

При стремящемся к плюс бесконечности <u>натуральном</u> (<u>положительном</u> целом) числе

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

в двойном нестрого-строгом неравенстве

$$b - 1/(2k-1) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) \leq_{k\geq 2} b - 1/(2k-1) + 1/{}_{(1)}n_{2k-1}$$

<u>положительные</u> целые ч<u>и</u>сла 2k-1 и ${}_{(1)}n_{2k-1}$ также стремятся к плюс бесконечности, их обращения 1/(2k-1) и 1/${}_{(1)}n_{2k-1}$ стремятся к <u>нулю</u>, доли

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N)$$

для последних элементов ${}_{(1)}n_{2k}$ <u>групп</u>

$${}_{(1)}G_{2k-1} = ({}_{(1)}n_{2k-2}+1, {}_{(1)}n_{2k-2}+2, {}_{(1)}n_{2k-2}+3, ... , {}_{(1)}n_{2k-1}) \ ({}_{(1)}n_0 = 0)$$

с <u>нечётными</u> номерами 2k-1 заключены между соответствующими минорантами

$$b - 1/(2k-1)$$

и мажорантами

$$b - 1/(2k-1) + 1/{}_{(1)}n_{2k-1},$$

которые именно совместно и поэтому вместе с дол<u>я</u>ми

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N)$$

стремятся к одному и тому же пределу b именно снизу, причём эта односторонность мажорант обусловлена нестрогим неравенством

$${}_{(1)}n_j \geq j\ (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)),$$

так что

$$\lim_{k\to+\infty}\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) = b.$$

Но для любого

$$n \in (2, 3, 4, 5, ...)$$

имеет место двойное нестрогое неравенство

$$a \leq {}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) \leq b.$$

Поэтому найденные выше пределы подпоследовательностей

$$\lim_{k\to+\infty} {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) = a,$$

$$\lim_{k\to+\infty} {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) = b$$

для последних элементов ${}_{(1)}n_{2k}$ и ${}_{(1)}n_{2k-1}$ групп ${}_{(1)}G_{2k}$ и ${}_{(1)}G_{2k-1}$ с <u>чётными</u> 2k и <u>нечётными</u> 2k-1 номерами соответственно являются именно <u>нижним</u> и <u>верхним</u> пределами всей последовательности долей

$${}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N)\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)),$$

то есть

$$\lim_{n\to+\infty} \inf {}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) = \lim_{k\to+\infty} {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) = a,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup {}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M \subseteq N) = \lim_{k\to+\infty} {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) = b.$$

Остаётся доказать, что <u>множественным</u> <u>пределом</u>

$$\mathbf{LIM}_{n\to\infty}\ {}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M\subseteq N)$$

последовательности

$${}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M\subseteq N)\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

является отрезок [a, b] непременно целиком.

Принадлежность множеству

$$\mathbf{LIM}_{n\to\infty}\ {}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M\subseteq N)$$

начала a и конца b этого отрезка [a, b] доказана выше нижним

$$\lim_{n\to+\infty} \inf\ {}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M\subseteq N) = \lim_{k\to+\infty}\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N) = a$$

и верхним

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\ {}_{(1)}\delta_n({}_{(1)}M\subseteq N) = \lim_{k\to+\infty}\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) = b$$

пределами соответственно.

Пусть d – произвольная именно внутренняя точка отрезка [a, b] строго между началом и концом этого отрезка,

поэтому принадлежащая интервалу]a, b[, причём непринадлежность промежутку любого из его концов показывается вывернутой наружу квадратной скобкой по Бурбаки во избежание путаницы с упорядоченной парой (a, b) при общепринятом использовании круглой скобки:

$$d \in \,]a, b[,$$

$$a < d < b.$$

При любом положительном целом числе k

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) < \ldots < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+3}({}_{(1)}M \subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+2}({}_{(1)}M \subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+1}({}_{(1)}M \subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N),$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)+1}({}_{(1)}M \subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)+2}({}_{(1)}M \subseteq N) < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)+3}({}_{(1)}M \subseteq N) < \ldots < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N),$$

$$\lim_{k \to +\infty} {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N) = a,$$

$$\lim_{k \to +\infty} {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N) = {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k+1)}({}_{(1)}M \subseteq N) = b.$$

Поэтому существует такое зависящее от d положительное целое число k(d), что для любых k > k(d) выполняется двойное неравенство

$$ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M\subseteq N) < d < {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) $$

со строго монотонным изменением и с переходом через d последовательности

$$ {}_{(1)}\delta_{n}({}_{(1)}M\subseteq N)\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)) $$

именно на каждой из (пополненных последним элементом в каждом случае своей предыдущей группы) групп ${}_{(1)}G_{2k}$ и ${}_{(1)}G_{2k-1}$ с чётными 2k и нечётными 2k-1 номерами соответственно для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$ k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...). $$

Пусть вначале натуральное число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

принадлежит полностью включённой в подпоследовательность $_{(1)}M$ группе

$$_{(1)}G_{2k-1} = (_{(1)}n_{2k-2}+1, _{(1)}n_{2k-2}+2, _{(1)}n_{2k-2}+3, ... , _{(1)}n_{2k-1}) \ (_{(1)}n_0 = 0)$$

с нечётным номером 2k-1 для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

и (пополненной соответствием последнего элемента предыдущей группы) непременно строго монотонно возрастающей конечной долевой последовательностью

$$(_{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)}(_{(1)}M \subseteq N), _{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+1}(_{(1)}M \subseteq N), _{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+2}(_{(1)}M \subseteq N), _{(1)}\delta_{(1)n(2k-2)+3}(_{(1)}M \subseteq N), ... , _{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}(_{(1)}M \subseteq N))$$

с принятием конечной последовательности

$$(_{(1)}m_{2k-2}/_{(1)}n_{2k-2}, (_{(1)}m_{2k-2}+1)/(_{(1)}n_{2k-2}+1), (_{(1)}m_{2k-2}+2)/(_{(1)}n_{2k-2}+2),$$

$$({}_{(1)}m_{2k-2}+3)/({}_{(1)}n_{2k-2}+3), \dots , {}_{(1)}m_{2k-1}/{}_{(1)}n_{2k-1}) \ ({}_{(1)}n_0 = 0)$$

соответствующих рациональных значений с указанными положительными целыми числителями и знаменателями. Приращение любого из этих рациональных значений по сравнению с предыдущим рациональным значением убывает с ростом неотрицательного целого числа h и составляет

$$({}_{(1)}m_{2k-2}+h+1)/({}_{(1)}n_{2k-2}+h+1) - ({}_{(1)}m_{2k-2}+h)/({}_{(1)}n_{2k-2}+h) =$$
$$(({}_{(1)}m_{2k-2}+h+1)({}_{(1)}n_{2k-2}+h) - ({}_{(1)}m_{2k-2}+h)({}_{(1)}n_{2k-2}+h+1))/(({}_{(1)}n_{2k-2}+h)$$
$$({}_{(1)}n_{2k-2}+h+1)) =$$
$$(({}_{(1)}m_{2k-2}+h)({}_{(1)}n_{2k-2}+h) + ({}_{(1)}n_{2k-2}+h) - ({}_{(1)}m_{2k-2}+h)({}_{(1)}n_{2k-2}+h) -$$
$$({}_{(1)}m_{2k-2}+h))/(({}_{(1)}n_{2k-2}+h)({}_{(1)}n_{2k-2}+h+1)) =$$
$$(({}_{(1)}n_{2k-2}+h) - ({}_{(1)}m_{2k-2}+h))/(({}_{(1)}n_{2k-2}+h)({}_{(1)}n_{2k-2}+h+1)) =$$
$$({}_{(1)}n_{2k-2} - {}_{(1)}m_{2k-2})/(({}_{(1)}n_{2k-2}+h)({}_{(1)}n_{2k-2}+h+1)) \leq$$

$$({}_{(1)}n_{2k-2} - {}_{(1)}m_{2k-2})/({}_{(1)}n_{2k-2}({}_{(1)}n_{2k-2}+1)) < 1/({}_{(1)}n_{2k-2}+1).$$

Пусть теперь натуральное число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

принадлежит полностью не включённой в подпоследовательность ${}_{(1)}M$ группе

$${}_{(1)}G_{2k} = ({}_{(1)}n_{2k-1}+1, {}_{(1)}n_{2k-1}+2, {}_{(1)}n_{2k-1}+3, ... , {}_{(1)}n_{2k})$$

с чётным номером 2k для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

и (пополненной соответствием последнего элемента предыдущей группы) непременно строго монотонно убывающей конечной долевой последовательностью

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)}({}_{(1)}M \subseteq N), {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+1}({}_{(1)}M \subseteq N), {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+2}({}_{(1)}M \subseteq N), {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k-1)+3}({}_{(1)}M \subseteq N), ... , {}_{(1)}\delta_{(1)n(2k)}({}_{(1)}M \subseteq N))$$

с принятием конечной последовательности

$$({}_{(1)}m_{2k-1}/{}_{(1)}n_{2k-1},\ {}_{(1)}m_{2k-1}/({}_{(1)}n_{2k-1}+1),\ {}_{(1)}m_{2k-1}/({}_{(1)}n_{2k-1}+2),\ {}_{(1)}m_{2k-1}/({}_{(1)}n_{2k-1}+3),\ \dots ,\ {}_{(1)}m_{2k-1}/{}_{(1)}n_{2k})$$

соответствующих рациональных значений с указанными положительными целыми числителями и знаменателями. Уменьшение любого из этих рациональных значений по сравнению с предыдущим рациональным значением убывает с ростом неотрицательного целого числа h и составляет

$$ {}_{(1)}m_{2k-1}/({}_{(1)}n_{2k-1}+h) - {}_{(1)}m_{2k-1}/({}_{(1)}n_{2k-1}+h+1) = {}_{(1)}m_{2k-1}/(({}_{(1)}n_{2k-1}+h)({}_{(1)}n_{2k-1}+h+1)) \le {}_{(1)}m_{2k-1}/({}_{(1)}n_{2k-1}({}_{(1)}n_{2k-1}+1)) < 1/({}_{(1)}n_{2k-1}+1).$$

При стремящемся к плюс бесконечности положительном целом числе k положительные целые числа ${}_{(1)}n_{2k-2}+1$ и ${}_{(1)}n_{2k-}$

$_1+1$ также стремятся к плюс бесконечности, их обращения $1/({}_{(1)}n_{2k-2}+1)$ и $1/({}_{(1)}n_{2k-1}+1)$ стремятся к нулю.

Отсюда следует, что к произвольному действительному числу

$$d \in]a, b[,$$

$$a < d < b$$

стремится счётно бесконечная долевая последовательность

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(1)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(1)+h(2)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(2)+h(3)}({}_{(1)}M\subseteq N),$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(3)+h(4)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ \ldots\ ,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)+h(j)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ \ldots),$$

каждый элемент которой

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)+h(j)}({}_{(1)}M\subseteq N)$$

с положительным целым номером j удовлетворяет условию

$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)+h(j)}({}_{(1)}M\subseteq N) - d| < 1/({}_{(1)}n_{j-1}+1),$$

если выбирается так, что является наименее уклоняющимся от этого действительного числа d элементом конечной долевой последовательности

$$({}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)+1}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)+2}({}_{(1)}M\subseteq N),$$
$${}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)+3}({}_{(1)}M\subseteq N),\ \dots ,\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(j)}({}_{(1)}M\subseteq N))$$

для (пополненной последним элементом ${}_{(1)}n_{j-1}$ предыдущей группы ${}_{(1)}G_{j-1}$) группы

$${}_{(1)}G_j = ({}_{(1)}n_{j-1}+1,\ {}_{(1)}n_{j-1}+2,\ {}_{(1)}n_{j-1}+3,\ \dots ,\ {}_{(1)}n_j)$$

с именно этим номером j, так что

$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)+h(j)}({}_{(1)}M\subseteq N) - d| = \min\{|{}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)}({}_{(1)}M\subseteq N) - d|,$$
$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)+1}({}_{(1)}M\subseteq N) - d|,\ |{}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)+2}({}_{(1)}M\subseteq N) - d|,$$
$$|{}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)+3}({}_{(1)}M\subseteq N) - d|,\ \dots ,\ |{}_{(1)}\delta_{(1)n(j)}({}_{(1)}M\subseteq N) - d|\},$$

причём при наличии двух следующих друг за другом элементов той конечной долевой последовательности,

наименее уклоняющихся от этого действительного числа d, тогда являющегося полусуммой обоих этих элементов, для однозначности берётся любой из этих обоих элементов, например предыдущий, а ввиду наличия пополняющего элемента ${}_{(1)}n_{j-1}$ предыдущей группы ${}_{(1)}G_{j-1}$ соответствующий этому элементу ${}_{(1)}n_{j-1}$ элемент

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)}({}_{(1)}M\subseteq N)$$

той конечной долевой последовательности может войти в ту счётно бесконечную долевую последовательность дважды подряд, то есть и для предыдущей группы ${}_{(1)}G_{j-1}$, и для данной группы ${}_{(1)}G_j$.

В самом деле, ввиду строгой монотонности конечной долевой последовательности

$$({}_{(1)}\delta_{(2)n(j-1)}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)+1}({}_{(1)}M\subseteq N),\ {}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)+2}({}_{(1)}M\subseteq N),$$

$${}_{(1)}\delta_{(1)n(j-1)+3}({}_{(1)}M\subseteq N), \ldots , {}_{(1)}\delta_{(1)n(j)}({}_{(1)}M\subseteq N))$$

эта конечная долевая последовательность осуществляет именно разбиение отрезка между её концами на части, длина каждой из которых строго меньше, чем $1/({}_{(1)}n_{j-1}+1)$. При всех $j > 2k(d)$ принадлежащее этому отрезку действительное число d вынуждено или принадлежать этой конечной последовательности, будучи границей одной или двух соседних этих частей, так что уклонение соответствующего элемента этой конечной последовательности от действительного числа d равно нулю, или находиться строго внутри одной и только одной из этих частей этого отрезка, имеющей длину, строго меньшую, чем $1/({}_{(1)}n_{j-1}+1)$, так что уклонение каждого из обоих концов этой части как элементов этой конечной

последовательности от действительного числа d строго меньше, чем $1/({}_{(1)}n_{j-1}+1)$, да ещё и при выборе именно наименее уклоняющегося конца этой части его уклонение от действительного числа d строго меньше, чем $1/(2{}_{(1)}n_{j-1}+2)$ как половина $1/({}_{(1)}n_{j-1}+1)$. А при стремлении j к плюс бесконечности $1/({}_{(1)}n_{j-1}+1)$ и тем более $1/(2{}_{(1)}n_{j-1}+2)$ стремятся к нулю.

Тем самым полностью завершён первый способ доказательства теоремы о том, что для любой пары действительных чисел

$$(a, b)\ (0 \le a \le b \le 1)$$

от нуля до единицы включительно существует такая подпоследовательность M последовательности N всех натуральных чисел, нижняя доля которой в точности равна

не большему из этой пары действительных чисел и совместно с этим верхняя доля которой в точности равна не меньшему из этой пары действительных чисел:

$$\lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = b,$$

причём множественным пределом

$$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = [a, b]$$

последовательности

$$\delta_n(M\subseteq N) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

является отрезок [a, b] непременно целиком.

Второй из двух способов доказательства этой теоремы заключается в следующем.

Второй из двух способов построения одной из таких подпоследовательностей $_{(2)}M$ последовательности N всех

натуральных чисел и доказательства достаточности этого построения математической индукцией для случая несуществования единой доли между нулём и единицей в обоих случаях включительно подпоследовательности $_{(2)}M$ последовательности N всех натуральных чисел, то есть для случая неравенства нижней a и верхней b долей подпоследовательности $_{(2)}M$ между нулём и единицей в обоих случаях включительно

$$0 \le a < b \le 1,$$

осуществляется так.

Обеспечивается именно строгое чередование знаков указанных разностей с определённостью знака первой разности для элементов подпоследовательностей,

стремящихся к указанным нижнему и верхнему пределам, в счётно бесконечной последовательности разностей

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/1),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/2),$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(3)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/3),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(4)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/4),\ \ldots ,$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/(2k-1)),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/(2k)),$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/(2k+1)),$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/(2k+2)),\ \ldots)$$

по второму способу со стремящейся к указанному нижнему пределу a подпоследовательностью для ${}_{(1)}n(j)$ со всеми нечётными j и со стремящейся к указанному верхнему пределу b подпоследовательностью для ${}_{(1)}n(j)$ со всеми чётными j ввиду включения в подпоследовательность ${}_{(2)}M$ групп именно и только со всеми чётными j.

В подпоследовательность $_{(2)}M$ не включается начинающаяся с единицы первая группа последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел. Самый первый элемент 1 первой группы обеспечивает соответствующую долю

$$_{(2)}\delta_1({}_{(2)}M \subseteq N) = 0$$

и определённый, в данном случае отрицательный, знак первой разности

$$_{(2)}\delta_1({}_{(2)}M \subseteq N) - (a + 1/1) < 0$$

(поскольку

$$0 \le a < b \le 1),$$

для чего необходимо и достаточно

$$_{(2)}\delta_1({}_{(2)}M \subseteq N) < a + 1/1 = a + 1,$$

что необходимо и достаточно для первого элемента

$$_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1) = 1$$

непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной последовательности

$$({}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1),\ {}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2),\ {}_{(2)}n_3 = {}_{(2)}n(3),\ {}_{(2)}n_4 = {}_{(2)}n(4),\ \ldots\ ,$$

$$_{(2)}n_{2k-1} = {}_{(2)}n(2k-1),\ {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k),\ ($$

$$_{2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1),\ {}_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2),\ \ldots)$$

именно наименьших возможных последних элементов всех групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел. Так что начинающаяся с единицы наименьшая возможная первая группа последовательности N всех натуральных чисел состоит именно целиком из этой единицы.

Теперь в подпоследовательность $_{(2)}M$ включаются именно подряд образующие группу $_{(2)}G_2$ с чётным номером 2 элементы

$$_{(2)}n_1+1 = 2,\ _{(2)}n_1+2 = 3,\ _{(2)}n_1+3 = 4,\ \ldots ,\ _{(2)}n_2$$

последовательности N всех натуральных чисел с таким наименьшим натуральным числом

$$_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2),$$

что именно впервые достигается чередование знаков разностей, так что вторая разность

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/2) > 0$$

должна именно впервые стать непременно положительной, для чего необходимо и достаточно

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M\subseteq N) > b - 1/2.$$

Во-первых, множество всех удовлетворяющих совместным неравенствам

$$n > {}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1) = 1,$$

$$ {}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) > b - 1/2$$

натуральных (положительных целых) чисел n не пусто. Ведь при включении в подпоследовательность $_{(2)}M$ всех подряд превышающих

$$ {}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1) = 1$$

элементов

$$ {}_{(2)}n_1+1 = 2,\ {}_{(2)}n_1+2 = 3,\ {}_{(2)}n_1+3 = 4,\ \ldots$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечная долевая последовательность

$$({}_{(2)}\delta_1(M \subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_2(M \subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_3(M \subseteq N),\ \ldots ,\ {}_{(2)}\delta_n(M \subseteq N),\ \ldots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1), (1, 2), (1, 2, 3), \ldots , (1, 2, 3, \ldots , n), \ldots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности именно строго монотонно возрастает при $n \geq {}_{(2)}n_1$ и при неограниченном продолжении стремится к единице, так что неравенство

$${}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) > b - 1/2$$

выполнено для всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел

$$n \in N = (1, 2, 3, ...).$$

Во-вторых, непустое множество всех удовлетворяющих неравенству

$${}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) > b - 1/2$$

натуральных чисел

$$n > {}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1) = 1$$

именно вполне упорядочено и поэтому непременно содержит первый элемент, обозначенный посредством

$${}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2),$$

обеспечивающий смену, в данном случае на положительный, знака разности

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M \subseteq N) - (b - 1/2) > 0$$

для последнего элемента

$${}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2)$$

группы с чётным номером 2

$$_{(2)}G_2 = ({}_{(2)}n_1+1 = 2,\ {}_{(2)}n_1+2 = 3,\ {}_{(2)}n_1+3 = 4,\ \ldots ,\ {}_{(2)}n_2)$$

последовательности N всех натуральных чисел.

Ввиду минимальности натурального числа

$$_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2) > {}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1) = 1$$

со свойством

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) > b - 1/2$$

выполнено для предыдущего натурального числа

$$_{(2)}n_2 - 1 = {}_{(2)}n(2) - 1$$

условие

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) \leq b - 1/2.$$

$_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M \subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с натуральными (положительными целыми) числителем

$$_{(2)}m_{(2)n(2)} = {}_{(2)}m_{(2)n(1)} = {}_{(2)}m_1$$

и знаменателем $_{(2)}n_2$, так что

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M\subseteq N) = {}_{(2)}m_{(2)n(2)}/{}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}m_{(2)n(1)}/{}_{(2)}n_2 > b - 1/2.$$

$_{(2)}\delta_{(2)n(2)-1}({}_{(2)}M\subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с предыдущим натуральным (положительным целым) числителем

$$_{(2)}m_{(2)n(2)-1} = {}_{(2)}m_{(2)n(2)} = {}_{(2)}m_{(2)n(1)}$$

и с ровно на единицу меньшим предыдущего натуральным (положительным целым) знаменателем $({}_{(2)}n_2 - 1)$, так что

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2)-1}({}_{(2)}M\subseteq N) = {}_{(2)}m_{(2)n(2)-1}/({}_{(2)}n_2 - 1) = {}_{(2)}m_{(2)n(1)}/({}_{(2)}n_2 - 1) \leq b - 1/2.$$

Отсюда следует, что разность

$$ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b = {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M \subseteq N) - {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)-1}({}_{(2)}M \subseteq N) + {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)-1}({}_{(2)}M \subseteq N) - b \le {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M \subseteq N) - {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)-1}({}_{(2)}M \subseteq N) - 1/(2k+2) = {}_{(2)}m_{(2)n(2)}/{}_{(2)}n_2 - ({}_{(2)}m_{(2)n(2)} - 1)/({}_{(2)}n_2 - 1) - 1/2 = ({}_{(2)}m_{(2)n(2)}({}_{(2)}n_2 - 1) - ({}_{(2)}m_{(2)n(2)} - 1){}_{(2)}n_2)/({}_{(2)}n_2({}_{(2)}n_2 - 1)) - 1/2 = ({}_{(2)}n_2 - {}_{(2)}m_{(2)n(2)})/({}_{(2)}n_2({}_{(2)}n_2 - 1)) - 1/2 \le ({}_{(2)}n_2 - 1)/({}_{(2)}n_2({}_{(2)}n_2 - 1)) - 1/2 = 1/{}_{(2)}n_2 - 1/2. $$

Объединение полученных границ снизу и сверху даёт

$$ - 1/2 < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b \le 1/{}_{(2)}n_2 - 1/2. $$

Тем самым построение $_{(2)}n_2$ завершено и обосновано.

Принимается следующее <u>допущение</u> <u>математической</u> <u>индукции</u>.

Пусть для произвольного <u>положительного</u> целого числ<u>а</u> k построена непременно <u>строго</u> <u>монотонно</u> <u>возрастающая</u> <u>конечная</u> <u>последовательность</u>

$$({}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1) = 1,\ {}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2),\ {}_{(2)}n_3 = {}_{(2)}n(3),\ {}_{(2)}n_4 = {}_{(2)}n(4),\ \ldots ,$$
$${}_{(2)}n_{2k-1} = {}_{(2)}n(2k-1),\ {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k))$$

именно наименьших возможных последних элементов всех первых 2k групп последовательности N всех натуральных чисел, обеспечивающая непременно строгое чередование знаков разностей

$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2i-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/(2i-1))) = (-1)^{2i-1} = -1,$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2i-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - a - 1/(2i-1) < 0,$$
$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2i)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/(2i))) = (-1)^{2i} = +1,$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2i)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b + 1/(2i) > 0,$$
$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots , k)$$

в их конечной последовательности

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/1),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/2),$$

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(3)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/3),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(4)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/4),\ \dots ,$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/(2k-1)),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/(2k)))$$

по <u>второму</u> способу с непременно <u>отрицательной</u> <u>первой</u> <u>разностью</u>, причём имеет место следующая совокупность двойных неравенств, в первом из которых правая сторона действует именно и только при указанном правым индексом при знаке соответствующего неравенства $\le$ условии $i\ge2$, поскольку при $i = 1$ ${}_{(2)}n_1 = 1$ и <u>не</u> <u>имеет</u> <u>предыдущего</u> <u>натурального</u> (<u>положительного</u> целого) числ<u>а</u>:

$$- 1/{}_{(2)}n_{2i-1} + 1/(2i-1) \le_{i\ge2} {}_{(2)}\delta_{(2)n(2i-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - a < 1/(2i-1),$$
$$- 1/(2i) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2i)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b \le 1/{}_{(2)}n_{2i} - 1/(2i),$$
$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, \dots , k).$$

Для $k = 1$ такое построение уж<u>е</u> выполнено выше.

Поэтому по методу математической индукции остаётся с опорой на это допущение для произвольного положительного целого числа k доказать возможность перехода от k к k + 1. Итогом достраивания ещё двух последних элементов должна стать непременно строго монотонно возрастающая конечная последовательность

$$({}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1) = 1,\ {}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2),\ {}_{(2)}n_3 = {}_{(2)}n(3),\ {}_{(2)}n_4 = {}_{(2)}n(4),\ \ldots,$$
$${}_{(2)}n_{2k-1} = {}_{(2)}n(2k-1),\ {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k),$$
$${}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1),\ {}_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2))$$

именно наименьших возможных последних элементов всех первых 2k+2 групп последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающая именно строгое чередование знаков разностей

$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2i-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/(2i-1))) = (-1)^{2i-1} = -1,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2i-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - a - 1/(2i-1) < 0,$$

$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2i)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/(2i))) = (-1)^{2i} = +1,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2i)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b + 1/(2i) > 0,$$

$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots , k, k+1)$$

в их <u>конечной</u> <u>последовательности</u>

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/1),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/2),$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(3)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/3),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(4)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/4), \ldots ,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/(2k-1)),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/(2k)),$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/(2k+1)),$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/(2k+2)))$$

по <u>второму</u> способу с непременно <u>отрицательной</u> <u>первой</u> <u>разностью</u>, причём имеет место следующая совокупность двойных неравенств, в первом из которых правая сторона

действует именно и только при указанном правым индексом при знаке соответствующего неравенства $\leq$ условии $i \geq 2$, поскольку при $i = 1$ $_{(2)}n_1 = 1$ и не имеет предыдущего натурального (положительного целого) числа:

$$- 1/(2i-1) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2i-1)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b \leq_{i \geq 2} 1/{}_{(2)}n_{2i-1} - 1/(2i-1),$$

$$- 1/{}_{(2)}n_{2i} + 1/(2i) \leq {}_{(2)}\delta_{(2)n(2i)}({}_{(2)}M \subseteq N) - a < 1/(2i),$$

$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, ... , k, k+1).$$

По допущению математической индукции для положительного целого числа k и $j = 2k$

$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N) - (b - 1/(2k)) = (-1)^{2k} = +1,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N) - (b - 1/(2k)) > 0,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N) > b - 1/(2k).$$

Теперь в подпоследовательность ${}_{(2)}M$ не включаются именно подряд образующие группу ${}_{(2)}G_{2k+1}$ с нечётным номером 2k+1 элементы

$$ {}_{(2)}n_{2k}+1,\ {}_{(2)}n_{2k}+2,\ {}_{(2)}n_{2k}+3,\ \dots\ ,\ {}_{(2)}n_{2k+1} $$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел с таким наименьшим натуральным числом

$$ {}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1), $$

что

$$ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N) < a + 1/(2k+1). $$

Во-первых, множество всех удовлетворяющих совместным неравенствам

$$ n > {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k), $$

$$ {}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) < a + 1/(2k+1) $$

натуральных (положительных целых) чисел n не пусто.

Ведь при невключении в подпоследовательность $_{(2)}M$ всех подряд превышающих

$$_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k)$$

элементов

$$_{(2)}n_{2k}+1,\ {}_{(2)}n_{2k}+2,\ {}_{(2)}n_{2k}+3,\ \ldots$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечная долевая последовательность

$$(\delta_1(M\subseteq N),\ \delta_2(M\subseteq N),\ \delta_3(M\subseteq N),\ \ldots\ ,\ \delta_n(M\subseteq N),\ \ldots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1),\ (1, 2),\ (1, 2, 3),\ \ldots\ ,\ (1, 2, 3,\ \ldots\ ,\ n),\ \ldots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности именно строго монотонно убывает при $n \geq {}_{(2)}n_{2k}$ и при неограниченном продолжении стремится к нулю, так что неравенство

$$ {}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) < a + 1/(2k+1) $$

выполнено для всех достаточно больших натуральных чисел

$$ n \in N = (1, 2, 3, ...). $$

Во-вторых, непустое множество всех удовлетворяющих неравенству

$$ {}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) < a + 1/(2k+1) $$

натуральных (положительных целых) чисел

$$n > {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k)$$

именно вполне упорядочено и поэтому непременно содержит первый элемент, обозначенный посредством

$${}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1),$$

обеспечивающий смену, в данном случае на отрицательный, знака разности

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N) - (a + 1/(2k+1)) < 0$$

для последнего элемента

$${}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1)$$

группы с нечётным номером 2k+1

$${}_{(2)}G_{2k+1} = ({}_{(2)}n_{2k}+1, {}_{(2)}n_{2k}+2, {}_{(2)}n_{2k}+3, \ldots , {}_{(2)}n_{2k+1})$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел.

Ввиду минимальности натурального числа

$$_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1) > {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k)$$

со свойством

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) < a + 1/(2k+1)$$

выполнено для <u>предыдущего</u> <u>натурального</u> числ<u>а</u>

$$_{(2)}n_{2k+1} - 1 = {}_{(2)}n(2k+1) - 1$$

условие

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) \geq a + 1/(2k+1).$$

$_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N)$ есть <u>рациональное</u> число, выражающееся <u>обыкновенной</u> <u>дробью</u> с <u>натуральными</u> (<u>положительными</u> целыми) числителем

$$_{(2)}m_{(2)n(2k+1)} = {}_{(2)}m_{(2)n(2k)}$$

и знаменателем $_{(2)}n_{2k+1}$, так что

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M \subseteq N) = {}_{(2)}m_{(2)n(2k+1)}/{}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}m_{(2)n(2k)}/{}_{(2)}n_{2k+1} <$$
$$a + 1/(2k+1).$$

${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)-1}({}_{(2)}M\subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с предыдущим натуральным (положительным целым) числителем

$$ {}_{(2)}m_{(2)n(2k+1)-1} = {}_{(2)}m_{(2)n(2k+1)} = {}_{(2)}m_{(2)n(2k)} $$

и с ровно на единицу меньшим предыдущего натуральным (положительным целым) знаменателем $({}_{(2)}n_{2k+1} - 1)$, так что

$$ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)-1}({}_{(2)}M\subseteq N) = {}_{(2)}m_{(2)n(2k+1)-1}/({}_{(2)}n_{2k+1} - 1) = {}_{(2)}m_{(2)n(2k)}/({}_{(2)}n_{2k+1} - 1) \geq a + 1/(2k+1). $$

Отсюда следует, что разность

$$ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - a = {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)-1}({}_{(2)}M\subseteq N) + {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)-1}({}_{(2)}M\subseteq N) - a \geq {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)-1}({}_{(2)}M\subseteq N) + 1/(2k+1) = {}_{(2)}m_{(2)n(2k)}/{}_{(2)}n_{2k+1} - {}_{(2)}m_{(2)n(2k)}/({}_{(2)}n_{2k+1} - 1) + 1/(2k+1) = $$

$$ - {}_{(2)}m_{(2)n(2k)}({}_{(2)}n_{2k+1} - ({}_{(2)}n_{2k+1} - 1))/({}_{(2)}n_{2k+1}({}_{(2)}n_{2k+1} - 1)) + 1/(2k+1) = $$

$$ - {}_{(2)}m_{(2)n(2k)}/({}_{(2)}n_{2k+1}({}_{(2)}n_{2k+1} - 1)) + 1/(2k+1) \geq $$

$$- ({}_{(2)}n_{2k+1} - 1)/({}_{(2)}n_{2k+1}({}_{(2)}n_{2k+1} - 1)) + 1/(2k+1) = - 1/{}_{(2)}n_{2k+1} + 1/(2k+1).$$

Объединение полученных границ снизу и сверху даёт

$$- 1/{}_{(2)}n_{2k+1} + 1/(2k+1) \le {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - a < 1/(2k+1).$$

Поэтому, как и требовалось, для __положительного__ целого числ__а__ k и j = 2k+1

$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - a - 1/(2k+1)) = (-1)^{2k+1} = = -1,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - a - 1/(2k+1) < 0,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) < a + 1/(2k+1),$$

$$- 1/{}_{(2)}n_{2k+1} + 1/(2k+1) \le {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - a < 1/(2k+1).$$

Тем самым построение ${}_{(2)}n_{2k+1}$ завершено и обосновано.

Теперь в __подпоследовательность__ ${}_{(2)}M$ __включаются__ именно __подряд__ образующие __группу__ ${}_{(2)}G_{2k+2}$ с __чётным__ номером 2k+2 элементы

$${}_{(2)}n_{2k+1}+1,\ {}_{(2)}n_{2k+1}+2,\ {}_{(2)}n_{2k+1}+3,\ \dots ,\ {}_{(2)}n_{2k+2}$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел с таким наименьшим натуральным числом

$$_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2),$$

что

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M \subseteq N) > b - 1/(2k+2).$$

Во-первых, множество всех удовлетворяющих совместным неравенствам

$$n > {}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1),$$
$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) > b - 1/(2k+2)$$

натуральных (положительных целых) чисел n не пусто. Ведь при включении в подпоследовательность $_{(2)}M$ всех подряд превышающих

$$_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1)$$

элементов

$${}_{(2)}n_{2k+1}+1,\ {}_{(2)}n_{2k+1}+2,\ {}_{(2)}n_{2k+1}+3,\ \ldots$$

последовательности N всех натуральных чисел счётно бесконечная долевая последовательность

$$(\delta_1(M\subseteq N),\ \delta_2(M\subseteq N),\ \delta_3(M\subseteq N),\ \ldots\ ,\ \delta_n(M\subseteq N),\ \ldots)$$

соответственно всех долей подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел на последовательности всех начально конечных подпоследовательностей

$$((1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 3),\ \ldots\ ,\ (1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n),\ \ldots)$$

последовательности N именно подряд от единицы до номера n включительно каждой начально конечной подпоследовательности (1, 2, 3, ... , n) в этой их последовательности именно строго монотонно возрастает

при $n \geq {}_{(2)}n_{2k+1}$ и при неограниченном продолжении стремится к единице, так что неравенство

$${}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) > b - 1/(2k+2)$$

выполнено для всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел

$$n \in N = (1, 2, 3, ...).$$

Во-вторых, непустое множество всех удовлетворяющих неравенству

$${}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) > b - 1/(2k+2)$$

натуральных (положительных целых) чисел

$$n > {}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1)$$

именно вполне упорядочено и поэтому непременно содержит первый элемент, обозначенный посредством

$${}_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2),$$

обеспечивающий смену, в данном случае на положительный, знака разности

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M \subseteq N) - (b - 1/(2k+2)) > 0$$

для последнего элемента

$$_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2)$$

группы с чётным номером 2k+2

$$_{(2)}G_{2k+2} = ({}_{(2)}n_{2k+1}+1, {}_{(2)}n_{2k+1}+2, {}_{(2)}n_{2k+1}+3, \ldots , {}_{(2)}n_{2k+2})$$

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел.

Ввиду минимальности натурального числа

$$_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2) > {}_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1)$$

со свойством

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) > b - 1/(2k+2)$$

выполнено для предыдущего натурального числа

$$_{(2)}n_{2k+2} - 1 = {}_{(2)}n(2k+2) - 1$$

условие

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M\subseteq N) \le b - 1/(2k+2).$$

$_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с натуральными (положительными целыми) числителем $_{(2)}m_{(2)n(2k+2)}$ и знаменателем $_{(2)}n_{2k+2}$, так что

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) = {}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)}/{}_{(2)}n_{2k+2} > b - 1/(2k+2).$$

$_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)-1}({}_{(2)}M\subseteq N)$ есть рациональное число, выражающееся обыкновенной дробью с ровно на единицу меньшими предыдущих неотрицательным целым числителем $({}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)} - 1)$ и натуральным (положительным целым) знаменателем $({}_{(2)}n_{2k+2} - 1)$, так что

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)-1}({}_{(2)}M\subseteq N) = ({}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)} - 1)/({}_{(2)}n_{2k+2} - 1) \le b - 1/(2k+2).$$

Отсюда следует, что разность

$$ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b = {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)-1}({}_{(2)}M\subseteq N) + {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)-1}({}_{(2)}M\subseteq N) - b \le {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)-1}({}_{(2)}M\subseteq N) - 1/(2k+2) = {}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)}/{}_{(2)}n_{2k+2} - ({}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)} - 1)/({}_{(2)}n_{2k+2} - 1) - 1/(2k+2) = ({}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}n_{2k+2} - 1) - ({}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)} - 1)\,{}_{(2)}n_{2k+2})/({}_{(2)}n_{2k+2}({}_{(2)}n_{2k+2} - 1)) - 1/(2k+2) = ({}_{(2)}n_{2k+2} - {}_{(2)}m_{(2)n(2k+2)})/({}_{(2)}n_{2k+2}({}_{(2)}n_{2k+2} - 1)) - 1/(2k+2) \le ({}_{(2)}n_{2k+2} - 1)/({}_{(2)}n_{2k+2}({}_{(2)}n_{2k+2} - 1)) - 1/(2k+2) = 1/{}_{(2)}n_{2k+2} - 1/(2k+2). $$

Объединение полученных границ снизу и сверху даёт

$$ - 1/(2k+2) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b \le 1/{}_{(2)}n_{2k+2} - 1/(2k+2). $$

Поэтому, как и требовалось, для положительного целого числа k и $j = 2k+2$

$$ \mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b + 1/(2k+2)) = (-1)^{2k+2} = +1, $$

$$ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b + 1/(2k+2) > 0, $$

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M \subseteq N) > b - 1/(2k+2),$$

$$- 1/(2k+2) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M \subseteq N) - b \le 1/{}_{(2)}n_{2k+2} - 1/(2k+2).$$

Тем самым построение $_{(2)}n_{2k+2}$ завершено и обосновано.

В итоге завершены и обоснованы построение $_{(2)}n_{2k+1}$ и $_{(2)}n_{2k+2}$, индукционный шаг от произвольного натурального (положительного целого) числа k к k+1 и благодаря методу математической индукции построение и обоснование такой непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной последовательности

$$({}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1) = 1,\ {}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2),\ {}_{(2)}n_3 = {}_{(2)}n(3),\ {}_{(2)}n_4 = {}_{(2)}n(4),\ \dots ,$$

$$_{(2)}n_{2k-1} = {}_{(2)}n(2k-1),\ {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k),$$

$$_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1),\ {}_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2),\ \dots)$$

именно наименьших возможных последних элементов всех групп последовательности N всех натуральных

(положительных целых) чисел, что обеспечивается непременно строгое чередование знаков разностей

$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2i-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/(2i-1))) = (-1)^{2i-1} = -1,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2i-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - a - 1/(2i-1) < 0,$$

$$\mathrm{sign}({}_{(2)}\delta_{(2)n(2i)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/(2i))) = (-1)^{2i} = +1,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2i)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b + 1/(2i) > 0,$$

$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, \dots , k, k+1, \dots)$$

в их счётно бесконечной последовательности

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/1), {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/2),$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(3)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/3), {}_{(2)}\delta_{(2)n(4)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/4), \dots ,$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/(2k-1)), {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/(2k)),$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (a + 1/(2k+1)),$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k+2)}({}_{(2)}M\subseteq N) - (b - 1/(2k+2)), \dots)$$

по второму способу с непременно отрицательной первой разностью, причём имеет место следующая совокупность двойных неравенств, в первом из которых левая сторона действует именно и только при указанном правым индексом при знаке соответствующего неравенства $\leq$ условии $i \geq 2$, поскольку при $i = 1$ $_{(2)}n_1 = 1$ и не имеет предыдущего натурального (положительного целого) числа:

$$- 1/{}_{(2)}n_{2i-1} + 1/(2i-1) \leq_{i\geq 2} {}_{(2)}\delta_{(2)n(2i-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - a < 1/(2i-1),$$

$$- 1/(2i) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2i)}({}_{(2)}M\subseteq N) - b \leq 1/{}_{(2)}n_{2i} - 1/(2i),$$

$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots, k, k+1, \ldots).$$

Равносильна (эквивалентна) предыдущей совокупность двойных неравенств

$$a + 1/(2i-1) - 1/{}_{(2)}n_{2i-1} \leq_{i\geq 2} {}_{(2)}\delta_{(2)n(2i-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) < a + 1/(2i-1),$$

$$b - 1/(2i) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2i)}({}_{(2)}M \subseteq N) \le b - 1/(2i) + 1/{}_{(2)}n_{2i},$$
$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots , k, k+1, \ldots).$$

Ввиду непустоты каждой группы $_{(2)}G_j$, поэтому содержащей хотя бы один элемент, каждая группа $_{(2)}G_j$ наращивает $_{(2)}n_j$ хотя бы на единицу, так что имеет место нестрогое неравенство

$$_{(2)}n_j \ge j,$$
$$j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots).$$

При стремлении положительного целого числа i к плюс бесконечности к ней стремятся также 2i-1 и $_{(2)}n_{2i-1}$, 2i и $_{(2)}n_{2i}$, их обращения 1/(2i-1) и $1/{}_{(2)}n_{2i-1}$, 1/(2i) и $1/{}_{(2)}n_{2i}$ стремятся к нулю, миноранта $a + 1/(2i-1) - 1/{}_{(2)}n_{2i-1}$ и мажоранта $a + 1/(2i-1)$ вместе с промежуточной для них подпоследовательностью

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2i-1)}({}_{(2)}M \subseteq N)$$

стремятся к a, миноранта b - 1/(2i) и мажоранта b - 1/(2i) + $1/{}_{(2)}n_{2i}$ вместе с промежуточной для них подпоследовательностью

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2i)}({}_{(2)}M \subseteq N)$$

стремятся к b.

Остаётся перейти от доказательства для <u>избранной</u> непременно <u>строго</u> <u>монотонно</u> <u>возрастающей</u> <u>счётно</u> <u>бесконечной</u> <u>подподпоследовательности</u>

$$({}_{(2)}n_1 = {}_{(2)}n(1) = 1,\ {}_{(2)}n_2 = {}_{(2)}n(2),\ {}_{(2)}n_3 = {}_{(2)}n(3),\ {}_{(2)}n_4 = {}_{(2)}n(4),\ \ldots ,$$

$$_{(2)}n_{2k-1} = {}_{(2)}n(2k-1),\ {}_{(2)}n_{2k} = {}_{(2)}n(2k),$$

$$_{(2)}n_{2k+1} = {}_{(2)}n(2k+1),\ {}_{(2)}n_{2k+2} = {}_{(2)}n(2k+2),\ \ldots)$$

именно <u>наименьших</u> <u>возможных</u> <u>последних</u> <u>элементов</u> <u>всех</u> <u>групп</u> <u>последовательности</u> N <u>всех</u> <u>натуральных</u> чисел к

доказательству для последовательности N именно всех натуральных (положительных целых) чисел.

Каждое натуральное число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

последовательности N всех натуральных чисел непременно принадлежит одной и только одной из указанных групп с рассматриваемыми поочерёдно то ли нечётным номером 2k-1, то ли чётным номером 2k для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...).$$

Пусть вначале натуральное число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

принадлежит полностью не включённой в подпоследовательность $_{(2)}$M группе

$$_{(2)}G_{2k-1} = ({}_{(2)}n_{2k-2}+1,\ {}_{(2)}n_{2k-2}+2,\ {}_{(2)}n_{2k-2}+3,\ \dots,\ {}_{(2)}n_{2k-1})\ ({}_{(2)}n_0 = 0)$$

с нечётным номером 2k-1 для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

и дополнительно включающей в своём начале $_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)}({}_{(2)}M \subseteq N)$ для последнего элемента $_{(2)}n_{2k-2}$ предыдущей группы $_{(2)}G_{2k-2}$ непременно строго монотонно убывающей конечной долевой последовательностью

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)}({}_{(2)}M \subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+1}({}_{(2)}M \subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+2}({}_{(2)}M \subseteq N),$$
$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+3}({}_{(2)}M \subseteq N),\ \dots,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N)).$$

Тогда

$$a + 1/(2i-1) - 1/{}_{(2)}n_{2i-1} \le_{i\ge 2} {}_{(2)}\delta_{(2)n(2i-1)}({}_{(2)}M \subseteq N) < a + 1/(2i-1),$$
$$b - 1/(2i) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2i)}({}_{(2)}M \subseteq N) \le b - 1/(2i) + 1/{}_{(2)}n_{2i},$$
$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, \dots, k, k+1, \dots),$$

так что при $k \geq 2$

$$a \leq a + 1/(2k-1) - 1/{}_{(2)}n_{2k-1} \leq {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)}({}_{(2)}M \subseteq N) \leq b - 1/(2k-2) + 1/{}_{(2)}n_{2k-2} \leq b,$$

$$a \leq a + 1/(2k-1) - 1/{}_{(2)}n_{2k-1} \leq {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N) < \ldots < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+3}({}_{(2)}M \subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+2}({}_{(2)}M \subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+1}({}_{(2)}M \subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)}({}_{(2)}M \subseteq N) \leq b - 1/(2k-2) + 1/{}_{(2)}n_{2k-2} \leq b.$$

При стремящемся к плюс бесконечности <u>положительном</u> целом числе k в силу последней цепочки строгих и нестрогих неравенств при $k \geq 2$ <u>положительные</u> целые ч<u>и</u>сла $2k-2$ и ${}_{(2)}n_{2k-2}$, $2k-1$ и ${}_{(2)}n_{2k-1}$ также стремятся к плюс бесконечности, их обращения $1/(2k-2)$ и $1/{}_{(2)}n_{2k-2}$, $1/(2k-1)$ и $1/{}_{(2)}n_{2k-1}$ <u>стремятся</u> к <u>нулю</u>.

Доли

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+1}({}_{(2)}M \subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+2}({}_{(2)}M \subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+3}({}_{(2)}M \subseteq N),\ \ldots ,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N)$$

для всех элементов <u>группы</u>

$$_{(2)}G_{2k-1} = ({}_{(2)}n_{2k-2}+1,\ {}_{(2)}n_{2k-2}+2,\ {}_{(2)}n_{2k-2}+3,\ \ldots ,\ {}_{(2)}n_{2k-1})\ ({}_{(2)}n_0 = 0)$$

с <u>нечётным</u> номером 2k-1 для некоторого <u>натурального</u> (<u>положительного</u> целого) числ<u>а</u>

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$$

заключены между минорантой

$$a + 1/(2k-1) - 1/{}_{(2)}n_{2k-1},$$

которая стремится к a именно сверху, и мажорантой

$$b - 1/(2k-2) + 1/{}_{(2)}n_{2k-2},$$

которая стремится к b именно снизу, причём обе эти односторонности обусловлены нестрогим неравенством

$$_{(2)}n_j \geq j\ (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)).$$

Пусть теперь натуральное число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

принадлежит полностью включённой в подпоследовательность $_{(2)}M$ группе

$$_{(2)}G_{2k} = ({}_{(2)}n_{2k-1}+1, {}_{(2)}n_{2k-1}+2, {}_{(2)}n_{2k-1}+3, ... , {}_{(2)}n_{2k})$$

с чётным номером 2k для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

и непременно строго монотонно возрастающей конечной долевой последовательностью

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N), {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+1}({}_{(2)}M \subseteq N), {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+2}({}_{(2)}M \subseteq N), {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+3}({}_{(2)}M \subseteq N), ... , {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N)).$$

Тогда

$$a + 1/(2i-1) - 1/{}_{(2)}n_{2i-1} \le_{i \ge 2} {}_{(2)}\delta_{(2)n(2i-1)}({}_{(2)}M \subseteq N) < a + 1/(2i-1),$$

$$b - 1/(2i) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2i)}({}_{(2)}M \subseteq N) \le b - 1/(2i) + 1/{}_{(2)}n_{2i},$$

$$i \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots , k, k+1, \ldots),$$

так что при $k \ge 2$

$$a \le a + 1/(2k-1) - 1/{}_{(2)}n_{2k-1} \le {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N)$$

$$\le b - 1/(2k) + 1/{}_{(2)}n_{2k} \le b,$$

$$a \le a + 1/(2k-1) - 1/{}_{(2)}n_{2k-1} \le {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N) <$$

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+1}({}_{(2)}M \subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+2}({}_{(2)}M \subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+3}({}_{(2)}M \subseteq N)$$

$$< \ldots < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N) \le b - 1/(2k) + 1/{}_{(2)}n_{2k} \le b.$$

При стремящемся к плюс бесконечности положительном целом числе k в силу последней цепочки строгих и нестрогих неравенств положительные целые числа $2k-1$ и ${}_{(2)}n_{2k-1}$, $2k$ и ${}_{(2)}n_{2k}$ также стремятся к плюс бесконечности, их обращения $1/(2k-1)$ и $1/{}_{(2)}n_{2k-1}$, $1/(2k)$ и $1/{}_{(2)}n_{2k}$ стремятся к нулю.

Доли

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+1}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+2}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+3}({}_{(2)}M\subseteq N),\ \dots,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N)$$

для всех элементов <u>группы</u>

$$_{(2)}G_{2k} = ({}_{(2)}n_{2k-1}+1,\ {}_{(2)}n_{2k-1}+2,\ {}_{(2)}n_{2k-1}+3,\ \dots,\ {}_{(2)}n_{2k})$$

с <u>чётным</u> номером 2k для некоторого <u>натурального</u> (<u>положительного</u> целого) числ<u>а</u>

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

заключены между минорантой

$$a + 1/(2k-1) - 1/{}_{(2)}n_{2k-1},$$

которая стремится к a именно сверху, и мажорантой

$$b - 1/(2k) + 1/{}_{(2)}n_{2k},$$

которая стремится к b именно снизу, причём обе эти односторонности обусловлены нестрогим неравенством

$$_{(2)}n_j \geq j \ (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)).$$

Следовательно, для любого

$$n \in (2, 3, 4, 5, ...)$$

имеет место двойное нестрогое неравенство

$$a \leq {}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) \leq b.$$

При стремящемся к плюс бесконечности натуральном (положительном целом) числе

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

в двойном нестрого-строгом неравенстве

$$a + 1/(2k\text{-}1) - 1/{}_{(2)}n_{2k-1} \leq_{i\geq 2} {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N) < a + 1/(2k\text{-}1)$$

положительные целые числа 2k-1 и $_{(2)}n_{2k-1}$ также стремятся к плюс бесконечности, их обращения 1/(2k-1) и $1/{}_{(2)}n_{2k-1}$ стремятся к нулю, доли

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N)$$

для последних элементов $_{(2)}n_{2k-1}$ групп

$$_{(2)}G_{2k-1} = ({_{(2)}n_{2k-2}}+1,\ {_{(2)}n_{2k-2}}+2,\ {_{(2)}n_{2k-2}}+3,\ \dots ,\ {_{(2)}n_{2k-1}})\ ({_{(2)}n_0} = 0)$$

с нечётными номерами 2k-1 заключены между соответствующими минорантами

$$a + 1/(2k-1) - 1/{_{(2)}n_{2k-1}}$$

и мажорантами

$$a + 1/(2k-1),$$

которые именно совместно и поэтому вместе с долями

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({_{(2)}M} \subseteq N)$$

стремятся к одному и тому же пределу a именно сверху, причём эта односторонность минорант обусловлена нестрогим неравенством

$$_{(2)}n_j \geq j\ (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)),$$

так что

$$\lim_{k\to+\infty} {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) = a.$$

При стремящемся к плюс бесконечности натуральном (положительном целом) числе

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$$

в двойном строго-нестрогом неравенстве

$$b - 1/(2k) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) \le b - 1/(2k) + 1/{}_{(2)}n_{2k}$$

положительные целые числа 2k и ${}_{(2)}n_{2k}$ также стремятся к плюс бесконечности, их обращения 1/(2k) и $1/{}_{(2)}n_{2k}$ стремятся к нулю, доли

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N)$$

для последних элементов ${}_{(2)}n_{2k}$ групп

$${}_{(2)}G_{2k} = ({}_{(2)}n_{2k-1}+1, {}_{(2)}n_{2k-1}+2, {}_{(2)}n_{2k-1}+3, \ldots , {}_{(2)}n_{2k})$$

с чётными номерами 2k заключены между соответствующими минорантами

$$\mathbf{b - 1/(2k)}$$

и мажорантами

$$\mathbf{b - 1/(2k) + 1/{}_{(2)}n_{2k},}$$

которые именно совместно и поэтому вместе с дол<u>я</u>ми

$$\mathbf{{}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N)}$$

стремятся к одному и тому же пределу b именно <u>снизу</u>, причём эта односторонность мажорант обусловлена нестрогим неравенством

$$\mathbf{{}_{(2)}n_j \geq j \; (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)),}$$

так что

$$\mathbf{\lim_{k \to +\infty} {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N) = b.}$$

Но для любого

$$\mathbf{n \in (2, 3, 4, 5, ...)}$$

имеет место двойное нестрогое неравенство

$$a \le {}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) \le b.$$

Поэтому найденные выше пределы подпоследовательностей

$$\lim_{k\to+\infty} {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N) = a,$$

$$\lim_{k\to+\infty} {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N) = b$$

для последних элементов ${}_{(2)}n_{2k-1}$ и ${}_{(2)}n_{2k}$ групп ${}_{(2)}G_{2k-1}$ и ${}_{(2)}G_{2k}$ с <u>нечётными</u> 2k-1 и <u>чётными</u> 2k номерами соответственно являются именно <u>нижним</u> и <u>верхним</u> пределами всей последовательности дол<u>е</u>й

$${}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N)\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)),$$

то есть

$$\lim_{n\to+\infty} \inf {}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) = \lim_{k\to+\infty} {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N) = a,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sup {}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N) = \lim_{k\to+\infty} {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N) = b.$$

Остаётся доказать, что <u>множественным</u> <u>пределом</u>

$$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}\ {}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M\subseteq N)$$

последовательности

$${}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M\subseteq N)\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

является отрезок [a, b] непременно целиком. Принадлежность множеству

$$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}\ {}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M\subseteq N)$$

нач<u>а</u>ла a и конца b этого отрезка [a, b] доказана выше <u>нижним</u>

$$\lim_{n\to+\infty} \inf\ {}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M\subseteq N) = \lim_{k\to+\infty}\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) = a$$

и <u>верхним</u>

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\ {}_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M\subseteq N) = \lim_{k\to+\infty}\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) = b$$

<u>пределами</u> соответственно.

Пусть d – произвольная именно <u>внутренняя</u> точка <u>отрезка</u> [a, b] строго между началом и концом этого отрезка,

поэтому принадлежащая интервалу]a, b[, причём непринадлежность промежутку любого из его концов показывается вывернутой наружу квадратной скобкой по Бурбаки во избежание путаницы с упорядоченной парой (a, b) при общепринятом использовании круглой скобки:

$$d \in \,]a, b[,$$

$$a < d < b.$$

При любом целом числе k $\geq$ 2

$$ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) < \ldots < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+3}({}_{(2)}M\subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+2}({}_{(2)}M\subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+1}({}_{(2)}M\subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)}({}_{(2)}M\subseteq N),$$

$$ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+1}({}_{(2)}M\subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+2}({}_{(2)}M\subseteq N) < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+3}({}_{(2)}M\subseteq N) < \ldots < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N),$$

$$\lim_{k\to+\infty} {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) = a,$$

$$\lim_{k\to+\infty} {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M\subseteq N) = b.$$

Поэтому существует такое зависящее от d положительное целое число k(d), что для любых натуральных (положительных целых) чисел

$$k > k(d)$$

выполняются оба двойных неравенства

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N) < d < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)}({}_{(2)}M \subseteq N),$$

$$_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N) < d < {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N)$$

со строго монотонным изменением и с переходом через d последовательности

$$_{(2)}\delta_n({}_{(2)}M \subseteq N)\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...))$$

именно на каждой из (пополненных последним элементом в каждом случае своей предыдущей группы) групп $_{(2)}G_{2k-1}$ и $_{(2)}G_{2k}$ с нечётными 2k-1 и чётными 2k номерами

соответственно для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k > k(d).$$

Пусть вначале натуральное (положительное целое) число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

принадлежит полностью не включённой в подпоследовательность $_{(2)}M$ группе

$$_{(2)}G_{2k-1} = ({}_{(2)}n_{2k-2}+1, {}_{(2)}n_{2k-2}+2, {}_{(2)}n_{2k-2}+3, ... , {}_{(2)}n_{2k-1}) \ ({}_{(2)}n_0 = 0)$$

с нечётным номером 2k-1 для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k > k(d)$$

и (пополненной соответствием последнего элемента предыдущей группы) непременно строго монотонно убывающей конечной долевой последовательностью

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+1}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+2}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-2)+3}({}_{(2)}M\subseteq N),\ \dots,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M\subseteq N))$$

с принятием конечной последовательности

$$({}_{(2)}m_{2k-2}/{}_{(2)}n_{2k-2},\ {}_{(2)}m_{2k-2}/({}_{(2)}n_{2k-2}+1),\ {}_{(2)}m_{2k-2}/({}_{(2)}n_{2k-2}+2),\ {}_{(2)}m_{2k-2}/({}_{(2)}n_{2k-2}+3),\ \dots,\ {}_{(2)}m_{2k-2}/{}_{(2)}n_{2k-1})$$

соответствующих <u>рациональных</u> значений с указанными <u>положительными</u> целыми числителями и знаменателями. <u>Уменьшение</u> любого из этих <u>рациональных</u> значений по сравнению с предыдущим <u>рациональным</u> значением <u>убывает</u> с ростом <u>неотрицательного</u> целого числ<u>а</u> h и составляет

$${}_{(2)}m_{2k-2}/({}_{(2)}n_{2k-2}+h) - {}_{(2)}m_{2k-2}/({}_{(2)}n_{2k-2}+h+1) = {}_{(2)}m_{2k-2}/(({}_{(2)}n_{2k-2}+h)({}_{(2)}n_{2k-2}+h+1)) \le {}_{(2)}m_{2k-2}/({}_{(2)}n_{2k-2}({}_{(2)}n_{2k-2}+1)) < 1/({}_{(2)}n_{2k-2}+1).$$

Пусть теперь натуральное число

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

принадлежит полностью не включённой в подпоследовательность ${}_{(2)}M$ группе

$${}_{(2)}G_{2k} = ({}_{(2)}n_{2k-1}+1, {}_{(2)}n_{2k-1}+2, {}_{(2)}n_{2k-1}+3, ... , {}_{(2)}n_{2k})$$

с чётным номером 2k для некоторого натурального (положительного целого) числа

$$k > k(d)$$

и (пополненной соответствием последнего элемента предыдущей группы) непременно строго монотонно возрастающей конечной долевой последовательностью

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)}({}_{(2)}M \subseteq N), {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+1}({}_{(2)}M \subseteq N), {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+2}({}_{(2)}M \subseteq N),$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(2k-1)+3}({}_{(2)}M \subseteq N), ... , {}_{(2)}\delta_{(2)n(2k)}({}_{(2)}M \subseteq N))$$

с принятием конечной последовательности

$$({}_{(2)}m_{2k-1}/{}_{(2)}n_{2k-1},\ ({}_{(2)}m_{2k-1}+1)/({}_{(2)}n_{2k-1}+1),\ ({}_{(2)}m_{2k-1}+2)/({}_{(2)}n_{2k-1}+2),\ ({}_{(2)}m_{2k-1}+3)/({}_{(2)}n_{2k-1}+3),\ \dots,\ {}_{(2)}m_{2k}/{}_{(2)}n_{2k})$$

соответствующих рациональных значений с указанными положительными целыми числителями и знаменателями. Приращение любого из этих рациональных значений по сравнению с предыдущим рациональным значением убывает с ростом неотрицательного целого числа h и составляет

$$({}_{(2)}m_{2k-1}+h+1)/({}_{(2)}n_{2k-1}+h+1) - ({}_{(2)}m_{2k-1}+h)/({}_{(2)}n_{2k-1}+h) =$$

$$(({}_{(2)}m_{2k-1}+h+1)({}_{(2)}n_{2k-1}+h) - ({}_{(2)}m_{2k-1}+h)({}_{(2)}n_{2k-1}+h+1))/(({}_{(2)}n_{2k-1}+h)({}_{(2)}n_{2k-1}+h+1)) =$$

$$(({}_{(2)}m_{2k-1}+h)({}_{(2)}n_{2k-1}+h) + ({}_{(2)}n_{2k-1}+h) - ({}_{(2)}m_{2k-1}+h)({}_{(2)}n_{2k-1}+h) - ({}_{(2)}m_{2k-1}+h))/(({}_{(2)}n_{2k-1}+h)({}_{(2)}n_{2k-1}+h+1)) =$$

$$(({}_{(2)}n_{2k-1}+h) - ({}_{(2)}m_{2k-1}+h))/(({}_{(2)}n_{2k-1}+h)({}_{(2)}n_{2k-1}+h+1)) =$$

$$({}_{(2)}n_{2k-1} - {}_{(2)}m_{2k-1})/(({}_{(2)}n_{2k-1}+h)({}_{(2)}n_{2k-1}+h+1)) \leq$$
$$({}_{(2)}n_{2k-1} - {}_{(2)}m_{2k-1})/({}_{(2)}n_{2k-1}({}_{(2)}n_{2k-1}+1)) < 1/({}_{(2)}n_{2k-1}+1).$$

При стремящемся к плюс бесконечности положительном целом числе k положительные целые числа $_{(2)}n_{2k-2}+1$ и $_{(2)}n_{2k-1}+1$ также стремятся к плюс бесконечности, их обращения $1/({}_{(2)}n_{2k-2}+1)$ и $1/({}_{(2)}n_{2k-1}+1)$ стремятся к нулю. Отсюда следует, что к произвольному действительному числу

$$d \in]a, b[,$$
$$a < d < b$$

стремится счётно бесконечная долевая последовательность

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(1)}({}_{(2)}M \subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(1)+h(2)}({}_{(2)}M \subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(2)+h(3)}({}_{(2)}M \subseteq N),$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(3)+h(4)}({}_{(2)}M \subseteq N), \ldots ,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)+h(j)}({}_{(2)}M \subseteq N), \ldots),$$

каждый элемент которой

$$_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)+h(j)}({}_{(2)}M\subseteq N)$$

с положительным целым номером j удовлетворяет условию

$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)+h(j)}({}_{(2)}M\subseteq N) - d| < 1/({}_{(2)}n_{j-1}+1),$$

если выбирается так, что является наименее уклоняющимся от этого действительного числа d элементом конечной долевой последовательности

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)+1}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)+2}({}_{(2)}M\subseteq N),$$
$${}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)+3}({}_{(2)}M\subseteq N),\ \dots ,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(j)}({}_{(2)}M\subseteq N))$$

для (пополненной последним элементом $_{(2)}n_{j-1}$ предыдущей группы $_{(2)}G_{j-1}$) группы

$$_{(2)}G_j = ({}_{(2)}n_{j-1}+1,\ {}_{(2)}n_{j-1}+2,\ {}_{(2)}n_{j-1}+3,\ \dots ,\ {}_{(2)}n_j)$$

с именно этим номером j, так что

$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)+h(j)}({}_{(2)}M\subseteq N) - d| = \min\{|{}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)}({}_{(2)}M\subseteq N) - d|,$$
$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)+1}({}_{(2)}M\subseteq N) - d|,\ |{}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)+2}({}_{(2)}M\subseteq N) - d|,$$

$$|{}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)+3}({}_{(2)}M \subseteq N) - d|, \ldots , |{}_{(2)}\delta_{(2)n(j)}({}_{(2)}M \subseteq N) - d|\},$$

причём при наличии <u>двух</u> следующих друг за другом элементов <u>той</u> <u>конечной</u> <u>долевой</u> <u>последовательности</u>, <u>наименее</u> <u>уклоняющихся</u> от этого действительного числ<u>а</u> d, тогда являющегося полусуммой обоих этих элементов, для однозначности берётся любой из этих обоих элементов, например предыдущий, а ввиду наличия пополняющего элемента ${}_{(2)}n_{j-1}$ предыдущей группы ${}_{(2)}G_{j-1}$ соответствующий этому элементу ${}_{(2)}n_{j-1}$ элемент

$${}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)}({}_{(2)}M \subseteq N)$$

<u>той</u> <u>конечной</u> <u>долевой</u> <u>последовательности</u> <u>может</u> войти в <u>ту</u> <u>счётно</u> <u>бесконечную</u> <u>долевую</u> <u>последовательность</u> дважды <u>подряд</u>, то есть и для предыдущей группы ${}_{(2)}G_{j-1}$, и для данной группы ${}_{(2)}G_j$.

В самом деле, ввиду строгой монотонности конечной долевой последовательности

$$({}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)+1}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)+2}({}_{(2)}M\subseteq N),\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(j-1)+3}({}_{(2)}M\subseteq N),\ \ldots ,\ {}_{(2)}\delta_{(2)n(j)}({}_{(2)}M\subseteq N))$$

эта конечная долевая последовательность осуществляет именно разбиение отрезка между её концами на части, длина каждой из которых строго меньше, чем $1/({}_{(2)}n_{j-1}+1)$. При всех $j > 2k(d)$ принадлежащее этому отрезку действительное число d вынуждено или принадлежать этой конечной последовательности, будучи границей одной или двух соседних этих частей, так что уклонение соответствующего элемента этой конечной последовательности от действительного числа d равно нулю, или находиться строго внутри одной и только одной

из этих частей этого отрезка, имеющей длину, строго меньшую, чем $1/({}_{(2)}n_{j-1}+1)$, так что уклонение каждого из обоих концов этой части как элементов этой конечной последовательности от действительного числа d строго меньше, чем $1/({}_{(2)}n_{j-1}+1)$, да ещё и при выборе именно наименее уклоняющегося конца этой части его уклонение от действительного числа d строго меньше, чем $1/(2{}_{(2)}n_{j-1}+2)$ как половина $1/({}_{(2)}n_{j-1}+1)$. А при стремлении j к плюс бесконечности $1/({}_{(2)}n_{j-1}+1)$ и тем более $1/(2{}_{(2)}n_{j-1}+2)$ стремятся к нулю.

Тем самым полностью завершён второй способ доказательства теоремы о том, что для любой пары действительных чисел

$$(a, b)\ (0 \le a \le b \le 1)$$

от нуля до единицы включительно существует такая подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, нижняя доля которой в точности равна не большему из этой пары действительных чисел и совместно с этим верхняя доля которой в точности равна не меньшему из этой пары действительных чисел:

$$\lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = b,$$

причём множественным пределом

$$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}\, \delta_n(M\subseteq N) = [a, b]$$

последовательности

$$\delta_n(M\subseteq N)\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

является отрезок [a, b] непременно целиком.

Теорема. Для любой пары действительных чисел

$$(a, b)\ (0 \le a \le b \le 1)$$

от нуля до единицы включительно и для любой такой подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел, нижняя доля которой в точности равна не большему из этой пары действительных чисел и совместно с этим верхняя доля которой в точности равна не меньшему из этой пары действительных чисел:

$$\lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M \subseteq N) = a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M \subseteq N) = b,$$

множественным пределом

$$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} \delta_n(M \subseteq N) = [a, b]$$

последовательности

$$\delta_n(M \subseteq N)\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

является отрезок [a, b] непременно целиком.

Доказательство.

Применяется общая теория наилучшего приближения промежуточных значений конечным перешагиванием с избирательной (выборочной) предельностью бесконечно малого перешагивания с её теорией наилучшего приближения промежуточных значений конечным перешагиванием и теорией избирательной (выборочной) предельности бесконечно малого перешагивания и с их методом наилучшего приближения промежуточных значений конечным монотонным или возвратно-поступательным перешагиванием и методом охватывающих колебаний монотонных или возвратно-поступательных конечных групп бесконечно малых шагов.

При одинаковых нижней доле a и верхней доле b как действительных числах от нуля до единицы включительно

$$0 \leq a = b \leq 1$$

доля подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N)$$

существует и равна этому общему значению:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = a = b.$$

Тогда по предыдущей теореме существует такая подпоследовательность M последовательности N всех натуральных чисел, доля которой в точности равна этому общему значению a = b:

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N) = a = b,$$

причём указанному пределу равносилен (эквивалентен) множественный предел

$$\mathbf{LIM}_{n\to\infty}\,\delta_n(M\subseteq N) = \{a\} = \{b\} = [a, b] = [a, a] = [b, b].$$

Поэтому остаётся доказать настоящую теорему при различных нижней доле

$$\lim_{n\to\infty}\inf\,\delta_n(M\subseteq N) = a$$

и верхней доле

$$\lim_{n\to\infty}\sup\,\delta_n(M\subseteq N) = b$$

как действительных числах от нуля до единицы включительно

$$0 \leq a < b \leq 1,$$

так что доля подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел

$$\lim_{n\to\infty}\delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty}\inf\,\delta_n(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty}\sup\,\delta_n(M\subseteq N)$$

не существует.

По условию теоремы нижняя доля подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел в точности равна не большему из этой пары действительных чисел и совместно с этим верхняя доля которой в точности равна не меньшему из этой пары действительных чисел:

$$\lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M \subseteq N) = a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M \subseteq N) = b.$$

Поэтому именно совместно существуют как такая непременно строго монотонно возрастающая счётно бесконечная подподпоследовательность

$$({}_{(a)}n_1 = {}_{(a)}n(1),\ {}_{(a)}n_2 = {}_{(a)}n(2),\ {}_{(a)}n_3 = {}_{(a)}n(3),\ {}_{(a)}n_4 = {}_{(a)}n(4),\ \ldots,\ {}_{(a)}n_j = {}_{(a)}n(j),\ \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, что

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a,$$

так и такая непременно строго монотонно возрастающая счётно бесконечная подподпоследовательность

$$({}_{(b)}n_1 = {}_{(b)}n(1),\ {}_{(b)}n_2 = {}_{(b)}n(2),\ {}_{(b)}n_3 = {}_{(b)}n(3),\ {}_{(b)}n_4 = {}_{(b)}n(4),\ \dots ,\ {}_{(b)}n_j = {}_{(b)}n(j),\ \dots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, что

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = b.$$

Требуется доказать, что множественным пределом

$$\mathrm{LIM}_{n\to\infty} \delta_n(M\subseteq N)$$

последовательности

$$\delta_n(M\subseteq N)\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

является отрезок [a, b] непременно целиком.
Принадлежность множеству

$$\mathrm{LIM}_{n\to\infty}\, \delta_n(M\subseteq N)$$

нач<u>а</u>ла a и конца b этого отрезка [a, b] обусловлена <u>нижним</u>

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a$$

и <u>верхним</u>

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = b$$

<u>пределами</u> соответственно.
Пусть d – <u>произвольная</u> именно <u>внутренняя</u> точка <u>отрезка</u> [a, b] строго между началом и концом этого отрезка, поэтому принадлежащая <u>интервалу</u>]a, b[, причём <u>непринадлежность</u> промежутку любого из его концов показывается вывернутой наружу квадратной скобкой по

Бурбаки во избежание путаницы с упорядоченной парой (a, b) при общепринятом использовании круглой скобки:

$$d \in]a, b[,$$

$$a < d < b.$$

Поэтому для <u>естественно</u> (в порядке <u>возрастания</u>) <u>вполне упорядоченного</u> и поэтому непременно имеющего зависящий от d <u>первый</u> <u>элемент</u>

$$k(d)$$

<u>счётно</u> <u>бесконечного</u> множества <u>всех</u> <u>достаточно</u> <u>больших</u> <u>натуральных</u> (<u>положительных</u> целых) чисел

$$j \geq k(d)$$

выполняется двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(j)}(M \subseteq N) < d < \delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N).$$

Теперь множество непременно всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел представляется следующими на этот раз тремя способами счётно бесконечным упорядоченным, а именно последовательным, объединением таких монотонных или возвратно-поступательных конечных групп этих чисел непременно подряд, что на каждой такой не обязательно наименьшей возможной монотонной или возвратно-поступательной конечной группе с добавлением после неё первого элемента непосредственно следующей группы имеет место размах охватывающего колебания и происходит непременное перешагивание последовательности

$$\delta_n(M \subseteq N) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

именно через это требуемое промежуточное значение

$$d \in \,]a, b[,$$

$$a < d < b.$$

Первый способ и алгоритм построения представления множества непременно всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечным упорядоченным, а именно последовательным, объединением таких монотонных или возвратно-поступательных конечных групп этих чисел непременно подряд, начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(a)}n_1 = {}_{(a)}n(1),\ {}_{(a)}n_2 = {}_{(a)}n(2),\ {}_{(a)}n_3 = {}_{(a)}n(3),\ {}_{(a)}n_4 = {}_{(a)}n(4),\ \ldots\ ,$$

$${}_{(a)}n_j = {}_{(a)}n(j),\ \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной подпоследовательности $\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N)$ именно к нижнему пределу a:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a.$$

Поэтому для естественно (в порядке возрастания) вполне упорядоченного и непременно имеющего первый элемент

$${}_{(a)}j_1 = {}_{(a)}j(1)$$

счётно бесконечного множества всех таких натуральных (положительных целых) чисел j всегда выполняется строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) < d.$$

При этом ввиду отсутствия здесь верхней границы $\delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N)$ промежуточного значения d имеет место нестрогое неравенство

$${}_{(a)}j_1 = {}_{(a)}j(1) \le k(d).$$

В частности, для этого <u>первого</u> <u>элемента</u> выполняется строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(1)}(M \subseteq N) < d.$$

В <u>первом</u> <u>способе</u> <u>первая</u> <u>группа</u> ${}_{(1)}G_1$ начинается именно с соответствующего этому <u>первому</u> <u>элементу</u> <u>натурального</u> (<u>положительного</u> целого) числ<u>а</u>

$${}_{(a)}n_{j(1)},$$

которому соответствует

$$\delta_{(a)n(j(1))}(M \subseteq N).$$

В первом способе вторая группа ${}_{(1)}G_2$ начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(b)}n_1 = {}_{(b)}n(1),\ {}_{(b)}n_2 = {}_{(b)}n(2),\ {}_{(b)}n_3 = {}_{(b)}n(3),\ {}_{(b)}n_4 = {}_{(b)}n(4),\ \ldots,\ {}_{(b)}n_j = {}_{(b)}n(j),\ \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной подпоследовательности $\delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N)$ именно к верхнему пределу b:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = b.$$

Поэтому для естественно (в порядке возрастания) вполне упорядоченного и непременно имеющего первый элемент

$${}_{(b)}j_2 = {}_{(b)}j(2)$$

счётно бесконечного множества всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел j выполняется именно совокупность строгих неравенств

$${}_{(b)}n_j > {}_{(a)}n_{j(1)},$$

$$\delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N) > d.$$

В частности, для этого первого элемента выполняется именно совокупность строгих неравенств

$${}_{(b)}n_{j(2)} > {}_{(a)}n_{j(1)},$$

$$\delta_{(b)n(j(2))}(M \subseteq N) > d.$$

В первом способе вторая группа ${}_{(1)}G_2$ начинается именно с соответствующего этому первому элементу натурального (положительного целого) числа

$${}_{(b)}n_{j(2)},$$

которому соответствует

$$\delta_{(b)n(j(2))}(M \subseteq N).$$

То есть в <u>первом</u> <u>способе</u> <u>первая</u> <u>группа</u> ${}_{(1)}G_1$ есть

$${}_{(1)}G_1 = ({}_{(a)}n_{j(1)}, {}_{(a)}n_{j(1)}+1, {}_{(a)}n_{j(1)}+2, {}_{(a)}n_{j(1)}+3, {}_{(a)}n_{j(1)}+4, \dots , {}_{(b)}n_{j(2)}-4, {}_{(b)}n_{j(2)}-3, {}_{(b)}n_{j(2)}-2, {}_{(b)}n_{j(2)}-1).$$

После неё добавляется <u>первый</u> элемент

$${}_{(b)}n_{j(2)}$$

<u>непосредственно</u> <u>следующей</u> <u>группы</u> ${}_{(1)}G_2$, так что получается <u>конечная</u> последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$${}_{(1)}G_1 \cup {}_{(b)}n_{j(2)} = ({}_{(a)}n_{j(1)}, {}_{(a)}n_{j(1)}+1, {}_{(a)}n_{j(1)}+2, {}_{(a)}n_{j(1)}+3, {}_{(a)}n_{j(1)}+4, \dots , {}_{(b)}n_{j(2)}-4, {}_{(b)}n_{j(2)}-3, {}_{(b)}n_{j(2)}-2, {}_{(b)}n_{j(2)}-1, {}_{(b)}n_{j(2)}).$$

Ей соответствует <u>конечная</u> <u>долевая</u> последовательность

$$(\delta_{(a)n(j(1))}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(1))+1}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(1))+2}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(1))+3}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(1))+4}(M \subseteq N), \dots , \delta_{(b)n(j(2))-4}(M \subseteq N),$$

$\delta_{(b)n(j(2))-3}(M\subseteq N)$, $\delta_{(b)n(j(2))-2}(M\subseteq N)$, $\delta_{(b)n(j(2))-1}(M\subseteq N)$, $\delta_{(b)n(j(2))}(M\subseteq N)$).

Для её начала и конца имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(1)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге.

Произвольный не последний элемент этой последовательности является рациональным числом, а именно обыкновенной дробью с положительным целым знаменателем i и не превышающим его неотрицательным целым числителем m_i:

$$\delta_i(M \subseteq N) = m_i/i \ (0 \le m_i \le i).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M \subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M \subseteq N)$ той конечной долевой последовательности и числитель, и знаменатель превышают предыдущие ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M \subseteq N) = (m_i+1)/(i+1),$$

так что этот неотрицательный шаг той конечной долевой последовательности

$$\delta_{i+1}(M \subseteq N) - \delta_i(M \subseteq N) = (m_i+1)/(i+1) - m_i/i =$$
$$(m_i i + i - m_i i - m_i)/(i(i+1)) = (i - m_i)/(i(i+1)) \le$$
$$1/(i+1) \le 1/({}_{(a)}n_{j(1)}+1).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 не включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M\subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M\subseteq N)$ той конечной долевой последовательности числитель равен предыдущему числителю, а знаменатель превышает предыдущий знаменатель ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M\subseteq N) = m_i/(i+1),$$

так что модуль этого неположительного шага той конечной долевой последовательности

$$|\delta_{i+1}(M\subseteq N) - \delta_i(M\subseteq N)| = |m_i/(i+1) - m_i/i| =$$
$$|m_i(i - i - 1)/(i(i+1))| = |- m_i)/(i(i+1)| = m_i/(i(i+1) \le$$
$$1/(i+1) \le 1/({}_{(a)}n_{j(1)}+1).$$

В первом способе третья группа ${}_{(1)}G_3$ начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(a)}n_1 = {}_{(a)}n(1),\ {}_{(a)}n_2 = {}_{(a)}n(2),\ {}_{(a)}n_3 = {}_{(a)}n(3),\ {}_{(a)}n_4 = {}_{(a)}n(4), \dots ,\ {}_{(a)}n_j = {}_{(a)}n(j), \dots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной подпоследовательности $\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N)$ именно к нижнему пределу a:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a.$$

Поэтому для естественно (в порядке возрастания) вполне упорядоченного и непременно имеющего первый элемент

$${}_{(a)}j_3 = {}_{(a)}j(3)$$

счётно бесконечного множества всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел j выполняется именно совокупность строгих неравенств

$${}_{(a)}n_j > {}_{(b)}n_{j(2)},$$

$$\delta_{(a)n(j)}(M \subseteq N) < d.$$

В частности, для этого первого элемента выполняется именно совокупность строгих неравенств

$${}_{(a)}n_{j(3)} > {}_{(b)}n_{j(2)},$$

$$\delta_{(a)n(j(3))}(M \subseteq N) < d.$$

В первом способе вторая группа $_{(1)}G_2$ начинается именно с натурального (положительного целого) числа

$${}_{(b)}n_{j(2)},$$

которому соответствует

$$\delta_{(b)n(j(2))}(M \subseteq N).$$

То есть в первом способе вторая группа ${}_{(1)}G_2$ есть

$$ {}_{(1)}G_2 = ({}_{(b)}n_{j(2)}, {}_{(b)}n_{j(2)}+1, {}_{(b)}n_{j(2)}+2, {}_{(b)}n_{j(2)}+3, {}_{(b)}n_{j(2)}+4, \ldots , {}_{(a)}n_{j(3)}-4, {}_{(a)}n_{j(3)}-3, {}_{(a)}n_{j(3)}-2, {}_{(a)}n_{j(3)}-1). $$

После неё добавляется первый элемент

$$ {}_{(a)}n_{j(3)} $$

непосредственно следующей группы ${}_{(1)}G_3$, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$$ {}_{(1)}G_2 \cup {}_{(a)}n_{j(3)} = ({}_{(b)}n_{j(2)}, {}_{(b)}n_{j(2)}+1, {}_{(b)}n_{j(2)}+2, {}_{(b)}n_{j(2)}+3, {}_{(b)}n_{j(2)}+4, \ldots , {}_{(a)}n_{j(3)}-4, {}_{(a)}n_{j(3)}-3, {}_{(a)}n_{j(3)}-2, {}_{(a)}n_{j(3)}-1, {}_{(a)}n_{j(3)}). $$

Ей соответствует конечная долевая последовательность

$$ (\delta_{(b)n(j(2))}(M \subseteq N), \delta_{(b)n(j(2))+1}(M \subseteq N), \delta_{(b)n(j(2))+2}(M \subseteq N), \delta_{(b)n(j(2))+3}(M \subseteq N), \delta_{(b)n(j(2))+4}(M \subseteq N), \ldots , \delta_{(a)n(j(3))-4}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(3))-3}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(3))-2}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(3))-1}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(3))}(M \subseteq N)). $$

Для её конца и нач<u>**а**</u>**ла имеет место двойное строгое неравенство**

$$\delta_{(a)n(3)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2)}(M\subseteq N).$$

Так что эта <u>конечная</u> <u>долевая</u> <u>последовательность</u> <u>перешагивает</u> через требуемое промежуточное значение d и поэтому <u>содержит</u> хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент <u>и/или</u> <u>перешагивает</u> через это промежуточное значение на хотя бы одном своём <u>шаге</u>.

Произвольный <u>не</u> <u>последний</u> элемент этой последовательности является <u>рациональным</u> числом, а именно <u>обыкновенной</u> <u>дробью</u> с <u>положительным</u> целым знаменателем i и не превышающим его <u>неотрицательным</u> целым числителем m_i:

$$\delta_i(M\subseteq N) = m_i/i \ (0 \le m_i \le i).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M \subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M \subseteq N)$ той конечной долевой последовательности и числитель, и знаменатель превышают предыдущие ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M \subseteq N) = (m_i+1)/(i+1),$$

так что этот неотрицательный шаг той конечной долевой последовательности

$$\delta_{i+1}(M \subseteq N) - \delta_i(M \subseteq N) = (m_i+1)/(i+1) - m_i/i =$$

$$(m_i i + i - m_i i - m_i)/(i(i+1)) = (i - m_i)/(i(i+1)) \leq 1/(i+1) \leq 1/({}_{(b)}n_{j(2)}+1).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 не включается в подпоследовательность M

последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M \subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M \subseteq N)$ той конечной долевой последовательности числитель равен предыдущему числителю, а знаменатель превышает предыдущий знаменатель ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M \subseteq N) = m_i/(i+1),$$

так что модуль этого неположительного шага той конечной долевой последовательности

$$|\delta_{i+1}(M \subseteq N) - \delta_i(M \subseteq N)| = |m_i/(i+1) - m_i/i| = |m_i(i - i - 1)/(i(i+1))| =$$

$$|- m_i)/(i(i+1)| = m_i/(i(i+1) \leq 1/(i+1) \leq 1/({}_{(b)}n_{j(2)}+1).$$

Первый способ и алгоритм построения представления множества непременно всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел счётно

бесконечным упорядоченным, а именно последовательным, объединением таких монотонных или возвратно-поступательных конечных групп этих чисел непременно подряд, что на каждой такой не обязательно наименьшей возможной монотонной или возвратно-поступательной конечной группе с добавлением после неё первого элемента непосредственно следующей группы имеет место размах охватывающего колебания и происходит непременное перешагивание последовательности

$$\delta_n(M \subseteq N) \; (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

именно через это требуемое промежуточное значение

$$d \in \,]a, b[,$$

$$a < d < b,$$

продолжается и обосновывается по методу математической индукции.

Принимается следующее допущение математической индукции.

При всех условиях теоремы для произвольного натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

могут быть построены первые 2k групп представления множества непременно всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечным упорядоченным, а именно последовательным, объединением таких монотонных или возвратно-поступательных конечных групп этих чисел непременно подряд, что на каждой такой не обязательно наименьшей

возможной монотонной или возвратно-поступательной конечной группе с добавлением после неё первого элемента непосредственно следующей группы имеет место размах охватывающего колебания и происходит непременное перешагивание счётно бесконечной долевой последовательности

$$\delta_n(M \subseteq N) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

именно через это требуемое промежуточное значение

$$d \in \,]a, b[,$$

$$a < d < b.$$

При этом каждая группа ${}_{(1)}G_{2h-1}$ с нечётным номером 2h-1 (h ∈ (1, 2, 3, 4, 5, ... , k)) начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(a)}n_1 = {}_{(a)}n(1),\ {}_{(a)}n_2 = {}_{(a)}n(2),\ {}_{(a)}n_3 = {}_{(a)}n(3),\ {}_{(a)}n_4 = {}_{(a)}n(4),\ \ldots ,\ {}_{(a)}n_j = {}_{(a)}n(j),\ \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(a)n(j)}(M \subseteq N)$ именно к нижнему пределу a:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(a)n(j)}(M \subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M \subseteq N) = a.$$

А каждая группа ${}_{(1)}G_{2h}$ с чётным номером 2h (h ∈ (1, 2, 3, 4, 5, ... , k)) начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(b)}n_1 = {}_{(b)}n(1),\ {}_{(b)}n_2 = {}_{(b)}n(2),\ {}_{(b)}n_3 = {}_{(b)}n(3),\ {}_{(b)}n_4 = {}_{(b)}n(4),\ \ldots ,\ {}_{(b)}n_j = {}_{(b)}n(j),\ \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N)$ именно к верхнему пределу b:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M \subseteq N) = b.$$

Каждая группа $_{(1)}G_{2h-1}$ с нечётным номером 2h-1 (h ∈ (1, 2, 3, 4, 5, ... , k)) есть

$$_{(1)}G_{2h-1} = ({}_{(a)}n_{j(2h-1)}, {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+1, {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+2, {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+3, {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+4, \dots , {}_{(b)}n_{j(2h)}-4, {}_{(b)}n_{j(2h)}-3, {}_{(b)}n_{j(2h)}-2, {}_{(b)}n_{j(2h)}-1).$$

После неё добавляется первый элемент

$$_{(b)}n_{j(2h)}$$

непосредственно следующей группы $_{(1)}G_{2h}$, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$$_{(1)}G_{2h-1} \cup {}_{(b)}n_{j(2h)} = ({}_{(a)}n_{j(2h-1)}, {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+1, {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+2, {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+3, {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+4, \dots , {}_{(b)}n_{j(2h)}-4, {}_{(b)}n_{j(2h)}-3, {}_{(b)}n_{j(2h)}-2, {}_{(b)}n_{j(2h)}-1, {}_{(b)}n_{j(2h)}).$$

Ей соответствует конечная долевая последовательность

$$(\delta_{(a)n(j(2h-1))}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h-1))+1}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h-1))+2}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h-1))+3}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h-1))+4}(M\subseteq N), \dots , \delta_{(b)n(j(2h))-4}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))-3}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))-2}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))-1}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))}(M\subseteq N)).$$

Для её начала и конца имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2h-1)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2h)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге, модуль которого не превышает

$$1/({}_{(a)}n_{j(2h-1)}+1).$$

Каждая группа $_{(1)}G_{2h}$ с чётным номером 2h ($h \in (1, 2, 3, 4, 5, \dots , k)$) есть

$${}_{(1)}G_{2h} = ({}_{(b)}n_{j(2h)}, {}_{(b)}n_{j(2h)}+1, {}_{(b)}n_{j(2h)}+2, {}_{(b)}n_{j(2h)}+3, {}_{(b)}n_{j(2h)}+4, \dots , {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-4, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-3, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-2, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-1).$$

После неё добавляется первый элемент

$${}_{(a)}n_{j(2h+1)}$$

непосредственно следующей группы $_{(1)}G_{2h+1}$, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$$_{(1)}G_{2h} \cup {}_{(a)}n_{j(2h+1)} = ({}_{(b)}n_{j(2h)}, {}_{(b)}n_{j(2h)}+1, {}_{(b)}n_{j(2h)}+2, {}_{(b)}n_{j(2h)}+3, {}_{(b)}n_{j(2h)}+4, \dots , {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-4, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-3, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-2, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-1, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}).$$

Ей соответствует конечная долевая последовательность

$$(\delta_{(b)n(j(2h))}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))+1}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))+2}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))+3}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))+4}(M\subseteq N), \dots , \delta_{(a)n(j(2h+1))-4}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h+1))-3}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h+1))-2}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h+1))-1}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h+1))}(M\subseteq N)).$$

Для её конца и начала имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2h+1)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2h)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге, модуль которого не превышает

$$1/({}_{(b)}n_{j(2h)}+1).$$

Для k = 1 это допущение доказано построением двух групп ${}_{(1)}G_1$ и ${}_{(1)}G_2$, обладающих требуемыми свойствами.

Теперь предстоит с использованием этого допущения доказать возможность сделать индукционный шаг от произвольного натурального (положительного целого) числа k к числу k+1.

Для этого достаточно дополнительно построить следующие две группы ${}_{(1)}G_{2k+1}$ и ${}_{(1)}G_{2k+2}$, обладающие требуемыми свойствами.

Группа ${}_{(1)}G_{2k+1}$ с нечётным номером 2k+1 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$) есть

$$ {}_{(1)}G_{2k+1} = ({}_{(a)}n_{j(2k+1)}, {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+1, {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+2, {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+3, {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+4, ... , {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-4, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-3, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-2, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-1). $$

После неё добавляется первый элемент

$$ {}_{(b)}n_{j(2k+2)} $$

непосредственно следующей группы ${}_{(1)}G_{2k+2}$, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$$ {}_{(1)}G_{2k+1} \cup {}_{(b)}n_{j(2k+2)} = ({}_{(a)}n_{j(2k+1)}, {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+1, {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+2, {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+3, {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+4, ... , {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-4, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-3, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-2, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-1, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}). $$

Ей соответствует конечная долевая последовательность

$$(\delta_{(a)n(j(2k+1))}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2k+1))+1}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2k+1))+2}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2k+1))+3}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2k+1))+4}(M\subseteq N),\ \dots,\ \delta_{(b)n(j(2k+2))-4}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2k+2))-3}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2k+2))-2}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2k+2))-1}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2k+2))}(M\subseteq N)).$$

Для её начала и конца имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2k+1)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2k+2)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге, модуль которого не превышает

$$1/({}_{(a)}n_{j(2k+1)}+1).$$

Группа ${}_{(1)}G_{2k+2}$ с <u>чётным</u> номером 2k+2 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$) есть

$${}_{(1)}G_{2k+2} = ({}_{(b)}n_{j(2k+2)}, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+1, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+2, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+3, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+4, \dots , {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-4, {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-3, {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-2, {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-1).$$

После неё добавляется <u>первый</u> элемент

$${}_{(a)}n_{j(2k+3)}$$

<u>непосредственно</u> <u>следующей</u> <u>группы</u> ${}_{(1)}G_{2k+3}$, так что получается <u>конечная</u> последовательность <u>натуральных</u> (<u>положительных</u> целых) чисел

$${}_{(1)}G_{2k+2} \cup {}_{(a)}n_{j(2k+3)} = ({}_{(b)}n_{j(2k+2)}, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+1, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+2, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+3, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+4, \dots , {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-4, {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-3, {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-2, {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-1, {}_{(a)}n_{j(2k+3)}).$$

Ей соответствует <u>конечная</u> <u>долевая</u> <u>последовательность</u>

$$(\delta_{(b)n(j(2k+2)}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2k+2))+1}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2k+2))+2}(M\subseteq N),$$
$$\delta_{(b)n(j(2k+2)+3}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2k+2))+4}(M\subseteq N),\ \dots ,\ \delta_{(a)n(j(2k+3))-4}(M\subseteq N),$$
$$\delta_{(a)n(j(2k+3))-3}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2k+3))-2}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2k+3))-1}(M\subseteq N),$$
$$\delta_{(a)n(j(2k+3))}(M\subseteq N)).$$

Для её конца и начала имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2k+3)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2k+2)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге, модуль которого не превышает

$$1/({}_{(b)}n_{j(2k+2)}+1).$$

Дополнительное построение обеих групп ${}_{(1)}G_{2k+1}$ и ${}_{(1)}G_{2k+2}$, обладающих требуемыми свойствами, осуществляется следующим образом.

Группа ${}_{(1)}G_{2k+1}$ с нечётным номером $2k+1$ ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$) начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(a)}n_1 = {}_{(a)}n(1),\ {}_{(a)}n_2 = {}_{(a)}n(2),\ {}_{(a)}n_3 = {}_{(a)}n(3),\ {}_{(a)}n_4 = {}_{(a)}n(4),\ \ldots,\ {}_{(a)}n_j = {}_{(a)}n(j),\ \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(a)n(j)}(M \subseteq N)$ именно к нижнему пределу a:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a.$$

Поэтому для естественно (в порядке возрастания) вполне упорядоченного и непременно имеющего первый элемент

$${}_{(a)}j_{2k+1} = {}_{(a)}j(2k+1)$$

счётно бесконечного множества всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел j выполняется именно совокупность строгих неравенств

$${}_{(a)}n_j > {}_{(b)}n_{j(2k)},$$

$$\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) < d.$$

В частности, для этого первого элемента выполняется именно совокупность строгих неравенств

$${}_{(a)}n_{j(2k+1)} > {}_{(b)}n_{j(2k)},$$

$$\delta_{(a)n(j(2k+1))}(M\subseteq N) < d.$$

Группа ${}_{(1)}G_{2k+2}$ с чётным номером 2k+2 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$) начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(b)}n_1 = {}_{(b)}n(1),\ {}_{(b)}n_2 = {}_{(b)}n(2),\ {}_{(b)}n_3 = {}_{(b)}n(3),\ {}_{(b)}n_4 = {}_{(b)}n(4),\ \ldots,\ {}_{(b)}n_j = {}_{(b)}n(j),\ \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N)$ именно к верхнему пределу b:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = b.$$

Поэтому для естественно (в порядке возрастания) вполне упорядоченного и непременно имеющего первый элемент

$$_{(b)}j_{2k+2} = {}_{(b)}j(2k+2)$$

счётно бесконечного множества всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел j выполняется именно совокупность строгих неравенств

$$_{(b)}n_j > {}_{(a)}n_{j(2k+1)},$$

$$\delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N) > d.$$

В частности, для этого первого элемента выполняется именно совокупность строгих неравенств

$$_{(b)}n_{j(2k+2)} > {}_{(a)}n_{j(2k+1)},$$

$$\delta_{(b)n(j(2k+2))}(M \subseteq N) > d.$$

Группа $_{(1)}G_{2k+2}$ с чётным номером 2k+2 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$) начинается именно с соответствующего этому первому элементу натурального (положительного целого) числа

$${}_{(b)}n_{j(2k+2)},$$

которому соответствует

$$\delta_{(b)n(j(2k+2))}(M \subseteq N).$$

Группа ${}_{(1)}G_{2k+1}$ с нечётным номером 2k+1 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$) есть

$${}_{(1)}G_{2k+1} = ({}_{(a)}n_{j(2k+1)},\ {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+1,\ {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+2,\ {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+3,\ {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+4,\ \ldots,\ {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-4,\ {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-3,\ {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-2,\ {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-1).$$

После неё добавляется первый элемент

$${}_{(b)}n_{j(2k+2)}$$

непосредственно следующей группы ${}_{(1)}G_{2k+2}$, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$${}_{(1)}G_{2k+1} \cup {}_{(b)}n_{j(2k+2)} = ({}_{(a)}n_{j(2k+1)},\ {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+1,\ {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+2,\ {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+3,\ {}_{(a)}n_{j(2k+1)}+4,\ \ldots,\ {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-4,\ {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-3,\ {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-2,\ {}_{(b)}n_{j(2k+2)}-1,\ {}_{(b)}n_{j(2k+2)}).$$

Ей соответствует конечная долевая последовательность

$$(\delta_{(a)n(j(2k+1))}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2k+1))+1}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2k+1))+2}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2k+1))+3}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2k+1))+4}(M\subseteq N),\ \dots ,\ \delta_{(b)n(j(2k+2))-4}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2k+2))-3}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2k+2))-2}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2k+2))-1}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2k+2))}(M\subseteq N)).$$

Для её начала и конца имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2k+1)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2k+2)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге.

Произвольный не последний элемент этой последовательности является рациональным числом, а именно обыкновенной дробью с положительным целым знаменателем i и не превышающим его неотрицательным целым числителем m_i:

$$\delta_i(M \subseteq N) = m_i/i \ (0 \leq m_i \leq i).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M \subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M \subseteq N)$ той конечной долевой последовательности и числитель, и знаменатель превышают предыдущие ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M \subseteq N) = (m_i+1)/(i+1),$$

так что этот неотрицательный шаг той конечной долевой последовательности

$$\delta_{i+1}(M\subseteq N) - \delta_i(M\subseteq N) = (m_i+1)/(i+1) - m_i/i =$$
$$(m_i i + i - m_i i - m_i)/(i(i+1)) = (i - m_i)/(i(i+1)) \le$$
$$1/(i+1) \le 1/({}_{(a)}n_{j(2k+1)}+1).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 не включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M\subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M\subseteq N)$ той конечной долевой последовательности числитель равен предыдущему числителю, а знаменатель превышает предыдущий знаменатель ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M\subseteq N) = m_i/(i+1),$$

так что модуль этого неположительного шага той конечной долевой последовательности

$$|\delta_{i+1}(M\subseteq N) - \delta_i(M\subseteq N)| = |m_i/(i+1) - m_i/i| = |m_i(i - i - 1)/(i(i+1))| =$$
$$|- m_i)/(i(i+1)| = m_i/(i(i+1) \le 1/(i+1) \le 1/({}_{(a)}n_{j(2k+1)}+1).$$

Группа ${}_{(1)}G_{2k+3}$ с нечётным номером 2k+3 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$) начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(a)}n_1 = {}_{(a)}n(1), {}_{(a)}n_2 = {}_{(a)}n(2), {}_{(a)}n_3 = {}_{(a)}n(3), {}_{(a)}n_4 = {}_{(a)}n(4), ... ,$$
$${}_{(a)}n_j = {}_{(a)}n(j), ...)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной долевой

подпоследовательности $\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N)$ **именно к нижнему пределу a:**

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a.$$

Поэтому для естественно (в порядке возрастания) вполне упорядоченного и непременно имеющего первый элемент

$${}_{(a)}j_{2k+3} = {}_{(a)}j(2k+3)$$

счётно бесконечного множества всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел j выполняется именно совокупность строгих неравенств

$${}_{(a)}n_j > {}_{(b)}n_{j(2k+2)},$$

$$\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) < d.$$

В частности, для этого первого элемента выполняется именно совокупность строгих неравенств

$${}_{(a)}n_{j(2k+3)} > {}_{(b)}n_{j(2k+2)},$$

$$\delta_{(a)n(j(2k+3))}(M \subseteq N) < d.$$

Группа $_{(1)}G_{2k+2}$ с <u>чётным</u> номером 2k+2 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$) есть

$$_{(1)}G_{2k+2} = ({}_{(b)}n_{j(2k+2)}, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+1, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+2, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+3, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+4, \ldots , {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-4, {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-3, {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-2, {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-1).$$

После неё добавляется <u>первый</u> элемент

$$_{(a)}n_{j(2k+3)}$$

<u>непосредственно</u> <u>следующей</u> <u>группы</u> $_{(1)}G_{2k+3}$, так что получается <u>конечная</u> последовательность <u>натуральных</u> (<u>положительных</u> целых) чисел

$$_{(1)}G_{2k+2} \cup {}_{(a)}n_{j(2k+3)} = ({}_{(b)}n_{j(2k+2)}, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+1, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+2, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+3, {}_{(b)}n_{j(2k+2)}+4, \ldots , {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-4, {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-3, {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-2, {}_{(a)}n_{j(2k+3)}-1, {}_{(a)}n_{j(2k+3)}).$$

Ей соответствует <u>конечная</u> <u>долевая</u> <u>последовательность</u>

$$(\delta_{(b)n(j(2k+2)}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+2))+1}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+2))+2}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+2)+3}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+2))+4}(M\subseteq N), \ldots , \delta_{(a)n(j(2k+3))-4}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+3))-3}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+3))-2}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+3))-1}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+3))}(M\subseteq N)).$$

Для её конца и нач<u>а</u>ла имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2k+3)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2k+2)}(M\subseteq N).$$

Так что эта <u>конечная</u> <u>долевая</u> <u>последовательность</u> <u>перешагивает</u> через требуемое промежуточное значение d и поэтому <u>содержит</u> хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент <u>и/или</u> <u>перешагивает</u> через это промежуточное значение на хотя бы одном своём <u>шаге</u>.

Произвольный <u>не</u> <u>последний</u> элемент этой последовательности является <u>рациональным</u> числом, а

именно обыкновенной дробью с положительным целым знаменателем i и не превышающим его неотрицательным целым числителем m_i:

$$\delta_i(M \subseteq N) = m_i/i \ (0 \le m_i \le i).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число $i+1$ включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M \subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M \subseteq N)$ той конечной долевой последовательности и числитель, и знаменатель превышают предыдущие ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M \subseteq N) = (m_i+1)/(i+1),$$

так что этот неотрицательный шаг той конечной долевой последовательности

$$\delta_{i+1}(M\subseteq N) - \delta_i(M\subseteq N) = (m_i+1)/(i+1) - m_i/i =$$
$$(m_i i + i - m_i i - m_i)/(i(i+1)) = (i - m_i)/(i(i+1)) \leq$$
$$1/(i+1) \leq 1/({}_{(b)}n_{j(2k+2)}+1).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 не включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M\subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M\subseteq N)$ той конечной долевой последовательности числитель равен предыдущему числителю, а знаменатель превышает предыдущий знаменатель ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M\subseteq N) = m_i/(i+1),$$

так что модуль этого неположительного шага той конечной долевой последовательности

$$|\delta_{i+1}(M\subseteq N) - \delta_i(M\subseteq N)| = |m_i/(i+1) - m_i/i| = |m_i(i - i - 1)/(i(i+1))| = |- m_i)/(i(i+1)| = m_i/(i(i+1) \le 1/(i+1) \le 1/({}_{(b)}n_{j(2k+2)}+1).$$

Тем самым осуществлено дополнительное построение обеих групп ${}_{(1)}G_{2k+1}$ и ${}_{(1)}G_{2k+2}$, обладающих требуемыми свойствами.

Так что по методу математической индукции доказано следующее.

При всех условиях теоремы для произвольного натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

может быть построено представление множества непременно всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечным упорядоченным, а именно последовательным, объединением таких монотонных или возвратно-

поступательных конечных групп этих чисел непременно подряд, что на каждой такой не обязательно наименьшей возможной монотонной или возвратно-поступательной конечной группе с добавлением после неё первого элемента непосредственно следующей группы имеет место размах охватывающего колебания и происходит непременное перешагивание счётно бесконечной долевой последовательности

$$\delta_n(M \subseteq N)\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

именно через это требуемое промежуточное значение

$$d \in]a, b[,$$

$$a < d < b.$$

При этом каждая группа $_{(1)}G_{2h-1}$ с нечётным номером 2h-1 (h $\in$ (1, 2, 3, 4, 5, ... , k, k+1, ...)) начинается на непременно

строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(a)}n_1 = {}_{(a)}n(1),\ {}_{(a)}n_2 = {}_{(a)}n(2),\ {}_{(a)}n_3 = {}_{(a)}n(3),\ {}_{(a)}n_4 = {}_{(a)}n(4),\ \ldots ,\ {}_{(a)}n_j = {}_{(a)}n(j),\ \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной подпоследовательности $\delta_{(a)n(j)}(M \subseteq N)$ именно к нижнему пределу a:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(a)n(j)}(M \subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M \subseteq N) = a.$$

А каждая группа ${}_{(1)}G_{2h}$ с чётным номером 2h (h ∈ (1, 2, 3, 4, 5, ... , k, k+1, ...)) начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(b)}n_1 = {}_{(b)}n(1),\ {}_{(b)}n_2 = {}_{(b)}n(2),\ {}_{(b)}n_3 = {}_{(b)}n(3),\ {}_{(b)}n_4 = {}_{(b)}n(4),\ \ldots ,\ {}_{(b)}n_j = {}_{(b)}n(j),\ \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной подпоследовательности $\delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N)$ именно к верхнему пределу b:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M \subseteq N) = b.$$

Каждая группа ${}_{(1)}G_{2h-1}$ с нечётным номером 2h-1 ($h \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots , k, k+1, \ldots)$) есть

$${}_{(1)}G_{2h-1} = ({}_{(a)}n_{j(2h-1)},\ {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+1,\ {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+2,\ {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+3,\ {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+4,\ \ldots ,\ {}_{(b)}n_{j(2h)}-4,\ {}_{(b)}n_{j(2h)}-3,\ {}_{(b)}n_{j(2h)}-2,\ {}_{(b)}n_{j(2h)}-1).$$

После неё добавляется первый элемент

$${}_{(b)}n_{j(2h)}$$

непосредственно следующей группы $_{(1)}G_{2h}$, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$$_{(1)}G_{2h-1} \cup {}_{(b)}n_{j(2h)} = ({}_{(a)}n_{j(2h-1)}, {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+1, {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+2, {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+3, {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+4, \dots , {}_{(b)}n_{j(2h)}-4, {}_{(b)}n_{j(2h)}-3, {}_{(b)}n_{j(2h)}-2, {}_{(b)}n_{j(2h)}-1, {}_{(b)}n_{j(2h)}).$$

Ей соответствует конечная долевая последовательность

$$(\delta_{(a)n(j(2h-1))}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h-1))+1}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h-1))+2}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h-1))+3}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h-1))+4}(M\subseteq N), \dots , \delta_{(b)n(j(2h))-4}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))-3}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))-2}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))-1}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))}(M\subseteq N)).$$

Для её начала и конца имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2h-1)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2h)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге, модуль которого не превышает

$$1/({}_{(a)}n_{j(2h-1)}+1).$$

Каждая группа ${}_{(1)}G_{2h}$ с чётным номером 2h ($h \in (1, 2, 3, 4, 5, ... , k, k+1, ...)$) есть

$${}_{(1)}G_{2h} = ({}_{(b)}n_{j(2h)}, {}_{(b)}n_{j(2h)}+1, {}_{(b)}n_{j(2h)}+2, {}_{(b)}n_{j(2h)}+3, {}_{(b)}n_{j(2h)}+4, ... , {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-4, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-3, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-2, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-1).$$

После неё добавляется первый элемент

$${}_{(a)}n_{j(2h+1)}$$

непосредственно следующей группы $_{(1)}G_{2h+1}$, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$$_{(1)}G_{2h} \cup {}_{(a)}n_{j(2h+1)} = ({}_{(b)}n_{j(2h)}, {}_{(b)}n_{j(2h)}+1, {}_{(b)}n_{j(2h)}+2, {}_{(b)}n_{j(2h)}+3, {}_{(b)}n_{j(2h)}+4, \dots , {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-4, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-3, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-2, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-1, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}).$$

Ей соответствует конечная долевая последовательность

$$(\delta_{(b)n(j(2h))}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))+1}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))+2}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))+3}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))+4}(M\subseteq N), \dots , \delta_{(a)n(j(2h+1))-4}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h+1))-3}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h+1))-2}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h+1))-1}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h+1))}(M\subseteq N)).$$

Для её конца и начала имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2h+1)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2h)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге, модуль которого не превышает

$$1/({}_{(b)}n_{j(2h)}+1).$$

При стремящемся к плюс бесконечности положительном целом числе h положительные целые числа $_{(a)}n_{j(2h-1)}+1$ и $_{(b)}n_{j(2h)}+1$ также стремятся к плюс бесконечности, их обращения $1/({}_{(a)}n_{j(2h-1)}+1)$ и $1/({}_{(b)}n_{j(2h)}+1)$ стремятся к нулю.

Отсюда следует, что к произвольному действительному числу

$$d \in]a, b[,$$

$$a < d < b$$

стремится счётно бесконечная долевая последовательность

$$(\delta_{(a)n(g(1))}(M \subseteq N),\ \delta_{(b)n(g(2))}(M \subseteq N),\ \delta_{(a)n(g(3))}(M \subseteq N),\ \delta_{(b)n(g(4))}(M \subseteq N),\ \ldots,$$

$$\delta_{(a)n(g(2h-1))}(M \subseteq N),\ \delta_{(b)n(g(2h))}(M \subseteq N),\ \ldots)$$

$$(h \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots, k, k+1, \ldots)),$$

каждый элемент которой

$$\delta_{(a)n(g(2h-1))}(M \subseteq N)$$

с нечётным номером 2h-1 удовлетворяет условию

$$|\delta_{(a)n(g(2h-1))}(M \subseteq N) - d| \leq 1/(2({}_{(a)}n_{j(2h-1)}+1)),$$

если выбирается так, что является наименее уклоняющимся от этого действительного числа d элементом конечной долевой последовательности

$$(\delta_{(a)n(j(2h-1))}(M \subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2h-1))+1}(M \subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2h-1))+2}(M \subseteq N),$$

$$\delta_{(a)n(j(2h-1))+3}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2h-1))+4}(M\subseteq N),\ \dots,\ \delta_{(b)n(j(2h))-4}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2h))-3}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2h))-2}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2h))-1}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2h))}(M\subseteq N))$$

для (пополненной первым элементом $_{(b)}n_{j(2h)}$ следующей группы $_{(1)}G_{2h}$) группы

$$_{(1)}G_{2h-1} = ({}_{(a)}n_{j(2h-1)},\ {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+1,\ {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+2,\ {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+3,\ {}_{(a)}n_{j(2h-1)}+4,\ \dots,\ {}_{(b)}n_{j(2h)}-4,\ {}_{(b)}n_{j(2h)}-3,\ {}_{(b)}n_{j(2h)}-2,\ {}_{(b)}n_{j(2h)}-1)$$

с именно этим <u>нечётным</u> номером 2h-1, так что

$$|\delta_{(a)n(g(2h-1))}(M\subseteq N) - d| = \min\{|\delta_{(a)n(j(2h-1))}(M\subseteq N) - d|,\ |\delta_{(a)n(j(2h-1))+1}(M\subseteq N) - d|,\ |\delta_{(a)n(j(2h-1))+2}(M\subseteq N) - d|,\ |\delta_{(a)n(j(2h-1))+3}(M\subseteq N) - d|,\ |\delta_{(a)n(j(2h-1))+4}(M\subseteq N) - d|,\ \dots,\ |\delta_{(b)n(j(2h))-4}(M\subseteq N) - d|,\ |\delta_{(b)n(j(2h))-3}(M\subseteq N) - d|,\ |\delta_{(b)n(j(2h))-2}(M\subseteq N) - d|,\ |\delta_{(b)n(j(2h))-1}(M\subseteq N) - d|,\ |\delta_{(b)n(j(2h))}(M\subseteq N) - d|\},$$

а каждый элемент

$$\delta_{(b)n(g(2h))}(M \subseteq N)$$

с <u>чётным</u> номером 2h удовлетворяет условию

$$|\delta_{(b)n(g(2h))}(M \subseteq N) - d| \le 1/(2({}_{(b)}n_{j(2h)}+1)),$$

если выбирается так, что является наименее уклоняющимся от этого действительного числ<u>а</u> d элементом <u>конечной</u> <u>долевой</u> <u>последовательности</u>

$$(\delta_{(b)n(j(2h))}(M \subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))+1}(M \subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))+2}(M \subseteq N),$$
$$\delta_{(b)n(j(2h))+3}(M \subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h))+4}(M \subseteq N), \dots , \delta_{(a)n(j(2h+1))-4}(M \subseteq N),$$
$$\delta_{(a)n(j(2h+1))-3}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h+1))-2}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h+1))-1}(M \subseteq N),$$
$$\delta_{(a)n(j(2h+1))}(M \subseteq N))$$

для (пополненной первым элементом ${}_{(a)}n_{j(2h+1)}$ следующей группы ${}_{(1)}G_{2h+1}$) группы

$${}_{(1)}G_{2h} = ({}_{(b)}n_{j(2h)}, {}_{(b)}n_{j(2h)}+1, {}_{(b)}n_{j(2h)}+2, {}_{(b)}n_{j(2h)}+3, {}_{(b)}n_{j(2h)}+4, \dots ,$$
$${}_{(a)}n_{j(2h+1)}-4, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-3, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-2, {}_{(a)}n_{j(2h+1)}-1)$$

с именно этим чётным номером 2h, так что

$$|\delta_{(b)n(g(2h))}(M \subseteq N) - d| = \min\{|\delta_{(b)n(j(2h))}(M \subseteq N) - d|,$$
$$|\delta_{(b)n(j(2h))+1}(M \subseteq N) - d|, |\delta_{(b)n(j(2h))+2}(M \subseteq N) - d|, |\delta_{(b)n(j(2h))+3}(M \subseteq N) - d|,$$
$$|\delta_{(b)n(j(2h))+4}(M \subseteq N) - d|, \dots , |\delta_{(a)n(j(2h+1))-4}(M \subseteq N) - d|,$$
$$|\delta_{(a)n(j(2h+1))-3}(M \subseteq N) - d|, |\delta_{(a)n(j(2h+1))-2}(M \subseteq N) - d|,$$
$$|\delta_{(a)n(j(2h+1))-1}(M \subseteq N) - d|, |\delta_{(a)n(j(2h+1))}(M \subseteq N) - d|\},$$

причём при наличии двух следующих друг за другом наименее уклоняющихся от этого действительного числа d элементов любой из этих обеих конечных долевых последовательностей, так что d является полусуммой обоих этих элементов, для однозначности берётся любой из этих обоих элементов, например предыдущий, а ввиду наличия пополняющего элемента следующей группы соответствующий этому пополняющему элементу именно

последний элемент любой из этих обеих конечных долевых последовательностей может войти в ту счётно бесконечную долевую последовательность дважды подряд, то есть и для данной группы, и для следующей группы.

В самом деле, уклонение конца отрезка, именно ближайшего к произвольной внутренней точке отрезка, не превышает половины длины отрезка.

Тем самым полностью завершён первый способ доказательства теоремы.

Второй способ и алгоритм построения представления множества непременно всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечным упорядоченным, а именно последовательным, объединением таких монотонных или возвратно-

поступательных конечных групп этих чисел непременно подряд, начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(b)}n_1 = {}_{(b)}n(1),\ {}_{(b)}n_2 = {}_{(b)}n(2),\ {}_{(b)}n_3 = {}_{(b)}n(3),\ {}_{(b)}n_4 = {}_{(b)}n(4),\ \dots ,\ {}_{(b)}n_j = {}_{(b)}n(j),\ \dots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N)$ именно к верхнему пределу b:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M \subseteq N) = b.$$

Поэтому для естественно (в порядке возрастания) вполне упорядоченного и непременно имеющего первый элемент

$$_{(b)}j_1 = {}_{(b)}j(1)$$

счётно бесконечного множества всех таких натуральных (положительных целых) чисел j выполняется строгое неравенство

$$\delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N) > d.$$

При этом ввиду отсутствия здесь нижней границы $\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N)$ промежуточного значения d имеет место нестрогое неравенство

$$_{(b)}j_1 = {}_{(b)}j(1) \leq k(d).$$

В частности, для этого первого элемента выполняется строгое неравенство

$$\delta_{(b)n(1)}(M\subseteq N) > d.$$

Во втором способе первая группа $_{(2)}G_1$ начинается именно с соответствующего этому первому элементу натурального (положительного целого) числа

$$_{(b)}n_{j(1)},$$

которому соответствует

$$\delta_{(b)n(j(1))}(M \subseteq N).$$

Во втором способе вторая группа $_{(2)}G_2$ начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(a)}n_1 = {}_{(a)}n(1),\ {}_{(a)}n_2 = {}_{(a)}n(2),\ {}_{(a)}n_3 = {}_{(a)}n(3),\ {}_{(a)}n_4 = {}_{(a)}n(4),\ \dots ,\ {}_{(a)}n_j = {}_{(a)}n(j),\ \dots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно

бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N)$ именно к нижнему пределу a:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a.$$

Поэтому для естественно (в порядке возрастания) вполне упорядоченного и непременно имеющего первый элемент

$${}_{(a)}j_2 = {}_{(a)}j(2)$$

счётно бесконечного множества всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел j выполняется именно совокупность строгих неравенств

$${}_{(a)}n_j > {}_{(b)}n_{j(1)},$$

$$\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) < d.$$

В частности, для этого первого элемента выполняется именно совокупность строгих неравенств

$${}_{(a)}n_{j(2)} > {}_{(b)}n_{j(1)},$$

$$\delta_{(a)n(j(2))}(M \subseteq N) < d.$$

Во втором способе вторая группа $_{(2)}G_2$ начинается именно с соответствующего этому первому элементу натурального (положительного целого) числа

$$_{(a)}n_{j(2)},$$

которому соответствует

$$\delta_{(a)n(j(2))}(M \subseteq N).$$

То есть во втором способе первая группа $_{(2)}G_1$ есть

$$_{(2)}G_1 = ({}_{(b)}n_{j(1)}, {}_{(b)}n_{j(1)}+1, {}_{(b)}n_{j(1)}+2, {}_{(b)}n_{j(1)}+3, {}_{(b)}n_{j(1)}+4, \dots , {}_{(a)}n_{j(2)}-4, {}_{(a)}n_{j(2)}-3, {}_{(a)}n_{j(2)}-2, {}_{(a)}n_{j(2)}-1).$$

После неё добавляется первый элемент

$$_{(a)}n_{j(2)}$$

непосредственно следующей группы $_{(2)}G_2$, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$$_{(2)}G_1 \cup {}_{(a)}n_{j(2)} = ({}_{(b)}n_{j(1)}, {}_{(b)}n_{j(1)}+1, {}_{(b)}n_{j(1)}+2, {}_{(b)}n_{j(1)}+3, {}_{(b)}n_{j(1)}+4, \ldots , {}_{(a)}n_{j(2)}-4, {}_{(a)}n_{j(2)}-3, {}_{(a)}n_{j(2)}-2, {}_{(a)}n_{j(2)}-1, {}_{(a)}n_{j(2)}).$$

Ей соответствует конечная долевая последовательность

$$(\delta_{(b)n(j(1))}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(1))+1}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(1))+2}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(1))+3}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(1))+4}(M\subseteq N), \ldots , \delta_{(a)n(j(2))-4}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2))-3}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2))-2}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2))-1}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2))}(M\subseteq N)).$$

Для её конца и начала имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(1)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и

поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге.

Произвольный не последний элемент этой последовательности является рациональным числом, а именно обыкновенной дробью с положительным целым знаменателем i и не превышающим его неотрицательным целым числителем m_i:

$$\delta_i(M \subseteq N) = m_i/i \ (0 \leq m_i \leq i).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M \subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M \subseteq N)$ той конечной долевой

последовательности и числитель, и знаменатель превышают предыдущие ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M \subseteq N) = (m_i+1)/(i+1),$$

так что этот неотрицательный шаг той конечной долевой последовательности

$$\delta_{i+1}(M \subseteq N) - \delta_i(M \subseteq N) = (m_i+1)/(i+1) - m_i/i =$$

$$(m_i i + i - m_i i - m_i)/(i(i+1)) = (i - m_i)/(i(i+1)) \leq 1/(i+1) \leq 1/({}_{(b)}n_{j(1)}+1).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 не включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M \subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M \subseteq N)$ той конечной долевой последовательности числитель равен предыдущему

числителю, а знаменатель превышает предыдущий знаменатель ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M \subseteq N) = m_i/(i+1),$$

так что модуль этого неположительного шага той конечной долевой последовательности

$$|\delta_{i+1}(M \subseteq N) - \delta_i(M \subseteq N)| = |m_i/(i+1) - m_i/i| = |m_i(i - i - 1)/(i(i+1))| =$$

$$|- m_i)/(i(i+1)| = m_i/(i(i+1) \leq 1/(i+1) \leq 1/({}_{(b)}n_{j(1)}+1).$$

Во втором способе третья группа ${}_{(2)}G_3$ начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(b)}n_1 = {}_{(b)}n(1), {}_{(b)}n_2 = {}_{(b)}n(2), {}_{(b)}n_3 = {}_{(b)}n(3), {}_{(b)}n_4 = {}_{(b)}n(4), \ldots ,$$

$${}_{(b)}n_j = {}_{(b)}n(j), \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел,

обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N)$ именно к верхнему пределу b:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = b.$$

Поэтому для естественно (в порядке возрастания) вполне упорядоченного и непременно имеющего первый элемент

$${}_{(b)}j_3 = {}_{(b)}j(3)$$

счётно бесконечного множества всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел j выполняется именно совокупность строгих неравенств

$${}_{(b)}n_j > {}_{(a)}n_{j(2)},$$

$$\delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N) > d.$$

В частности, для этого первого элемента выполняется именно совокупность строгих неравенств

$${}_{(b)}n_{j(3)} > {}_{(a)}n_{j(2)},$$

$$\delta_{(b)n(j(3))}(M \subseteq N) > d.$$

Во втором способе вторая группа ${}_{(2)}G_2$ начинается именно с натурального (положительного целого) числа

$${}_{(a)}n_{j(2)},$$

которому соответствует

$$\delta_{(a)n(j(2))}(M \subseteq N).$$

То есть во втором способе вторая группа ${}_{(2)}G_2$ есть

$${}_{(2)}G_2 = ({}_{(a)}n_{j(2)}, {}_{(a)}n_{j(2)}+1, {}_{(a)}n_{j(2)}+2, {}_{(a)}n_{j(2)}+3, {}_{(a)}n_{j(2)}+4, \dots , {}_{(b)}n_{j(3)}-4, {}_{(b)}n_{j(3)}-3, {}_{(b)}n_{j(3)}-2, {}_{(b)}n_{j(3)}-1).$$

После неё добавляется первый элемент

$${}_{(b)}n_{j(3)}$$

непосредственно следующей группы $_{(2)}G_3$, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$$_{(2)}G_2 \cup {}_{(b)}n_{j(3)} = ({}_{(a)}n_{j(2)}, {}_{(a)}n_{j(2)}+1, {}_{(a)}n_{j(2)}+2, {}_{(a)}n_{j(2)}+3, {}_{(a)}n_{j(2)}+4, \dots , {}_{(b)}n_{j(3)}-4, {}_{(b)}n_{j(3)}-3, {}_{(b)}n_{j(3)}-2, {}_{(b)}n_{j(3)}-1, {}_{(b)}n_{j(3)}).$$

Ей соответствует конечная долевая последовательность

$$(\delta_{(a)n(j(2))}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2))+1}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2))+2}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2))+3}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2))+4}(M\subseteq N), \dots , \delta_{(b)n(j(3))-4}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(3))-3}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(3))-2}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(3))-1}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(3))}(M\subseteq N)).$$

Для её начала и конца имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(3)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и

поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге. Произвольный не последний элемент этой последовательности является рациональным числом, а именно обыкновенной дробью с положительным целым знаменателем i и не превышающим его неотрицательным целым числителем m_i:

$$\delta_i(M \subseteq N) = m_i/i \ (0 \leq m_i \leq i).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M \subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M \subseteq N)$

той конечной долевой последовательности и числитель, и знаменатель превышают предыдущие ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M\subseteq N) = (m_i+1)/(i+1),$$

так что этот неотрицательный шаг той конечной долевой последовательности

$$\delta_{i+1}(M\subseteq N) - \delta_i(M\subseteq N) = (m_i+1)/(i+1) - m_i/i =$$

$$(m_i i + i - m_i i - m_i)/(i(i+1)) = (i - m_i)/(i(i+1)) \le 1/(i+1) \le 1/({}_{(a)}n_{j(2)}+1).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 не включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M\subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M\subseteq N)$ той конечной долевой последовательности числитель равен предыдущему

числителю, а знаменатель превышает предыдущий знаменатель ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M \subseteq N) = m_i/(i+1),$$

так что модуль этого неположительного шага той конечной долевой последовательности

$$|\delta_{i+1}(M \subseteq N) - \delta_i(M \subseteq N)| = |m_i/(i+1) - m_i/i| = |m_i(i - i - 1)/(i(i+1))|$$
$$= |- m_i)/(i(i+1)| = m_i/(i(i+1) \leq 1/(i+1) \leq 1/({}_{(a)}n_{j(2)}+1).$$

Второй способ и алгоритм построения представления множества непременно всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечным упорядоченным, а именно последовательным, объединением таких монотонных или возвратно-поступательных конечных групп этих чисел непременно подряд, что на каждой такой не обязательно наименьшей

возможной монотонной или возвратно-поступательной конечной группе с добавлением после неё первого элемента непосредственно следующей группы имеет место размах охватывающего колебания и происходит непременное перешагивание последовательности

$$\delta_n(M \subseteq N)\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

именно через это требуемое промежуточное значение

$$d \in]a, b[,$$

$$a < d < b,$$

продолжается и обосновывается по методу математической индукции.

Принимается следующее допущение математической индукции.

При всех условиях теоремы для произвольного натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

могут быть построены первые 2k групп представления множества непременно всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечным упорядоченным, а именно последовательным, объединением таких монотонных или возвратно-поступательных конечных групп этих чисел непременно подряд, что на каждой такой не обязательно наименьшей возможной монотонной или возвратно-поступательной конечной группе с добавлением после неё первого элемента непосредственно следующей группы имеет место размах

охватывающего колебания и происходит непременное перешагивание последовательности

$$\delta_n(M \subseteq N)\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

именно через это требуемое промежуточное значение

$$d \in]a, b[,$$

$$a < d < b.$$

При этом каждая группа $_{(2)}G_{2h-1}$ с нечётным номером 2h-1 ($h \in (1, 2, 3, 4, 5, ... , k)$) начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(b)}n_1 = {}_{(b)}n(1), {}_{(b)}n_2 = {}_{(b)}n(2), {}_{(b)}n_3 = {}_{(b)}n(3), {}_{(b)}n_4 = {}_{(b)}n(4), ... , {}_{(b)}n_j = {}_{(b)}n(j), ...)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел,

обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N)$ именно к верхнему пределу b:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = b.$$

А каждая группа $_{(2)}G_{2h}$ с чётным номером 2h ($h \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots , k)$) начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(a)}n_1 = {}_{(a)}n(1),\ {}_{(a)}n_2 = {}_{(a)}n(2),\ {}_{(a)}n_3 = {}_{(a)}n(3),\ {}_{(a)}n_4 = {}_{(a)}n(4), \ldots ,\ {}_{(a)}n_j = {}_{(a)}n(j), \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно

бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N)$ именно к нижнему пределу a:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a.$$

Каждая группа $_{(2)}G_{2h-1}$ с нечётным номером 2h-1 ($h \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots , k)$) есть

$$_{(2)}G_{2h-1} = ({}_{(b)}n_{j(2h-1)}, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+1, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+2, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+3, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+4, \ldots , {}_{(a)}n_{j(2h)}-4, {}_{(a)}n_{j(2h)}-3, {}_{(a)}n_{j(2h)}-2, {}_{(a)}n_{j(2h)}-1).$$

После неё добавляется первый элемент

$$_{(a)}n_{j(2h)}$$

непосредственно следующей группы $_{(2)}G_{2h}$, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$$_{(2)}G_{2h-1} \cup {}_{(a)}n_{j(2h)} = ({}_{(b)}n_{j(2h-1)}, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+1, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+2, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+3, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+4, \ldots , {}_{(a)}n_{j(2h)}-4, {}_{(a)}n_{j(2h)}-3, {}_{(a)}n_{j(2h)}-2, {}_{(a)}n_{j(2h)}-1, {}_{(a)}n_{j(2h)}).$$

Ей соответствует конечная долевая последовательность

$$(\delta_{(b)n(j(2h-1))}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2h-1))+1}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2h-1))+2}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2h-1))+3}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2h-1))+4}(M\subseteq N),\ \dots,\ \delta_{(a)n(j(2h))-4}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2h))-3}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2h))-2}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2h))-1}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2h))}(M\subseteq N)).$$

Для её конца и начала имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2h)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2h-1)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге, модуль которого не превышает

$$1/({}_{(b)}n_{j(2h-1)}+1).$$

Каждая группа ${}_{(2)}G_{2h}$ с <u>чётным</u> номером 2h (h ∈ (1, 2, 3, 4, 5, ... , k)) есть

$${}_{(2)}G_{2h} = ({}_{(a)}n_{j(2h)}, {}_{(a)}n_{j(2h)}+1, {}_{(a)}n_{j(2h)}+2, {}_{(a)}n_{j(2h)}+3, {}_{(a)}n_{j(2h)}+4, \ldots , {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-4, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-3, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-2, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-1).$$

После неё добавляется <u>первый</u> элемент

$${}_{(b)}n_{j(2h+1)}$$

<u>непосредственно</u> <u>следующей</u> <u>группы</u> ${}_{(2)}G_{2h+1}$, так что получается <u>конечная</u> последовательность <u>натуральных</u> (<u>положительных</u> целых) чисел

$${}_{(2)}G_{2h} \cup {}_{(b)}n_{j(2h+1)} = ({}_{(a)}n_{j(2h)}, {}_{(a)}n_{j(2h)}+1, {}_{(a)}n_{j(2h)}+2, {}_{(a)}n_{j(2h)}+3, {}_{(a)}n_{j(2h)}+4, \ldots , {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-4, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-3, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-2, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-1, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}).$$

Ей соответствует <u>конечная</u> <u>долевая</u> <u>последовательность</u>

$$(\delta_{(a)n(j(2h))}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h))+1}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h))+2}(M\subseteq N),$$

$$\delta_{(a)n(j(2h))+3}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2h))+4}(M\subseteq N),\ \ldots,\ \delta_{(b)n(j(2h+1))-4}(M\subseteq N),$$
$$\delta_{(b)n(j(2h+1))-3}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2h+1))-2}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2h+1))-1}(M\subseteq N),$$
$$\delta_{(b)n(j(2h+1))}(M\subseteq N)).$$

Для её начала и конца имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2h)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2h+1)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге, модуль которого не превышает

$$1/({}_{(a)}n_{j(2h)}+1).$$

Для k = 1 это допущение доказано построением двух групп ${}_{(2)}G_1$ и ${}_{(2)}G_2$, обладающих требуемыми свойствами.

Теперь предстоит с использованием этого допущения доказать возможность сделать индукционный шаг от произвольного натурального (положительного целого) числа k к числу k+1.

Для этого достаточно дополнительно построить следующие две группы ${}_{(2)}G_{2k+1}$ и ${}_{(2)}G_{2k+2}$, обладающие требуемыми свойствами.

Группа ${}_{(2)}G_{2k+1}$ с нечётным номером 2k+1 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$) есть

$${}_{(2)}G_{2k+1} = ({}_{(b)}n_{j(2k+1)}, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+1, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+2, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+3, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+4, \ldots , {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-4, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-3, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-2, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-1).$$

После неё добавляется первый элемент

$$_{(a)}n_{j(2k+2)}$$

непосредственно следующей группы $_{(2)}G_{2k+2}$, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$$_{(2)}G_{2k+1} \cup {}_{(a)}n_{j(2k+2)} = ({}_{(b)}n_{j(2k+1)}, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+1, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+2, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+3, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+4, \ldots , {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-4, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-3, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-2, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-1, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}).$$

Ей соответствует конечная долевая последовательность

$$(\delta_{(b)n(j(2k+1))}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+1))+1}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+1))+2}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+1))+3}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+1))+4}(M\subseteq N), \ldots , \delta_{(a)n(j(2k+2))-4}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2))-3}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2))-2}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2))-1}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2))}(M\subseteq N)).$$

Для её конца и начала имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2k+2)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2k+1)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге, модуль которого не превышает

$$1/({}_{(a)}n_{j(2k+1)}+1).$$

Группа ${}_{(2)}G_{2k+2}$ с чётным номером 2k+2 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$) есть

$${}_{(2)}G_{2k+2} = ({}_{(a)}n_{j(2k+2)}, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+1, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+2, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+3, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+4, ... , {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-4, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-3, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-2, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-1).$$

После неё добавляется первый элемент

$${}_{(b)}n_{j(2k+3)}$$

непосредственно следующей группы $_{(2)}G_{2k+3}$, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$$_{(2)}G_{2k+2} \cup {}_{(b)}n_{j(2k+3)} = ({}_{(a)}n_{j(2k+2)}, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+1, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+2, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+3, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+4, \dots , {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-4, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-3, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-2, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-1, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}).$$

Ей соответствует конечная долевая последовательность

$$(\delta_{(a)n(j(2k+2)}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2))+1}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2))+2}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2)+3}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2))+4}(M\subseteq N), \dots , \delta_{(b)n(j(2k+3))-4}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+3))-3}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+3))-2}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+3))-1}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+3))}(M\subseteq N)).$$

Для её начала и конца имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2k+2)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2k+3)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге, модуль которого не превышает

$$1/({}_{(a)}n_{j(2k+2)}+1).$$

Дополнительное построение обеих групп ${}_{(2)}G_{2k+1}$ и ${}_{(2)}G_{2k+2}$, обладающих требуемыми свойствами, осуществляется следующим образом.

Группа ${}_{(2)}G_{2k+1}$ с нечётным номером 2k+1 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$) начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(b)}n_1 = {}_{(b)}n(1),\ {}_{(b)}n_2 = {}_{(b)}n(2),\ {}_{(b)}n_3 = {}_{(b)}n(3),\ {}_{(b)}n_4 = {}_{(b)}n(4),\ \ldots,\ {}_{(b)}n_j = {}_{(b)}n(j),\ \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N)$ именно к верхнему пределу b:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = b.$$

Поэтому для естественно (в порядке возрастания) вполне упорядоченного и непременно имеющего первый элемент

$${}_{(b)}j_{2k+1} = {}_{(b)}j(2k+1)$$

счётно бесконечного множества всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел j выполняется именно совокупность строгих неравенств

$$_{(b)}n_j > {}_{(a)}n_{j(2k)},$$

$$\delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N) > d.$$

В частности, для этого первого элемента выполняется именно совокупность строгих неравенств

$$_{(b)}n_{j(2k+1)} > {}_{(a)}n_{j(2k)},$$

$$\delta_{(b)n(j(2k+1))}(M \subseteq N) > d.$$

Группа $_{(2)}G_{2k+2}$ с чётным номером 2k+2 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$) начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(a)}n_1 = {}_{(a)}n(1),\ {}_{(a)}n_2 = {}_{(a)}n(2),\ {}_{(a)}n_3 = {}_{(a)}n(3),\ {}_{(a)}n_4 = {}_{(a)}n(4),\ \ldots,$$

$$_{(a)}n_j = {}_{(a)}n(j),\ \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел,

обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N)$ именно к нижнему пределу a:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a.$$

Поэтому для естественно (в порядке возрастания) вполне упорядоченного и непременно имеющего первый элемент

$${}_{(a)}j_{2k+2} = {}_{(a)}j(2k+2)$$

счётно бесконечного множества всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел j выполняется именно совокупность строгих неравенств

$${}_{(a)}n_j > {}_{(b)}n_{j(2k+1)},$$

$$\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) < d.$$

В частности, для этого первого элемента выполняется именно совокупность строгих неравенств

$$_{(a)}n_{j(2k+2)} > {}_{(b)}n_{j(2k+1)},$$

$$\delta_{(a)n(j(2k+2))}(M\subseteq N) < d.$$

Группа $_{(2)}G_{2k+2}$ с <u>чётным</u> номером 2k+2 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$) начинается именно с соответствующего этому <u>первому</u> <u>элементу</u> <u>натурального</u> (<u>положительного</u> целого) числ<u>а</u>

$$_{(a)}n_{j(2k+2)},$$

которому соответствует

$$\delta_{(a)n(j(2k+2))}(M\subseteq N).$$

Группа $_{(2)}G_{2k+1}$ с <u>нечётным</u> номером 2k+1 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$) есть

$$_{(2)}G_{2k+1} = ({}_{(b)}n_{j(2k+1)}, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+1, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+2, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+3, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+4, \ldots , {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-4, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-3, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-2, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-1).$$

После неё добавляется <u>первый</u> элемент

$${}_{(a)}n_{j(2k+2)}$$

непосредственно следующей группы ${}_{(2)}G_{2k+2}$**, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел**

$${}_{(2)}G_{2k+1} \cup {}_{(a)}n_{j(2k+2)} = ({}_{(b)}n_{j(2k+1)}, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+1, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+2, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+3, {}_{(b)}n_{j(2k+1)}+4, \ldots , {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-4, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-3, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-2, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}-1, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}).$$

Ей соответствует конечная долевая последовательность

$$(\delta_{(b)n(j(2k+1))}(M \subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+1))+1}(M \subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+1))+2}(M \subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+1))+3}(M \subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+1))+4}(M \subseteq N), \ldots , \delta_{(a)n(j(2k+2))-4}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2))-3}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2))-2}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2))-1}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2))}(M \subseteq N)).$$

Для её конца и начала имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2k+2)}(M \subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2k+1)}(M \subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге.

Произвольный не последний элемент этой последовательности является рациональным числом, а именно дробью с положительным целым знаменателем i и не превышающим его неотрицательным целым числителем m_i:

$$\delta_i(M \subseteq N) = m_i/i \ (0 \le m_i \le i).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных чисел, то в

непосредственно следующем за $\delta_i(M\subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M\subseteq N)$ той конечной долевой последовательности и числитель, и знаменатель превышают предыдущие ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M\subseteq N) = (m_i+1)/(i+1),$$

так что этот неотрицательный шаг той конечной долевой последовательности

$$\delta_{i+1}(M\subseteq N) - \delta_i(M\subseteq N) = (m_i+1)/(i+1) - m_i/i =$$
$$(m_i i + i - m_i i - m_i)/(i(i+1)) = (i - m_i)/(i(i+1)) \leq$$
$$1/(i+1) \leq 1/({}_{(b)}n_{j(2k+1)}+1).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 не включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M\subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M\subseteq N)$ той конечной долевой последовательности числитель равен

предыдущему числителю, а знаменатель превышает предыдущий знаменатель ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M\subseteq N) = m_i/(i+1),$$

так что модуль этого неположительного шага той конечной долевой последовательности

$$|\delta_{i+1}(M\subseteq N) - \delta_i(M\subseteq N)| = |m_i/(i+1) - m_i/i| = |m_i(i - i - 1)/(i(i+1))| =$$
$$|- m_i)/(i(i+1)| = m_i/(i(i+1) \leq 1/(i+1) \leq 1/({}_{(b)}n_{j(2k+1)}+1).$$

Группа ${}_{(2)}G_{2k+3}$ с нечётным номером 2k+3 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$) начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(b)}n_1 = {}_{(b)}n(1),\ {}_{(b)}n_2 = {}_{(b)}n(2),\ {}_{(b)}n_3 = {}_{(b)}n(3),\ {}_{(b)}n_4 = {}_{(b)}n(4),\ ...\ ,$$
$${}_{(b)}n_j = {}_{(b)}n(j),\ ...)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной подпоследовательности $\delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N)$ именно к верхнему пределу b:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M\subseteq N) = b.$$

Поэтому для естественно (в порядке возрастания) вполне упорядоченного и непременно имеющего первый элемент

$${}_{(b)}j_{2k+3} = {}_{(b)}j(2k+3)$$

счётно бесконечного множества всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел j выполняется именно совокупность строгих неравенств

$${}_{(b)}n_j > {}_{(a)}n_{j(2k+2)},$$

$$\delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N) > d.$$

В частности, для этого первого элемента выполняется именно совокупность строгих неравенств

$$_{(b)}n_{j(2k+3)} > {}_{(a)}n_{j(2k+2)},$$

$$\delta_{(b)n(j(2k+3))}(M \subseteq N) > d.$$

Группа $_{(2)}G_{2k+2}$ с чётным номером 2k+2 ($k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$) есть

$$_{(2)}G_{2k+2} = ({}_{(a)}n_{j(2k+2)}, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+1, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+2, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+3, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+4, \ldots, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-4, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-3, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-2, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-1).$$

После неё добавляется первый элемент

$$_{(b)}n_{j(2k+3)}$$

непосредственно следующей группы $_{(2)}G_{2k+3}$, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$$_{(2)}G_{2k+2} \cup {}_{(b)}n_{j(2k+3)} = ({}_{(a)}n_{j(2k+2)}, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+1, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+2, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+3, {}_{(a)}n_{j(2k+2)}+4, \ldots , {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-4, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-3, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-2, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}-1, {}_{(b)}n_{j(2k+3)}).$$

Ей соответствует <u>конечная</u> <u>долевая</u> <u>последовательность</u>

$$(\delta_{(a)n(j(2k+2)}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2))+1}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2))+2}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2)+3}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2k+2))+4}(M\subseteq N), \ldots , \delta_{(b)n(j(2k+3))-4}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+3))-3}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+3))-2}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+3))-1}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2k+3))}(M\subseteq N)).$$

Для её нач<u>а</u>ла и конца имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2k+2)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2k+3)}(M\subseteq N).$$

Так что эта <u>конечная</u> <u>долевая</u> последовательность <u>перешагивает</u> через требуемое промежуточное значение d и поэтому <u>содержит</u> хотя бы однажды это промежуточное

значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге. Произвольный не последний элемент этой последовательности является рациональным числом, а именно обыкновенной дробью с положительным целым знаменателем i и не превышающим его неотрицательным целым числителем m_i:

$$\delta_i(M \subseteq N) = m_i/i \ (0 \leq m_i \leq i).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M \subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M \subseteq N)$ той конечной долевой

последовательности и числитель, и знаменатель превышают предыдущие ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M \subseteq N) = (m_i+1)/(i+1),$$

так что этот неотрицательный шаг той конечной долевой последовательности

$$\delta_{i+1}(M \subseteq N) - \delta_i(M \subseteq N) = (m_i+1)/(i+1) - m_i/i =$$
$$(m_i i + i - m_i i - m_i)/(i(i+1)) = (i - m_i)/(i(i+1)) \leq$$
$$1/(i+1) \leq 1/({}_{(a)}n_{j(2k+2)}+1).$$

Если непосредственно следующее за i положительное целое число i+1 не включается в подпоследовательность M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, то в непосредственно следующем за $\delta_i(M \subseteq N)$ элементе $\delta_{i+1}(M \subseteq N)$ той конечной долевой последовательности числитель равен предыдущему

числителю, а знаменатель превышает предыдущий знаменатель ровно на единицу:

$$\delta_{i+1}(M\subseteq N) = m_i/(i+1),$$

так что модуль этого неположительного шага той конечной долевой последовательности

$$|\delta_{i+1}(M\subseteq N) - \delta_i(M\subseteq N)| = |m_i/(i+1) - m_i/i| = |m_i(i - i - 1)/(i(i+1))| = |- m_i)/(i(i+1)| = m_i/(i(i+1) \leq 1/(i+1) \leq 1/({}_{(a)}n_{j(2k+2)}+1).$$

Тем самым осуществлено дополнительное построение обеих групп ${}_{(2)}G_{2k+1}$ и ${}_{(2)}G_{2k+2}$, обладающих требуемыми свойствами.

Так что по методу математической индукции доказано следующее.

При всех условиях теоремы для произвольного натурального (положительного целого) числа

$$k \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

может быть построено представление множества непременно всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечным упорядоченным, а именно последовательным, объединением таких монотонных или возвратно-поступательных конечных групп этих чисел непременно подряд, что на каждой такой не обязательно наименьшей возможной монотонной или возвратно-поступательной конечной группе с добавлением после неё первого элемента непосредственно следующей группы имеет место размах охватывающего колебания и происходит непременное перешагивание последовательности

$$\delta_n(M \subseteq N)\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...)$$

именно через это требуемое промежуточное значение

$$\mathbf{d \in \,]a, b[,}$$

$$\mathbf{a < d < b.}$$

При этом каждая группа $_{(2)}G_{2h-1}$ с <u>нечётным</u> номером 2h-1 (h ∈ (1, 2, 3, 4, 5, ... , k, k+1, ...)) начинается на непременно <u>строго</u> <u>монотонно</u> <u>возрастающей</u> <u>счётно</u> <u>бесконечной</u> <u>подподпоследовательности</u>

$$({}_{(b)}n_1 = {}_{(b)}n(1),\ {}_{(b)}n_2 = {}_{(b)}n(2),\ {}_{(b)}n_3 = {}_{(b)}n(3),\ {}_{(b)}n_4 = {}_{(b)}n(4),\ \ldots,\ {}_{(b)}n_j = {}_{(b)}n(j),\ \ldots)$$

<u>подпоследовательности</u> M <u>последовательности</u> N <u>всех</u> <u>натуральных</u> (<u>положительных</u> <u>целых</u>) чисел, обеспечивающей стремление соответствующей <u>счётно</u> <u>бесконечной</u> <u>долевой</u> <u>подпоследовательности</u> $\delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N)$ именно к <u>верхнему</u> пределу b:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M \subseteq N) = b.$$

А каждая группа $_{(2)}G_{2h}$ с чётным номером 2h ($h \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots, k, k+1, \ldots)$) начинается на непременно строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательности

$$({}_{(a)}n_1 = {}_{(a)}n(1),\ {}_{(a)}n_2 = {}_{(a)}n(2),\ {}_{(a)}n_3 = {}_{(a)}n(3),\ {}_{(a)}n_4 = {}_{(a)}n(4),\ \ldots,\ {}_{(a)}n_j = {}_{(a)}n(j),\ \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N)$ именно к нижнему пределу a:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a.$$

Каждая группа $_{(2)}G_{2h-1}$ с нечётным номером 2h-1 ($h \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots, k, k+1, \ldots)$) есть

$$ {}_{(2)}G_{2h-1} = ({}_{(b)}n_{j(2h-1)}, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+1, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+2, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+3, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+4, \dots , {}_{(a)}n_{j(2h)}-4, {}_{(a)}n_{j(2h)}-3, {}_{(a)}n_{j(2h)}-2, {}_{(a)}n_{j(2h)}-1). $$

После неё добавляется <u>первый</u> элемент

$$ {}_{(a)}n_{j(2h)} $$

непосредственно <u>следующей</u> <u>группы</u> ${}_{(2)}G_{2h}$, так что получается <u>конечная</u> последовательность <u>натуральных</u> (<u>положительных</u> целых) чисел

$$ {}_{(2)}G_{2h-1} \cup {}_{(a)}n_{j(2h)} = ({}_{(b)}n_{j(2h-1)}, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+1, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+2, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+3, {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+4, \dots , {}_{(a)}n_{j(2h)}-4, {}_{(a)}n_{j(2h)}-3, {}_{(a)}n_{j(2h)}-2, {}_{(a)}n_{j(2h)}-1, {}_{(a)}n_{j(2h)}). $$

Ей соответствует <u>конечная</u> <u>долевая</u> <u>последовательность</u>

$$ (\delta_{(b)n(j(2h-1))}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h-1))+1}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h-1))+2}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h-1))+3}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h-1))+4}(M\subseteq N), \dots , \delta_{(a)n(j(2h))-4}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h))-3}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h))-2}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h))-1}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h))}(M\subseteq N)). $$

Для её конца и начала имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2h)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2h-1)}(M\subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге, модуль которого не превышает

$$1/({}_{(b)}n_{j(2h-1)}+1).$$

Каждая группа ${}_{(2)}G_{2h}$ с чётным номером 2h (h ∈ (1, 2, 3, 4, 5, ... , k, k+1, ...)) есть

$${}_{(2)}G_{2h} = ({}_{(a)}n_{j(2h)}, {}_{(a)}n_{j(2h)}+1, {}_{(a)}n_{j(2h)}+2, {}_{(a)}n_{j(2h)}+3, {}_{(a)}n_{j(2h)}+4, \ldots , {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-4, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-3, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-2, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-1).$$

После неё добавляется первый элемент

$$_{(b)}n_{j(2h+1)}$$

непосредственно следующей группы $_{(2)}G_{2h+1}$, так что получается конечная последовательность натуральных (положительных целых) чисел

$$_{(2)}G_{2h} \cup {}_{(b)}n_{j(2h+1)} = ({}_{(a)}n_{j(2h)}, {}_{(a)}n_{j(2h)}+1, {}_{(a)}n_{j(2h)}+2, {}_{(a)}n_{j(2h)}+3, {}_{(a)}n_{j(2h)}+4, \dots , {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-4, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-3, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-2, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-1, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}).$$

Ей соответствует конечная долевая последовательность

$$(\delta_{(a)n(j(2h))}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h))+1}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h))+2}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h))+3}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h))+4}(M\subseteq N), \dots , \delta_{(b)n(j(2h+1))-4}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h+1))-3}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h+1))-2}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h+1))-1}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h+1))}(M\subseteq N)).$$

Для её начала и конца имеет место двойное строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(2h)}(M \subseteq N) < d < \delta_{(b)n(2h+1)}(M \subseteq N).$$

Так что эта конечная долевая последовательность перешагивает через требуемое промежуточное значение d и поэтому содержит хотя бы однажды это промежуточное значение как свой элемент и/или перешагивает через это промежуточное значение на хотя бы одном своём шаге, модуль которого не превышает

$$1/({}_{(a)}n_{j(2h)}+1).$$

При стремящемся к плюс бесконечности положительном целом числе h положительные целые числа ${}_{(b)}n_{j(2h-1)}+1$ и ${}_{(a)}n_{j(2h)}+1$ также стремятся к плюс бесконечности, их обращения $1/({}_{(b)}n_{j(2h-1)}+1)$ и $1/({}_{(a)}n_{j(2h)}+1)$ стремятся к нулю. Отсюда следует, что к произвольному действительному числу

$$d \in \,]a, b[,$$

$$a < d < b$$

стремится <u>счётно</u> <u>бесконечная</u> <u>долевая</u> <u>последовательность</u>

$$(\delta_{(b)n(g(1))}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(g(2))}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(g(3))}(M\subseteq N),$$

$$\delta_{(a)n(g(4))}(M\subseteq N), \ldots , \delta_{(b)n(g(2h-1))}(M\subseteq N), \delta_{(a)n(g(2h))}(M\subseteq N), \ldots)$$

$$(h \in (1, 2, 3, 4, 5, \ldots , k, k+1, \ldots)),$$

каждый элемент которой

$$\delta_{(b)n(g(2h-1))}(M\subseteq N)$$

с <u>нечётным</u> номером 2h-1 удовлетворяет условию

$$|\delta_{(b)n(g(2h-1))}(M\subseteq N) - d| \leq 1/(2({}_{(b)}n_{j(2h-1)}+1)),$$

если выбирается так, что является наименее уклоняющимся от этого действительного числ<u>а</u> d элементом <u>конечной</u> <u>долевой</u> <u>последовательности</u>

$$(\delta_{(b)n(j(2h-1))}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h-1))+1}(M\subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h-1))+2}(M\subseteq N),$$

$$\delta_{(b)n(j(2h-1))+3}(M\subseteq N),\ \delta_{(b)n(j(2h-1))+4}(M\subseteq N),\ \dots,\ \delta_{(a)n(j(2h))-4}(M\subseteq N),$$
$$\delta_{(a)n(j(2h))-3}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2h))-2}(M\subseteq N),\ \delta_{(a)n(j(2h))-1}(M\subseteq N),$$
$$\delta_{(a)n(j(2h))}(M\subseteq N))$$

для (пополненной <u>первым</u> элементом $_{(a)}n_{j(2h)}$ следующей группы $_{(2)}G_{2h}$) группы

$$_{(2)}G_{2h-1} = ({}_{(b)}n_{j(2h-1)},\ {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+1,\ {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+2,\ {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+3,\ {}_{(b)}n_{j(2h-1)}+4,\ \dots,$$
$${}_{(a)}n_{j(2h)}-4,\ {}_{(a)}n_{j(2h)}-3,\ {}_{(a)}n_{j(2h)}-2,\ {}_{(a)}n_{j(2h)}-1)$$

с именно этим <u>нечётным</u> номером 2h-1, так что

$$|\delta_{(b)n(g(2h-1))}(M\subseteq N) - d| = \min\{|\delta_{(b)n(j(2h-1))}(M\subseteq N) - d|,$$
$$|\delta_{(b)n(j(2h-1))+1}(M\subseteq N) - d|,\ |\delta_{(b)n(j(2h-1))+2}(M\subseteq N) - d|,$$
$$|\delta_{(b)n(j(2h-1))+3}(M\subseteq N) - d|,\ |\delta_{(b)n(j(2h-1))+4}(M\subseteq N) - d|,\ \dots,$$
$$|\delta_{(a)n(j(2h))-4}(M\subseteq N) - d|,\ |\delta_{(a)n(j(2h))-3}(M\subseteq N) - d|,\ |\delta_{(a)n(j(2h))-2}(M\subseteq N) - d|,$$
$$|\delta_{(a)n(j(2h))-1}(M\subseteq N) - d|,\ |\delta_{(a)n(j(2h))}(M\subseteq N) - d|\},$$

а каждый элемент

$$\delta_{(a)n(g(2h))}(M \subseteq N)$$

с <u>чётным</u> номером 2h удовлетворяет условию

$$|\delta_{(a)n(g(2h))}(M \subseteq N) - d| \leq 1/(2({}_{(a)}n_{j(2h)}+1)),$$

если выбирается так, что является наименее уклоняющимся от этого действительного числ<u>а</u> d элементом <u>конечной</u> <u>долевой</u> <u>последовательности</u>

$$(\delta_{(a)n(j(2h))}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h))+1}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h))+2}(M \subseteq N),$$
$$\delta_{(a)n(j(2h))+3}(M \subseteq N), \delta_{(a)n(j(2h))+4}(M \subseteq N), \ldots , \delta_{(b)n(j(2h+1))-4}(M \subseteq N),$$
$$\delta_{(b)n(j(2h+1))-3}(M \subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h+1))-2}(M \subseteq N), \delta_{(b)n(j(2h+1))-1}(M \subseteq N),$$
$$\delta_{(b)n(j(2h+1))}(M \subseteq N))$$

для (пополненной <u>первым</u> элементом ${}_{(b)}n_{j(2h+1)}$ следующей группы ${}_{(2)}G_{2h+1}$) группы

$${}_{(2)}G_{2h} = ({}_{(a)}n_{j(2h)}, {}_{(a)}n_{j(2h)}+1, {}_{(a)}n_{j(2h)}+2, {}_{(a)}n_{j(2h)}+3, {}_{(a)}n_{j(2h)}+4, \ldots ,$$
$${}_{(b)}n_{j(2h+1)}-4, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-3, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-2, {}_{(b)}n_{j(2h+1)}-1)$$

с именно этим чётным номером 2h, так что

$$|\delta_{(a)n(g(2h))}(M\subseteq N) - d| = \min\{|\delta_{(a)n(j(2h))}(M\subseteq N) - d|,$$
$$|\delta_{(a)n(j(2h))+1}(M\subseteq N) - d|, |\delta_{(a)n(j(2h))+2}(M\subseteq N) - d|, |\delta_{(a)n(j(2h))+3}(M\subseteq N) - d|,$$
$$|\delta_{(a)n(j(2h))+4}(M\subseteq N) - d|, \ldots , |\delta_{(b)n(j(2h+1))-4}(M\subseteq N) - d|,$$
$$|\delta_{(b)n(j(2h+1))-3}(M\subseteq N) - d|, |\delta_{(b)n(j(2h+1))-2}(M\subseteq N) - d|,$$
$$|\delta_{(b)n(j(2h+1))-1}(M\subseteq N) - d|, |\delta_{(b)n(j(2h+1))}(M\subseteq N) - d|\},$$

причём при наличии двух следующих друг за другом наименее уклоняющихся от этого действительного числа d элементов любой из этих обеих конечных долевых последовательностей, так что d является полусуммой обоих этих элементов, для однозначности берётся любой из этих обоих элементов, например предыдущий, а ввиду наличия пополняющего элемента следующей группы соответствующий этому пополняющему элементу именно

последний элемент любой из этих обеих конечных долевых последовательностей может войти в ту счётно бесконечную долевую последовательность дважды подряд, то есть и для данной группы, и для следующей группы.

В самом деле, уклонение конца отрезка, именно ближайшего к произвольной внутренней точке отрезка, не превышает половины длины отрезка.

Тем самым полностью завершён второй способ доказательства теоремы.

Третий способ и алгоритм построения представления множества непременно всех достаточно больших натуральных (положительных целых) чисел счётно бесконечным упорядоченным, а именно последовательным, объединением таких монотонных или возвратно-

поступательных конечных групп этих чисел непременно подряд, начинается не наперёд заданным образом на одной из двух счётно бесконечных долевых подпоследовательностей, стремящихся к нижнему и верхнему пределам, а наилучшим выбором той из обеих этих счётно бесконечных долевых подпоследовательностей, которая именно первой из них обеспечит непременно постоянное выполнение своей части двойного строгого неравенства

$$\delta_{(a)n(j)}(M \subseteq N) < d < \delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N),$$

посредине которого находится требуемое промежуточное значение d.

При этом считаются выбранными непременно строго монотонно возрастающая счётно бесконечная подподпоследовательность

$$({}_{(a)}n_1 = {}_{(a)}n(1),\ {}_{(a)}n_2 = {}_{(a)}n(2),\ {}_{(a)}n_3 = {}_{(a)}n(3),\ {}_{(a)}n_4 = {}_{(a)}n(4),\ \ldots,\ {}_{(a)}n_j = {}_{(a)}n(j),\ \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающая стремление соответствующей счётно бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N)$ именно к нижнему пределу a:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a,$$

а также непременно строго монотонно возрастающая счётно бесконечная подподпоследовательность

$$({}_{(b)}n_1 = {}_{(b)}n(1),\ {}_{(b)}n_2 = {}_{(b)}n(2),\ {}_{(b)}n_3 = {}_{(b)}n(3),\ {}_{(b)}n_4 = {}_{(b)}n(4),\ \ldots,$$

$$_{(b)}n_j = {}_{(b)}n(j), \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающая стремление соответствующей счётно бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N)$ именно к верхнему пределу b:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M \subseteq N) = b.$$

Поэтому для естественно (в порядке возрастания) вполне упорядоченного и непременно имеющего первый элемент

$$_{(a)}j_1 = {}_{(a)}j(1)$$

счётно бесконечного множества всех таких натуральных (положительных целых) чисел j выполняется строгое неравенство

$$\delta_{(a)n(j)}(M \subseteq N) < d.$$

Поэтому для естественно (в порядке возрастания) вполне упорядоченного и непременно имеющего первый элемент

$$_{(b)}j_1 = {}_{(b)}j(1)$$

счётно бесконечного множества всех таких натуральных (положительных целых) чисел j выполняется строгое неравенство

$$\delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N) > d.$$

Равенство

$$_{(a)}n_{(a)j(1)} = {}_{(b)}n_{(b)j(1)}$$

исключено, поскольку имеет следствием равенство

$$\delta_{(a)n(1)}(M \subseteq N) = \delta_{(b)n(1)}(M \subseteq N),$$

противоречащее двойному строгому неравенству

$$\delta_{(a)n(1)}(M \subseteq N) < d < \delta_{(b)n(1)}(M \subseteq N).$$

Если выполняется строгое неравенство

$$_{(a)}n_{(a)j(1)} < {}_{(b)}n_{(b)j(1)},$$

то есть первой обеспечено непременно постоянное выполнение левой части двойного строгого неравенства

$$\delta_{(a)n(j)}(M \subseteq N) < d < \delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N)$$

строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательностью

$$({}_{(a)}n_1 = {}_{(a)}n(1),\ {}_{(a)}n_2 = {}_{(a)}n(2),\ {}_{(a)}n_3 = {}_{(a)}n(3),\ {}_{(a)}n_4 = {}_{(a)}n(4),\ \dots ,\ {}_{(a)}n_j = {}_{(a)}n(j),\ \dots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающей стремление соответствующей

счётно бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N)$ именно к нижнему пределу a:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \inf \delta_n(M\subseteq N) = a,$$

то третий способ во всём дальнейшем совпадает с первым способом.

Если выполняется строгое неравенство

$${}_{(a)}n_{(a)j(1)} > {}_{(b)}n_{(b)j(1)},$$

то есть первой обеспечено непременно постоянное выполнение правой части двойного строгого неравенства

$$\delta_{(a)n(j)}(M\subseteq N) < d < \delta_{(b)n(j)}(M\subseteq N)$$

строго монотонно возрастающей счётно бесконечной подподпоследовательностью

$$({}_{(b)}n_1 = {}_{(b)}n(1),\ {}_{(b)}n_2 = {}_{(b)}n(2),\ {}_{(b)}n_3 = {}_{(b)}n(3),\ {}_{(b)}n_4 = {}_{(b)}n(4),\ \ldots,\ {}_{(b)}n_j = {}_{(b)}n(j),\ \ldots)$$

подпоследовательности M последовательности N всех натуральных (положительных целых) чисел, обеспечивающей стремление соответствующей счётно бесконечной долевой подпоследовательности $\delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N)$ именно к верхнему пределу b:

$$\lim_{j\to\infty} \delta_{(b)n(j)}(M \subseteq N) = \lim_{n\to\infty} \sup \delta_n(M \subseteq N) = b,$$

то третий способ во всём дальнейшем совпадает со вторым способом.

Тем самым доказательство теоремы полностью завершено.

16. ВСЕОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЕРАРХИЙ ПЕРЕМЕННОЙ УЧАСТВУЮЩЕЙ ЦЕЛОЧАСТИЧНОСТИ С МОДАЛЬНЫМИ КВАНТОРАМИ. СИНЕРГИЧНАЯ СИСТЕМА ВВОДИМЫХ ВСЕОБЩИХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Настоящая научная монография предлагает (и применяет к задачам, в частности подлежащим решению системам отношений, в том числе неравенств и равенств, включая уравнения, в особенности к каноническим единометрическим производным множественным уравнениям с одним неизвестным) простые и естественные и при этом чрезвычайно существенные и полезные определения, образующие синергичную систему. Среди них следующие <u>определение иерархий целочастичности</u> и <u>объединённое всеобщее определение</u> <u>целочастично</u> (или

целиком, или частично, в том числе или вообще, или только в данном случае) невозможного, отсутствующего, возможного, присутствующего, необходимого, влияющего, достаточного, преобразующего (или известного (определённого), или неизвестного (неопределённого)) предмета. Это объединённое всеобщее определение выстроено с упорядоченной в общем направлении возрастания степеней участия/действенности как модальностей иерархией

0§, 0, ?, 1, 1§, &, !, !!

обозначенных, например возможными левыми нижними указателями (индексами), кванторов модальностей невозможности 0§, отсутствия 0, возможности ?, присутствия 1, необходимости 1§, влиятельности &,

достаточности !, преобразования !!. Введён и квантор модальности априорно принципиально неясной неизвестности (неопределённости) ?§ вне этой иерархии.

Научно обоснованное и поэтому полностью оправданное введение новых понятий в научный оборот может и должно соответствовать критериям «закона экономии» Аристотеля в его «Физике», «бритвы Оккама» «Frustra fit per plura quod potest fieri per pauciora» («Излишне объяснять через многое то, что можно через меньшее»), английского философа в Мюнхене, и принципа достаточного основания Демокрита как четвёртого закона формальной логики.

Определение. Левой частью, правой частью и обеими частями непременно применительно к горизонтальной линейной записи произвольного отношения, например

отношения равенства или неравенства, называются целиком стороны этого отношения, разделённые знаком этого отношения.

Определение. Частью любого предмета, в том числе горизонтальной линейной записи произвольного отношения, называется произвольная часть этого предмета.

Определение. Иерархиями целочастичности называются иерархии от целого, которому присваивается нулевой порядок целочастичности, до частей, которым могут присваиваться положительные целые порядки целочастичности.

Определение. Части первого порядка целочастичности могут называться просто частями.

Определение. Части второго порядка целочастичности могут называться частицами.

Определение. Части третьего порядка целочастичности могут называться микрочастицами.

Определение. Части четвёртого порядка целочастичности могут называться субмикрочастицами.

Определение. Части пятого порядка целочастичности могут называться наночастицами.

Пример. Частями, или частями первого порядка целочастичности, горизонтальной линейной записи произвольного отношения, например отношения равенства или неравенства, являются знак этого отношения и обе части этого отношения, то есть его левая и правая части. Все они, включая знак отношения, например «больше или

равно» $\geq$, «меньше или равно» $\leq$ и другие соединённые (комбинированные) знаки отношений, в частности с добавлениями, предлагаемыми настоящей научной монографией, и, разумеется, <u>левая</u> и <u>правая</u> <u>части</u> <u>горизонтальной линейной записи</u> этого <u>отношения</u> могут иметь сколь угодно сложное строение и содержать <u>свои части</u> более высоких, чем первый, порядков целочастичности.

<u>Пример</u>. Соединённые знаками <u>отношений</u> <u>неравенства</u> или <u>равенства</u> соответственно <u>части</u> <u>неравенства</u> или <u>равенства</u>, в том числе <u>уравнения</u>, являются частями <u>первого</u> порядка целочастичности неравенства или равенства соответственно. Отдельные <u>выражения</u> в этих частях, включая выражения <u>неизвестных</u>, в зависимости от

строения этих частей являются частями положительных целых порядков целочастичности, причём имеют именно первый порядок целочастичности тогда и только тогда, когда части первого порядка сводятся к этим единственным выражениям.

Замечание. Известны иерархии по отношениям целого и части:

надмножество, множество, подмножество;

надсистема, система, подсистема.

Представляется полезным обобщение этих иерархий на произвольные предметы.

Определение. Подпредметом рассматриваемого предмета называется произвольная часть рассматриваемого предмета.

Определение. Надпредметом рассматриваемого предмета называется произвольный предмет, чьей частью является рассматриваемый предмет.

Определение. Подслучаем рассматриваемого случая называется произвольная часть рассматриваемого случая, в частности при его разветвлении.

Определение. Надслучаем рассматриваемого случая называется произвольная система случаев, одним из которых является рассматриваемый случай.

Замечание. Представляется полезным выстроить упорядоченную в общем направлении возрастания иерархию степеней участия/действенности как модальностей произвольного предмета.

Замечание. Представляется полезным обобщение понятий о невозможности существования (присутствия, наличия) на произвольные предметы.

Определение. Предмет называется невозможным, если он не может существовать (присутствовать, наличествовать и/или иметь место), в частности в тех случаях, когда его существование (присутствие и/или наличие) противоречит надпредмету, например непременно строго доказанным теоремам, объективным законам природы, психики и общества, субъективным юридическим законам общества и/или принятой системе условий.

Определение. Часть называется невозможной, если она не может существовать (присутствовать, наличествовать и/или иметь место), в частности в тех случаях, когда её

существование (присутствие и/или наличие) противоречит предмету и/или непременно строго доказанным теоремам, объективным законам природы, психики и общества, субъективным юридическим законам общества и/или принятой системе условий.

Замечание. Представляется полезным обобщение понятий об отсутствии, о возможности или присутствия (наличия), или отсутствия и о присутствии (наличии) на произвольные предметы.

Определение. Предмет называется отсутствующим (нестрого отсутствующим), если он отсутствует и/или не имеет места (или только в данном случае, или в данном случае и ещё в некоторых других, но не во всех остальных, случаях, или во всех случаях как вообще невозможный).

Определение. Предмет называется строго отсутствующим, если он отсутствует (не имеет места) или только в данном случае, или в данном случае и ещё в некоторых других, но не во всех остальных, случаях, поскольку не является невозможным.

Определение. Часть называется отсутствующей (нестрого отсутствующей), если она отсутствует и/или не имеет места (или только в данном случае, или в данном случае и ещё в некоторых других, но не во всех остальных, случаях, или во всех случаях как вообще невозможная).

Определение. Часть называется строго отсутствующей, если она отсутствует (не имеет места) или только в данном случае, или в данном случае и ещё в некоторых других, но

не во всех остальных, случаях, поскольку не является невозможной.

Определение. Предмет называется возможным, если он может присутствовать, наличествовать и/или иметь место, а может и отсутствовать и/или не иметь места.

Определение. Часть называется возможной, если она может присутствовать, наличествовать и/или иметь место, а может и отсутствовать и/или не иметь места.

Замечание. В интересах общего направления усиления иерархии участия представляется целесообразным именно здесь дать определения строго присутствующих предмета/части и при этом использовать независимые от этих определений определения о необходимости предмета/части, даваемые чуть ниже.

Определение. Предмет называется строго присутствующим (строго наличным, строго наличествующим), если он присутствует (наличествует, имеет место) или только в данном случае, или в данном случае и ещё в некоторых других, но не во всех остальных, случаях, поскольку не является необходимым.

Определение. Предмет называется присутствующим (нестрого присутствующим, нестрого наличным, нестрого наличествующим), если он присутствует, наличествует и/или имеет место (или только в данном случае, или в данном случае и ещё в некоторых других, но не во всех остальных, случаях, или во всех случаях как вообще необходимый).

Определение. Часть называется строго присутствующей (строго наличной, строго наличествующей), если она присутствует (наличествует, имеет место) или только в данном случае, или в данном случае и ещё в некоторых других, но не во всех остальных, случаях, поскольку не является необходимой.

Определение. Часть называется присутствующей (нестрого присутствующей, нестрого наличной, нестрого наличествующей), если она присутствует, наличествует и/или имеет место (или только в данном случае, или в данном случае и ещё в некоторых других, но не во всех остальных, случаях, или во всех случаях как вообще необходимая).

Замечание. Представляется полезным обобщение понятий о необходимых условиях на произвольные предметы.

Определение. Рассматриваемый предмет называется необходимым для другого предмета, если без существования рассматриваемого предмета невозможно существование этого другого предмета.

Следствие. Рассматриваемый необходимый предмет должен хронологически существовать не позднее существования этого другого предмета по общему принципу причинно-следственной связи, по которому причина либо опережает следствие, либо одновременна с ним.

Замечание. Если оставить вне внимания временной аспект взаимоотношения существований этого другого предмета и необходимого для него рассматриваемого предмета, то есть

отвлечься от хронологического аспекта, а также ограничиться независимым от хронологического аспекта чисто логическим и математическим пониманием следования, в частности имеющим место применительно к необходимым и достаточным условиям, то последнее определение и вытекающие из него дальнейшие определения, более удобные ввиду избавления от отрицаний, могут быть даны также в следующем равносильном (эквивалентном) виде.

Определение. Рассматриваемый предмет называется необходимым для другого предмета, если из существования этого другого предмета следует существование рассматриваемого предмета.

Определение. Предмет называется необходимым для надпредмета, если без существования этого предмета невозможно существование этого надпредмета.

Определение. Предмет называется необходимым для надпредмета, если из существования этого надпредмета следует существование этого предмета.

Определение. Часть называется необходимой для предмета, если без существования этой части невозможно существование этого предмета.

Определение. Часть называется необходимой для предмета, если из существования этого предмета следует существование этой части.

Замечание. Тем самым выстроена иерархия именно нарастающего участия произвольного предмета по

ступеням иерархии и одноимённым степеням участия, естественно представляемая здесь снизу вверх. Являющиеся нижними первые две ступени иерархии и степени участия выражают отсутствие участия. При этом первая ступень иерархии и степень участия выражает невозможность предмета как именно закономерное, необходимое, вынужденное неучастие. А вторая ступень иерархии и степень участия выражает всего лишь отсутствие предмета как неучастие или только в данном случае, или ещё в некоторых других, но не во всех остальных, случаях, именно случайное первого уровня всевозможных случаев, однако вполне однозначное и поэтому необходимое и закономерное второго уровня данного случая, поскольку в этом случае предмет

непременно отсутствует. Третья ступень иерархии и степень участия выражает возможность предмета как относящуюся именно ко второму уровню данного случая случайность то ли неучастия, то ли участия и тем самым обеспечивает и выражает именно переменность предмета. Тем самым вводится иерархия случайностей с произвольным превышающим единицу целым числом уровней в однозначном соответствии с иерархией подмножеств множества всевозможных случаев. В частности, здесь имеет место двухуровневая иерархия множества всевозможных случаев, имеющего первый уровень, и соответствующего множества отдельных случаев как имеющих второй уровень одноэлементных подмножеств множества всевозможных случаев.

Являющиеся высшими последние две ступени иерархии и степени участия выражают наличие участия. При этом четвёртая ступень иерархии и степень участия выражает всего лишь наличие предмета как участие или только в данном случае, или ещё в некоторых других, но не во всех остальных, случаях, именно случайное первого уровня всевозможных случаев, однако вполне однозначное и поэтому необходимое и закономерное второго уровня данного случая, поскольку в этом случае предмет непременно присутствует. А пятая ступень иерархии и степень участия выражает необходимость предмета как именно закономерное, необходимое, вынужденное участие. Тем самым завершается выстроенная иерархия именно нарастающего участия произвольного предмета по

ступеням иерархии и одноимённым степеням участия и естественно продолжается представляемой снизу вверх предстоящей иерархией именно нарастающей действенности.

Замечание. Представляется полезным обобщение понятия о зависимости зависимой переменной вследствие общезначимости (влияния на общее) независимой переменной на произвольные предметы. Это особенно важно при возможных поглощениях, нарушающих законы сохранения, в частности в алгебре множеств при теоретико-множественных объединениях, в алгебре логики при дизъюнкциях и в теории множеств при действиях с бесконечными кардинальными числами. Предстоит выстроить иерархию именно качественно ступенчато

нарастающей действенности произвольного предмета по ступеням иерархии и одноимённым степеням действенности, естественно представляемую здесь снизу вверх. В порядке возрастания действенности (влияния) одного предмета на другой предмет именно качественная иерархия этого влияния принципиально различает следующие три ступени иерархии и три одноимённые степени действенности. Во-первых, это всего лишь непременное наличие влияния, вызывающего в этом другом предмете хотя бы сколь угодно малые изменения, вследствие которых состояние этого другого предмета не является тождественным состоянию этого другого предмета без этих изменений. Эта первая ступень иерархии и степень действенности всего лишь различает, с одной стороны,

полное отсутствие какого бы то ни было влияния, например со стороны предмета, полностью поглощаемого другими предметами, как в названных выше случаях, а с другой стороны, наличие какого бы то ни было влияния, хотя бы сколь угодно малого. Эта первая ступень иерархии и степень действенности полностью соответствует уровню двоичной классической формальной логики с её различениями нуля и единицы, «нет» и «да», отсутствия и наличия, дающей чрезвычайно скудную и заведомо неприемлемую отчасти чёрную, отчасти белую (даже без градаций серого цвета, присущих чёрно-белым фотографиям) картину Вселенной, имеющей бесконечное именно цветовое разнообразие, да ещё и со сказочным богатством оттенков. Во-вторых, это достаточность

влияния одного предмета на другой предмет для существования этого другого предмета как вторая ступень иерархии и степень действенности. В-третьих, это именно преобразующая сила влияния одного предмета на другой предмет как третья ступень иерархии и степень действенности.

Определение. Рассматриваемый предмет называется влияющим на другой предмет, если этот другой предмет является зависимым от рассматриваемого предмета, в частности от его наличия или отсутствия, то есть этот другой предмет при наличии рассматриваемого предмета не равносилен (итогово не тождествен) этому другому предмету при отсутствии рассматриваемого предмета.

Замечание. Для равносильности (эквивалентности) необходима и достаточна именно итоговая тождественность, в частности при равносильных (эквивалентных) заведомо (умышленно) не тождественных промежуточных преобразованиях задачи, например системы уравнений и/или неравенств или отдельного уравнения и/или неравенства, по ходу решения задачи, обеспечивающих тождественность именно итога решения, а не самой преобразуемой задачи, нетождественность преобразований которой в случае нетривиальности задачи необходима.

Определение. Предмет называется влияющим на надпредмет, если этот надпредмет является зависимым от этого предмета, в частности от его наличия или отсутствия,

то есть этот надпредмет при наличии рассматриваемого предмета не равносилен (итогово не тождествен) этому надпредмету при отсутствии рассматриваемого предмета.

Определение. Часть называется влияющей на предмет, если этот предмет без этой части не равносилен (итогово не тождествен) этому предмету целиком, то есть включающему эту часть, которая при этом хотя бы частично сохраняется, а не поглощается именно целиком.

Замечание. Представляется полезным обобщение понятий о достаточных условиях на произвольные предметы.

Определение. Рассматриваемый предмет называется достаточным для другого предмета, если из существования рассматриваемого предмета следует существование этого другого предмета.

Следствие. Рассматриваемый достаточный предмет должен хронологически существовать не позднее существования этого другого предмета по общему принципу причинно-следственной связи, по которому причина либо опережает следствие, либо одновременна с ним.

Замечание. В отличие от рассмотренной ранее необходимости, применительно к достаточности не нужно разделять, с одной стороны, временной (хронологический) аспект взаимоотношения существований этого другого предмета и достаточного для него рассматриваемого предмета по общему принципу причинно-следственной связи, по которому причина либо опережает следствие, либо одновременна с ним, а с другой стороны, чисто логическое и математическое понимание следования, в частности

имеющее место применительно к необходимым и достаточным условиям. Однако и применительно к <u>достаточности</u> можно <u>дополнительно</u> дать, что и делается ниже, равносильные (эквивалентные), хотя на этот раз и менее удобные ввиду наличия отрицаний, последнее определение и вытекающие из него дальнейшие определения.

<u>Определение</u>. Рассматриваемый <u>предмет</u> называется <u>достаточным</u> для другого предмета, если без существования этого другого предмета невозможно существование рассматриваемого предмета.

<u>Определение</u>. <u>Предмет</u> называется <u>достаточным</u> для надпредмета, если из существования этого предмета следует существование этого надпредмета.

Определение. Предмет называется достаточным для надпредмета, если без существования этого надпредмета невозможно существование этого предмета.

Определение. Часть называется достаточной для предмета, если из существования этой части следует существование этого предмета.

Определение. Часть называется достаточной для предмета, если без существования этого предмета невозможно существование этой части.

Определение. Рассматриваемый предмет называется преобразующим другой предмет, если влияет на него настолько сильно, что преобразует этот другой предмет, то есть изменяет его именно сущностно и/или качественно.

Определение. Предмет называется преобразующим надпредмет, если влияет на него настолько сильно, что преобразует надпредмет, то есть изменяет его именно сущностно и/или качественно.

Определение. Часть называется преобразующей предмет, если влияет на него настолько сильно, что преобразует предмет, то есть изменяет его именно сущностно и/или качественно.

Замечание. Тем самым завершаются и выстроенная иерархия именно нарастающей действенности произвольного предмета по ступеням иерархии и одноимённым степеням действенности как естественное продолжение предыдущей иерархии нарастающего участия, и соединённая иерархия именно нарастающих

участия/действенности произвольного предмета по ступеням иерархии и одноимённым степеням участия/действенности.

Замечание. Искомое неизвестное (неопределённое) как именно цель решения соответствующей задачи принципиально оставляется вне иерархии именно полностью известных и определённых в смысле однозначной идентификации предметов как всего лишь средств решения соответствующей задачи. Причём непосредственное влияние неизвестного (неопределённого) на задачу как на частично неизвестный предмет может быть намного меньше влияний полностью известных и определённых в смысле однозначной идентификации предметов на эту же задачу. Подобно этому в шахматах, в

шахматных стратегии, тактике и задачах король и его безопасность являются целью, а ферзь – всего лишь средством, хотя подвижность и непосредственная ударная сила короля никогда не больше, а в подавляющем большинстве позиций несравненно меньше, чем таковые у ферзя.

Замечание. Даже в задачах далеко не каждое неизвестное является именно искомым. При математическом моделировании Вселенной множество неизвестных всегда бесконечно ввиду бесконечности Вселенной и всеобщей связи явлений и принципиально даже не может быть перечислено. Но и во многих других жизненных и научных задачах множество именно всех неизвестных, в принципе способных так или иначе повлиять на решение задачи,

настолько велико, что тоже не может быть перечислено. Ведь попытка всего лишь такого перечисления не позволила бы вообще добраться до решения задачи. Поэтому подавляющее большинство неизвестных даже не упоминается. Несколько неизвестных упоминаются с добавлением, что они оказывают заведомо малое влияние и поэтому вообще не рассматриваются. Влияния некоторых единичных неизвестных могут оцениваться, то есть вместо поиска самих таких неизвестных могут даваться всего лишь оценки их влияний. И только избранные неизвестные ищутся на самом деле. Но и в математике то и дело именно вынужденно приходится вместо поиска самого неизвестного всего лишь оценивать его влияние. Причём не только в прикладной и вычислительной математике, но и в

чистой математике. Множество всех рациональных чисел всего лишь счётно бесконечно, тогда как множество всех иррациональных чисел именно несчётно бесконечно. Часто так или иначе используются не обозначения иррациональных чисел типа квадратного корня из 2, а их представления суммами бесконечных рядов, например десятичными разложениями, которые являются бесконечными именно непериодическими десятичными дробями. Известной принципиально может быть лишь конечная последовательность десятичных цифр каждого такого разложения, тогда как остальная именно бесконечная последовательность десятичных цифр необходимо остаётся полностью неизвестной. То есть десятичное разложение каждого иррационального числа

лишь конечно известно и бесконечно неизвестно. Оно состоит из рациональной и поэтому не выражающей именно иррациональную природу самого числа известной части с конечной последовательностью десятичных цифр и из иррациональной и поэтому выражающей именно иррациональную природу самого числа полностью неизвестной части с остальной бесконечной последовательностью десятичных цифр. И эта полностью неизвестная иррациональная часть принципиально не может именно искаться. Может лишь оцениваться её влияние, обычно с помощью неравенств, что и делается в математике.

Замечание. Представляется полезным обобщение понятий об искомом неизвестном (неопределённом) в смысле

отсутствия именно однозначной идентификации, поскольку возможно даже бесконечное множество всех свойств и именно определение непременно их всех невозможно и тем более не требуется, на произвольные предметы.

Определение. Предмет называется неизвестным (неопределённым), если он непосредственно не может быть именно однозначно идентифицирован.

Определение. Часть называется неизвестной (неопределённой), если она непосредственно не может быть именно однозначно идентифицирована.

Определение. Предмет называется искомым, если он подлежит поиску и именно однозначной идентификации как непременному итогу поиска.

Определение. Часть называется искомой, если она подлежит поиску и именно однозначной идентификации как непременному итогу поиска.

Объединённое всеобщее определение. Целочастично (или целиком, или частично, в том числе или вообще, или только в данном случае) невозможным, отсутствующим, возможным, присутствующим, необходимым, влияющим, достаточным, преобразующим (или известным (определённым), или неизвестным (неопределённым)) предметом называется предмет, который целиком или некоторые части которого соответственно могут быть невозможными, отсутствующими, возможными, присутствующими, необходимыми, влияющими, достаточными, преобразующими и/или неизвестными (неопределёнными).

Замечание. Из этого объединённого всеобщего определения целочастично (или целиком, или частично, в том числе или вообще, или только в данном случае) невозможного, отсутствующего, возможного, присутствующего, необходимого, влияющего, достаточного, преобразующего (или известного (определённого), или неизвестного (неопределённого)) предмета естественно следуют вполне очевидные единичные и сочетательные всеобщие определения по целости и/или частичности, по сопровождаемым кванторами модальностей единичным признакам невозможности 0§, отсутствия 0, возможности ?, присутствия 1, необходимости 1§, влиятельности &, достаточности !, преобразования !! и по их всевозможным сочетаниям также с неизвестностью (неопределённостью) с квантором модальности ?§.

Замечание. Невозможные, отсутствующие, возможные, присутствующие, необходимые, влияющие, достаточные, преобразующие (или известные (определённые), или неизвестные (неопределённые)) предметы и/или их части могут быть произвольными, например вещными, полевыми, живыми, духовными, сознательными, объективными, субъективными, объектными, модельными, существующими во Вселенной, воображаемыми, реальными, формальными, простыми, сложными, элементными, множественными, сборными, системными, синергичными, естественными, искусственными, пространственными, однородными, разнородными, сосредоточенными, распределёнными, непрерывными, дискретными, временными, бывшими (прошлыми),

настоящими (текущими), будущими (грядущими), постоянными, переменными (в том числе в пространстве и/или времени по составу и строению), покоящимися, движущимися, зарождающимися, рождающимися, развивающимися, вырождающимися, возрождающимися, относительными (применительно к отношениям), верными, неверными, проблематичными, правильными (упорядоченными), неправильными (беспорядочными), свойственными (в том числе атрибутивными), деятельными, деятельностными, действенными, двигательными, инерционными, активными, пассивными, функциональными, состоятельными (применительно к состояниям), процессуальными (применительно к процессам), существенными, несущественными, полезными, вредными, в том числе сочетанными (групповыми, комбинированными).

Обозначение. Выражения невозможных предметов и/или их частей могут быть дополнительно выделены возможными левыми нижними указателями (индексами) как кванторами модальности невозможности, а именно парами 0§ из нуля как нулевого количества предмета или части и из последующего знака параграфа §, например юридического с субъективной общественной необходимостью.

Обозначение. Выражения отсутствующих предметов и/или их частей могут быть дополнительно выделены возможными левыми нижними указателями (индексами) как кванторами модальности отсутствия 0 из нуля как нулевого количества предмета или части или опускаться.

Замечание. Явное указание отсутствующих искомых неизвестных (неопределённых) предметов и/или их частей может быть необходимым и чрезвычайно полезным для указания на то, что уравнения остаются уравнениями и по-прежнему подлежат именно решению даже в том случае, когда в итоге равносильных (эквивалентных) преобразований искомые неизвестные исчезают и эти уравнения становятся равносильными (эквивалентными) равенствам без неизвестных.

Замечание. Явное указание отсутствующих предметов и/или их частей может быть существенным для привлечения внимания и/или для развеивания сомнений (в том, рассматривалось ли это вообще), неясностей и/или заблуждений.

Обозначение. Выражения возможных предметов и/или их частей могут быть дополнительно выделены возможными левыми нижними указателями (индексами) как кванторами модальности возможности, а именно вопросительными знаками ?, выражающими неясность (неизвестность, неопределённость) либо количества предмета или части, равного нулю при их отсутствии и единице (или любому другому положительному количеству) при их наличии, либо действенности основных обозначений при их полезной и/или целесообразной определённости, например в случаях формальных (верных или неверных) отношений.

Обозначение. Выражения присутствующих предметов и/или их частей могут быть дополнительно выделены возможными левыми нижними указателями (индексами) как кванторами модальности присутствия 1 из единицы как единичного количества предмета или части.

Замечание. В классической математике известны и чрезвычайно широко применяются квантор существования ∃ (перевёрнутая первая буква английского слова “Exists”, означающего «существует», ввёл Чарльз Пирс в 1885 году) и квантор всеобщности ∀ (перевёрнутая первая буква немецкого слова „Alle“, означающего «все», «всякий», ввёл Герхард Генцен в 1935 году). Эти кванторы присоединяются к предикатам, например свойствам, признакам, условиям, и делают предикаты

высказываниями. Квантор существования $\exists$ выражает существование хотя бы некоторых каких-нибудь предметов (существует хотя бы один какой-нибудь предмет, обладающий указанным свойством, признаком, удовлетворяющий указанному условию, то есть множество таких предметов не является пустым множеством). Квантор общности $\forall$ относится непременно ко всем предметам (все предметы обладают указанным свойством, признаком, удовлетворяют указанному условию). Разумеется, эти высказывания могут быть верными или неверными. Таким образом, общеизвестный квантор существования $\exists$ утверждает существование хотя бы одного какого-нибудь предмета и далее прилагается к предикату. А вводимый квантор модальности присутствия прилагается

только к самому предмету без всякого предиката и утверждает присутствие, наличие именно самого этого однозначно идентифицированного предмета безотносительно каких бы то ни было предикатов. Поэтому вводимый квантор модальности присутствия принципиально отличается от общеизвестного квантора существования ∃.

Обозначение. Выражения необходимых предметов и/или их частей могут быть дополнительно выделены возможными левыми нижними указателями (индексами) как кванторами модальности необходимости, а именно парами 1§ из единицы как единичного количества предмета или части и из последующего знака параграфа §, например юридического с субъективной общественной необходимостью, или, равносильно (эквивалентно), одиночными знаками параграфа §.

Обозначение. Выражения влияющих предметов и/или их частей могут быть дополнительно выделены возможными левыми нижними указателями (индексами) как кванторами модальности влиятельности из знака присоединения & в смысле присоединения к подлинно влияющим и оказывающим хотя бы некоторое непременное влияние предметам и/или их частям на надпредметы и/или предметы соответственно в смысле непременного хотя бы какого-нибудь изменения надпредметов и/или предметов соответственно.

Обозначение. Выражения достаточных предметов и/или их частей могут быть дополнительно выделены возможными левыми нижними указателями (индексами) как кванторами модальности достаточности из восклицательного знака !, выражающего достаточно большое влияние предметов и/или их частей на надпредметы и/или предметы соответственно, обеспечивающее существование надпредметов и/или предметов соответственно.

Обозначение. Выражения преобразующих предметов и/или их частей могут быть дополнительно выделены возможными левыми нижними указателями (индексами) как кванторами модальности преобразования из пары восклицательных знаков !!, выражающей настолько большое и сильное влияние предметов и/или их частей на надпредметы и/или предметы соответственно, что это влияние именно преобразует надпредметы и/или предметы соответственно, то есть изменяет надпредметы и/или предметы соответственно непременно сущностно и/или качественно.

Обозначение. Выражения искомых неизвестных (неопределённых) предметов и/или их частей могут быть дополнительно выделены возможными левыми нижними указателями (индексами) как кванторами модальности неизвестности (неопределённости), а именно парами ?§ из вопросительного знака ?, выражающего неясность (неизвестность, неопределённость), и последующего знака параграфа §, например юридического с субъективной общественной необходимостью, в данном случае необходимостью поиска неизвестного (неопределённого).

Замечание. Количество дополнительных знаков выделения как кванторов модальностей берётся наименьшим целесообразным, обычно единичным, достаточным для обращения внимания и исключающим введение в заблуждение. Размещение дополнительных знаков выделения как кванторов модальностей принимается наиболее целесообразным и наиболее удобным, достаточным для обращения внимания и исключающим введение в заблуждение.

Замечание. Знаки параграфа §, восклицательные и вопросительные знаки как кванторы модальностей (дополнительные знаки выделения) при линейной записи могут ставиться не только в левые нижние указатели (индексы), но и после обозначения предмета или части предмета по примеру вопросительного или восклицательного предложения при письменной речи на многих языках и/или перед обозначением предмета или части предмета по примеру дополнительного перевёрнутого вопросительного знака перед вопросительным предложением при письменной речи на испанском языке, по примеру кавычек для выделения прямой речи, цитат, названий, и слов в необычных значениях и по примеру скобок, пара которых в принципе может быть замещена

парой дополнительных знаков выделения как квантором модальностей перед линейной записью предмета или части предмета и после этой записи. Необходимо избегать путаницы с обозначением факториалов восклицательными знаками и с обозначением двойных факториалов парами восклицательных знаков. Кроме того, линейная запись предмета может быть взята в скобки, делающие достаточным размещение кванторов модальностей (дополнительных знаков выделения) лишь однажды любым из трёх указанных способов.

Определение. Соединением частей в целое называются и процесс соединения разрозненных частей в единое целое, и итог этого процесса.

Обозначение. Действие соединения частей в целое обозначается взятыми в кавычки знаками плюс "+".

Обозначение. Линейная запись процесса и итога соединения частей в целое делается взятыми в кавычки знаками плюс "+", знаком равенства и условным перечислением (с непременным сохранением порядка, поскольку переместительный, или перестановочный, или коммутативный, и сочетательный, или ассоциативный, законы не обязаны действовать) разделённых запятыми обозначений соединённых частей, заключённым в круглые скобки.

Пример.

b "+" a "+" d "+" c = (b, a, d, c) =? a "+" b "+" c "+" d = (a, b, c, d) =? (b, a, d, c).

Замечание. Частными (но с непременной действенностью переместительного, или перестановочного, или коммутативного, и сочетательного, или ассоциативного, законов) случаями соединения частей в целое являются, например, объединение слагаемых в сумму, теоретико-множественное объединение и дизъюнкция.

Определение. Если взятое в круглые скобки соединение частей целого имеет вне этих скобок свой более сильный квантор модальности, чем кванторы модальности всех соединяемых частей внутри этих скобок, то по меньшей мере одна из всех соединяемых частей целого внутри этих скобок непременно должна после раскрытия этих скобок приобрести этот более сильный внешний фактор модальности взятого в круглые скобки соединения частей целого.

Пример. Если взятое в круглые скобки соединение

$$_1({}_{0\S}a,\ {}_0b,\ {}_?c)$$

частей целого имеет вне этих скобок свой более сильный квантор модальности 1, чем кванторы модальности

$$0\S,\ 0,\ ?$$

всех соединяемых частей

$$a,\ b,\ c$$

внутри этих скобок, то по меньшей мере одна из из всех соединяемых частей внутри этих скобок непременно должна после раскрытия этих скобок приобрести этот более сильный внешний фактор модальности 1 взятого в круглые скобки соединения частей целого. Рассмотрим это подробнее. Часть a является невозможной. Часть b отсутствует. Часть c возможна, то есть может

присутствовать, а может и отсутствовать. Если бы не было внешнего квантора модальности 1, обозначающего наличие взятого в круглые скобки соединения частей целого, то это соединение частей целого могло бы полностью отсутствовать и случай такого отсутствия подлежал бы рассмотрению. Однако наличествует внешний квантор модальности 1, который означает именно наличие соединения частей в целое в круглых скобках. Следовательно, полное отсутствие соединения частей в целое в круглых скобках исключено и не подлежит рассмотрению. По меньшей мере одна из трёх частей целого

a, b, c

в круглых скобках непременно приобретает этот внешний квантор модальности 1 и становится наличной.

Замечание. Неопределённые отношения, в частности отношения равенства и неравенства, в том числе могущие быть верными или неверными формальные отношения, в частности равенства и неравенства, как соединения предметов знаками возможных отношений, в частности отношения равенства или неравенства, могут дополнительно выделяться одиночными вопросительными знаками как кванторами модальности возможности после знаков отношений, в частности равенства или неравенства.

Пример. $a \leq? x \approx? y \equiv? b \neq? c =? d$.

Замечание. Необходимые отношения, в частности равенства и неравенства, как соединения предметов знаками необходимых отношений, в частности равенства или неравенства, могут дополнительно выделяться одиночными знаками параграфа § как кванторами модальности необходимости после знаков отношений, в частности равенства или неравенства.

Примеры.

Для комплексных чисел a, b, c имеют место переместительный, или перестановочный, или коммутативный, закон сложения

$$a + b =\S\ b + a;$$

сочетательный, или ассоциативный, закон сложения

$$(a + b) + c =\S\ a + (b + c);$$

переместительный, или перестановочный, или коммутативный, закон умножения

$$ab =\S\ ba;$$

сочетательный, или ассоциативный, закон умножения

$$(ab)c =\S\ a(bc);$$

распределительный, или дистрибутивный, закон умножения относительно сложения

$$(a + b)c =\S\ ac + bc.$$

Для множеств A, B, C имеют место

переместительный, или перестановочный, или коммутативный, закон теоретико-множественного объединения

$$A \cup B =\S\ B \cup A;$$

сочетательный, или ассоциативный, закон теоретико-множественного объединения

$$(A \cup B) \cup C =\S\ A \cup (B \cup C);$$

переместительный, или перестановочный, или коммутативный, закон теоретико-множественного пересечения

$$A \cap B =§ B \cap A;$$

сочетательный, или ассоциативный, закон теоретико-множественного пересечения

$$(A \cap B) \cap C =§ A \cap (B \cap C);$$

распределительный, или дистрибутивный, закон теоретико-множественного пересечения относительно теоретико-множественного объединения

$$(A \cup B) \cap C =§ A \cap C \cup B \cap C;$$

распределительный, или дистрибутивный, закон теоретико-множественного объединения относительно теоретико-множественного пересечения

$$A \cap B \cup C =§ (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

17. ВСЕОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЕРАРХИЙ ПЕРЕМЕННЫХ СИСТЕМНЫХ ЗАДАЧ. СИНЕРГИЧНАЯ СИСТЕМА ВВОДИМЫХ ВСЕОБЩИХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

В настоящей научной монографии объединённое всеобщее определение целочастично (или целиком, или частично, в том числе или вообще, или только в данном случае) невозможного, отсутствующего, возможного, присутствующего, необходимого, влияющего, достаточного, преобразующего (или известного (определённого), или неизвестного (неопределённого)) предмета используется применительно к задачам, в частности подлежащим решению системам отношений, в том числе неравенств и равенств, включая уравнения, в особенности к

каноническим единометрическим производным множественным уравнениям с одним неизвестным.

Замечание. При этом представляется целесообразным сформулировать именно в этой терминологии иерархию обобщений соответствующих определений и их следствий.

Всеобщее определение. Задачей называется заданный целочастично (целиком или частично) неизвестный (неопределённый) предмет, подлежащий равносильному (эквивалентному) приведению заменой системы непременно всех неизвестных (неопределённых) частей этой задачи соответствующей системой искомых полностью определённых предметов к полностью определённому предмету, удовлетворяющему заданной системе необходимых и в совокупности достаточных условий.

Всеобщее определение. Искомым неизвестным задачи называется любая из неизвестных (неопределённых) частей этой задачи как целочастично (целиком или частично) неизвестного (неопределённого) предмета.

Всеобщее определение. Возможным значением любого искомого неизвестного задачи называется любой полностью определённый предмет, могущий быть подставленным в эту задачу вместо этого искомого неизвестного.

Всеобщее определение. Возможной системой значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых искомых неизвестных задачи называется любая система полностью определённых предметов, могущих быть подставленными в эту задачу вместо этой полной системы

всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этой задачи.

Всеобщее определение. Допустимым значением любого искомого неизвестного задачи называется любой полностью определённый предмет, который, будучи подставленным в эту задачу вместо этого искомого неизвестного, не ведёт к обессмысливанию этой задачи.

Всеобщее определение. Допустимой системой значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых искомых неизвестных задачи называется любая такая система возможных значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этой задачи, которая, будучи подставленной в эту задачу вместо этой полной системы всех или частичной

подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этой задачи, не ведёт к обессмысливанию этой задачи.

Всеобщее определение. Частным решением задачи называется любая такая система возможных значений именно полной системы непременно всех искомых неизвестных этой задачи, которая, будучи подставленной в эту задачу вместо этой именно полной системы непременно всех искомых неизвестных, превращает эту задачу в полностью определённый предмет, удовлетворяющий заданной системе необходимых и в совокупности достаточных условий.

Всеобщее определение. Совокупным решением задачи называется совокупность непременно всех и только всех частных решений этой задачи.

Следствие. Если задача равносильна (эквивалентна) полностью определённому предмету без неизвестных, то совокупным решением как множеством всевозможных частных решений этой задачи в случае удовлетворения этого полностью определённого предмета заданной системе необходимых и в совокупности достаточных условий является множество всевозможных сочетаний произвольных допустимых значений всех неизвестных этой задачи в её именно изначально заданном виде, а в случае неудовлетворения этого полностью определённого предмета заданной системе необходимых и в совокупности

достаточных условий является именно пустое множество, то есть эта задача вовсе не имеет решений.

Всеобщее определение. Общим решением задачи называется общий вид (общее выражение, общая форма) непременно всех и только всех частных решений этой задачи.

Пример. Произвольным частным решением задачи неопределённого интегрирования независимой переменной x является x^2 + C, где C – произвольное одно и только одно полностью определённое конкретное число, в частности принадлежащее множеству R всех действительных чисел и равное, например, 0, -1, 1/2, -π. Общим решением задачи неопределённого интегрирования независимой переменной x является x^2 + C как общий вид (общее выражение, общая

форма) непременно всех и только всех частных решений этой задачи, где C – произвольная постоянная как общий вид (общее выражение, общая форма) непременно всех и только всех произвольных полностью определённых конкретных чисел, например 0, -1, 1/2, -π. Совокупным решением задачи неопределённого интегрирования независимой переменной x является множество

$$\{_{C\in G}\ x^2 + C\}$$

непременно всех и только всех x^2 + C, где C – произвольная постоянная, полностью пробегающая всё множество G её допустимых значений, в частности множество R всех действительных чисел.

Общее определение. Системной задачей называется заданная целочастично (целиком или частично)

неизвестная (неопределённая) система, подлежащая приведению заменой системы непременно всех неизвестных (неопределённых) частей этой задачи и непременно всех неизвестных (неопределённых) отношений этой задачи соответствующей системой искомых полностью определённых предметов и соответствующей системой искомых полностью определённых отношений к полностью определённой системе, удовлетворяющей заданной системе необходимых и в совокупности достаточных условий.

Общее определение. Искомым частным неизвестным системной задачи называется любая из неизвестных, или неопределённых, частей этой системной задачи как целочастично (целиком или частично) неизвестной (неопределённой) системы.

Общее определение. Искомым относительным неизвестным системной задачи называется любое из неизвестных, или неопределённых, отношений этой системной задачи как частично неизвестной, или частично неопределённой, системы.

Общее определение. Возможным значением любого искомого частного неизвестного системной задачи называется любой полностью определённый предмет, могущий быть подставленным в эту системную задачу вместо этого искомого частного неизвестного.

Общее определение. Возможным значением любого искомого относительного неизвестного системной задачи называется любое полностью определённое отношение,

могущее быть подставленным в эту системную задачу вместо этого искомого относительного неизвестного.

Общее определение. Возможной системой значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых искомых частных и/или относительных неизвестных системной задачи называется любая система полностью определённых предметов, могущая быть подставленной в эту системную задачу вместо этой полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых частных и/или относительных неизвестных этой системной задачи.

Общее определение. Допустимым значением любого искомого частного неизвестного системной задачи называется любой полностью определённый предмет,

который, будучи подставленным в эту системную задачу вместо этого искомого частного неизвестного, не ведёт к обессмысливанию этой системной задачи.

Общее определение. Допустимым значением любого искомого относительного неизвестного системной задачи называется любое полностью определённое отношение, которое, будучи подставленным в эту системную задачу вместо этого искомого относительного неизвестного, не ведёт к обессмысливанию этой системной задачи.

Общее определение. Допустимой системой значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых искомых частных и/или относительных неизвестных системной задачи называется любая такая система возможных значений полной системы всех или частичной

подсистемы некоторых соответственно искомых частных и/или относительных неизвестных этой задачи, которая, будучи подставленной в эту системную задачу вместо этой полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых частных и/или относительных неизвестных этой системной задачи, не ведёт к обессмысливанию этой системной задачи.

Общее определение. Частным решением системной задачи называется любая такая система возможных значений именно полной системы непременно всех искомых частных и относительных неизвестных этой системной задачи, которая, будучи подставленной в эту системную задачу вместо этой именно полной системы непременно всех искомых частных и относительных неизвестных,

превращает эту системную задачу в полностью определённую систему, удовлетворяющую заданной системе необходимых и в совокупности достаточных условий.

Всеобщее определение. Совокупным решением системной задачи называется совокупность непременно всех и только всех частных решений этой системной задачи.

Следствие. Если системная задача равносильна (эквивалентна) полностью определённой системе без неизвестных, то совокупным решением как множеством всевозможных частных решений этой системной задачи в случае удовлетворения этой полностью определённой системы заданной системе необходимых и в совокупности достаточных условий является множество всевозможных сочетаний произвольных допустимых значений всех

неизвестных этой системной задачи в её именно изначально заданном виде, а в случае неудовлетворения этого полностью определённого предмета заданной системе необходимых и в совокупности достаточных условий является именно пустое множество, то есть эта системная задача вовсе не имеет решений.

Всеобщее определение. Общим решением системной задачи называется общий вид (общее выражение, общая форма) непременно всех и только всех частных решений этой системной задачи.

Общее определение. Подлежащей решению системой отношений называется системная задача о нахождении непременно всех подсистем таких полностью определённых предметов как значений подсистемы непременно всех хотя

бы частично неизвестных предметов в целой, или полной, системе предметов этой системной задачи, соединённых формальными, то есть условно независимыми от их действенности, или выполненности, или верности, отношениями, что после подстановки каждой такой подсистемы таких значений взамен подсистемы непременно всех хотя бы частично неизвестных предметов в целой, или полной, системе предметов подлежащей решению системы отношений непременно все её формальные отношения становятся именно действенными, или выполненными, или верными.

Общее определение. Искомым неизвестным подлежащей решению системы отношений называется любой из хотя бы частично неизвестных предметов в целой, или полной,

системе предметов, соединённых формальными, то есть условно независимыми от их действенности, или выполненности, или верности, отношениями этой подлежащей решению системы отношений.

Общее определение. Возможным значением любого искомого неизвестного подлежащей решению системы отношений называется любой полностью определённый предмет, могущий быть подставленным в эту подлежащую решению систему отношений вместо этого искомого неизвестного.

Общее определение. Возможной системой значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых искомых неизвестных подлежащей решению системы отношений называется любая система полностью

определённых предметов, могущая быть подставленной в эту подлежащую решению систему отношений вместо этой полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этой подлежащей решению системы отношений.

Общее определение. Допустимым значением любого искомого неизвестного подлежащей решению системы отношений называется любой полностью определённый предмет, который, будучи подставленным в эту подлежащую решению систему отношений вместо этого искомого неизвестного, не ведёт к обессмысливанию этой подлежащей решению системы отношений.

Общее определение. Допустимой системой значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых

искомых неизвестных подлежащей решению системы отношений называется любая такая система возможных значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этой подлежащей решению системы отношений, которая, будучи подставленной в эту подлежащую решению систему отношений вместо этой полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этой подлежащей решению системы отношений, не ведёт к обессмысливанию этой подлежащей решению системы отношений.

Общее определение. Частным решением подлежащей решению системы отношений называется любая такая система возможных значений именно полной системы

непременно всех искомых неизвестных этой подлежащей решению системы отношений, которая, будучи подставленной в эту подлежащую решению систему отношений вместо этой именно полной системы непременно всех искомых неизвестных, превращает эту подлежащую решению систему отношений в такую полностью определённую систему отношений, что непременно все её формальные отношения становятся именно действенными, или выполненными, или верными.

Общее определение. Совокупным решением подлежащей решению системы отношений называется совокупность непременно всех и только всех частных решений этой подлежащей решению системы отношений.

Следствие. Если подлежащая решению система отношений равносильна (эквивалентна) полностью определённой системе отношений без неизвестных, то совокупным решением как множеством всевозможных частных решений этой подлежащей решению системы отношений в случае действенности, или выполненности, или верности, непременно всех формальных отношений этой полностью определённой системы отношений является множество всевозможных сочетаний произвольных допустимых значений всех неизвестных этой подлежащей решению системы отношений в её именно изначально заданном виде, а в случае недейственности, или невыполненности, или неверности, хотя бы одного из формальных отношений этой полностью определённой системы отношений является

именно пустое множество, то есть эта подлежащая решению система отношений вовсе не имеет решений.

Общее определение. Общим решением подлежащей решению системы отношений называется общий вид (общее выражение, общая форма) непременно всех и только всех частных решений этой подлежащей решению системы отношений.

Частное определение. Подлежащей решению системой неравенств называется системная задача о нахождении непременно всех подсистем таких полностью определённых предметов как значений подсистемы непременно всех хотя бы частично неизвестных предметов в целой, или полной, системе предметов, соединённых формальными, то есть условно независимыми от их действенности, или

выполненности, или верности, отношениями неравенств, в этой подлежащей решению системе неравенств, что после подстановки каждой такой подсистемы таких значений взамен подсистемы непременно всех хотя бы частично неизвестных предметов в целой, или полной, системе предметов подлежащей решению системы неравенств непременно все её формальные отношения неравенств становятся именно действенными, или выполненными, или верными.

Частное определение. Искомым неизвестным подлежащей решению системы неравенств называется любой из хотя бы частично неизвестных предметов в целой, или полной, системе предметов, соединённых формальными, то есть условно независимыми от их действенности, или

выполненности, или верности, отношениями неравенств этой подлежащей решению системы неравенств.

Частное определение. Возможным значением любого искомого неизвестного подлежащей решению системы неравенств называется любой полностью определённый предмет, могущий быть подставленным в эту подлежащую решению систему неравенств вместо этого искомого неизвестного.

Частное определение. Возможной системой значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых искомых неизвестных подлежащей решению системы неравенств называется любая система полностью определённых предметов, могущая быть подставленной в эту подлежащую решению систему неравенств вместо этой

полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этой подлежащей решению системы неравенств.

Частное определение. Допустимым значением любого искомого неизвестного подлежащей решению системы неравенств называется любой полностью определённый предмет, который, будучи подставленным в эту подлежащую решению систему неравенств вместо этого искомого неизвестного, не ведёт к обессмысливанию этой подлежащей решению системы неравенств.

Частное определение. Допустимой системой значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых искомых неизвестных подлежащей решению системы неравенств называется любая такая система возможных

значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этой подлежащей решению системы неравенств, которая, будучи подставленной в эту подлежащую решению систему неравенств вместо этой полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этой подлежащей решению системы неравенств, не ведёт к обессмысливанию этой подлежащей решению системы неравенств.

Частное определение. Частным решением подлежащей решению системы неравенств называется любая такая система возможных значений именно полной системы непременно всех искомых неизвестных этой подлежащей решению системы неравенств, которая, будучи

подставленной в эту подлежащую решению систему неравенств вместо этой именно полной системы непременно всех искомых неизвестных, превращает эту подлежащую решению систему неравенств в такую полностью определённую систему неравенств, что непременно все её формальные отношения неравенств становятся именно действенными, или выполненными, или верными.

Частное определение. Совокупным решением подлежащей решению системы неравенств называется совокупность непременно всех и только всех частных решений этой подлежащей решению системы неравенств.

Следствие. Если подлежащая решению система неравенств равносильна (эквивалентна) полностью определённой

системе неравенств без неизвестных, то совокупным решением как множеством всевозможных частных решений этой подлежащей решению системы неравенств в случае действенности, или выполненности, или верности, непременно всех формальных неравенств этой полностью определённой системы неравенств является множество всевозможных сочетаний произвольных допустимых значений всех неизвестных этой подлежащей решению системы неравенств в её именно изначально заданном виде, а в случае недейственности, или невыполненности, или неверности, хотя бы одного из формальных неравенств этой полностью определённой системы неравенств является именно пустое множество, то есть эта подлежащая решению система неравенств вовсе не имеет решений.

Замечание. Последнее следствие допускает очевидное обобщение. Действительно, равносильные (эквивалентные) преобразования системы неравенств могут приводить и к появлению других отношений, в частности отношения равенства. Достаточен пример совокупности двух неравенств

$$x \geq a;$$
$$x \leq a,$$

равносильной (эквивалентной) одному равенству

$$x = a.$$

А неравенство

$$\sin(x) \geq 1$$

равносильно (эквивалентно) отношению принадлежности элемента множеству

$$x \in \{\pi/2 + 2\pi z \mid z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}.$$

Поэтому может только сужать ограничение равносильной (эквивалентной) полностью определённой системы отношений лишь отношениями неравенства. Желаемое обобщение предыдущего следствия достигается непосредственно предстоящим следствием, допускающим именно произвольные отношения полностью определённой системы отношений.

Следствие. Если подлежащая решению система неравенств равносильна (эквивалентна) полностью определённой системе отношений без неизвестных, то совокупным решением как множеством всевозможных частных решений этой подлежащей решению системы неравенств в случае действенности, или выполненности, или верности,

непременно всех формальных отношений этой полностью определённой системы отношений является множество всевозможных сочетаний произвольных допустимых значений всех неизвестных этой подлежащей решению системы неравенств в её именно изначально заданном виде, а в случае недейственности, или невыполненности, или неверности, хотя бы одного из формальных отношений этой полностью определённой системы отношений является именно пустое множество, то есть эта подлежащая решению система неравенств вовсе не имеет решений.

Частное определение. Общим решением подлежащей решению системы неравенств называется общий вид (общее выражение, общая форма) непременно всех и только всех частных решений этой подлежащей решению системы неравенств.

Частное определение. Подлежащей решению системой уравнений называется системная задача о нахождении непременно всех подсистем таких полностью определённых предметов как значений подсистемы непременно всех хотя бы частично неизвестных предметов в целой, или полной, системе предметов, соединённых формальными, то есть условно независимыми от их действенности, или выполненности, или верности, отношениями равенств, в этой подлежащей решению системе уравнений, что после подстановки каждой такой подсистемы таких значений взамен подсистемы непременно всех хотя бы частично неизвестных предметов в целой, или полной, системе предметов подлежащей решению системы уравнений непременно все её формальные отношения равенства становятся именно действенными, или выполненными, или верными.

Частное определение. Искомым неизвестным подлежащей решению системы уравнений называется любой из хотя бы частично неизвестных предметов в целой, или полной, системе предметов, соединённых формальными, то есть условно независимыми от их действенности, или выполненности, или верности, отношениями равенства этой подлежащей решению системы уравнений.

Частное определение. Возможным значением любого искомого неизвестного подлежащей решению системы уравнений называется любой полностью определённый предмет, могущий быть подставленным в эту подлежащую решению систему уравнений вместо этого искомого неизвестного.

Частное определение. Возможной системой значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых искомых неизвестных подлежащей решению системы уравнений называется любая система полностью определённых предметов, могущая быть подставленной в эту подлежащую решению систему уравнений вместо этой полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этой подлежащей решению системы уравнений.

Частное определение. Допустимым значением любого искомого неизвестного подлежащей решению системы уравнений называется любой полностью определённый предмет, который, будучи подставленным в эту подлежащую решению систему уравнений вместо этого искомого неизвестного, не ведёт к обессмысливанию этой подлежащей решению системы уравнений.

Частное определение. Допустимой системой значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых искомых неизвестных подлежащей решению системы уравнений называется любая такая система возможных значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этой подлежащей решению системы уравнений, которая, будучи подставленной в эту подлежащую решению систему уравнений вместо этой полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этой подлежащей решению системы уравнений, не ведёт к обессмысливанию этой подлежащей решению системы уравнений.

Частное определение. Частным решением подлежащей решению системы уравнений называется любая такая система возможных значений именно полной системы непременно всех искомых неизвестных этой подлежащей решению системы уравнений, которая, будучи подставленной в эту подлежащую решению систему уравнений вместо этой именно полной системы непременно всех искомых неизвестных, превращает эту подлежащую решению систему уравнений в такую полностью определённую систему равенств, что непременно все её формальные отношения равенства становятся именно действенными, или выполненными, или верными.

Частное определение. Совокупным решением подлежащей решению системы уравнений называется совокупность

непременно всех и только всех частных решений этой подлежащей решению системы уравнений.

Следствие. Если подлежащая решению система уравнений равносильна (эквивалентна) полностью определённой системе равенств без неизвестных, то совокупным решением как множеством всевозможных частных решений этой подлежащей решению системы уравнений в случае действенности, или выполненности, или верности, непременно всех формальных равенств этой полностью определённой системы равенств является множество всевозможных сочетаний произвольных допустимых значений всех неизвестных этой подлежащей решению системы уравнений в её именно изначально заданном виде, а в случае недейственности, или невыполненности, или

неверности, хотя бы одного из формальных равенств этой полностью определённой системы равенств является именно пустое множество, то есть эта подлежащая решению система уравнений вовсе не имеет решений.

Замечание. Последнее следствие допускает очевидное обобщение. Действительно, равносильные (эквивалентные) преобразования системы уравнений могут не только ограничиваться отношениями равенства, но и приводить и к появлению других отношений, в частности отношений неравенства и/или отношения принадлежности элемента множеству. Достаточен пример уравнения

$$|x| + |1 - x| = 1,$$

равносильного (эквивалентного) и отношению принадлежности элемента множеству, а именно отрезку от нуля до единицы в обоих случаях включительно,

$$x \in [0, 1],$$

и двойному неравенству

$$0 \leq x \leq 1,$$

равносильному (эквивалентному) совокупности двух неравенств

$$x \geq 0;$$
$$x \leq 1.$$

Поэтому может только сужать ограничение равносильной (эквивалентной) полностью определённой системы отношений лишь отношениями равенства. Желаемое обобщение предыдущего следствия достигается

непосредственно предстоящим следствием, допускающим именно произвольные отношения равносильной (эквивалентной) полностью определённой системы отношений.

Следствие. Если подлежащая решению система уравнений равносильна (эквивалентна) полностью определённой системе отношений без неизвестных, то совокупным решением как множеством всевозможных частных решений этой подлежащей решению системы уравнений в случае действенности, или выполненности, или верности, непременно всех формальных отношений этой полностью определённой системы отношений является множество всевозможных сочетаний произвольных допустимых значений всех неизвестных этой подлежащей решению

системы уравнений в её именно изначально заданном виде, а в случае недейственности, или невыполненности, или неверности, хотя бы одного из формальных отношений этой полностью определённой системы отношений является именно пустое множество, то есть эта подлежащая решению система уравнений вовсе не имеет решений.

Частное определение. Общим решением подлежащей решению системы уравнений называется общий вид (общее выражение, общая форма) непременно всех и только всех частных решений этой подлежащей решению системы уравнений.

Замечание. В классической математике бесструктурные совокупности, то есть множества, именно совместных уравнений и/или неравенств обычно называются

системами уравнений и/или неравенств (systems of equations, systems of inequalities). Это не является ошибочным, поскольку бесструктурные совокупности, то есть множества, являются бесструктурными системами, однако нецелесообразно, поскольку препятствует выделению и рассмотрению именно структурированных систем уравнений и/или неравенств. Кроме того, чрезвычайно важно, целесообразно и полезно называть всё именно своими именами.

Определение. Сочетанием, или совмещением, или конъюнкцией, или пересечением, предметов называется именно совместное осуществление непременно всех этих предметов.

Определение. Объединением, или дизъюнкцией, предметов называется осуществление хотя бы одного из всех этих предметов.

Определение. Сочетанием, или совмещением, или конъюнкцией, или пересечением, отношений называется именно совместное выполнение непременно всех этих отношений.

Определение. Объединением, или дизъюнкцией, отношений называется выполнение хотя бы одного из всех этих отношений.

Определение. Сочетанием, или совмещением, или конъюнкцией, или пересечением, неравенств называется именно совместное выполнение непременно всех этих неравенств.

Определение. Объединением, или дизъюнкцией, неравенств называется выполнение хотя бы одного из всех этих неравенств.

Определение. Сочетанием, или совмещением, или конъюнкцией, или пересечением, уравнений называется именно совместное выполнение непременно всех этих уравнений.

Определение. Объединением, или дизъюнкцией, уравнений называется выполнение хотя бы одного из всех этих уравнений.

Пример. Решением сочетания, или совмещения, или конъюнкции, или пересечения, неравенств

$$x \geq e,$$

$$x < \pi$$

является двойное неравенство

$$e \le x < \pi,$$

или отношение принадлежности

$$x \in [e, \pi[,$$

или полуотрезок-полуинтервал

$$[e, \pi[,$$

являющийся множеством

$$\{x \mid e \le x < \pi\}.$$

Обозначение.

$$x \ge e \wedge x < \pi \Leftrightarrow e \le x < \pi \Leftrightarrow x \in [e, \pi[\Leftrightarrow \{x \mid e \le x < \pi\}.$$

Пример. Решением квадратного неравенства

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) > 0$$

является объединение, или дизъюнкция, неравенств

$$x < 1,$$

$$x > 2.$$

Обозначение. $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x < 1 \vee x > 2.$

Пример. **Решением сочетания**, или **совмещения**, или **конъюнкции**, или **пересечения**, **уравнений**

$$2x - 3y = -1,$$

$$x + 2y = 17$$

является сочетание, или **совмещение**, или **конъюнкция**, или **пересечение**, **равенств как разрешённых уравнений**

$$x = 7,$$

$$y = 5.$$

Обозначение. $2x - 3y = -1 \wedge x + 2y = 17 \Leftrightarrow x = 7 \wedge y = 5.$

Пример. **Решением квадратного уравнения**

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) = 0$$

является объединение, или дизъюнкция, равенств как разрешённых уравнений

$$x = 1,$$
$$x = 2,$$

или отношение принадлежности

$$x \in \{1, 2\}.$$

Обозначение.

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 2 \Leftrightarrow x \in \{1, 2\}.$$

Всеобщее определение. Совокупностью, или множеством, называется неупорядоченное собрание свободно переставляемых отдельных элементов в смысле теоретико-множественного равенства всех таких перестановок между собой.

Всеобщее определение. Постоянной совокупностью, или просто совокупностью, или постоянным множеством, или просто множеством, называется совокупность, или множество, с непременной и неизменной самотождественностью на уровне элементов в смысле теоретико-множественного равенства между собой всех перестановок свободно переставляемых отдельных элементов.

Следствие. Для постоянства совокупности, или множества, необходима и достаточна неизменность набора, или состава, всех их элементов.

Всеобщее определение. Переменной совокупностью, или переменным множеством, называется совокупность, или множество, с непременными нарушениями

самотождественности на уровне элементов в смысле теоретико-множественного равенства между собой всех перестановок свободно переставляемых отдельных элементов.

Следствие. Для переменности совокупности, или множества, необходима и достаточна переменность принадлежности им хотя бы одного элемента, то есть необходимо и достаточно существование хотя бы одного элемента, который то принадлежит, то не принадлежит совокупности, или множеству.

Всеобщее определение. Условной совокупностью, или условным множеством, называется совокупность, или множество, чей набор, или состав, всех элементов зависит от условий.

Следствие. Для условности совокупности, или множества, необходима и достаточна условность принадлежности этим совокупности, или множеству, хотя бы одного элемента, то есть необходимо и достаточно существование хотя бы одного элемента и хотя бы одного условия таких, что при выполнении этого условия этот элемент принадлежит этим совокупности, или множеству, а при нарушении этого условия этот элемент не принадлежит этим совокупности, или множеству, или наоборот, при нарушении этого условия этот элемент принадлежит этим совокупности, или множеству, а при выполнении этого условия этот элемент не принадлежит этим совокупности, или множеству.

Всеобщее определение. Структурированной системой, или просто системой, называется система, обладающая

структурой (строением как единым целым именно взаимосвязующих, или взаимоотносящих, то есть обеспечивающих и выражающих взаимосвязи, или взаимоотношения, частей структуры, или строения) взаимосвязанных, или взаимоотносящихся, или взаимоотнесённых, частей состава, вместе, или совместно, образующих состав системы, то есть не сводимая к совокупности, или множеству, как неупорядоченному собранию свободно переставляемых отдельных элементов.

Всеобщее определение. Постоянной системой, или просто системой, называется система с неизменными составом и структурой (строением).

Следствие. Для постоянства системы необходима и достаточна неизменность её состава и структуры (строения) как целых со всеми их частями.

Всеобщее определение. Переменной системой называется система с переменными составом и/или структурой (строением).

Следствие. Для переменности системы необходима и достаточна переменность её состава и/или структуры (строения) как целых со всеми их частями.

Следствие. Для переменности системы необходима и достаточна переменность хотя бы одной из частей её состава и/или структуры (строения) как целых со всеми их частями.

Всеобщее определение. Условной системой называется система, состав и/или структура (строение) которой зависят от условий.

Следствие. Для условности системы необходима и достаточна условность (как зависимость от условий) её состава и/или структуры (строения) как целых со всеми их частями.

Следствие. Для условности системы необходима и достаточна условность (как зависимость от условий) хотя бы одной из частей её состава и/или структуры (строения) как целых со всеми их частями.

Общее определение. Совокупностью, или множеством, уравнений и/или неравенств называется неупорядоченное собрание свободно переставляемых отдельных уравнений и/или неравенств как элементов в смысле теоретико-множественного равенства между собой всех перестановок свободно переставляемых отдельных уравнений и/или неравенств как элементов.

Общее определение. Постоянной совокупностью, или просто совокупностью, или постоянным множеством, или просто множеством, уравнений и/или неравенств называется совокупность, или множество, уравнений и/или неравенств с непременной и неизменной самотождественностью на уровне уравнений и/или неравенств как элементов в смысле теоретико-множественного равенства между собой всех перестановок свободно переставляемых отдельных уравнений и/или неравенств как элементов, то есть совокупность, или множество, уравнений и/или неравенств, чей набор, или состав, является неизменным.

Общее определение. Переменной совокупностью, или переменным множеством, уравнений и/или неравенств

называется совокупность, или множество, уравнений и/или неравенств с непременными нарушениями самотождественности на уровне уравнений и/или неравенств как элементов в смысле теоретико-множественного равенства между собой всех перестановок свободно переставляемых отдельных уравнений и/или неравенств как элементов, то есть совокупность, или множество, уравнений и/или неравенств как элементов в смысле теоретико-множественного равенства, чей набор, или состав, является переменным.

Общее определение. Условной совокупностью, или условным множеством, уравнений и/или неравенств называется совокупность, или множество, уравнений и/или неравенств как элементов в смысле теоретико-

множественного равенства, чей набор, или состав, зависит от условий.

Общее определение. Структурированной системой, или просто системой, уравнений и/или неравенств называется система уравнений и/или неравенств, обладающая структурой (строением как единым целым именно взаимосвязующих, или взаимоотносящих, то есть обеспечивающих и выражающих взаимосвязи, или взаимоотношения, частей структуры, или строения) взаимосвязанных, или взаимоотносящихся, или взаимоотнесённых, частей состава, вместе, или совместно, образующих состав системы, то есть не сводимая к совокупности, или множеству, как неупорядоченному собранию свободно переставляемых отдельных уравнений и/или неравенств.

Общее определение. Постоянной системой, или просто системой, уравнений и/или неравенств называется система уравнений и/или неравенств с неизменными составом и структурой (строением).

Общее определение. Переменной системой уравнений и/или неравенств называется система уравнений и/или неравенств с переменными составом и/или структурой (строением).

Общее определение. Условной системой уравнений и/или неравенств называется система уравнений и/или неравенств, состав и/или структура (строение) которой зависят от условий.

Определение. Подлежащим решению неравенством называется системная задача о нахождении непременно

всех подсистем таких полностью определённых предметов как значений подсистемы непременно всех хотя бы частично неизвестных предметов в целой, или полной, системе предметов, соединённых формальным, то есть условно независимым от своей действенности, или выполненности, или верности, отношением неравенства, в этом подлежащем решению неравенстве, что после подстановки каждой такой подсистемы таких значений взамен подсистемы непременно всех хотя бы частично неизвестных предметов в целой, или полной, системе предметов подлежащего решению неравенства его формальное отношение неравенства становится именно действенным, или выполненным, или верным.

Определение. Искомым неизвестным подлежащего решению неравенства называется любой из хотя бы частично неизвестных предметов в целой, или полной, системе предметов, соединённых формальным, то есть условно независимым от своей действенности, или выполненности, или верности, отношением неравенства этого подлежащего решению неравенства.

Определение. Возможным значением любого искомого неизвестного подлежащего решению неравенства называется любой полностью определённый предмет, могущий быть подставленным в это подлежащее решению неравенство вместо этого искомого неизвестного.

Определение. Возможной системой значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых

искомых неизвестных подлежащего решению неравенства называется любая система полностью определённых предметов, могущая быть подставленной в это подлежащее решению неравенство вместо этой полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этого подлежащего решению неравенства.

Определение. Допустимым значением любого искомого неизвестного подлежащего решению неравенства называется любой полностью определённый предмет, который, будучи подставленным в это подлежащее решению неравенство вместо этого искомого неизвестного, не ведёт к обессмысливанию этого подлежащего решению неравенства.

Определение. Допустимой системой значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых искомых неизвестных подлежащего решению неравенства называется любая такая система возможных значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этого подлежащего решению неравенства, которая, будучи подставленной в это подлежащее решению неравенство вместо этой полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этого подлежащего решению неравенства, не ведёт к обессмысливанию этого подлежащего решению неравенства.

Определение. Частным решением подлежащего решению неравенства называется любая такая система возможных

значений именно полной системы непременно всех искомых неизвестных этого подлежащего решению неравенства, которая, будучи подставленной в это подлежащее решению неравенство вместо этой именно полной системы непременно всех искомых неизвестных, превращает это подлежащее решению неравенство в такое полностью определённое неравенство, что его формальное отношение неравенства становится именно действенным, или выполненным, или верным.

Определение. Совокупным решением подлежащего решению неравенства называется совокупность непременно всех и только всех частных решений этого подлежащего решению неравенства.

Следствие. Если подлежащее решению неравенство равносильно (эквивалентно) полностью определённому неравенству без неизвестных, то совокупным решением как множеством всевозможных частных решений подлежащего решению неравенства в случае действенности, или выполненности, или верности, отношения формального неравенства этого полностью определённого неравенства без неизвестных является множество всевозможных сочетаний произвольных допустимых значений всех неизвестных подлежащего решению неравенства в его именно изначально заданном виде, а в случае недейственности, или невыполненности, или неверности, отношения формального неравенства этого полностью определённого неравенства без неизвестных является

именно пустое множество, то есть подлежащее решению неравенство вовсе не имеет решений.

Замечание. Последнее следствие допускает очевидное обобщение. Действительно, равносильные (эквивалентные) преобразования неравенства могут приводить и к появлению системы отношений, могущих быть и другими, в частности отношениями равенства. Достаточен пример неравенства

$$x \geq 0,$$

равносильного (эквивалентного) уравнению с отношением равенства

$$x = |x|.$$

А неравенство

$$\sin(x) \geq 1$$

равносильно (эквивалентно) отношению принадлежности элемента множеству

$$x \in \{\pi/2 + 2\pi z \mid z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}.$$

Поэтому может только сужать ограничение равносильного (эквивалентного) полностью определённого отношения лишь отношением неравенства. Желаемое обобщение предыдущего следствия достигается непосредственно предстоящим следствием, допускающим именно систему произвольных равносильных (эквивалентных) полностью определённых формальных отношений.

Следствие. Если подлежащее решению неравенство равносильно (эквивалентно) системе полностью определённых формальных отношений без неизвестных, то совокупным решением как множеством всевозможных

частных решений подлежащего решению неравенства в случае действенности, или выполненности, или верности, этой системы полностью определённых формальных отношений без неизвестных является множество всевозможных сочетаний произвольных допустимых значений всех неизвестных подлежащего решению неравенства в его именно изначально заданном виде, а в случае недейственности, или невыполненности, или неверности, этой системы полностью определённых формальных отношений без неизвестных является именно пустое множество, то есть подлежащее решению неравенство вовсе не имеет решений.

Определение. Общим решением подлежащего решению неравенства называется общий вид (общее выражение,

общая форма) непременно всех и только всех частных решений этого подлежащего решению неравенства.

Определение. Подлежащим решению уравнением называется системная задача о нахождении непременно всех подсистем таких полностью определённых предметов как значений подсистемы непременно всех хотя бы частично неизвестных предметов в целой, или полной, системе предметов, соединённых формальным, то есть условно независимым от своей действенности, или выполненности, или верности, отношением равенства, в этом подлежащем решению уравнении, что после подстановки каждой такой подсистемы таких значений взамен подсистемы непременно всех хотя бы частично неизвестных предметов в целой, или полной, системе

предметов подлежащего решению уравнения его формальное отношение равенства становится именно действенным, или выполненным, или верным.

Определение. Искомым неизвестным подлежащего решению уравнения называется любой из хотя бы частично неизвестных предметов в целой, или полной, системе предметов, соединённых формальным, то есть условно независимым от своей действенности, или выполненности, или верности, отношением равенства этого подлежащего решению уравнения.

Определение. Возможным значением любого искомого неизвестного подлежащего решению уравнения называется любой полностью определённый предмет, могущий быть

подставленным в это подлежащее решению уравнение вместо этого искомого неизвестного.

Определение. Возможной системой значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых искомых неизвестных подлежащего решению уравнения называется любая система полностью определённых предметов, могущая быть подставленной в это подлежащее решению уравнение вместо этой полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этого подлежащего решению уравнения.

Определение. Допустимым значением любого искомого неизвестного подлежащего решению уравнения называется любой полностью определённый предмет, который, будучи подставленным в это подлежащее решению уравнение

вместо этого искомого неизвестного, не ведёт к обессмысливанию этого подлежащего решению уравнения.

Определение. Допустимой системой значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых искомых неизвестных подлежащего решению уравнения называется любая такая система возможных значений полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этого подлежащего решению уравнения, которая, будучи подставленной в это подлежащее решению уравнение вместо этой полной системы всех или частичной подсистемы некоторых соответственно искомых неизвестных этого подлежащего решению уравнения, не ведёт к обессмысливанию этого подлежащего решению уравнения.

Определение. Частным решением подлежащего решению уравнения называется любая такая система возможных значений именно полной системы непременно всех искомых неизвестных этого подлежащего решению уравнения, которая, будучи подставленной в это подлежащее решению уравнение вместо этой именно полной системы непременно всех искомых неизвестных, превращает это подлежащее решению уравнение в такое полностью определённое равенство, что его формальное отношение равенства становится именно действенным, или выполненным, или верным.

Определение. Совокупным решением подлежащего решению уравнения называется совокупность непременно

всех и только всех частных решений этого подлежащего решению уравнения.

Следствие. Если подлежащее решению уравнение равносильно (эквивалентно) полностью определённому равенству без неизвестных, то совокупным решением как множеством всевозможных частных решений подлежащего решению уравнения в случае действенности, или выполненности, или верности, отношения формального равенства этого полностью определённого равенства без неизвестных является множество всевозможных сочетаний произвольных допустимых значений всех неизвестных подлежащего решению уравнения в его именно изначально заданном виде, а в случае недейственности, или невыполненности, или неверности, отношения

формального равенства этого полностью определённого равенства без неизвестных является именно пустое множество, то есть подлежащее решению уравнение вовсе не имеет решений.

Замечание. Последнее следствие допускает очевидное обобщение. Действительно, равносильное (эквивалентное) преобразование уравнения может не только ограничиваться отношением равенства, но и приводить и к появлению других отношений, в частности отношений неравенства и/или отношения принадлежности элемента множеству. Достаточен пример уравнения

$$|x| + |1 - x| = 1,$$

равносильного (эквивалентного) и отношению принадлежности элемента множеству, а именно отрезку от нуля до единицы в обоих случаях включительно,

$$x \in [0, 1],$$

и двойному неравенству

$$0 \leq x \leq 1,$$

равносильному (эквивалентному) совокупности двух неравенств

$$x \geq 0;$$
$$x \leq 1.$$

Поэтому может только сужать ограничение равносильного (эквивалентного) полностью определённого отношения без неизвестных лишь отношением равенства. Желаемое обобщение предыдущего следствия достигается

непосредственно предстоящим следствием, допускающим именно систему произвольных равносильных (эквивалентных) полностью определённых формальных отношений.

Следствие. Если подлежащее решению уравнение равносильно (эквивалентно) системе полностью определённых формальных отношений без неизвестных, то совокупным решением как множеством всевозможных частных решений подлежащего решению уравнения в случае действенности, или выполненности, или верности, этой системы полностью определённых формальных отношений без неизвестных является множество всевозможных сочетаний произвольных допустимых значений всех неизвестных подлежащего решению

уравнения в его именно изначально заданном виде, а в случае недейственности, или невыполненности, или неверности, этой системы полностью определённых формальных отношений без неизвестных является именно пустое множество, то есть подлежащее решению уравнение вовсе не имеет решений.

Определение. Общим решением подлежащего решению уравнения называется общий вид (общее выражение, общая форма) непременно всех и только всех частных решений этого подлежащего решению уравнения.

Настоящая научная монография предлагает простые и естественные и при этом чрезвычайно существенные и полезные следующие всеобщее определение отношения между возможными и необходимыми предметами и/или

типами предметов отношения и общее определение действия над возможными и необходимыми предметами и/или типами предметов действия.

Всеобщее определение. Отношением между возможными и необходимыми предметами и/или типами предметов называется соответствующее отношение между наличными предметами и/или типами предметов отношения, причём в совокупности именно наличных предметов и/или типов предметов отношения представлены на деле, или в действительности, произвольная, от полной до пустой, подсовокупность совокупности всех возможных предметов и/или типов предметов отношения и произвольная непременно непустая подсовокупность совокупности всех необходимых предметов и/или типов предметов отношения.

При этом каждый необходимый тип предметов отношения представлен на деле, или в действительности, хотя бы одним предметом этого типа предметов отношения, а совокупности возможных, необходимых и наличных предметов и/или типов предметов отношения могут быть полностью бесструктурными, в частности неупорядоченными, множествами или хотя бы частично структурированными, в частности упорядоченными, множествами, тем самым образующими системы со структурами как строениями систем, то есть как системами отношений между элементами образуемых систем.

Общее определение. Действием над возможными и необходимыми предметами и/или типами предметов называется соответствующее действие над наличными

предметами и/или типами предметов действия, причём в совокупности именно наличных предметов и/или типов предметов действия представлены на деле, или в действительности, произвольная, от полной до пустой, подсовокупность совокупности всех возможных предметов и/или типов предметов действия и произвольная непременно непустая подсовокупность совокупности всех необходимых предметов и/или типов предметов действия. При этом каждый необходимый тип предметов действия представлен на деле, или в действительности, хотя бы одним предметом этого типа предметов действия, а совокупности возможных, необходимых и наличных предметов и/или типов предметов действия могут быть полностью бесструктурными, в частности

неупорядоченными, множествами или хотя бы частично структурированными, в частности упорядоченными, множествами, тем самым образующими системы со структурами как строениями систем, то есть как системами отношений между элементами образуемых систем.

Замечание. Последнее общее определение является частным случаем предшествующего всеобщего определения. Действительно, для доказательства этого отношения этих определений достаточно рассмотреть произвольное действие как частный случай отношения между предметами действия и итогом действия с выделением итога действия и тем самым с отделением итога действия от предметов действия. Эти выделение и отделение итога действия представляют собой частный

случай хотя бы частичного структурирования предметов отношения, поэтому образующих не бесструктурное множество, а частично структурированную систему, структуру (строение) которой и представляют собой эти выделение и отделение итога действия. Это частичное структурирование может обозначаться и выражаться не только словесно, то есть языком и речью, и не только графически, но и посредством математического синтаксиса, например линейно отделением размещённого последним итога действия точкой с запятой от предшествующего списка разделённых между собой запятыми предметов действия.

18. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВЕННЫХ ДЕЙСТВИЙ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ И МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В настоящей научной монографии всеобщее определение отношения между возможными и необходимыми предметами и/или типами предметов отношения и общее определение действия над возможными и необходимыми предметами и/или типами предметов действия используются применительно к множествам и теоретико-множественным действиям, в частности теоретико-множественным объединениям и пересечениям множеств как предметов отношений и действий.

Настоящая научная монография вводит наиболее общее понятие теоретико-множественного проектирования.

Определение. Теоретико-множественным проектированием и проекцией одного множества на другое множество называется теоретико-множественное пересечение обоих этих множеств.

Замечание. Это определение не является всего лишь введением дополнительного названия для хорошо известного теоретико-множественного пересечения, а чрезвычайно углубляет смысл теоретико-множественного пересечения и, главное, в виде теоретико-множественного проектирования распространяет на теорию множеств известные понятия проектирования во многих разделах математики и науки вообще.

Теорема. Теоретико-множественное проектирование рефлексивно в том смысле, что теоретико-множественное

проектирование произвольного множества на себя сохраняет это произвольное множество, то есть проекция произвольного множества на это же множество равна этому множеству.

Доказательство.

Утверждение теоремы следует из того, что теоретико-множественное пересечение произвольной непустой совокупности экземпляров одного и того же произвольного множества равно самому этому произвольному множеству.

Теорема. Теоретико-множественное проектирование симметрично в том смысле, что теоретико-множественное проектирование взаимно, то есть проекция первого множества на второе множество равна проекции второго множества на первое множество.

Доказательство.

Утверждение теоремы следует из того, что переместительный (перестановочный, коммутативный) закон является действенным для теоретико-множественного пересечения.

Теорема. Теоретико-множественное проектирование распределительно (дистрибутивно) в том смысле, что распределительный (дистрибутивный) закон является действенным для теоретико-множественного проектирования применительно и к проектируемому, и к целевому множествам, то есть проекция теоретико-множественного объединения проектируемых множеств на целевое множество равна теоретико-множественному объединению проекций каждого из проектируемых

множеств на целевое множество, а проекция проектируемого множества на теоретико-множественное объединение целевых множеств равна теоретико-множественному объединению проекций проектируемого множества на каждое из целевых множеств в отдельности.

Доказательство.

Утверждение теоремы следует из того, что распределительный (дистрибутивный) закон является действенным для теоретико-множественного пересечения относительно теоретико-множественного объединения.

Теорема. Теоретико-множественная проекция теоретико-множественного объединения проектируемых множеств на одно из этих проектируемых множеств как на целевое

множество равна этому целевому проектируемому множеству.

Доказательство.

Утверждение теоремы следует из того, что это теоретико-множественное объединение проектируемых множеств включает это целевое проектируемое множество. Следовательно, теоретико-множественное пересечение этого теоретико-множественного объединения и этого целевого проектируемого множества равно этому целевому проектируемому множеству.

Обозначение. Теоретико-множественное разбиение как теоретико-множественное объединение непересекающихся множеств может обозначаться сдвоенным ∪∪ знаком ∪ теоретико-множественного объединения.

Определение. В топологическом пространстве собственной предельной точкой множества называется принадлежащая этому множеству точка этого пространства, являющаяся предельной для этого множества.

Определение. В топологическом пространстве несобственной предельной точкой для множества называется не принадлежащая этому множеству точка этого пространства, являющаяся предельной для этого множества.

Определение. В топологическом пространстве множество называется беспредельным (непредельным) при полном отсутствии предельных точек для этого множества в этом пространстве, то есть при пустоте производного множества для этого множества.

Следствие. В топологическом пространстве конечное множество беспредельно (непредельно).

Определение. В топологическом пространстве множество называется собственно беспредельным (непредельным) при полном отсутствии собственных предельных точек этого множества в этом пространстве, то есть при пустоте теоретико-множественного пересечения этого множества и производного множества для этого множества.

Определение. В топологическом пространстве множество называется несобственно беспредельным (непредельным) при полном отсутствии несобственных предельных точек для этого множества в этом пространстве, то есть при принадлежности каждой предельной точки для этого множества этому множеству, то есть при теоретико-

множественном **включении** **производного** множества **для** этого множества в это множество, то есть при **замкнутости** этого множества.

Определение. В **топологическом** пространстве **множество** называется **конечно** **предельным** при **конечности** **производного** множества **для** этого множества.

Определение. В **топологическом** пространстве **множество** называется **собственно** **конечно** **предельным** при **конечности** теоретико-множественного **пересечения** этого множества и **производного** множества **для** этого множества.

Определение. В **топологическом** пространстве **множество** называется n-**предельным** при наличии ровно n **предельных** точек **для** этого множества в этом пространстве, то есть при равной **положительному** целому

числу n мощности производного множества для этого множества.

Пример. Для состоящей из различных элементов сходящейся последовательности множество её элементов однопредельно. Производное множество для этого множества состоит из её единственного предела.

Определение. В топологическом пространстве множество называется собственно n-предельным при наличии ровно n собственных предельных точек для этого множества в этом пространстве, то есть при равной положительному целому числу n мощности теоретико-множественного пересечения этого множества и производного множества для этого множества.

Пример. Для состоящей из различных элементов сходящейся последовательности множество её элементов либо собственно однопредельно, если её единственный предел является её элементом, либо собственно беспредельно (непредельно), если её единственный предел не является её элементом.

Определение. В топологическом пространстве множество называется бесконечно предельным при бесконечности производного множества для этого множества.

Определение. В топологическом пространстве множество называется собственно бесконечно предельным при бесконечности теоретико-множественного пересечения этого множества и производного множества для этого множества.

Определение. В топологическом пространстве множество называется счётно бесконечно предельным при счётной бесконечности производного множества для этого множества.

Определение. В топологическом пространстве множество называется собственно счётно бесконечно предельным при счётной бесконечности теоретико-множественного пересечения этого множества и производного множества для этого множества.

Определение. В топологическом пространстве множество называется несчётно бесконечно предельным при несчётной бесконечности производного множества для этого множества.

Определение. В топологическом пространстве множество называется собственно несчётно бесконечно предельным при несчётной бесконечности теоретико-множественного пересечения этого множества и производного множества для этого множества.

Определение. В топологическом пространстве множество называется самопредельным, если каждая точка множества является предельной точкой для этого множества, то есть если это множество является плотным в себе множеством.

Следствие. В топологическом пространстве несобственно беспредельное (непредельное) самопредельное множество, то есть замкнутое плотное в себе множество, совершенно.

Определение. В топологическом пространстве множество называется всюду редким, если для каждой точки этого

пространства существует её проколотая окрестность без точек этого множества, то есть имеющая непременно пустое теоретико-множественное пересечение с этим множеством.

Следствие. В топологическом пространстве для беспредельности (непредельности) множества необходима и достаточна всюду редкость этого множества.

Определение. В метрическом пространстве множество называется ограниченно конечным, если теоретико-множественное пересечение этого множества с каждой ограниченной окрестностью конечно.

Следствие. В метрическом пространстве и для беспредельности (непредельности), и для всюду редкости множества необходима и достаточна ограниченная конечность этого множества.

Определение. В топологическом пространстве множество называется редко-частым (часто-редким), если в этом пространстве существуют непустые подпространство всюду редкости и подпространство всюду частости этого множества, причём теоретико-множественные пересечения этого множества с этими подпространствами называются всюду редкой и всюду частой частями (всюду редким и всюду частым подмножествами) этого множества в этих подпространствах соответственно.

Настоящая научная монография предлагает простые и естественные и при этом чрезвычайно существенные и полезные особенно для первоначального усвоения два следующих типа уточнений математической терминологии применительно к топологическим пространствам, которым

принадлежат точки как элементы этих пространств и в которые включены множества как подмножества этих пространств.

1. Пусть точка топологического пространства находится в определённом отношении к множеству в этом топологическом пространстве и тем самым обладает соответствующим свойством применительно к этому множеству, однако, вообще говоря, может и не принадлежать этому множеству. Классическая математика традиционно называет такую точку обладающей соответствующим свойством точкой этого множества. Но такая точка может вообще не принадлежать этому множеству и поэтому не быть точкой этого множества. Во-первых, это совершенно недопустимая математическая

ошибка, создающая очевидное математическое противоречие. Во-вторых, это неприемлемая двойная логическая ошибка. Она заключается в том, что обладающая неким свойством точка множества якобы может вообще не быть точкой этого множества. Прежде всего, это вопреки необходимому закону непротиворечивости логического мышления. Кроме того, явно нарушается логический закон уменьшения объёма понятия при расширении содержания этого понятия. В-третьих, это совершенно недопустимая филологическая ошибка с точки зрения языка и речи. В-четвёртых, это грубейшая и чрезвычайно вредная психологическая ошибка, посредством явной противоречивости ведущая не только к заблуждениям, но и к удару по здравому смыслу и

тем самым к <u>раздвоению психики</u>. Предлагаемый настоящей научной монографией общий метод устранения всех этих принципиальных изъянов заключается в добавлении предлога «<u>для</u>». А именно, если классическая математика традиционно называет такую точку обладающей соответствующим свойством <u>точкой этого</u> множества, то настоящая научная монография предлагает называть такую точку обладающей соответствующим свойством точкой <u>для</u> этого множества. При этом, как и в классической математике, подразумеваемые <u>принадлежность</u> точки <u>топологическому</u> пространству и теоретико-множественное <u>включение</u> множества в это же <u>топологическое</u> пространство могут явно не указываться, если это не ведёт к заблуждениям.

Целесообразно привести примеры определений в классической математике, исправленных предложенным общим методом настоящей научной монографии.

Предельной точкой для множества в топологическом пространстве называется точка, любая проколотая (лишённая этой точки) окрестность которой содержит некоторую точку множества.

Строго предельной точкой, или точкой накопления, для множества в топологическом пространстве называется точка, любая окрестность которой включает бесконечное подмножество множества.

Точкой сгущения (конденсации) для множества в топологическом пространстве называется точка, любая

окрестность которой включает несчётно бесконечное подмножество множества.

Точкой полного накопления для множества в топологическом пространстве называется точка, любая окрестность которой включает подмножество множества, имеющее мощность этого множества.

Граничной точкой для множества в топологическом пространстве называется точка, любая окрестность которой содержит точки множества и точки его дополнения.

Точкой касания, или точкой прикосновения, для множества в топологическом пространстве называется точка, любая окрестность которой содержит некоторую точку множества.

2. Пусть одно, зависимое множество топологического пространства находится в определённом отношении к другому, независимому множеству в этом топологическом пространстве и тем самым обладает соответствующим свойством применительно к этому независимому множеству, однако, вообще говоря, может и не быть подмножеством этого независимого множества. Классическая математика традиционно называет такое зависимое множество обладающим соответствующим свойством зависимым множеством этого независимого множества. Но такое зависимое множество может и не быть подмножеством этого независимого множества. Предлагаемый настоящей научной монографией общий метод устранения подобных неточностей заключается в

добавлении предлога «для» при необходимости, общезначимости, общеполезности, целесообразности и/или желательности. А именно, если классическая математика традиционно называет такое зависимое множество обладающим соответствующим свойством зависимым множеством этого независимого множества, то настоящая научная монография предлагает называть такое зависимое множество обладающим соответствующим свойством зависимым множеством для этого независимого множества. При этом, как и в классической математике, подразумеваемые теоретико-множественные включения независимого множества и зависимого множества в топологическое пространство могут явно не указываться, если это не ведёт к заблуждениям.

Целесообразно привести примеры определений в классической математике, исправленных предложенным общим методом настоящей научной монографии.

Границей для множества называется множество всех граничных точек для этого множества.

Производным множеством для множества называется множество всех предельных точек для этого множества.

В теории множеств Кантора и в общей топологии изолированная точка множества в топологическом пространстве есть точка множества, для которой существует такая окрестность как открытое множество топологии, что теоретико-множественное пересечение этого множества и этой окрестности есть одноэлементное множество, состоящее из этой единственной точки.

Множество называется дискретным, если все его точки являются изолированными. Если такой окрестности не существует, то такая точка множества, то есть принадлежащая этому множеству, является предельной точкой для этого множества и ввиду принадлежности этому множеству предельной точкой этого множества и может быть либо внутренней точкой этого множества, если существует её окрестность, целиком включённая в это множество, либо граничной точкой этого множества, если любая её окрестность имеет непременно непустые теоретико-множественные пересечения и с этим множеством, и с его дополнением как теоретико-множественной разностью пространства и этого множества. Множество называется замкнутым, если ему принадлежат

именно все предельные точки для этого множества. Множество называется совершенным, если ему принадлежат именно все и только все предельные точки для этого множества, то есть если является замкнутым множеством без изолированных точек. Топологическое пространство называется счётно частым (счётно плотным, сепарабельным), если включает своё именно счётное всюду частое (всюду плотное) подмножество. Общепринято название сепарабельности, но и признано явное несоответствие этого названия, долженствующего выражать отделимость, а вовсе не наличие своего именно счётного всюду частого (всюду плотного) подмножества. Представляется целесообразным и предлагается настоящей научной монографией постепенный отказ от названия

сепарабельности в пользу счётной частоты как именно точного названия. Во имя преемственности и взаимопонимания добавляются в круглых скобках, во-первых, счётная плотность как менее точная, поскольку в данном случае речь идёт о частоте представленности, а вообще не об используемой математикой плотности в смысле относительной меры заполнения окрестности точками множества, а во-вторых, сепарабельность.

По теореме Кантора–Бендиксона, которая обобщена первой теоремой Линделёфа на произвольные топологические пространства со счётной базой, в том числе на их частный случай счётно частых (счётно плотных, сепарабельных) метрических пространств, любое именно несчётно бесконечное замкнутое множество является теоретико-

множественным объединением своего непустого совершенного подмножества всех своих точек сгущения (конденсации), которые можно назвать предельными точками несчётно бесконечных порядков предельности, и своего не более чем счётно бесконечного разрозненного подмножества (которое может быть пустым множеством) всех своих разрозненных (остальных) точек.

По именно необходимой (наименьшей возможной среди мощностей для всех окрестностей) мощности теоретико-множественного пересечения любой окрестности любой точки произвольного множества с этим множеством устанавливается следующая качественная иерархия мощностей точечной предельности.

1. Непредельная (изолированная) точка (единично мощная непредельная (изолированная) точка). Необходимая (наименьшая возможная среди мощностей для всех окрестностей) мощность теоретико-множественного пересечения любой окрестности изолированной точки произвольного множества с этим множеством равна единице. Ведь каждая окрестность изолированной точки произвольного множества содержит эту изолированную точку. А по общему определению изолированной точки произвольного множества существует её окрестность, содержащая единственную эту изолированную точку множества и не содержащая никаких других точек множества.

2. Счётно предельная точка (счётно бесконечно мощная предельная точка). Необходимая (наименьшая возможная среди мощностей для всех окрестностей) мощность теоретико-множественного пересечения любой окрестности счётно бесконечно мощной предельной точки (для) произвольного множества с этим множеством равна мощности алеф-нуль $\aleph_0$ счётно бесконечного множества, то есть мощности множества всех натуральных (положительных целых) чисел N, первому бесконечному кардиналу. Ведь вследствие общего определения предельной точки (для) произвольного множества каждая окрестность счётно бесконечно мощной предельной точки (для) произвольного множества содержит именно счётно бесконечное подмножество точек этого множества.

3. Несчётно предельная точка (несчётно бесконечно мощная предельная точка, точка сгущения (конденсации)). Необходимая (наименьшая возможная среди мощностей для всех окрестностей) мощность теоретико-множественного пересечения любой окрестности несчётно бесконечно мощной предельной точки (точки сгущения (конденсации)) (для) произвольного множества с этим множеством несчётно бесконечна. Ведь по общему определению точки сгущения (конденсации) (для) произвольного множества каждая окрестность точки сгущения (конденсации) (для) произвольного множества содержит именно несчётно бесконечное подмножество точек этого множества.

Определение. Качественной иерархией мощностей предельности точек (для) множества в топологическом, в частности метрическом, пространстве называется трёхуровневая иерархия непредельных, счётно предельных и несчётно предельных точек (для) множества, то есть единично мощных непредельных (изолированных) точек множества, счётно бесконечно мощных предельных точек (для) множества и несчётно бесконечно мощных предельных точек (точек сгущения (конденсации)) (для) множества соответственно, устанавливаемая по критерию наименьшей мощности (наименьшего кардинального числа) теоретико-множественного пересечения этого множества и произвольной окрестности точки соответствующего качества предельности как

соответствующей ступени этой иерархии. При этом наименьшая мощность (наименьшее кардинальное число) составляет единицу для единично мощных непредельных (изолированных) точек множества, мощность алеф-нуль $\aleph_0$ счётно бесконечного множества для счётно бесконечно мощных предельных точек (для) множества и несчётно бесконечные мощности для несчётно бесконечно мощных предельных точек (точек сгущения (конденсации)) (для) множества.

Определение. Беспределом множества, или непределом множества, или непредельной частью множества, или непредельным подмножеством множества, называется множество всех непредельных (изолированных) точек множества.

Определение. Счёт-пределом множества, или счётно предельной частью множества, или счётно предельным подмножеством множества, называется множество всех именно и только собственных, то есть принадлежащих множеству, счётно предельных точек множества.

Определение. Гущей множества, или сгустком множества по Хаусдорфу, или несчёт-пределом множества, или несчётно предельной частью множества, или несчётно предельным подмножеством множества, называется множество всех именно и только собственных, то есть принадлежащих множеству, несчётно предельных точек множества, или точек сгущения (конденсации) множества.

Поэтому целесообразно дополнить и уточнить применительно именно к разрозненным (остальным) точкам приведённое выше следующим образом.

По теореме Кантора–Бендиксона, которая обобщена первой теоремой Линделёфа на произвольные топологические пространства со счётной базой, в том числе на их частный случай счётно частых (счётно плотных, сепарабельных) метрических пространств, любое именно несчётно бесконечное замкнутое множество является теоретико-множественным объединением своего непустого совершенного подмножества всех своих точек сгущения (конденсации), которые можно назвать несчётно бесконечно мощными предельными точками, и своего не более чем счётно бесконечного разрозненного

подмножества (которое может быть пустым множеством) всех своих разрозненных (остальных) точек, являющегося теоретико-множественным объединением своего не более чем счётно бесконечного подмножества (которое может быть пустым множеством) всех своих счётно бесконечно мощных предельных точек, не являющихся точками сгущения (конденсации) самого несчётного замкнутого множества, и своего не более чем счётно бесконечного подмножества (которое может быть пустым множеством) всех своих непредельных (изолированных) точек.

Замечание. Счётно бесконечно мощная предельная точка для подмножества всех непредельных (изолированных) точек несчётно бесконечного замкнутого множества может совпадать с несчётно бесконечно мощной предельной

точкой (точкой сгущения (конденсации)) самого этого несчётно бесконечного замкнутого множества.

Пример. На действительной числовой прямой теоретико-множественное объединение отрезка положительной длины и счётно бесконечного множества всех элементов счётно бесконечной последовательности различных элементов вне этого отрезка, сходящейся к одному из его концов, является замкнутым множеством и имеет несчётно бесконечную мощность континуума ℵ. Счётно бесконечно мощная предельная точка для этого множества всех элементов этой последовательности является одним из концов этого отрезка, то есть одной из несчётно бесконечно мощных предельных точек (точек сгущения (конденсации)) всего

этого несчётно бесконечного замкнутого теоретико-множественного объединения.

Замечание. Подмножество всех непредельных (изолированных) точек несчётно бесконечного замкнутого множества и подмножество всех счётно бесконечно мощных предельных точек этого же несчётно бесконечного замкнутого множества могут оба одновременно быть пустыми.

Пример. На действительной числовой прямой отрезок положительной длины является замкнутым множеством и имеет несчётно бесконечную мощность континуума ℵ. Подмножество всех непредельных (изолированных) точек этого несчётно бесконечного замкнутого множества и подмножество всех счётно бесконечно мощных предельных

точек этого несчётно бесконечного замкнутого множества являются оба одновременно пустыми.

Замечание. Одновременно могут быть подмножество всех непредельных (изолированных) точек несчётно бесконечного замкнутого множества конечным множеством, а подмножество всех счётно бесконечно мощных предельных точек этого же несчётно бесконечного замкнутого множества пустым множеством.

Пример. На действительной числовой прямой теоретико-множественное объединение отрезка положительной длины и множества всех элементов любой конечной последовательности вне этого отрезка является замкнутым множеством и имеет несчётно бесконечную мощность континуума ℵ. Одновременно подмножество всех

непредельных (изолированных) точек несчётно бесконечного замкнутого множества является конечным множеством, а подмножество всех счётно бесконечно мощных предельных точек этого несчётно бесконечного замкнутого множества является пустым множеством.

Замечание. Одновременно могут быть подмножество всех непредельных (изолированных) точек несчётно бесконечного замкнутого множества счётно бесконечным множеством, а подмножество всех счётно бесконечно мощных предельных точек этого же несчётно бесконечного замкнутого множества пустым множеством.

Пример. На действительной числовой прямой теоретико-множественное объединение отрезка положительной длины и множества всех элементов любой счётно бесконечной

последовательности различных элементов вне этого отрезка, всюду редкой и поэтому вообще не имеющей предельных точек для себя, а для этого необходимо неограниченной (поскольку по теореме Больцано–Вейерштрасса любая ограниченная счётно бесконечная последовательность в любом конечномерном действительном пространстве непременно имеет хотя бы одну предельную точку), является замкнутым множеством и имеет несчётно бесконечную мощность континуума ℵ. Одновременно подмножество всех непредельных (изолированных) точек несчётно бесконечного замкнутого множества является счётно бесконечным множеством, а подмножество всех счётно бесконечно мощных предельных точек этого несчётно бесконечного замкнутого множества

является пустым множеством. Одним из таких всюду редких множеств является теоретико-множественная разность множества всех целых чисел и названного отрезка действительной числовой прямой.

Замечание. Одновременно могут быть подмножество всех непредельных (изолированных) точек несчётно бесконечного замкнутого множества счётно бесконечным множеством, а подмножество всех счётно бесконечно мощных предельных точек этого же несчётно бесконечного замкнутого множества конечным множеством.

Пример. На действительной числовой прямой теоретико-множественное объединение отрезка положительной длины, конечного множества счётно бесконечно мощных предельных точек вне этого отрезка и – для каждой из всех

этих счётно бесконечно мощных предельных точек – множества всех элементов любой счётно бесконечной последовательности различных элементов вне этого отрезка, сходящейся именно к этой счётно бесконечно мощной предельной точке, является замкнутым множеством и имеет несчётно бесконечную мощность континуума ℵ. Одновременно подмножество всех непредельных (изолированных) точек несчётно бесконечного замкнутого множества является счётно бесконечным множеством, а подмножество всех счётно бесконечно мощных предельных точек этого несчётно бесконечного замкнутого множества является конечным множеством.

Замечание. Одновременно могут быть счётно бесконечными множествами и подмножество всех непредельных (изолированных) точек несчётно бесконечного замкнутого множества, и подмножество всех счётно бесконечно мощных предельных точек этого же несчётно бесконечного замкнутого множества.

Пример (экстенсивный). На действительной числовой прямой теоретико-множественное объединение отрезка положительной длины, бесконечного всюду редкого множества счётно бесконечно мощных предельных точек вне этого отрезка и – для каждой из всех этих счётно бесконечно мощных предельных точек – множества всех элементов любой счётно бесконечной последовательности вне этого отрезка, сходящейся именно к этой счётно

бесконечно мощной предельной точке, является замкнутым множеством и имеет несчётно бесконечную мощность континуума $\aleph$. Одновременно и подмножество всех непредельных (изолированных) точек несчётно бесконечного замкнутого множества, и подмножество всех счётно бесконечно мощных предельных точек этого несчётно бесконечного замкнутого множества являются счётно бесконечными множествами.

Пример (интенсивный). На действительной числовой прямой теоретико-множественное объединение отрезка положительной длины, счётно бесконечного множества всех элементов первоначальной сходящейся и содержащей свой предел (как счётно бесконечно мощную предельную точку этого счётно бесконечного множества) счётно

бесконечной последовательности различных первоначально непредельных (изолированных) точек вне этого отрезка и – для каждого из элементов этой первоначальной последовательности – множества всех элементов любой дополнительной счётно бесконечной последовательности различных (и отличных от всех элементов первоначальной последовательности) непредельных (изолированных) точек вне этого отрезка, сходящейся именно к этой первоначально непредельной (изолированной) точке той первоначальной последовательности, является замкнутым множеством и имеет несчётно бесконечную мощность континуума ℵ. Одновременно и подмножество всех непредельных (изолированных) точек несчётно бесконечного замкнутого

множества, и множество всех счётно бесконечно мощных предельных точек этого несчётно бесконечного замкнутого множества являются счётно бесконечными множествами. При этом единственная первоначально имевшая первый порядок счётно бесконечно мощная предельная точка множества всех элементов первоначальной последовательности становится после добавления всех этих дополнительных последовательностей счётно бесконечно мощной предельной точкой второго порядка, первоначально непредельные (изолированные) точки множества всех элементов первоначальной последовательности становятся после добавления всех этих дополнительных последовательностей счётно бесконечно мощными предельными точками для множеств всех

элементов соответствующих дополнительных последовательностей, а все точки всех этих дополнительных последовательностей являются непредельными (изолированными) точками всего этого несчётно бесконечного замкнутого теоретико-множественного объединения.

Определение. Точка (для) множества называется предельной точкой неотрицательного целого порядка предельности n (для) этого множества, если принадлежит производному множеству этого неотрицательного целого порядка n (для) этого множества, однако не принадлежит производному множеству положительного целого порядка n+1 (для) этого множества и, следовательно, не

принадлежит производным множествам ещё более высоких порядков (для) этого множества.

Теорема. Непредельная (изолированная) точка множества является предельной точкой нулевого порядка предельности (для) этого множества.

Доказательство.

Во-первых, непредельная (изолированная) точка множества принадлежит производному множеству нулевого порядка (для) этого множества, равному самому этому множеству.

Во-вторых, непредельная (изолированная) точка множества не принадлежит производному множеству первого порядка (для) этого множества, состоящему именно и только из всех предельных точек (для) этого множества и поэтому не

содержащему никаких непредельных (изолированных) точек этого множества.

Тем самым теорема доказана.

Теорема. Предельная точка любого неотрицательного целого порядка предельности n (для) множества является предельной точкой порядка предельности n-k (для) производного множества любого не превышающего n неотрицательного целого порядка k (для) этого множества и предельной точкой порядка предельности n+i (для) интегрального множества любого неотрицательного целого порядка i от этого множества.

Доказательство.

Во-первых, теоретико-множественное дифференцирование множества как нахождение производного множества

первого порядка (для) дифференцируемого множества понижает на единицу порядок предельности каждой предельной точки (для) дифференцируемого множества.

Во-вторых, теоретико-множественное интегрирование множества как нахождение интегрального множества первого порядка от интегрируемого множества, то есть как действие, обратное теоретико-множественному дифференцированию, повышает на единицу порядок предельности каждой точки (для) интегрируемого множества.

Тем самым теорема доказана.

Замечание. Система последних определений и теорем устанавливает количественную иерархию непредельных (изолированных) точек множества и предельных точек

(для) множества по критерию порядка этой предельности, естественно дающую непредельным (изолированным) точкам множества именно нулевой порядок предельности.

Определение. Количественной иерархией предельности непредельных (изолированных) точек множества и предельных точек счётно бесконечных или конечных положительных целых порядков (для) множества в топологическом, в частности метрическом, пространстве называется иерархия, устанавливаемая по критерию порядка этой предельности как по критерию принадлежности этой точки в качестве непредельной (изолированной) точки производному множеству неотрицательного целого порядка, равного порядку этой предельности, (для) рассматриваемого множества. При

этом непредельным (изолированным) точкам множества даётся именно нулевой порядок предельности. Теоретико-множественное дифференцирование множества как нахождение производного множества первого порядка (для) дифференцируемого множества понижает на единицу порядок предельности каждой предельной точки (для) дифференцируемого множества. Теоретико-множественное интегрирование множества как нахождение интегрального множества первого порядка от интегрируемого множества, то есть как действие, обратное теоретико-множественному дифференцированию, повышает на единицу порядок предельности каждой точки (для) интегрируемого множества.

Может оказаться целесообразным изъять могущее выпадать промежуточное выделение разрозненного подмножества, сразу выделить все три подмножества несчётно бесконечного замкнутого множества и тем самым дополнить и уточнить применительно именно к разрозненным (остальным) точкам приведённое выше следующим образом.

По теореме Кантора–Бендиксона, которая обобщена первой теоремой Линделёфа на произвольные топологические пространства со счётной базой, в том числе на их частный случай счётно частых (счётно плотных, сепарабельных) метрических пространств, любое именно несчётно бесконечное замкнутое множество является теоретико-множественным объединением своего непустого

совершенного подмножества всех своих точек сгущения (конденсации), которые можно назвать предельными точками несчётно бесконечных порядков, своего не более чем счётно бесконечного подмножества (которое может быть пустым множеством) всех своих именно и только собственных (то есть принадлежащих множеству) предельных точек не более чем счётно бесконечных порядков и своего не более чем счётно бесконечного подмножества всех своих изолированных точек (которое может быть пустым множеством).

При этом теоретико-множественное объединение указанных совершенного подмножества и разрозненного подмножества замкнутого множества является теоретико-множественным разбиением ввиду пустоты их теоретико-

множественного пересечения. Однако замыкание этого разрозненного подмножества может пересекаться с этим совершенным подмножеством. Это показывает на действительной числовой прямой пример теоретико-множественного объединения отрезка положительной длины и множества всех элементов счётно бесконечной последовательности различных элементов вне этого отрезка, сходящейся к одному из его концов. В счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) пространстве ввиду наличия счётного всюду частого (всюду плотного) множества как счётной базы любое множество изолированных точек не более чем счётно бесконечно. Представляется научно обоснованным, целесообразным и оправданным введение именно системы беспредельно

общих понятий изолирующей окрестности, изолирующего множества окрестностей, изолирующего множества непересекающихся окрестностей, изолирующего множества отдалённых окрестностей. Причём не только применительно к отдельной (непредельной, изолированной) точке, из которой как единственной состоит сводящееся к ней одноэлементное множество, но и применительно к произвольному отдельному подмножеству любого множества в произвольном топологическом пространстве. А окрестность произвольного множества в любом топологическом, в частности метрическом, пространстве есть теоретико-множественное объединение произвольных окрестностей непременно всех точек этого множества.

Определение. Отдельным называется такое подмножество множества в топологическом пространстве, что замыкания в нём этого подмножества и его дополнения в множестве, равного теоретико-множественной разности этого множества и этого подмножества, не пересекаются, то есть не имеют общих точек в этом топологическом пространстве.

Теорема. Для изолированности точки множества в топологическом пространстве необходима и достаточна отдельность состоящего из единственной этой точки одноэлементного подмножества этого множества в этом топологическом пространстве.

Доказательство.

Необходимость.

Доказывается методом от противоречащего.

Пусть точка множества является изолированной, однако замыкание состоящего из единственной этой точки одноэлементного подмножества этого множества в этом топологическом пространстве и замыкание дополнения этого одноэлементного подмножества в этом множестве пересекаются. Тогда их теоретико-множественным пересечением необходимо является именно это одноэлементное подмножество. То есть эта точка принадлежит замыканию этого дополнения, не принадлежа этому дополнению, так что является предельной точкой для этого дополнения. Тогда по определению предельной точки в любой окрестности этой точки содержатся точки этого множества, отличные от этой точки. А это противоречит

определению изолированной точки множества. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность.

Доказывается методом от противоречащего.

Пусть замыкание состоящего из единственной этой точки одноэлементного подмножества этого множества в этом топологическом пространстве и замыкание дополнения этого одноэлементного подмножества в этом множестве не пересекаются, однако эта точка множества не является изолированной. Тогда эта точка множества является предельной точкой этого множества и предельной точкой для этого дополнения, не принадлежа этому дополнению. То есть эта точка принадлежит замыканию этого дополнения. Тогда теоретико-множественным пересечением замыкания

состоящего из единственной этой точки одноэлементного подмножества этого множества в этом топологическом пространстве и замыкания дополнения этого одноэлементного подмножества в этом множестве необходимо является именно это одноэлементное подмножество. Так что замыкание состоящего из единственной этой точки одноэлементного подмножества этого множества в этом топологическом пространстве и замыкание дополнения этого одноэлементного подмножества в этом множестве пересекаются. Полученное противоречие доказывает достаточность.

Тем самым доказательство теоремы полностью завершено.

Определение. Изолирующая окрестность изолированной точки множества в топологическом пространстве есть

любая такая окрестность этой изолированной точки множества как открытое множество топологии, что теоретико-множественное пересечение этого множества и этой окрестности есть одноэлементное множество, состоящее из этой единственной точки.

Определение. Окрестностно отдельным называется такое подмножество множества в топологическом пространстве, что существует такая окрестность замыкания этого подмножества, что теоретико-множественное пересечение этой окрестности и замыкания этого множества есть замыкание этого подмножества.

Определение. Изолирующая окрестность окрестностно отдельного подмножества множества в топологическом пространстве есть любая такая окрестность замыкания

этого окрестностно отдельного подмножества множества, что теоретико-множественное пересечение этой окрестности и замыкания этого множества есть замыкание этого подмножества.

Определение. Изолирующее множество окрестностей произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в топологическом пространстве есть любое множество взаимно однозначно соответствующих изолирующих окрестностей непременно всех изолированных точек этого произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в топологическом пространстве.

Замечание. При отсутствии требования о взаимно однозначном соответствии в последнем и в следующем

определениях было бы возможно покрытие любой изолированной точки и любого окрестностно отдельного подмножества соответственно не только одной окрестностью, но и вообще произвольным непустым множеством окрестностей.

Определение. Изолирующее множество окрестностей произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в топологическом пространстве есть любое множество взаимно однозначно соответствующих изолирующих окрестностей непременно всех окрестностно отдельных подмножеств этого произвольного подмножества окрестностно отдельных подмножеств множества в топологическом пространстве.

Определение. Изолирующее множество непересекающихся окрестностей произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в топологическом пространстве есть любое изолирующее множество попарно непересекающихся окрестностей этого произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в топологическом пространстве.

Замечание. При наличии требования о попарно непересекающихся окрестностях в последнем и в следующем определениях, достаточного для взаимно однозначного соответствия окрестностей изолированным точкам и окрестностно отдельным подмножествам соответственно, осуществляется непременное покрытие любой изолированной точки и любого окрестностно

отдельного подмножества соответственно одной и только одной окрестностью.

Определение. Изолирующее множество непересекающихся окрестностей произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в топологическом пространстве есть любое изолирующее множество попарно непересекающихся окрестностей этого произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в топологическом пространстве.

Замечание. Окрестности являются открытыми множествами. Отсутствие попарных пересечений множества окрестностей не является достаточным условием для непременного отсутствия примыкания

окрестностей, при этом имеющих общие граничные точки, принадлежащие теоретико-множественному пересечению замыканий примыкающих окрестностей.

Определение. Изолирующее множество отдалённых окрестностей произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в топологическом пространстве есть любое изолирующее множество обладающих попарно непересекающимися замыканиями окрестностей этого произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в топологическом пространстве.

Следствие. Изолирующее множество отдалённых окрестностей произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в топологическом

пространстве является изолирующим множеством непересекающихся окрестностей этого произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в топологическом пространстве.

Определение. Изолирующее множество отдалённых окрестностей произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в топологическом пространстве есть любое изолирующее множество обладающих попарно непересекающимися замыканиями окрестностей этого произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в топологическом пространстве.

Следствие. Изолирующее множество отдалённых окрестностей произвольного подмножества множества всех

окрестностно отдельных подмножеств множества в топологическом пространстве является изолирующим множеством непересекающихся окрестностей этого произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в топологическом пространстве.

В настоящей научной монографии существенно используется непременная замкнутость производных множеств. Как известно, это условие непременно выполнено в метрических пространствах, однако может нарушаться в топологических пространствах, что доказывается таким контрпримером. Множество, целиком состоящее из двух различных элементов, становится топологическим пространством при задании наименьшей

возможной топологии, состоящей именно и только из пустого множества и всего пространства как открытых и одновременно замкнутых множеств. Единственной предельной точкой по её общему определению (любая её окрестность как открытое множество содержит отличный от этой точки элемент множества) для каждого из обоих элементов является другой элемент, из которого целиком и состоит соответствующее производное множество для каждого из обоих элементов, не являющееся замкнутым в этом топологическом пространстве. Поэтому из топологических пространств предметом дальнейшего рассмотрения являются именно метрические пространства и названные метрическими множества как подмножества метрических пространств. Произвольное метрическое

пространство создаёт своей метрикой свою топологию и является поэтому частным случаем топологического пространства вообще. При этом в каждом отдельном рассмотрении речь идёт об одном и том же едином для всех рассматриваемых множеств произвольном метрическом пространстве. Соответственно эти метрические множества называются единометрическими множествами.

Определение. Изолирующая окрестность изолированной точки множества в метрическом пространстве есть любая такая окрестность этой изолированной точки множества как открытое множество топологии, которая определяется метрикой этого пространства, что теоретико-множественное пересечение этого множества и этой

окрестности есть одноэлементное множество, состоящее из этой единственной точки.

Определение. Отдельным называется такое подмножество множества в метрическом пространстве, что замыкания в нём этого подмножества и его дополнения в множестве, равного теоретико-множественной разности этого множества и этого подмножества, не пересекаются, то есть не имеют общих точек в этом метрическом пространстве.

Определение. Окрестностно отдельным называется такое подмножество множества в метрическом пространстве, что существует такая окрестность замыкания этого подмножества, что теоретико-множественное пересечение этой окрестности и замыкания этого множества есть замыкание этого подмножества.

Определение. Изолирующая окрестность окрестностно отдельного подмножества множества в метрическом пространстве есть любая такая окрестность замыкания этого окрестностно отдельного подмножества множества, что теоретико-множественное пересечение этой окрестности и замыкания этого множества есть замыкание этого подмножества.

Определение. Изолирующее множество окрестностей произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в метрическом пространстве есть любое множество взаимно однозначно соответствующих изолирующих окрестностей непременно всех изолированных точек этого произвольного

подмножества множества всех изолированных точек множества в метрическом пространстве.

Замечание. При отсутствии требования о взаимно однозначном соответствии в последнем и в следующем определениях было бы возможно покрытие любой изолированной точки и любого окрестностно отдельного подмножества соответственно не только одной окрестностью, но и вообще произвольным непустым множеством окрестностей.

Определение. Изолирующее множество окрестностей произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в метрическом пространстве есть любое множество взаимно однозначно соответствующих изолирующих окрестностей непременно

всех окрестностно отдельных подмножеств этого произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в метрическом пространстве.

Определение. Изолирующее множество непересекающихся окрестностей произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в метрическом пространстве есть любое изолирующее множество попарно непересекающихся окрестностей этого произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в метрическом пространстве.

Замечание. При наличии требования о попарно непересекающихся окрестностях в последнем и в следующем определениях, достаточного для взаимно

однозначного соответствия окрестностей изолированным точкам и окрестностно отдельным подмножествам соответственно, осуществляется непременное покрытие любой изолированной точки и любого окрестностно отдельного подмножества соответственно одной и только одной окрестностью.

Определение. Изолирующее множество непересекающихся окрестностей произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в метрическом пространстве есть любое изолирующее множество попарно непересекающихся окрестностей этого произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в метрическом пространстве.

Замечание. Окрестности являются открытыми множествами. Отсутствие попарных пересечений множества окрестностей не является достаточным условием для непременного отсутствия примыкания окрестностей, при этом имеющих общие граничные точки, принадлежащие теоретико-множественному пересечению замыканий примыкающих окрестностей.

Определение. Изолирующее множество отдалённых окрестностей произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в метрическом пространстве есть любое изолирующее множество обладающих попарно непересекающимися замыканиями окрестностей этого произвольного подмножества

множества всех изолированных точек множества в метрическом пространстве.

Следствие. Изолирующее множество отдалённых окрестностей произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в метрическом пространстве является изолирующим множеством непересекающихся окрестностей этого произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в метрическом пространстве.

Замечание. В метрическом пространстве расстояние между любой парой таких различных отдалённых окрестностей равно расстоянию между их замыканиями и является непременно строго положительным числом.

Определение. Изолирующее множество отдалённых окрестностей произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в метрическом пространстве есть любое изолирующее множество обладающих попарно непересекающимися замыканиями окрестностей этого произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в метрическом пространстве.

Следствие. Изолирующее множество отдалённых окрестностей произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в метрическом пространстве является изолирующим множеством непересекающихся окрестностей этого произвольного подмножества множества всех окрестностно

отдельных подмножеств множества в метрическом пространстве.

Замечание. В метрическом пространстве расстояние между любой парой таких различных отдалённых окрестностей равно расстоянию между их замыканиями и является непременно положительным числом.

Следствие. Если в изолирующем множестве окрестностей произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в метрическом пространстве уменьшить радиус каждой окрестности не менее чем вдвое, то получится изолирующее множество непересекающихся окрестностей этого произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в метрическом пространстве.

Следствие. Если в изолирующем множестве окрестностей произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в метрическом пространстве уменьшить радиус каждой окрестности более чем вдвое, то получится изолирующее множество отдалённых окрестностей этого произвольного подмножества множества всех изолированных точек множества в метрическом пространстве.

Следствие. Если в изолирующем множестве окрестностей произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в метрическом пространстве уменьшить радиус окрестности каждой точки каждого окрестностно отдельного подмножества не менее чем вдвое, то получится изолирующее множество

непересекающихся окрестностей этого произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в метрическом пространстве.

Следствие. Если в изолирующем множестве окрестностей произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в метрическом пространстве уменьшить радиус окрестности каждой точки каждого окрестностно отдельного подмножества более чем вдвое, то получится изолирующее множество отдалённых окрестностей этого произвольного подмножества множества всех окрестностно отдельных подмножеств множества в метрическом пространстве.

Созданы общие методы либо дополняющего, либо замещающего последовательного кратного изолированного

определивания либо сохраняемых, либо заменяемых соответственно изолированных точек при сохранении предельных точек для произвольного множества в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве, в частности применительно к созданию и развитию общей теории переменных (в том числе целенаправленно целиком или частично изменяемых/преобразуемых) множеств, включая построение примеров и контрпримеров, и к общим методам решения неполных и полных линейных и нелинейных приведённых канонических единометрических производных множественных уравнений произвольных положительных целых порядков k с основанием на уравнениях первого порядка и с дальнейшим пошаговым

наращиванием порядка уравнений до любого требуемого положительного целого порядка k. При этом последовательно достигается именно требуемая кратность взятия производного множества, поскольку произвольный положительный целый порядок k может превышать единицу.

Определение. Изолированным определиванием изолированной точки множества называется превращение этой изолированной точки этого множества в предельную точку (для) этого множества с целью получения именно этой изолированной точки в производном множестве (для) этого преобразованного множества, во-первых, построением сходящейся к этой изолированной точке счётно бесконечной последовательности непременно

различных и отличных от этой изолированной точки точек отдалённой изолирующей окрестности этой изолированной точки и, во-вторых, теоретико-множественным объединением этого множества и множества всех элементов этой последовательности, причём после этого сама эта изолированная точка множества может либо сохраняться и тем самым превращаться в собственную предельную точку этого объединённого множества, принадлежащую этому объединённому множеству, либо выбрасываться и тем самым превращаться в несобственную предельную точку для этого объединённого множества, не принадлежащую этому объединённому множеству.

Замечание. Как известно, любое множество изолированных точек в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном)

метрическом пространстве, то есть имеющем не более чем счётно бесконечное всюду частое (всюду плотное) подмножество, то есть не более чем счётно бесконечную базу, не более чем счётно бесконечно.

Общее ядро общих методов либо дополняющего, либо замещающего последовательного кратного изолированного определивания либо сохраняемых, либо заменяемых соответственно изолированных точек при сохранении предельных точек для произвольного множества в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве является следующим.

1. Каждая изолированная точка a_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) как один из элементов не более чем счётно бесконечной последовательности

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

всех изолированных точек их подмножества

$$A_J = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

произвольного множества A (тогда все остальные точки множества A принадлежат теоретико-множественной разности A \ A$_J$ этих множества A и подмножества A$_J$ и являются непременно предельными точками) окружается не содержащей никаких других точек этого множества A своей изолирующей эту точку сферической окрестностью U(a$_i$, ε$_i$) с непременно положительным радиусом ε$_i$, являющейся множеством именно всех точек m счётно частого (счётно плотного, сепарабельного) метрического пространства M, отдалённых от этой точки a$_i$ строго менее

чем на радиус ε_i в метрике ρ счётно частого (счётно плотного, сепарабельного) метрического пространства M:

$$U(a_i, \varepsilon_i) = \{m \in M \mid \rho(a_i, m) < \varepsilon_i\}.$$

Существование такой изолирующей сферической окрестности следует из общего определения изолированной точки множества в метрическом пространстве. В итоге получается изолирующее множество сферических окрестностей (имеющих возможные непустые взаимные теоретико-множественные пересечения) непременно всех изолированных точек a_i произвольного не более чем счётно бесконечного подмножества A_J всех изолированных точек произвольного множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве M.

2. В изолирующем множестве сферических окрестностей непременно всех изолированных точек a_i их произвольного не более чем счётно бесконечного дискретного подмножества A_J произвольного множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве M радиус каждой изолирующей сферической окрестности уменьшается более чем вдвое, например втрое:

$$U_{1/3}(a_i, \varepsilon_i/3) = \{m \in M \mid \rho(a_i, m) < \varepsilon_i/3\}.$$

В итоге получается изолирующее множество отдалённых сферических окрестностей непременно всех изолированных точек a_i их произвольного не более чем счётно бесконечного дискретного подмножества A_J произвольного множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве M.

3. Для каждой изолированной точки a_i произвольного не более чем счётно бесконечного дискретного подмножества A_J всех изолированных точек произвольного множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве M строится следующим образом счётно бесконечная последовательность непременно различных и отличных от этой изолированной точки a_i точек счётно частого (счётно плотного, сепарабельного) метрического пространства M, принадлежащих соответствующей именно отдалённой изолирующей сферической окрестности

$$U_{1/3}(a_i, \varepsilon_i/3) = \{m \in M \mid \rho(a_i, m) < \varepsilon_i/3\}$$

этой изолированной точки a_i, сходящаяся к этой изолированной точке a_i. Из этой отдалённой изолирующей

сферической окрестности выбирается произвольная отличная от этой изолированной точки первая точка a_{i1} этой последовательности. Определяется расстояние

$$\rho(a_i, a_{i1}) < \varepsilon_i/3$$

этой первой точки от этой изолированной точки a_i и делится пополам. Определяется соответственно уменьшенная отдалённая изолирующая сферическая окрестность

$$U_{1/3;1}(a_i, \rho(a_i, a_{i1})/2) = \{m \in M \mid \rho(a_i, m) < \rho(a_i, a_{i1})/2\}$$

этой изолированной точки a_i радиусом $\rho(a_i, a_{i1})/2$, равным этой половине расстояния. Из этой уменьшенной отдалённой изолирующей сферической окрестности этой изолированной точки a_i берётся произвольная отличная от

этой изолированной точки a_i вторая точка a_{i2} этой последовательности. Определяется расстояние

$$\rho(a_i, a_{i2}) < \rho(a_i, a_{i1})/2$$

этой второй точки a_{i2} от этой изолированной точки a_i и делится пополам. Определяется соответственно уменьшенная отдалённая изолирующая сферическая окрестность

$$U_{1/3;2}(a_i, \rho(a_i, a_{i2})/2) = \{m \in M \mid \rho(a_i, m) < \rho(a_i, a_{i2})/2\}$$

этой изолированной точки a_i радиусом $\rho(a_i, a_{i2})/2$, равным этой половине расстояния. Из этой уменьшенной отдалённой изолирующей сферической окрестности этой изолированной точки a_i берётся произвольная отличная от этой изолированной точки a_i третья точка a_{i3} этой последовательности. Этот процесс продолжается счётно

бесконечно. В итоге для каждой изолированной точки a_i не более чем счётно бесконечного дискретного подмножества A_J всех изолированных точек произвольного множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве M строится счётно бесконечная последовательность

$$(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots)$$

непременно различных и отличных от этой изолированной точки a_i точек счётно частого (счётно плотного, сепарабельного) метрического пространства M, принадлежащих соответствующей именно отдалённой изолирующей сферической окрестности

$$U_{1/3}(a_i, \varepsilon_i/3) = \{m \in M \mid \rho(a_i, m) < \varepsilon_i/3\}$$

этой изолированной точки a_i, непременно сходящаяся к этой изолированной точке a_i.

Тем самым достигается точка логического и методического разветвления и завершается общее ядро общего метода дополняющего последовательного кратного изолированного определивания сохраняемых изолированных точек и общего метода замещающего последовательного кратного изолированного определивания заменяемых изолированных точек. Продолжения этого общего ядра с продолжениями нумерации шагов различны для этих обоих общих методов.

Общий метод дополняющего последовательного кратного изолированного определивания сохраняемых изолированных точек

4. Каждая изолированная точка a_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) как один из элементов не более чем счётно бесконечной последовательности

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

всех изолированных точек их произвольного не более чем счётно бесконечного дискретного подмножества

$$A_J = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

произвольного множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве M сохраняется и дополняется сходящейся к этой точке a_i этой счётно бесконечной последовательностью

$$(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots)$$

непременно различных и отличных от этой изолированной точки a_i точек счётно частого (счётно плотного, сепарабельного) метрического пространства M, принадлежащих соответствующей именно отдалённой изолирующей сферической окрестности

$$U_{1/3}(a_i, \varepsilon_i/3) = \{m \in M \mid \rho(a_i, m) < \varepsilon_i/3\}$$

этой изолированной точки a_i.

5. Полученное не более чем счётно бесконечное множество

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$$

$$a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots$$

$$a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

счётно бесконечных последовательностей, дополнивших именно все изолированные точки

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

их произвольного не более чем счётно бесконечного дискретного подмножества A_J произвольного множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве M, счётно бесконечно и нумеруется диагональным методом Кантора в единую счётно бесконечную последовательность

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \ldots)$$

непременно различных точек, отличных от именно всех изолированных точек

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

их произвольного не более чем счётно бесконечного дискретного подмножества

$$A_J = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$$

произвольного <u>множества</u> A в <u>счётно</u> <u>частом</u> (<u>счётно</u> <u>плотном</u>, <u>сепарабельном</u>) <u>метрическом</u> пространстве M. Множество

$$_{(1)}A_J = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, ...\}$$

непременно <u>всех</u> элементов этой <u>единой</u> <u>последовательности</u> является <u>счётно</u> <u>бесконечным</u> множеством <u>изолированных</u> точек (<u>сохраняющих</u> <u>изолированность</u> и после теоретико-множественного <u>объединения</u> этого множества $_{(1)}A_J$ и множества A) ввиду принадлежности <u>всех</u> этих <u>добавляемых</u> точек

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, ...$$

$$a_{21}, a_{22}, a_{23}, ...$$

$$a_{31}, a_{32}, a_{33}, ...$$

…………………

именно отдалённым изолирующим сферическим окрестностям всех предельных точек

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

для всех этих добавляемых точек и вследствие отличий всех этих добавляемых точек от всех предельных точек для всех этих добавляемых точек и поэтому дискретно.

Производное множество первого порядка ${}_{(1)}A_J{}^{(1)}$ для этого построенного дискретного множества ${}_{(1)}A_J$ в точности равно не более чем счётно бесконечному дискретному подмножеству A_J всех изолированных точек произвольного множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве M:

$${}_{(1)}A_J{}^{(1)} = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \ldots\}^{(1)} = A_J = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}.$$

Тем самым получено множество

$$_{(1)}A_J = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, ...\}$$

всех элементов этой единой счётно бесконечной последовательности

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, ...)$$

непременно различных изолированных точек, отличных от именно всех изолированных точек

$$a_1, a_2, a_3, ...$$

не более чем счётно бесконечного подмножества

$$A_J = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$$

произвольного множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве как одно из искомых интегральных множеств $\int^{(1)}A_J$ первого порядка от произвольного не более чем счётно

бесконечного дискретного подмножества A_J всех изолированных точек произвольного замкнутого множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве M:

$$\int^{(1)} A_J = \int^{(1)} \{a_1, a_2, a_3, ...\} = {}_{(1)}A_J = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, ...\}.$$

При этом ввиду сохранения именно всех предельных точек

$$a_1, a_2, a_3, ...$$

итоговое теоретико-множественное объединение

$$A \cup {}_{(1)}A_J = (A \setminus A_J) \cup A_J \cup {}_{(1)}A_J = (A \setminus \{a_1, a_2, a_3, ...\}) \cup \{a_1, a_2, a_3, ...\} \cup \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, ...\}$$

содержит все эти предельные точки, которые все оказываются именно собственными предельными точками этого множества, принадлежащими этому множеству.

Общий метод замещающего последовательного кратного изолированного определивания заменяемых изолированных точек

4. Каждая изолированная точка a_i ($i = 1, 2, 3, \ldots$) как один из элементов не более чем счётно бесконечной последовательности

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

всех изолированных точек их произвольного не более чем счётно бесконечного дискретного подмножества

$$A_J = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

произвольного множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве M выбрасывается и заменяется сходящейся к этой точке a_i этой счётно бесконечной последовательностью

$$(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \ldots)$$

непременно различных и отличных от этой изолированной точки a_i точек счётно частого (счётно плотного, сепарабельного) метрического пространства M, принадлежащих соответствующей именно отдалённой изолирующей сферической окрестности

$$U_{1/3}(a_i, \varepsilon_i/3) = \{m \in M \mid \rho(a_i, m) < \varepsilon_i/3\}$$

этой изолированной точки a_i.

5. Полученное не более чем счётно бесконечное множество

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$$

$$a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots$$

$$a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

счётно бесконечных последовательностей, заменивших именно все изолированные точки

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

их произвольного не более чем счётно бесконечного дискретного подмножества A_J произвольного множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве M, счётно бесконечно и нумеруется диагональным методом Кантора в единую счётно бесконечную последовательность

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \ldots)$$

непременно различных точек, отличных от именно всех изолированных точек

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

их произвольного не более чем счётно бесконечного дискретного подмножества

$$A_J = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$$

произвольного множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве M. Множество

$$_{(1)}A_J = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, ...\}$$

непременно всех элементов этой единой последовательности является счётно бесконечным множеством изолированных точек (сохраняющих изолированность и после теоретико-множественного объединения этого множества $_{(1)}A_J$ и теоретико-множественной разности $A \setminus A_J$ множества A и дискретного подмножества A_J) всех изолированных точек множества A ввиду принадлежности всех этих добавляемых точек

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$$
$$a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots$$
$$a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

именно отдалённым изолирующим сферическим окрестностям всех предельных точек

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

для всех этих добавляемых точек и вследствие отличий всех этих добавляемых точек от всех предельных точек для всех этих добавляемых точек и поэтому дискретно.

Производное множество первого порядка $_{(1)}A_J^{(1)}$ для этого построенного дискретного множества $_{(1)}A_J$ в точности равно не более чем счётно бесконечному дискретному подмножеству A_J всех изолированных точек произвольного

множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве M:

$$_{(1)}A_J{}^{(1)} = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \ldots\}^{(1)} = A_J = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}.$$

Тем самым получено множество

$$_{(1)}A_J = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \ldots\}$$

всех элементов этой единой счётно бесконечной последовательности

$$(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \ldots)$$

непременно различных изолированных точек, отличных от именно всех изолированных точек

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

не более чем счётно бесконечного подмножества

$$A_J = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

произвольного множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве как одно из искомых интегральных множеств $\int^{(1)}A_J$ первого порядка от произвольного не более чем счётно бесконечного дискретного подмножества A_J всех изолированных точек произвольного замкнутого множества A в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве M:

$$\int^{(1)}A_J = \int^{(1)}\{a_1, a_2, a_3, \ldots\} = {}_{(1)}A_J = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \ldots\}.$$

При этом ввиду выбрасывания именно всех предельных точек

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

итоговое теоретико-множественное объединение

$$(A \setminus A_J) \cup {}_{(1)}A_J = (A \setminus \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}) \cup \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, \ldots\}$$

не содержит ни одной из всех этих предельных точек, которые все оказываются именно несобственными предельными точками для этого множества, не принадлежащими этому множеству.

Определение. Каноническим единометрическим производным множественным уравнением с одним неизвестным называется теоретико-множественное равенство итога теоретико-множественных объединений и пересечений единственного искомого неизвестного множества и производных множеств положительных целых порядков для него единственному заданному известному множеству, причём все они включены в единое и общее для них всех произвольное метрическое пространство.

Замечание. Каноническое единометрическое производное множественное уравнение с одним неизвестным строго разделяет расположением в разных своих частях, с одной стороны, всего неизвестного, а с другой стороны, всего известного, которое приводится посредством последовательного выполнения системы всех наличных теоретико-множественных действий к единственному заданному известному множеству.

Замечание. Ввиду действенности закона симметрии для отношения теоретико-множественного равенства можно считать, что итог теоретико-множественных объединений и пересечений единственного искомого неизвестного множества и производных множеств положительных целых порядков для него составляет именно левую часть, а

единственное заданное известное множество составляет именно правую часть канонического единометрического производного множественного уравнения с одним неизвестным.

Замечание. Принятое ограничение лишь двумя теоретико-множественными действиями объединения и пересечения обусловлено тем, что именно для них действенны переместительный (коммутативный) и сочетательный (ассоциативный) законы, а также оба распределительных (дистрибутивных) закона (во-первых, теоретико-множественного пересечения относительно теоретико-множественного объединения, что подобно действенному распределительному (дистрибутивному) закону умножения относительно сложения чисел, а во-вторых, теоретико-

множественного объединения относительно теоретико-множественного пересечения, тогда как подобный распределительный (дистрибутивный) закон сложения относительно умножения чисел, вообще говоря, не действует). Но для теоретико-множественного вычитания (а теоретико-множественное дополнение является теоретико-множественным вычитанием множества из пространства) вместе с теоретико-множественным объединением переместительный (коммутативный) закон, вообще говоря, не действует.

Пример. Теоретико-множественное объединение произвольного непустого множества и теоретико-множественной разности пустого множества и этого же непустого множества равно этому же непустому множеству как итогу теоретико-множественного объединения этого же непустого множества и пустого множества. А теоретико-множественное объединение пустого множества и теоретико-множественной разности произвольного непустого множества и этого же непустого множества равно пустому множеству как итогу теоретико-множественного объединения двух пустых множеств.

19. СИСТЕМА ОСНОВОПОЛАГАЮЩИХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ КАНОНИЧЕСКИХ ЕДИНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ МНОЖЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ. ИЕРАРХИЯ ВЛОЖЕННЫХ В ПРЕДЫДУЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ МНОЖЕСТВ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ ПОРЯДКОВ

Определение. Метрическим множеством называется произвольное множество как подмножество произвольного метрического пространства, наследующее, или имеющее, метрику этого метрического пространства как частного случая определяемого этой метрикой топологического пространства.

Определение. Единометрическими множествами называются произвольные множества как подмножества одного и того же единого для них всех произвольного метрического пространства, наследующие, или имеющие, метрику этого метрического пространства.

Следствие. Единометрические множества являются метрическими множествами.

Замечание. Естественной является иерархия следующих трёх определений.

Общее определение. Единометрическим множественным отношением называется произвольное отношение между единометрическими множествами, образующими систему единометрических множеств этого единометрического множественного отношения.

Частное определение. Единометрическим множественным равенством называется произвольное равенство между единометрическими множествами, образующими систему единометрических множеств этого единометрического множественного равенства.

Единичное определение. Единометрическим множественным уравнением называется произвольное уравнение между единометрическими множествами этого единометрического множественного уравнения, образующими систему единометрических множеств этого единометрического множественного уравнения, необходимая часть (подсистема) которых состоит из искомых неизвестных множеств и возможная часть (подсистема) которых состоит из заданных известных множеств.

Обозначения. Заданные известные множества обычно обозначаются прописными первыми буквами латинского алфавита A, B, C, ... Искомые неизвестные множества обычно обозначаются прописными последними буквами латинского алфавита X, Y, Z, ... В необходимых и/или полезных случаях могут дополнительно использоваться указатели (индексы) справа и/или слева, внизу и/или вверху, принадлежащие соответствующим системам указателей (индексов), могущим быть бесструктурными, то есть просто множествами.

Замечание. По аналогии с индуктивной иерархией определений производных произвольной функции, имеющих произвольные неотрицательные целые порядки, столь же естественна следующая индуктивная иерархия

определений производных множеств для произвольного метрического множества, имеющих произвольные неотрицательные целые порядки, которая основывается на принадлежащих Георгу Кантору первоначальных определениях производных множеств произвольных неотрицательных целых порядков.

Определение. Производным множеством $X^{(0)}$ нулевого порядка для метрического множества X называется само это метрическое множество X.

Определение. Производным множеством (первым производным множеством, или производным множеством первого порядка) для метрического множества X называется множество

$$X' = X^{(1)}$$

всех предельных точек для метрического множества

$$X = X^{(0)}$$

в метрическом пространстве.

Определение. Вторым производным множеством, или производным множеством второго порядка, для метрического множества X называется производное множество первого порядка

$$X'' = X^{(2)} = (X')'$$

для производного множества первого порядка

$$X' = X^{(1)}$$

для метрического множества

$$X = X^{(0)}$$

в метрическом пространстве.

Определение. Производным множеством $X^{(k)}$ произвольного положительного целого порядка k для метрического множества

$$X = X^{(0)}$$

называется производное множество первого порядка

$$X^{(k)} = (X^{(k-1)})'$$

для производного множества $X^{(k-1)}$ неотрицательного целого порядка k-1 для метрического множества

$$X = X^{(0)}$$

в метрическом пространстве.

Следствие. Произвольное метрическое множество X и все производные множества $X^{(k)}$ произвольных неотрицательных целых порядков k для метрического множества X являются единометрическими множествами.

Теорема. Для произвольного метрического множества имеет место иерархия вложенных в предыдущие последовательных производных множеств положительных целых порядков.

Доказательство. По теории множеств Кантора производное множество для произвольного метрического множества является замкнутым множеством. Следовательно, это производное множество по определению замкнутого множества содержит все свои предельные точки и поэтому включает в себя множество их всех, как раз и образующее производное множество для того производного множества для того произвольного метрического множества, то есть по принадлежащему Георгу Кантору определению производного множества произвольного положительного

целого порядка второе производное множество, или производное множество второго порядка, для того произвольного метрического множества. То есть в итоге второе производное множество для произвольного метрического множества включено в первое производное множество для того же произвольного метрического множества. Допустимо заменяя здесь произвольное метрическое множество производным множеством произвольного положительного целого порядка j для произвольного метрического множества, отсюда получаем, что производное множество произвольного положительного целого порядка j+1 включено в производное множество положительного целого порядка j того же произвольного метрического множества. В итоге для произвольного

метрического множества X последовательность производных множеств всех положительных целых порядков с возрастанием этих порядков является не расширяющейся по отношению теоретико-множественного включения:

$$X^{(1)} \supseteq X^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(k)} \supseteq X^{(k+1)} \supseteq X^{(k+2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(n-1)} \supseteq X^{(n)} \supseteq \ldots,$$

то есть иерархией вложенных в предыдущие последовательных производных множеств положительных целых порядков, что и требовалось доказать.

Следствие. Теоретико-множественное объединение производных множеств положительных целых порядков для произвольного метрического множества равно производному множеству наименьшего наличного

положительного порядка для этого произвольного метрического множества.

Замечание. В общем случае для произвольного и поэтому не обязательно замкнутого метрического множества X эта иерархия теоретико-множественных включений имеет место для производных множеств непременно положительных целых порядков, но не для принципиально отсутствующего в этой иерархии самого метрического множества X как производного множества нулевого порядка для себя самого. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Для того, чтобы само метрическое множество как производное множество нулевого порядка для себя самого включало производное множество первого порядка для

себя самого и тем самым распространяло иерархию вложенных в предыдущие последовательных производных множеств всех положительных целых порядков на все неотрицательные целые порядки, необходимо и достаточно, чтобы само это метрическое множество было замкнутым множеством.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть само метрическое множество как производное множество нулевого порядка для себя самого включает производное множество первого порядка для себя самого.

По своему определению это производное множество первого порядка для самого метрического множества состоит

именно и только из всех предельных точек для самого метрического множества.

Следовательно, по условию доказательства необходимости само метрическое множество как производное множество нулевого порядка для себя самого включает множество всех предельных точек для самого метрического множества и по общему определению замкнутого множества является именно замкнутым множеством.

Тем самым необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть само метрическое множество как производное множество нулевого порядка для себя самого является именно замкнутым множеством и по общему определению замкнутого множества включает множество всех

предельных точек для самого метрического множества. Это множество всех предельных точек для самого метрического множества является по своему определению именно производным множеством первого порядка для самого метрического множества.

Следовательно, по условию доказательства достаточности само метрическое множество как производное множество нулевого порядка для себя самого включает производное множество первого порядка для себя самого.

Тем самым достаточность доказана, чем и завершается доказательство теоремы.

Следствие. Тогда и только тогда, когда само метрическое множество X замкнуто, имеет место предельно расширенная иерархия вложенных в предыдущие

последовательных производных множеств именно всех неотрицательных целых порядков:

$$X = X^{(0)} \supseteq X^{(1)} \supseteq X^{(2)} \supseteq \dots \supseteq X^{(j)} \supseteq X^{(j+1)} \supseteq X^{(j+2)} \supseteq \dots .$$

Определение. Интегральным множеством любого неотрицательного целого порядка k от произвольного множества A называется любое такое множество X, для которого производное множество $X^{(k)}$ того же самого неотрицательного целого порядка k равно этому произвольному множеству A:

$$X^{(k)} = A.$$

Определение. Интегральным надмножеством $\int^{(k)}A$ любого неотрицательного целого порядка k от произвольного множества A называется множество непременно всех интегральных множеств того же самого неотрицательного

целого порядка k от того же самого произвольного множества A, то есть множество непременно всех таких множеств X, для каждого из которых производное множество $X^{(k)}$ того же самого неотрицательного целого порядка k равно этому произвольному множеству A:

$$X^{(k)} = A;$$

$$X \in \int^{(k)} A.$$

Теорема. Интегральным множеством нулевого порядка от произвольного множества A является именно единственное само это множество A:

$$X^{(0)} = A;$$

$$A^{(0)} = A;$$

$$X = A.$$

Доказательство.

Действительно, для любого множества X производное множество нулевого порядка равно самому этому множеству:

$$X^{(0)} = X.$$

По условию теоремы и по определению интегрального множества нулевого порядка от произвольного множества A требуется выполнение условия

$$X^{(0)} = A.$$

Ввиду действенности закона переходности (транзитивности) для теоретико-множественного равенства имеет место единственная возможность

$$X = A,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Интегральным надмножеством нулевого порядка от произвольного множества A является множество, единственным элементом которого является именно само это множество A:

$$X^{(0)} = A;$$

$$A^{(0)} = A;$$

$$X = A;$$

$$\int^{(0)} A = \{A\}.$$

Определение. Произвольное множество A называется интегрируемым неотрицательного целого порядка k, если существует хотя бы одно интегральное множество X того же самого неотрицательного целого порядка k от того же самого множества A, то есть, равносильно (эквивалентно), если интегральное надмножество $\int^{(k)} A$ того же самого

неотрицательного целого порядка k от того же самого множества A является именно непустым множеством:

$$X^{(k)} = A;$$

$$X \in \int^{(k)} A \neq \varnothing.$$

Определение. Произвольное множество A называется именно однозначно интегрируемым неотрицательного целого порядка k, если существует одно и только одно интегральное множество X того же самого неотрицательного целого порядка k от того же самого множества A, то есть, равносильно (эквивалентно), если интегральное надмножество $X^{(k)}$ того же самого

неотрицательного целого порядка k от того же самого множества A является именно одноэлементным множеством:

$$\mathbf{X^{(k)} = A;}$$

$$\mathbf{X \in \int^{(k)} A = \{X\}.}$$

Следствие. Если произвольное множество A является именно однозначно интегрируемым неотрицательного целого порядка k, то это множество A является интегрируемым того же самого неотрицательного целого порядка k.

Следствие. Произвольное множество A является именно однозначно интегрируемым нулевого

порядка, причём интегральным множеством нулевого порядка от произвольного множества A является именно единственное само это множество A и интегральным надмножеством нулевого порядка от произвольного множества A является множество, единственным элементом которого является именно само это множество A:

$$\mathbf{X^{(0)} = A;}$$

$$\mathbf{A^{(0)} = A;}$$

$$\mathbf{X = A;}$$

$$\mathbf{\int^{(0)} A = \{A\}.}$$

20. РЕШЕНИЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ КАНТОРА НЕПОСРЕДСТВЕННЫМ ПРИЛОЖЕНИЕМ ЕЁ ОПРЕДЕЛЕНИЙ

Теорема. Для того, чтобы множество X было решением неканонического единометрического производного множественного уравнения

$$X = X'$$

с единственным искомым неизвестным множеством X, необходимо и достаточно, чтобы множество X было совершенным множеством. Совокупным решением неканонического единометрического производного множественного уравнения

$$X = X'$$

с единственным искомым неизвестным множеством X является совокупность всех совершенных множеств.

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из определения совершенного множества в теории множеств Кантора.

Теорема. Для того, чтобы множество X было решением канонического единометрического производного множественного уравнения

$$X \cap X' = \emptyset$$

с единственным искомым неизвестным множеством X, необходимо и достаточно, чтобы множество X было множеством без собственных, то есть принадлежащих этому множеству, предельных точек, в том числе точек сгущения (конденсации), для этого множества. Совокупным

решением канонического единометрического производного множественного уравнения

$$\mathbf{X} \cap \mathbf{X}' = \emptyset$$

с единственным искомым неизвестным множеством X является совокупность всех множеств без собственных, то есть принадлежащих этим множествам, предельных точек, в том числе точек сгущения (конденсации), для этих множеств.

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из определения множества без собственных, то есть принадлежащих этому множеству, предельных точек, в том числе точек сгущения (конденсации), для этого множества в теории множеств Кантора.

Теорема. Для того, чтобы множество X было решением неканонического единометрического производного множественного уравнения

$$X \cup X' = X'$$

с единственным искомым неизвестным множеством X, необходимо и достаточно, чтобы множество X было плотным в себе множеством. Совокупным решением неканонического единометрического производного множественного уравнения

$$X \cup X' = X'$$

с единственным искомым неизвестным множеством X является совокупность всех плотных в себе множеств.

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из определения плотного в себе множества в теории множеств Кантора.

Теорема. Для того, чтобы множество X было решением неканонического единометрического производного множественного уравнения

$$X \cup X' = X$$

с единственным искомым неизвестным множеством X, необходимо и достаточно, чтобы множество X было замкнутым множеством. Совокупным решением неканонического единометрического производного множественного уравнения

$$X \cup X' = X$$

с единственным искомым неизвестным множеством X является совокупность всех замкнутых множеств.

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из определения замкнутого множества в теории множеств Кантора.

Замечание. В метрическом пространстве производное множество для произвольного множества необходимо замкнуто, а в более общем топологическом пространстве (произвольная метрика пространства индуцирует соответствующую топологию этого пространства, а из топологичности пространства, вообще говоря, не следует метричность этого пространства) производное множество для произвольного

множества не обязано быть замкнутым; это общее утверждение доказывается таким контрпримером. Множество, целиком состоящее из двух различных элементов, становится топологическим пространством при задании наименьшей возможной топологии, состоящей именно и только из пустого множества и всего пространства как открытых и одновременно замкнутых множеств. Единственной предельной точкой по её общему определению (любая её окрестность как открытое множество содержит отличный от этой точки элемент множества) для каждого из обоих элементов является другой элемент, из которого целиком и состоит соответствующее производное множество для каждого из обоих элементов, не являющееся замкнутым в этом

топологическом пространстве. В последних разделах настоящей научной монографии используется непременная замкнутость производных множеств для произвольных множеств. Именно поэтому здесь рассматриваются множества в метрических пространствах, или метрические множества, а не множества в более общих топологических пространствах, или топологические множества. В этом смысле наличная общность последних разделов настоящей научной монографии может считаться предельной.

21. ОБЩИЕ ТЕОРИЯ И АЛГОРИТМ ПРИВЕДЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И НЕЛИНЕЙНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ЕДИНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ МНОЖЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Замечание. Предыдущим предполагается, что именно все теоретико-множественные действия со всеми известными множествами в правой части канонического единометрического производного множественного уравнения с одним неизвестным непременно предварительно произведены и найден итог всех этих действий, который и составляет правую часть этого уравнения. Если это не так и в правой части этого уравнения ещё только предстоит выполнить хотя бы

некоторые теоретико-множественные действия с известными множествами, то целесообразно выполнение этих действий наряду с теоретико-множественными действиями со всеми неизвестными в левой части этого уравнения. При этом последовательно преобразуются обе части канонического единометрического производного множественного уравнения с одним неизвестным. Однако все теоретико-множественные действия со всеми известными множествами в правой части этого уравнения не представляют принципиальных затруднений. Поэтому целесообразно, как это принято здесь, полагать, что все теоретико-множественные действия со всеми известными множествами в правой части этого уравнения именно предварительно произведены и найден итог всех этих

действий, который и считается единственным известным заданным множеством и составляет правую часть этого уравнения. Это предположение позволяет здесь ограничиться изложением общего алгоритма приведения линейных и нелинейных канонических единометрических производных множественных уравнений с одним неизвестным как системы последовательностей предписаний для теоретико-множественных действий в левой части этого уравнения с неизвестными, которыми являются наличные само единственное искомое неизвестное множество и производные множества положительных целых порядков для этого единственного искомого неизвестного множества. Общая теория приведения линейных и нелинейных канонических

единометрических производных множественных уравнений с одним неизвестным даёт систему обоснований для этого общего алгоритма. Таким образом, правая часть канонического единометрического производного множественного уравнения с одним неизвестным остаётся неизменной и вообще не рассматривается этим общим алгоритмом.

Указанное совместное систематическое изложение общих теории и алгоритма приведения линейных и нелинейных канонических единометрических производных множественных уравнений с одним неизвестным является следующим.

1. Раскрытием всех наличных скобок левая часть канонического единометрического производного множественного уравнения с одним неизвестным представляется в виде теоретико-множественного объединения теоретико-множественных пересечений наличных неизвестных, которыми могут быть единственное искомое неизвестное множество и производные множества положительных целых порядков для этого единственного искомого неизвестного множества. При этом используется действенный распределительный (дистрибутивный) закон для теоретико-множественного пересечения относительно теоретико-множественного объединения, а наличные единственное искомое неизвестное множество и неизвестные производные

множества положительных целых порядков для этого единственного искомого неизвестного множества рассматриваются просто как, вообще говоря, различные произвольные множества без каких бы то ни было априорных отношений между ними.

2. В каждом из этих теоретико-множественных пересечений оставляются для единообразия в указанном порядке при наличии единственное искомое неизвестное множество и/или производное множество наивысшего порядка из представленных именно в этом теоретико-множественном пересечении. При этом используются действенность переместительного (коммутативного) закона для теоретико-множественного пересечения, равенство любой непременно положительной степени произвольного

множества, являющейся теоретико-множественным пересечением любого непременно непустого даже бесконечного семейства одинаковых экземпляров этого множества, самому этому множеству, то есть его первой степени, а также включаемость производных множеств более высоких положительных целых порядков в производные множества более низких положительных целых порядков для единственного искомого неизвестного множества.

3. В полученном теоретико-множественном объединении в левой части канонического единометрического производного множественного уравнения с одним неизвестным во всех случаях при наличии могут быть только следующие три группы объединяемых выражений:

первую группу объединяемых выражений составляют собираемые вместе соответствующим частичным теоретико-множественным объединением все наличные экземпляры непременно одиночного единственного искомого неизвестного множества (отдельного без теоретико-множественных пересечений с производными множествами положительных целых порядков для единственного искомого неизвестного множества), дающие в целом именно в этом частичном теоретико-множественном объединении единственное искомое неизвестное множество при его наличии, а при его отсутствии опускаемое пустое множество;

вторую группу объединяемых выражений составляют собираемые вместе соответствующим частичным

теоретико-множественным объединением все наличные непременно одиночные (отдельные без теоретико-множественных пересечений с единственным искомым неизвестным множеством) производные множества положительных целых порядков для единственного искомого неизвестного множества, дающие в целом именно в этом частичном теоретико-множественном объединении при его непустоте производное множество наинизшего положительного целого порядка, наличного именно в этом частичном теоретико-множественном объединении, для единственного искомого неизвестного множества, а при пустоте именно этого частичного теоретико-множественного объединения опускаемое пустое множество;

третью группу объединяемых выражений составляют собираемые вместе соответствующим частичным теоретико-множественным объединением все наличные теоретико-множественные пересечения единственного искомого неизвестного множества с производными множествами положительных целых порядков для единственного искомого неизвестного множества, дающие в этом частичном теоретико-множественном объединении при его непустоте теоретико-множественное пересечение единственного искомого неизвестного множества с производным множеством наинизшего положительного целого порядка, наличного именно в этом частичном теоретико-множественном объединении, для единственного искомого неизвестного множества, а при пустоте именно

этого частичного теоретико-множественного объединения опускаемое пустое множество.

При этом используются действенность переместительного (коммутативного) и сочетательного (ассоциативного) законов для теоретико-множественных объединения и пересечения, действенность распределительного (дистрибутивного) закона для теоретико-множественного пересечения относительно теоретико-множественного объединения, равенство теоретико-множественного объединения любого даже бесконечного семейства одинаковых экземпляров этого множества самому этому множеству при непустоте этого семейства и пустому множеству при пустоте этого семейства, а также включаемость производных множеств более высоких

положительных целых порядков в производные множества более низких положительных целых порядков для единственного искомого неизвестного множества и сохранение нестрогого теоретико-множественного отношения включения при теоретико-множественных пересечениях обеих частей этого отношения с одним и тем же множеством.

Как указано выше, в настоящей научной монографии объединённое всеобщее определение целочастично (или целиком, или частично, в том числе или вообще, или только в данном случае) невозможного, отсутствующего, возможного, присутствующего, необходимого, влияющего, достаточного, преобразующего (или известного (определённого), или неизвестного (неопределённого))

предмета используется применительно к задачам, в частности подлежащим решению системам отношений, в том числе неравенств и равенств, включая уравнения, в особенности к каноническим единометрическим производным множественным уравнениям с одним неизвестным.

Определение. Частично возможным и необходимым уравнением называется уравнение, в котором могут быть некоторые части произвольных положительных целых порядков целочастичности возможными и/или некоторые части произвольных положительных целых порядков целочастичности необходимыми.

Определение. Частично возможным и необходимым приведённым каноническим единометрическим

производным множественным уравнением с одним неизвестным называется уравнение, правой частью которого является необходимое единственное известное заданное множество и в левой части которого теоретико-множественно объединяются возможные единственное искомое неизвестное множество, производное множество положительного целого порядка для единственного искомого неизвестного множества и теоретико-множественное пересечение единственного искомого неизвестного множества и производного множества положительного целого порядка для искомого единственного неизвестного множества.

Обозначение. Выражения необходимых частей положительных целых порядков целочастичности могут

быть выделены возможными левыми нижними указателями (индексами) как кванторами модальности необходимости, а именно парами 1§ из единицы как единичного количества предмета или части и из последующего знака параграфа §, например юридического с субъективной общественной необходимостью, или, равносильно (эквивалентно), одиночными знаками параграфа §. В парах 1§ можно опустить единицы и ограничиться одиночными знаками параграфа §.

Замечание. Кванторы модальности можно располагать не только возможными левыми нижними указателями (индексами), но и слева и/или справа от соответствующего предмета.

Обозначение. Выражения возможных частей положительных целых порядков целочастичности могут быть выделены возможными левыми нижними указателями (индексами) как кванторами модальности возможности, а именно вопросительными знаками ?.

Обозначение. Частично возможное и необходимое приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X имеет вид

$$X? \cup X^{(r)}? \cup ?X \cap X^{(s)}? = A§,$$

или

$$?X \cup ?X^{(r)} \cup ?(X \cap X^{(s)}) = §A,$$

или

$$_?X \cup {}_?X^{(r)} \cup {}_?(X \cap X^{(s)}) = {}_\S A$$

с положительными целыми числами r и s.

Замечание. Единственное искомое неизвестное множество X выделяется своим традиционным обозначением одной из последних букв латинского алфавита и не нуждается в возможном дополнительном выделении как квантором модальности неизвестности (неопределённости) ?§ парой ?§ из вопросительного знака ?, выражающего неясность (неизвестность, неопределённость), и последующего знака параграфа §, например юридического с субъективной общественной необходимостью, в данном случае необходимостью поиска неизвестного (неопределённого).

Замечание. Ввиду сочетания сразу нескольких знаков в объединяемом (вводимое название подобно названию слагаемого при сложении)

$$\mathbf{X \cap X^{(s)}}$$

не только перед ним, но и дополнительно после него используется выделяющий вопросительный знак ? как квантор модальности возможности, причём эта пара вопросительных знаков образует замену скобок. А если используются скобки, то достаточно одного вопросительного знака в нижнем указателе (индексе) слева или справа от скобок.

Замечание. Теоретико-множественное объединение левой части частично возможного и необходимого приведённого канонического единометрического производного

множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X содержит три возможных объединяемых

$$X, X^{(r)}, X \cap X^{(s)}$$

теоретико-множественным объединением, каждое из которых может или наличествовать, или отсутствовать. Это даёт два в кубе, то есть 8 различных сочетаний, которые могут быть рассмотрены по отдельности простым последовательным перебором. Однако эти объединяемые не являются независимыми друг от друга, причём могут иметь место именно полные поглощения друг другом с исчезновением объединяемых. Поэтому представляется целесообразным начать с исследования случая именно

пустоты теоретико-множественного объединения левой части частично возможного и необходимого приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X и продолжить рассмотрение именно логически и систематически с учётом взаимосвязей этих трёх возможных объединяемых применительно к их именно полным поглощениям друг другом с исчезновением объединяемых.

Обозначение. Приведённые кванторы модальностей (дополнительные знаки выделения) могут далее опускаться.

Обозначение. При непустоте теоретико-множественного объединения левой части частично возможного и необходимого приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X отсутствующие объединяемые опускаются.

Обозначение. При пустоте теоретико-множественного объединения левой части частично возможного и необходимого приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X это теоретико-множественное объединение

заменяется пустым множеством, а знак параграфа § после обозначения единственного заданного известного множества опускается:

$$\emptyset = A.$$

Определение. Вырожденным приведённым каноническим единометрическим производным множественным уравнением называется частично возможное и необходимое приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, которое при пустоте теоретико-множественного объединения своей левой части теряет это единственное неизвестное и приобретает вид

теоретико-множественного равенства пустого множества единственному заданному известному множеству:

$$\emptyset = A.$$

Теорема. Вырожденное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$\emptyset = A$$

при пустоте единственного заданного известного множества A имеет решением произвольное множество, а при непустоте единственного заданного известного множества A не имеет решений вовсе, то есть имеет пустое множество решений.

Доказательство.

При

$$A = \emptyset$$

вырожденное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$\emptyset = A$$

становится тождеством

$$\emptyset = \emptyset,$$

верным при любом единственном искомом неизвестном множестве X, поскольку вообще не зависит от X.

При

$$A \neq \emptyset$$

вырожденное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$\emptyset = A$$

становится формальным теоретико-множественным равенством

$$\emptyset = A,$$

неверным при любом единственном искомом неизвестном множестве X, поскольку вообще не зависит от X.

Остаётся вновь привести указанное ранее следствие.

Следствие. Если подлежащее решению уравнение равносильно (эквивалентно) полностью определённому равенству без неизвестных, то в случае действенности, или выполненности, или верности, отношения формального равенства этого полностью определённого равенства без неизвестных совокупным решением как множеством всевозможных частных решений подлежащего решению уравнения является множество всевозможных сочетаний произвольных допустимых значений всех неизвестных подлежащего решению уравнения в его именно изначально

заданном виде, а в случае недейственности, или невыполненности, или неверности, отношения формального равенства этого полностью определённого равенства без неизвестных совокупным решением подлежащего решению уравнения является именно пустое множество, то есть подлежащее решению уравнение вовсе не имеет решений.

Тем самым доказательство теоремы полностью завершено.

Замечание. Тем самым рассмотрение именно вырожденного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения

$$\emptyset = A$$

полностью завершено, и в дальнейшем достаточно ограничиться всевозможными случаями невырожденности

частично возможного и необходимого приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющего вид

$$?X \cup ?X^{(r)} \cup ?X \cap X^{(s)}? = \S A$$

с положительными целыми числами r и s.

При этом целесообразно предварительно рассмотреть всевозможные непременно общие случаи именно полного поглощения отдельных первоначально наличных объединяемых теперь уже заведомо именно непустого теоретико-множественного объединения левой части этого уравнения.

Теорема. Если в левой части частично возможного и необходимого приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющего вид

$$X? \cup X^{(r)}? \cup ?X \cap X^{(s)}? = A§$$

с положительными целыми числами r и s, наличествует единственное искомое неизвестное множество X, то даже при наличии его теоретико-множественного пересечения

$$X \cap X^{(s)}$$

с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного положительного целого порядка s для этого единственного искомого неизвестного множества X это теоретико-

множественное пересечение именно полностью поглощается единственным искомым неизвестным множеством X и может вообще не учитываться.

Доказательство.

Действительно, по общему определению теоретико-множественного пересечения произвольных множеств каждый элемент этого теоретико-множественного пересечения непременно принадлежит каждому из этих множеств. Следовательно, это теоретико-множественное пересечение включено в каждое из этих множеств. В частности, отсюда следует теоретико-множественное включение

$$\mathbf{X \cap X^{(s)} \subseteq X},$$

что и требовалось доказать.

Теорема. В левой части частично возможного и необходимого приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющего вид

$${}_{?}X \cup {}_{?}X^{(r)} \cup {}_{?}(X \cap X^{(s)}) = {}_{\S}A$$

с положительными целыми числами r и s, именно все три возможных объединяемых

$$X,\ X^{(r)},\ X \cap X^{(s)}$$

теоретико-множественным объединением не могут быть общезначимыми.

Доказательство. Используется метод от противоречащего.

Пусть именно все три возможных объединяемых

$$X,\ X^{(r)},\ X \cap X^{(s)}$$

теоретико-множественным объединением в левой части частично возможного и необходимого приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющего вид

$${}_{?}X \cup {}_{?}X^{(r)} \cup {}_{?}(X \cap X^{(s)}) = {}_{\S}A$$

с положительными целыми числами r и s, являются общезначимыми.

Тогда по определению общезначимости как действительной влиятельности имеют место два следствия.

Во-первых, все эти три возможных объединяемых

$$X,\ X^{(r)},\ X \cap X^{(s)}$$

непременно наличествуют в этом уравнении, которое при этом принимает вид

$$ {}_1X \cup {}_1X^{(r)} \cup {}_1(X \cap X^{(s)}) = {}_{\S}A $$

с положительными целыми числами r и s.

Во-вторых, ни одно из этих трёх объединяемых

$$ X,\ X^{(r)},\ X \cap X^{(s)} $$

не поглощается именно полностью остальными двумя объединяемыми, поскольку оно в противоречащем этому случае было бы в действительности именно полностью поглощено и не оказывало бы никакого влияния на это уравнение, то есть не было бы общезначимым вопреки условию теоремы.

Однако именно наличное в этом уравнении единственное искомое неизвестное множество X по предыдущей теореме

непременно полностью поглощает теоретико-множественное пересечение

$$X \cap X^{(s)}$$

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного положительного целого порядка s для этого единственного искомого неизвестного множества X.

Поэтому это теоретико-множественное пересечение

$$X \cap X^{(s)},$$

несмотря на его наличие в уравнении, не является общезначимым вопреки условию настоящей теоремы.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание. В приведённом доказательстве только общезначимость теоретико-множественного пересечения

$$X \cap X^{(s)}$$

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного положительного целого порядка s для этого единственного искомого неизвестного множества X используется полностью. Вместо общезначимости единственного искомого неизвестного множества X используется лишь следующее из неё его наличие. А производное множество $X^{(r)}$ произвольного положительного целого порядка r для этого единственного искомого неизвестного множества X именно отдельно не рассматривается вообще. Поэтому последнюю теорему существенно усиливает путём её необычного обобщения следующая теорема.

Теорема. Если в левой части частично возможного и необходимого приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющего вид

$$_?X \cup {}_?X^{(r)} \cup {}_?(X \cap X^{(s)}) = {}_§A$$

с положительными целыми числами r и s, является общезначимым теоретико-множественное пересечение

$$X \cap X^{(s)}$$

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного положительного целого порядка s для этого единственного искомого неизвестного множества X, то единственное

искомое неизвестное множество X не может наличествовать в этом уравнении.

Доказательство. Используется метод от противоречащего. Пусть в левой части частично возможного и необходимого приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющего вид

$$_?X \cup {}_?X^{(r)} \cup {}_?(X \cap X^{(s)}) = {}_§A$$

с положительными целыми числами r и s, является общезначимым теоретико-множественное пересечение

$$X \cap X^{(s)}$$

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного

положительного целого порядка s для этого единственного искомого неизвестного множества X, а единственное искомое неизвестное множество X именно наличествует в этом уравнении, которое при этом принимает вид

$$ {}_{1}X \cup {}_{?}X^{(r)} \cup {}_{\&}(X \cap X^{(s)}) = {}_{\S}A $$

с положительными целыми числами r и s.

Тогда по определению общезначимости как действительной влиятельности теоретико-множественное пересечение

$$ X \cap X^{(s)} $$

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного положительного целого порядка s для этого единственного искомого неизвестного множества X непременно наличествует вместе с единственным искомым

неизвестным множеством X в этом уравнении, которое при этом принимает вид

$$_1X \cup {}_?X^{(r)} \cup {}_1(X \cap X^{(s)}) = {}_§A$$

с положительными целыми числами r и s.

Но тогда, как доказано выше, теоретико-множественное пересечение

$$X \cap X^{(s)}$$

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного положительного целого порядка s для этого единственного искомого неизвестного множества X именно полностью поглощается единственным искомым неизвестным множеством X в этом уравнении вследствие теоретико-множественного включения

$$X \cap X^{(s)} \subseteq X$$

и поэтому не оказывает никакого подлинного влияния на это уравнение и не может быть общезначимым.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема. Если в левой части частично возможного и необходимого приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющего вид

$${}_?X \cup {}_?X^{(r)} \cup {}_?(X \cap X^{(s)}) = {}_§A$$

с положительными целыми числами r и s, наличествует непременно одиночное (без теоретико-множественных пересечений) производное множество $X^{(r)}$ произвольного

положительного целого порядка r для этого единственного искомого неизвестного множества X, то даже при наличии теоретико-множественного пересечения

$$\mathbf{X \cap X^{(s)}}$$

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного положительного целого порядка s, не меньшего, чем положительный целый порядок r, для этого единственного искомого неизвестного множества X это теоретико-множественное пересечение именно полностью поглощается этим одиночным (без теоретико-множественных пересечений) производным множеством $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для этого единственного

искомого неизвестного множества X и может вообще не учитываться.

Доказательство.

Действительно, по общему определению теоретико-множественного пересечения произвольных множеств каждый элемент этого теоретико-множественного пересечения непременно принадлежит каждому из этих множеств. Следовательно, это теоретико-множественное пересечение включено в каждое из этих множеств. В частности, отсюда следует теоретико-множественное включение

$$\mathbf{X \cap X^{(s)} \subseteq X^{(s)}.}$$

Положительный целый порядок s не меньше, чем положительный целый порядок r. Отсюда следует теоретико-множественное включение

$$\mathbf{X^{(s)} \subseteq X^{(r)}.}$$

Для теоретико-множественного отношения включения является действенным закон переносности (транзитивности). Поэтому из двух предыдущих теоретико-множественных включений в итоге следует теоретико-множественное включение

$$\mathbf{X \cap X^{(s)} \subseteq X^{(r)},}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Между тремя возможными объединяемыми

$$\mathbf{X,\ X^{(r)},\ X \cap X^{(s)}}$$

теоретико-множественным объединением в левой части частично возможного и необходимого приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющего вид

$$_?X \cup {}_?X^{(r)} \cup {}_?(X \cap X^{(s)}) = {}_\S A$$

с положительными целыми числами r и s, есть три взаимных бинарных отношения. При этом подлежит рассмотрению только общий случай. Два из этих трёх бинарных отношений рассмотрены выше последними двумя теоремами. Остаётся третье бинарное отношение между единственным искомым неизвестным множеством X и производным множеством $X^{(r)}$ произвольного

положительного целого порядка r для этого единственного искомого неизвестного множества X.

Теорема. Бинарное отношение между единственным искомым неизвестным множеством X и производным множеством $X^{(r)}$ произвольного положительного целого порядка r для этого единственного искомого неизвестного множества X ни при каком непременно положительном целом порядке r не даёт устойчивого непременно общего отношения теоретико-множественного включения между этими двумя множествами ни в одну из сторон.

Доказательство.

Для доказательства этого общего утверждения вполне достаточны два частных примера.

Во-первых, любое непустое множество изолированных точек включает пустое множество, которому равно производное множество произвольного непременно положительного целого порядка для этого непустого множества изолированных точек, тогда как обратное теоретико-множественное включение этого непустого множества изолированных точек в пустое множество очевидным образом не имеет места.

Во-вторых, всюду частое (всюду плотное) на всей действительной оси множество всех рациональных чисел включено в производное множество произвольного непременно положительного целого порядка для этого всюду частого (всюду плотного) множества, равное множеству именно всех действительных чисел, тогда как

обратное теоретико-множественное включение этого множества именно всех действительных чисел в множество всех рациональных чисел очевидным образом не имеет места.

Тем самым теорема доказана.

Замечание. Значимость теоремы, использующей очевидное теоретико-множественное включение теоретико-множественного пересечения

$$X \cap X^{(s)}$$

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного положительного целого порядка s для этого единственного искомого неизвестного множества X в единственное искомое неизвестное множество X, заключается в

доказательстве того, что разветвление существенно различных общих видов частично возможного и необходимого приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющего наиболее общий вид

$$_?X \cup {}_?X^{(r)} \cup {}_?(X \cap X^{(s)}) = {}_§A$$

с положительными целыми числами r и s, на деле сводится к следующему раздвоению.

1. Теоретико-множественное пересечение

$$X \cap X^{(s)}$$

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного положительного целого порядка s для этого единственного искомого неизвестного множества X является общезначимым. Тогда в частично возможном и необходимом приведённом каноническом единометрическом производном множественном уравнении с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющем наиболее общий вид

$$_?X \cup {}_?X^{(r)} \cup {}_?(X \cap X^{(s)}) = {}_§A$$

с положительными целыми числами r и s, непременно отсутствует единственное искомое неизвестное множество X как объединяемое. Поэтому уравнение принимает общий вид

$$_{0\S}X \cup {}_{?}X^{(r)} \cup {}_{\&}(X \cap X^{(s)}) = {}_{\S}A,$$

$$_{?}X^{(r)} \cup {}_{\&}(X \cap X^{(s)}) = {}_{\S}A$$

с положительными целыми числами r и s и может быть названо ввиду наличия теоретико-множественного пересечения пересечённым или по сходству с обыкновенными дифференциальными уравнениями (с произведением единственной искомой функции на её производную положительного целого порядка) нелинейным. Теоретико-множественное пересечение

$$X \cap X^{(s)}$$

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного положительного целого порядка s для этого единственного искомого неизвестного множества X непременно

наличествует в этом уравнении. А производное множество $X^{(r)}$ произвольного положительного целого порядка r для этого единственного искомого неизвестного множества X может либо наличествовать, либо отсутствовать. Это даёт две различные возможности. Если наличествует только теоретико-множественное пересечение

$$X \cap X^{(s)}$$

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного положительного целого порядка s для этого единственного искомого неизвестного множества X, то уравнение

$$X \cap X^{(s)} = A$$

называется неполным и подлежит дальнейшему исследованию. Если наличествуют и теоретико-множественное пересечение

$$X \cap X^{(s)}$$

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного положительного целого порядка s для этого единственного искомого неизвестного множества X, и производное множество $X^{(r)}$ произвольного положительного целого порядка r для этого единственного искомого неизвестного множества X, то уравнение

$$X^{(r)} \cup X \cap X^{(s)} = A$$

называется полным и подлежит дальнейшему исследованию.

При этом в последнем уравнении $r > s$, поскольку в противоречащем случае $r \leq s$ теоретико-множественное пересечение $X \cap X^{(s)}$ полностью поглощается производным множеством $X^{(r)}$ произвольного положительного целого порядка r для этого единственного искомого неизвестного множества X по соответствующей теореме. Для наглядности выражения неравенства $r > s$ самим обозначением уравнения представляется целесообразным в этом и в других уравнениях,

поскольку они подлежат исследованию именно поодиночке, единообразно обозначать наименьший наличный порядок производного множества положительным целым числом k как порядком уравнения, а в случае наличия не более чем единственный возможный более высокий порядок производного множества суммой этого числа k и положительного целого числа p как превышения большего порядка над меньшим порядком и считать упорядоченную пару (k, p) двойным положительным целым порядком уравнения.

2. Теоретико-множественное пересечение

$$X \cap X^{(s)}$$

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного положительного целого порядка s для этого единственного искомого неизвестного множества X не является общезначимым, не оказывает никакого подлинного влияния на уравнение и может быть опущено. Тогда именно равносильным (эквивалентным) преобразованием частично возможного и необходимого приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющего наиболее общий вид

$$_?X \cup {}_?X^{(r)} \cup {}_?(X \cap X^{(s)}) = {}_\S A$$

с положительными целыми числами r и s, является отсутствие теоретико-множественного пересечения

$$X \cap X^{(s)}$$

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(s)}$ произвольного положительного целого порядка s для этого единственного искомого неизвестного множества X. Поэтому уравнение принимает общий вид

$$_?X \cup {}_?X^{(r)} = {}_\S A$$

с положительным целым числом r и может быть названо ввиду отсутствия теоретико-множественного пересечения непересечённым или по сходству с обыкновенными дифференциальными уравнениями (без превышающих

первую степеней и без произведений единственной искомой функции и её производных положительных целых порядков) линейным. Каждое из двух объединяемых

$$X,\ X^{(r)}$$

независимо от другого из них может либо наличествовать, либо отсутствовать. Это даёт два в квадрате, то есть четыре различных сочетания. Вырожденный случай

$$\emptyset = A$$

отсутствия обоих объединяемых полностью исследован выше и может далее не

рассматриваться. Если наличествует только единственное искомое неизвестное множество X, то уравнение сразу приобретает уже разрешённый вид

$$X = A$$

без производных множеств, имеет единственное решение

$$X = A,$$

называется разрешённым и может далее не рассматриваться. Если наличествует только производное множество $X^{(r)}$ произвольного положительного целого порядка r для этого

единственного искомого неизвестного множества X, то уравнение

$$X^{(r)} = A$$

называется неполным и подлежит дальнейшему исследованию. Если наличествуют и единственное искомое неизвестное множество X, и производное множество $X^{(r)}$ произвольного положительного целого порядка r для этого единственного искомого неизвестного множества X, то уравнение

$$X \cup X^{(r)} = A$$

называется полным и подлежит дальнейшему исследованию.

В итоге подлежат дальнейшему исследованию следующие уравнения:

неполное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$X^{(k)} = A$$

произвольного положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X;

полное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$X \cup X^{(k)} = A$$

произвольного положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X;

неполное нелинейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$X \cap X^{(k)} = A$$

произвольного положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X;

полное нелинейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A$$

произвольного двойного положительного целого порядка (k, p) с единственным заданным известным

множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Замечание. Завершённое совместное рассмотрение канонических единометрических производных множественных уравнений лишь в итоге привело к разделению линейных и нелинейных уравнений. Однако в принципе возможно, что и осуществляется в дальнейших разделах настоящей научной монографии, именно с самого начала раздельное рассмотрение линейных и нелинейных канонических единометрических производных множественных уравнений после раскрытия всех

скобок в левой части канонического единометрического производного множественного уравнения, теоретико-множественного поглощения подобных и упорядочения промежуточных итогов такого частичного приведения этого уравнения. Его приведение продолжается до конца именно раздельно по линейным и нелинейным каноническим единометрическим производным множественным уравнениям и, разумеется, указывает именно эти приведённые выше четыре типа неполных и полных линейных и нелинейных приведённых канонических единометрических производных множественных уравнений, подлежащие дальнейшему исследованию, которое там же и продолжается.

22. ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ЕДИНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ МНОЖЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Определение. Линейным каноническим единометрическим производным множественным уравнением неотрицательного целого порядка k, положительного при наличии производных множеств положительных целых порядков для единственного искомого неизвестного множества X, с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X называется каноническое единометрическое производное множественное уравнение вида

$$_1({}_?X \cup {}_?X^{(k)} \cup {}_?X^{(k+1)} \cup \ldots \cup {}_?X^{(n-1)} \cup {}_?X^{(n)}) = {}_\S A,$$

в котором для неотрицательных целых чисел n и k выполнено двойное неравенство

$$0 \leq k \leq n,$$

с непременным наличием единственного заданного известного множества A, составляющего правую часть уравнения, и с левой частью как непременно непустым (именно это достигается взятием теоретико-множественного объединения возможных объединяемых в круглые скобки с квантором модальности присутствия 1) теоретико-множественным объединением возможных единственного искомого неизвестного множества X и производных множеств положительных целых порядков для единственного искомого неизвестного множества X с возрастанием этих порядков при перечислении, указанием

производных множеств наименьшего k, положительного при наличии производных множеств положительных целых порядков для единственного искомого неизвестного множества X, и наибольшего n наличных порядков и возможными пропусками производных множеств промежуточных порядков.

Следствие. Если множество строго положительных целых порядков непременно наличных в уравнении производных множеств для единственного искомого неизвестного множества X является непустым, то как вполне упорядоченное обязательно имеет первый элемент, которым и является именно положительное целое число k.

Следствие. Если множество строго положительных целых порядков непременно наличных в уравнении производных

множеств для единственного искомого неизвестного множества X является пустым, то левая часть линейного канонического единометрического производного множественного уравнения неотрицательного целого порядка k уравнения целиком сводится к единственному искомому неизвестному множеству X, являющемуся для самого себя производным множеством именно нулевого порядка, так что неотрицательное целое число k равно нулю.

Замечание. Посредством кванторов модальностей может достигаться и выражаться переменность участия и действенности частей в предмете и тем самым переменность произвольного предмета.

Теорема. Если левая часть линейного канонического единометрического производного множественного уравнения неотрицательного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X целиком сводится к единственному искомому неизвестному множеству X, то порядок k линейного канонического единометрического производного множественного уравнения равен нулю.

Доказательство.

Действительно, произвольное множество, в частности единственное искомое неизвестное множество X, является именно для себя производным множеством нулевого порядка.

Замечание. Если порядок линейного дифференциального уравнения определяется высшим порядком наличных производных, то порядок линейного канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X определяется низшим порядком наличных производных множеств положительных порядков при их наличии, поскольку, как будет показано здесь, при теоретико-множественном объединении производное множество любого положительного порядка полностью поглощает все производные множества более высоких порядков для того же произвольного метрического множества.

Замечание. Предыдущее замечание имеет, во-первых, целесообразную для восприятия форму кажущейся причинно-следственной связи, вполне отсутствующей на деле, а во-вторых, содержание наличного отрицательного параллелизма, или противопоставления, опирающееся на чрезвычайно полезный для понимания и запоминания наличный опыт в области широко известных линейных дифференциальных уравнений. Подобное умышленное использование формы кажущейся причинно-следственной связи не только допустимо и полезно, но и достаточно обычно и типично. Один из бесконечного множества возможных примеров: «Если язык науки преимущественно сух и точен, то язык художественной литературы силён художественной образностью и метафоричностью.» В обоих

приведённых случаях явное отсутствие именно содержательной причинно-следственной связи очевидно немедленно без всякого семантического анализа. Разумеется, не составляет труда в предыдущем замечании привести его форму в соответствие с его содержанием. Например: «В отличие от линейного дифференциального уравнения, порядок которого определяется высшим порядком наличных производных, порядок линейного канонического единометрического производного множественного уравнения определяется низшим порядком наличных производных множеств положительных порядков при их наличии, поскольку, как будет показано здесь, при теоретико-множественном объединении производное множество любого положительного порядка

полностью поглощает все производные множества более высоких порядков для того же произвольного метрического множества.» Однако ограниченность синтаксических средств этого равносильного (эквивалентного) предложения, в частности явная смысловая неравновесность одной только второй именно противопоставляющей запятой и всех остальных запятых, чрезвычайно мешает лёгкости восприятия желанного отрицательного параллелизма, или противопоставления. Заодно ярко показывается бесконечное богатство языка при ужасающей бедности всего лишь двоичной формальной логики, необходимой и полезной для безыдейного низкоуровневого искусственного рассудка, бесконечно далёкого от подлинного интеллекта, однако дающей явно

неприемлемую чёрно-белую картину мира даже без градаций серого цвета. Разумеется, вполне возможны и другие правильные формы выражения содержания наличного отрицательного параллелизма, или противопоставления, например: «Порядок линейного дифференциального уравнения определяется высшим порядком наличных производных, а порядок линейного канонического единометрического производного множественного уравнения с одним неизвестным определяется низшим порядком наличных производных множеств положительных порядков при их наличии, поскольку, как будет показано здесь, при теоретико-множественном объединении производное множество любого положительного порядка полностью поглощает все

производные множества более высоких порядков для того же произвольного метрического множества.» Однако по сравнению с этой формой использованная форма кажущейся причинно-следственной связи имеет явные, очевидные и неоспоримые преимущества двухчастности с наличием заявки первой частью именно в самом начале, что сразу бросается в глаза, чего нельзя сказать о кратчайшем союзе «а» на месте в глубине предложения, далеко не самом удобном для сосредоточения внимания, восприятия, понимания и запоминания. Поэтому лучше разбить одно предложение на следующие два предложения: «Порядок линейного дифференциального уравнения определяется высшим порядком наличных производных. А порядок линейного канонического единометрического

производного множественного уравнения с одним неизвестным определяется низшим порядком наличных производных множеств положительных порядков при их наличии, поскольку, как будет показано здесь, при теоретико-множественном объединении производное множество любого положительного порядка полностью поглощает все производные множества более высоких порядков для того же произвольного метрического множества.»

Следствие. Если в последнем определении имеет место равенство

$$k = n = 0,$$

то сразу получается разрешённое линейное приведённое каноническое единометрическое производное

множественное уравнение нулевого порядка с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющее вид

$$X = A$$

с единственным решением

$$X = A.$$

Следствие. Если в последнем определении и именно присутствует (наличествует) единственное искомое неизвестное множество X, и имеет место равенство с непременной положительностью

$$k = n \geq 1,$$

то сразу получается полное линейное приведённое каноническое единометрическое производное

множественное уравнение положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющее вид

$$X \cup X^{(k)} = A.$$

Следствие. Если в последнем определении именно отсутствует единственное искомое неизвестное множество X и имеет место равенство с непременной положительностью

$$k = n \geq 1,$$

то сразу получается неполное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с

единственным искомым неизвестным множеством X, имеющее вид

$$X^{(k)} = A.$$

Теорема. Если в последнем определении имеет место двойное строгое неравенство

$$0 < k < n,$$

то полное линейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X равносильно (эквивалентно) куда более простому полному линейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению положительного целого порядка k с единственным заданным известным

множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющему вид

$$X \cup X^{(k)} = A.$$

Доказательство. По доказанной выше теореме имеет место иерархия вложенных в предыдущие последовательных производных множеств всех положительных целых порядков. Для произвольного метрического множества X последовательность производных множеств всех положительных целых порядков с возрастанием этих порядков является не расширяющейся по отношению теоретико-множественного включения:

$$X^{(1)} \supseteq X^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(k)} \supseteq X^{(k+1)} \supseteq X^{(k+2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(n-1)} \supseteq X^{(n)} \supseteq \ldots .$$

В частности,

$$X^{(k+1)} \subseteq X^{(k)},$$

$$X^{(k+2)} \subseteq X^{(k)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X^{(n-1)} \subseteq X^{(k)},$$

$$X^{(n)} \subseteq X^{(k)}.$$

Отсюда следует, что теоретико-множественное объединение производных множеств положительных целых порядков для произвольного метрического множества равно производному множеству наименьшего наличного положительного порядка для этого произвольного метрического множества. В итоге рассматриваемое

полное линейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$X \cup X^{(k)} \cup X^{(k+1)} \cup \ldots \cup X^{(n-1)} \cup X^{(n)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X равносильно (эквивалентно) куда более простому полному линейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным искомым неизвестным множеством X, что и требовалось доказать.

22.1. ТЕОРИЯ НЕПОЛНЫХ ЛИНЕЙНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ЕДИНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ МНОЖЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Определение. Неполным линейным каноническим единометрическим производным множественным уравнением положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X называется каноническое единометрическое производное множественное уравнение вида

$$_1({}_?X^{(k)} \cup {}_?X^{(k+1)} \cup \ldots \cup {}_?X^{(n-1)} \cup {}_?X^{(n)}) = {}_§A$$

с непременным отсутствием самого единственного искомого неизвестного множества X, причём также для целого числа n выполнено двойное неравенство

$$1 \leq k \leq n,$$

с непременным наличием и единственного заданного известного множества A, составляющего правую часть уравнения, и непременно непустого теоретико-множественного объединения возможных производных множеств положительных целых порядков для единственного искомого неизвестного множества X, при наличии перечисленных с возрастанием этих порядков, указанием производных множеств наименьшего k и наибольшего n наличных порядков и возможными пропусками производных множеств промежуточных порядков.

Замечание. Если порядок линейного дифференциального уравнения определяется высшим порядком наличных производных, то порядок неполного линейного канонического единометрического производного множественного уравнения с одним неизвестным определяется низшим порядком наличных производных множеств, поскольку, как показано, при теоретико-множественном объединении производное множество любого положительного порядка поглощает все производные множества более высоких порядков для того же произвольного метрического множества.

Следствие. Если в последнем определении имеет место равенство

$$\mathbf{k = n,}$$

то сразу получается неполное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющее вид

$$X^{(k)} = A.$$

Теорема. Если в последнем определении имеет место строгое неравенство

$$k < n,$$

то неполное линейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение положительного целого порядка k

$${}_1({}_?X^{(k)} \cup {}_?X^{(k+1)} \cup \dots \cup {}_?X^{(n-1)} \cup {}_?X^{(n)}) = {}_\S A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X равносильно (эквивалентно) куда более простому неполному линейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющему вид

$$X^{(k)} = A.$$

Доказательство. По доказанной выше теореме имеет место иерархия вложенных в предыдущие последовательных производных множеств положительных целых порядков. Для произвольного метрического множества X

последовательность производных множеств всех положительных целых порядков с возрастанием этих порядков является не расширяющейся по отношению теоретико-множественного включения:

$$\mathbf{X^{(1)} \supseteq X^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(k)} \supseteq X^{(k+1)} \supseteq X^{(k+2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(n-1)} \supseteq X^{(n)} \supseteq \ldots}\ .$$

В частности,

$$\mathbf{X^{(k+1)} \subseteq X^{(k)}},$$
$$\mathbf{X^{(k+2)} \subseteq X^{(k)}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{X^{(n-1)} \subseteq X^{(k)}},$$
$$\mathbf{X^{(n)} \subseteq X^{(k)}}.$$

Отсюда следует, что теоретико-множественное объединение производных множеств положительных целых порядков для произвольного метрического множества равно

производному множеству наименьшего наличного положительного целого порядка для этого произвольного метрического множества.

В итоге рассматриваемое неполное линейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение положительного целого порядка k

$$X^{(k)} \cup X^{(k+1)} \cup \ldots \cup X^{(n-1)} \cup X^{(n)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X равносильно (эквивалентно) куда более простому неполному линейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, что и требовалось доказать.

Теорема. Для разрешимости неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, то есть для существования интегрального множества положительного целого порядка k от единственного заданного известного множества A, то есть для его множественной интегрируемости положительного целого

порядка k, необходима и во всюду частом (всюду плотном) метрическом пространстве, обеспечивающем непустоту каждой проколотой (лишённой выброшенного центра) окрестности каждой точки этого пространства, необходима и достаточна замкнутость единственного заданного известного множества A.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть неполное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X

разрешимо, то есть интегральное множество положительного целого порядка k от единственного заданного известного множества A существует, то есть единственное заданное известное множество A множественно интегрируемо положительного целого порядка k.

По теории множеств Кантора все производные множества положительных целых порядков для произвольного метрического множества, в том числе и производное множество $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для произвольного метрического множества X, непременно замкнуты.

Но тогда согласно неполному линейному приведённому каноническому единометрическому производному

множественному уравнению положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X замкнуто и равное производному множеству $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для произвольного метрического множества X единственное заданное известное множество A, чем необходимость и доказана.

Достаточность.

Пусть во всюду частом (всюду плотном) метрическом пространстве, обеспечивающем непустоту каждой проколотой (лишённой выброшенного центра) окрестности

каждой точки этого пространства, единственное заданное известное множество A замкнуто.

Но тогда единственное заданное известное множество A по теореме Кантора–Бендиксона, которая обобщена первой теоремой Линделёфа на произвольные топологические пространства со счётной базой, в том числе на их частный случай счётно частых (счётно плотных, сепарабельных) метрических пространств, является теоретико-множественным разбиением как теоретико-множественным объединением непересекающихся своего непустого совершенного подмножества A_C (которое может быть пустым множеством) всех своих точек сгущения (конденсации), которые можно назвать несчётно бесконечно предельными точками, своего не более чем

счётно бесконечного подмножества A_L (которое может быть пустым множеством) всех своих именно и только собственных предельных точек (то есть принадлежащих множеству A), не являющихся несчётно бесконечно предельными точками, и своего не более чем счётно бесконечного подмножества A_J всех своих отдельных (непредельных, изолированных) точек (которое может быть пустым множеством):

$$A = A_C \cup A_L \cup A_J;$$

$$A_C \cap A_L = A_C \cap A_J = A_L \cap A_J = \emptyset;$$

$$A_C =? \emptyset;$$

$$A_L =? \emptyset;$$

$$A_J =? \emptyset.$$

Для доказательства достаточности можно ограничиться методом построения какого-нибудь решения неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X или даже просто указанием хотя бы одного решения этого уравнения.

По теории множеств Кантора производное множество любого положительного целого порядка для произвольного совершенного множества равно самому этому совершенному множеству. Поэтому произвольное

совершенное множество является одним из интегральных множеств любого положительного целого порядка от себя самого, то есть именно от этого произвольного совершенного множества. В частности, таково и совершенное подмножество A_C множества A, следовательно, могущее быть включено в единственное искомое неизвестное множество X как сохраняемое производным множеством $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для произвольного метрического множества X.

Замечание. Теоретико-множественное включение в произвольное множество любого совершенного множества достаточно для того, чтобы производное множество любого положительного целого порядка для этого произвольного множества включало это совершенное множество, однако

не является необходимым. Для доказательства этого общего утверждения вполне достаточен частный контрпример. Множество всех рациональных чисел вообще не включает ни одного совершенного подмножества. Однако производное множество любого положительного целого порядка для множества всех рациональных чисел, всюду частого (всюду плотного) во множестве всех действительных чисел, есть множество всех действительных чисел, которое является совершенным множеством. Отсутствие такой необходимости создаёт возможность существования иерархии достаточных условий и их ослабления. В данном случае на самом деле вполне достаточно включить в решение уравнения не целиком это совершенное множество как достигаемый

теоретико-множественный максимум этой достаточности, а любое как угодно, в частности бесконечно, разрежаемое всюду частое (всюду плотное) подмножество этого совершенного множества. Ввиду произвольности такого разрежения не существует теоретико-множественный минимум этой достаточности.

Пример.

Примером такого допустимого сколь угодно большого конечного разрежения множества всех рациональных чисел с сохранением всюду частоты (всюду плотности) во множестве всех действительных чисел является оставление только таких представляющих рациональные числа обыкновенных дробей, числители которых сравнимы с единицей по модулю, который может быть выбран

произвольным сколь угодно большим положительным целым числом. Поскольку доля одной лишь только единицы во множестве всевозможных неотрицательных целых остатков от нуля до этого модуля, уменьшенного на единицу, равна единице, делённой на этот модуль, то можно принять эту долю за оценку доли оставляемых рациональных чисел из всех рациональных чисел. Всюду частота (всюду плотность) этого подмножества оставляемых рациональных чисел во множестве всех действительных чисел очевидна. А именно, берутся произвольное действительное число и произвольная его окрестность в естественной линейной метрике. Радиус этой окрестности уменьшается вдвое. Ввиду всюду частоты (всюду плотности) множества всех рациональных чисел во

множестве всех действительных чисел существует рациональное число в уменьшенной окрестности этого действительного числа, радиус которой равен этой половине радиуса первоначально взятой произвольной окрестности. И числитель, и знаменатель обыкновенной дроби, представляющей это рациональное число, одновременно умножаются на непременно одинаковые всевозможные кратные этого модуля, после этого добавляется по единице ко всем числителям и получаются дроби, принадлежащие подмножеству оставляемых рациональных чисел и по абсолютной величине отличающиеся от этого рационального числа на единицу, делённую на абсолютные величины знаменателей получаемых дробей, могущие быть сделаны сколь угодно

большими и тем самым обеспечить сколь угодно малые названные отличия. По неравенству треугольника, которому по определению удовлетворяет любая метрика в метрическом пространстве, достаточно добиться названного отличия, по абсолютной величине меньшего названной половины радиуса, чтобы соответствующая оставленная обыкновенная дробь непременно принадлежала любой первоначально взятой окрестности любого первоначально взятого действительного числа. Поэтому по общему определению всюду частоты (всюду плотности) подмножество оставленных рациональных чисел всюду часто (всюду плотно) во множестве всех действительных чисел.

Пример.

Примером такого допустимого бесконечного разрежения множества всех рациональных чисел с сохранением всюду частоты (всюду плотности) во множестве всех действительных чисел является оставление только таких представляющих рациональные числа обыкновенных дробей, знаменатели которых являются степенями числа 10 с неотрицательными целыми показателями. Поскольку доля таких степеней среди положительных целых чисел от единицы до одной из таких степеней равна увеличенному на единицу показателю этой степени, делённому на эту степень, и при бесконечном увеличении этого показателя стремится к нулю справа, то можно принять эту долю за оценку доли оставляемых рациональных чисел из всех рациональных чисел. Всюду частота (всюду плотность)

этого подмножества оставляемых рациональных чисел во множестве всех действительных чисел очевидна, поскольку это подмножество есть множество, состоящее из нуля и именно всех конечных положительных и отрицательных правильных и неправильных десятичных дробей, в совокупности бесконечными множествами правильных выборов дающих всевозможные десятичные приближения с недостатком и избытком всех действительных чисел с любой точностью.

После этих замечания и двух примеров продолжается доказательство достаточности условия теоремы.

Созданный общий метод решения произвольных линейных канонических единометрических производных множественных уравнений с одним неизвестным по частям,

которые являются подмножествами, влечёт как свой частный случай общий метод решения неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X по частям, которые являются подмножествами, то есть общий метод множественного интегрирования произвольного положительного целого порядка. Сущность этого общего метода заключается в следующем.

Пусть единственное заданное известное замкнутое множество A представимо в виде своего теоретико-

множественного разбиения как теоретико-множественного объединения своих непересекающихся замкнутых подмножеств A_1, A_2 и A_3, причём любое из этих трёх подмножеств может быть и пустым множеством:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3;$$

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \varnothing;$$

$$A_1 =? \varnothing;$$

$$A_2 =? \varnothing;$$

$$A_3 =? \varnothing.$$

Пусть множество X_1 является каким-нибудь решением неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A_1$$

с единственным заданным известным множеством A_1 и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Пусть множество X_2 является каким-нибудь решением неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A_2$$

с единственным заданным известным множеством A_2 и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Пусть множество X_3 является каким-нибудь решением неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A_3$$

с единственным заданным известным множеством A_3 и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Тогда теоретико-множественное объединение следствий

$$X_1^{(k)} = A_1,$$

$$X_2^{(k)} = A_2$$

$$X_3^{(k)} = A_3$$

трёх последних допущений даёт

$$X_1^{(k)} \cup X_2^{(k)} \cup X_3^{(k)} = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

$$(X_1 \cup X_2 \cup X_3)^{(k)} = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

то есть множество

$$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$$

является каким-нибудь решением неполного линейного приведённого канонического единометрического

производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

с единственным заданным известным множеством $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ и с единственным искомым неизвестным множеством X.

В данном случае имеют место теоретико-множественные равенства

$$A_1 = A_C,$$

$$A_2 = A_L,$$

$$A_3 = A_J,$$

$$A = A_C \cup A_L \cup A_J,$$

$$X = X_C \cup X_L \cup X_J,$$

$$A_C^{(k)} = A_C.$$

Поэтому совершенное подмножество A_C всех точек сгущения (конденсации), которые можно назвать несчётно бесконечно предельными точками, замкнутого множества A есть одно из решений неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A_C$$

с единственным заданным известным множеством A_C и с единственным искомым неизвестным множеством X и может быть принято в качестве множества X_C:

$$X_C = A_C,$$

которое в данном случае оказывается совершенным множеством.

То есть совершенное подмножество A_C множества A учитывается именно сразу для любого положительного целого порядка k.

Производное множество первого порядка для не более чем счётно бесконечного подмножества A_L (которое может быть пустым множеством) всех именно и только собственных предельных точек множества A (то есть принадлежащих множеству A), не являющихся несчётно бесконечно предельными точками, непременно равно самому этому подмножеству A_L, но только первого порядка, поскольку некоторые собственные счётно бесконечно предельные точки этого подмножества A_L могут стать отдельными (непредельными, изолированными) точками этого производного множества первого порядка и тогда подлежат

отделению от этого производного множества первого порядка и включению в соответствующее подмножество отдельных (непредельных, изолированных) точек. Такое же отделение и включение отдельных (непредельных, изолированных) точек осуществляется при каждом переходе от предыдущего к следующему положительному целому порядку производного множества для не более чем счётно бесконечного подмножества A_L.

Поэтому общий метод решения неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения

$$X^{(k)} = A$$

положительного целого порядка k с единственным заданным известным замкнутым множеством A и с

единственным искомым неизвестным множеством X сводится к общему методу решения неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A_J$$

с единственным заданным известным не более чем счётно бесконечным подмножеством A_J всех отдельных (непредельных, изолированных) точек (которое может быть пустым множеством) замкнутого множества A и с единственным искомым неизвестным множеством X. Тогда теоретико-множественное объединение

$$X = X_C \cup X_L \cup X_J$$

окажется искомым каким-нибудь решением неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным замкнутым множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Создан общий метод построения какого-нибудь решения X_J неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A_J$$

с единственным искомым неизвестным множеством X и с единственным заданным известным не более чем счётно бесконечным дискретным множеством A_J некоторых отдельных (непредельных, изолированных) точек метрического пространства, причём решения тоже непременно в виде не более чем счётно бесконечного множества X_J, то есть общий метод множественного интегрирования произвольного положительного целого порядка с непременным сохранением свойства быть не более чем счётно бесконечным множеством отдельных (непредельных, изолированных) точек метрического пространства.

Сущность этого общего метода заключается в пошаговом наращивании порядка множественного интегрирования до

любого положительного целого порядка k неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A_J$$

с единственным заданным известным не более чем счётно бесконечным дискретным множеством A_J и с единственным искомым неизвестным множеством X. Если единственное заданное известное не более чем счётно бесконечное дискретное множество A_J является пустым множеством

$$A_J = \varnothing,$$

то в качестве какого-нибудь решения X_J неполного линейного приведённого канонического единометрического

производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$\mathbf{X^{(k)} = A_J}$$

с единственным заданным известным множеством A_J и с единственным искомым неизвестным множеством X достаточно взять пустое множество

$$\mathbf{X_J = \varnothing.}$$

Поэтому дальнейшему рассмотрению подлежит пошаговое наращивание порядка множественного интегрирования до любого положительного целого порядка k неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения

$$\mathbf{X^{(k)} = A_J}$$

с единственным искомым неизвестным множеством X и с именно непустым единственным заданным известным не более чем счётно бесконечным дискретным множеством A_J посредством следующего алгоритма.

1. Каждая точка именно непустого единственного заданного известного не более чем счётно бесконечного дискретного множества A_J является отдельной (непредельной, изолированной), по определению которой существует её метрическая окрестность, содержащая лишь единственную эту точку множества A_J. Если это множество A_J является подмножеством другого множества A и все точки этого подмножества A_J являются отдельными (непредельными, изолированными) точками этого множества A, то существует и подлежит рассмотрению метрическая

окрестность каждой точки, содержащая лишь единственную эту точку именно самого множества A. В данном случае заданное известное множество A по теории множеств Кантора представимо в виде своего теоретико-множественного разбиения как теоретико-множественного объединения своих непересекающихся совершенного подмножества A_C всех несчётно предельных точек сгущения (конденсации) множества A, не более чем счётно бесконечного подмножества A_L счётно предельных точек множества A и не более чем счётно бесконечного подмножества A_J отдельных (непредельных, изолированных) точек множества A, причём любое из этих трёх подмножеств может быть и пустым множеством:

$$A = A_C \cup A_L \cup A_J;$$

$$A_C \cap A_L = A_C \cap A_J = A_L \cap A_J = \emptyset;$$

$$A_C =? \emptyset;$$

$$A_L =? \emptyset;$$

$$A_J =? \emptyset.$$

При дополнительном наличии именно <u>непустого совершенного</u> множества A_C оно подлежит непременному учёту, <u>могущему</u> <u>уменьшить</u> эту окрестность. В итоге получается <u>изолирующее множество окрестностей</u> непременно <u>всех</u> <u>отдельных</u> (<u>непредельных</u>, <u>изолированных</u>) <u>точек</u> произвольного не более чем <u>счётно бесконечного</u> <u>подмножества</u> A_J произвольного <u>замкнутого множества</u> A в <u>метрическом</u> пространстве.

2. В <u>изолирующем множестве окрестностей</u> непременно <u>всех</u> <u>отдельных</u> (<u>непредельных</u>, <u>изолированных</u>) <u>точек</u>

произвольного не более чем счётно бесконечного подмножества A_J произвольного замкнутого множества A в метрическом пространстве радиус каждой окрестности уменьшается более чем вдвое, например втрое. В итоге получается изолирующее множество отдалённых окрестностей непременно всех отдельных (непредельных, изолированных) точек произвольного не более чем счётно бесконечного подмножества A_J произвольного замкнутого множества A в метрическом пространстве.

3. Для каждой отдельной (непредельной, изолированной) точки произвольного не более чем счётно бесконечного подмножества A_J произвольного замкнутого множества A в метрическом пространстве строится следующим образом счётно бесконечная последовательность непременно

различных и отличных от этой точки точек метрического пространства, принадлежащих соответствующей именно отдалённой окрестности этой точки, сходящаяся к этой точке. Из этой отдалённой окрестности выбирается произвольная отличная от рассматриваемой отдельной (непредельной, изолированной) точки первая точка этой последовательности. Определяется расстояние этой первой точки от рассматриваемой отдельной (непредельной, изолированной) точки и делится пополам. Определяется соответственно уменьшенная отдалённая окрестность рассматриваемой отдельной (непредельной, изолированной) точки радиусом, равным этой половине расстояния. Из этой уменьшенной отдалённой окрестности рассматриваемой отдельной (непредельной,

изолированной) точки берётся произвольная отличная от рассматриваемой отдельной (непредельной, изолированной) точки вторая точка этой последовательности. Определяется расстояние этой второй точки от рассматриваемой отдельной (непредельной, изолированной) точки и делится пополам. Определяется соответственно уменьшенная отдалённая окрестность рассматриваемой отдельной (непредельной, изолированной) точки радиусом, равным этой половине расстояния. Из этой уменьшенной отдалённой окрестности рассматриваемой отдельной (непредельной, изолированной) точки берётся произвольная отличная от рассматриваемой отдельной (непредельной, изолированной) точки третья точка этой

последовательности. Этот процесс продолжается счётно бесконечно. В итоге для каждой отдельной (непредельной, изолированной) точки произвольного не более чем счётно бесконечного подмножества A_J произвольного замкнутого множества A в метрическом пространстве строится счётно бесконечная последовательность непременно различных и отличных от этой точки точек метрического пространства, принадлежащих соответствующей именно отдалённой окрестности этой точки, сходящаяся к этой точке.

4. Каждая отдельная (непредельная, изолированная) точка произвольного не более чем счётно бесконечного подмножества A_J произвольного замкнутого множества A в метрическом пространстве выбрасывается и заменяется сходящейся к этой точке этой счётно бесконечной

последовательностью непременно различных и отличных от этой точки точек метрического пространства, принадлежащих соответствующей именно отдалённой окрестности этой точки.

5. Полученное не более чем счётно бесконечное множество счётно бесконечных последовательностей, заменивших именно все отдельные (непредельные, изолированные) точки произвольного не более чем счётно бесконечного подмножества A_J произвольного замкнутого множества A в метрическом пространстве, счётно бесконечно и нумеруется диагональным методом Кантора в единую счётно бесконечную последовательность непременно различных отдельных (непредельных, изолированных) точек метрического пространства, отличных от именно всех

отдельных (непредельных, изолированных) точек произвольного не более чем счётно бесконечного подмножества A_J произвольного замкнутого множества A в метрическом пространстве, производное множество первого порядка для множества всех элементов которой в точности равно произвольному не более чем счётно бесконечному подмножеству A_J всех отдельных (непредельных, изолированных) точек произвольного замкнутого множества A в метрическом пространстве. Поэтому множество всех элементов полученной единой счётно бесконечной последовательности непременно различных отдельных (непредельных, изолированных) точек метрического пространства, отличных от именно всех отдельных (непредельных, изолированных) точек

произвольного не более чем счётно бесконечного подмножества A_J произвольного замкнутого множества A в метрическом пространстве, принадлежит искомому интегральному множеству $\int^{(1)}A_J$ первого порядка от произвольного не более чем счётно бесконечного подмножества A_J всех отдельных (непредельных, изолированных) точек произвольного замкнутого множества A в метрическом пространстве.

6. Для получения единой счётно бесконечной последовательности непременно различных отдельных (непредельных, изолированных) точек метрического пространства, множество всех элементов которой принадлежит искомому интегральному множеству $\int^{(k)}A_J$ любого положительного целого порядка k от произвольного

не более чем счётно бесконечного подмножества A_J всех отдельных (непредельных, изолированных) точек произвольного замкнутого множества A в метрическом пространстве, последовательность предыдущих пяти пунктов повторяется k-1 раз.

Тем самым доказательство достаточности и теоремы в целом завершено.

Замечание. Выбрасывание непременно всех отдельных (непредельных, изолированных) точек произвольного не более чем счётно бесконечного подмножества A_J произвольного замкнутого множества A в метрическом пространстве при включении в итоговую строящуюся последовательность, множество всех элементов которой принадлежит искомому интегральному множеству $\int^{(1)}A_J$

первого порядка от произвольного не более чем счётно бесконечного подмножества A_J всех отдельных (непредельных, изолированных) точек произвольного замкнутого множества A в метрическом пространстве, последовательностей, сходящихся к этим точкам, необходимо, поскольку при этом включении каждая точка произвольного не более чем счётно бесконечного подмножества A_J всех отдельных (непредельных, изолированных) точек произвольного замкнутого множества A в метрическом пространстве становится предельной точкой для сходящейся к ней соответствующей последовательности и перестаёт быть отдельной (непредельной, изолированной) точкой.

Рассмотрим неполное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение первого порядка

$$X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и единственным искомым неизвестным множеством X.

Теорема. Если единственное заданное известное множество A не замкнуто, то неполное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение первого порядка

$$X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и единственным искомым неизвестным множеством X не имеет решений.

Доказательство. Используется метод от противоречащего. Пусть единственное заданное известное множество A не замкнуто, однако решение неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и единственным искомым неизвестным множеством X существует.

Производное множество первого порядка для любого метрического множества, в частности производное множество первого порядка X′ для существующего решения X неполного линейного приведённого

канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, замкнуто по теории множеств Кантора.

По уравнению

$$X' = A$$

производное множество первого порядка X′ для существующего решения X равно единственному заданному известному множеству A, которое, следовательно, тоже замкнуто.

Поскольку единственное заданное известное множество A не может именно одновременно быть и замкнутым, и не

замкнутым, то полученное противоречие доказывает теорему.

Если множество A замкнуто, то произвольное решение этого неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X представимо в виде теоретико-множественного объединения, во-первых, одного из подмножественных всюду частых (всюду плотных) решений этого уравнения, то есть всюду частых (всюду плотных) во множестве A

подмножеств A_f замкнутого множества A, то есть интегральных множеств первого порядка

$$A_f = \int A = \int^{(1)} A$$

от замкнутого множества A, и, во-вторых, одного из дискретных множеств, которые состоят только из отдельных (непредельных, изолированных) точек, вообще не имея предельных точек, в том числе точек сгущения (конденсации), то есть одного из интегральных множеств первого порядка

$$\int \varnothing = \int^{(1)} \varnothing$$

от пустого множества $\varnothing$, то есть одного из решений тривиального однородного неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X' = \varnothing$$

с именно пустым единственным заданным известным множеством $\varnothing$ и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Обозначение.

$$A_f = \int A = \int^{(1)} A$$

являются равносильными (эквивалентными) общими видами (общими выражениями, общими формами) непременно всех и только всех именно произвольных всюду частых (всюду плотных) в замкнутом множестве A подмножеств множества A, то есть одними и теми же обозначениями для любых различных всюду частых (всюду плотных) в замкнутом множестве A подмножеств множества A.

Определение. Множество C_k называется множественной постоянной положительного целого порядка k, если для этого множества C_k производное множество $C_k^{(k)}$ положительного целого порядка k является пустым множеством:

$$C_k^{(k)} = \emptyset,$$

а производное множество $C_k^{(k-1)}$ неотрицательного целого порядка k-1 является непустым множеством:

$$C_k^{(k-1)} \neq \emptyset.$$

Обозначение. C_k есть общий вид (общее выражение, общая форма) непременно всех и только всех именно произвольных множественных постоянных положительного целого порядка k, то есть одно и то же

обозначение для любых различных множественных постоянных положительного целого порядка k.

Определение. Пустое множество $\emptyset$ считается единственной множественной постоянной нулевого порядка и называется абсолютной множественной постоянной.

Обозначение:

$$\emptyset = C_0.$$

Следствие. Общим решением неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X^{(1)} = A,$$

$$X' = A$$

с единственным заданным известным замкнутым множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X является

$$X = \int^{(1)} A \cup C_1 = \int A \cup {}_1C = A_f \cup C_1.$$

Теорема. Общим решением неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X является

$$X = \int^{(k)} A \cup C_k = \int^{(1)} A \cup C_k = \int A \cup C_k = A_f \cup C_k.$$

Доказательство. Свойство быть всюду частым (всюду плотным) подмножеством является переносным (транзитивным).

Замечание. Для того, чтобы общее решение канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X содержало произвольную множественную постоянную, отличную от пустой абсолютной множественной постоянной, необходимо и достаточно, чтобы это уравнение не содержало искомого неизвестного множества свободным от теоретико-множественных пересечений с производными множествами для него.

Обозначение. Для любого положительного целого числа k

$$\mathbf{X = X_{(k)A} = A_f \cup C_k}$$

обозначает общее решение неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$\mathbf{X^{(k)} = A}$$

с единственным заданным известным замкнутым множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Обозначение. Произвольное подмножество множества E обозначается знаком этого множества E со знаком нестрогого включения $\subseteq$ в круглых скобках в левом нижнем указателе (индексе): ${}_{(\subseteq)}E$.

Обозначение. Произвольное отличное от множества E подмножество множества E обозначается знаком этого множества E со знаком строгого включения ⊂ в круглых скобках в левом нижнем указателе (индексе): ${}_{(\subset)}E$.

Теорема. Для любого положительного целого порядка k имеет место теоретико-множественная объединяемость (объединимость) общего решения

$$X = X_{(k)A}$$

неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с необходимо замкнутым единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X и общего решения

$$X = X_{(k)B}$$

неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения того же самого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = B$$

с необходимо замкнутым единственным заданным известным множеством B и с единственным искомым неизвестным множеством X, то есть теоретико-множественное объединение

$$X = X_{(k)A} \cup X_{(k)B}$$

есть общее решение неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения того же самого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A \cup B$$

с необходимо замкнутым теоретико-множественным объединением замкнутых заданных известных множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Доказательство.

Очевидно, что

$$X = X_{(k)A} \cup X_{(k)B} = A_f \cup C_k \cup B_f \cup C_k = A_f \cup B_f \cup C_k$$

есть решение неполного линейного приведённого канонического единометрического производного

множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A \cup B$$

с необходимо замкнутым теоретико-множественным объединением замкнутых заданных известных множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Теорема. Имеет место теоретико-множественная проектируемость общего решения

$$X = X_{(k)A} \cup X_{(k)B}$$

произвольного неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A \cup B$$

с необходимо замкнутым теоретико-множественным объединением $A \cup B$ заданных известных замкнутых множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X на эти объединяемые множества A и B в отдельности для получения общих решений

$$X = X_{(k)A} = (X_{(k)A} \cup X_{(k)B}) \cap A$$

и

$$X = X_{(k)B} = (X_{(k)A} \cup X_{(k)B}) \cap B$$

неполных линейных приведённых канонических единометрических производных множественных уравнений положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

и

$$X^{(k)} = B$$

с единственными заданными известными необходимо замкнутыми множествами A и B соответственно и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Доказательство.

Пусть X есть общее решение неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A \cup B$$

с необходимо замкнутым теоретико-множественным объединением A ∪ B замкнутых заданных известных множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Тогда

$$X = \int^{(k)}(A \cup B) = (A \cup B)_f \cup C_k.$$

Достаточно взять

$$X_{(k)A} = A \cap ((A \cup B)_f \cup C_k) = A \cap (A \cup B)_f \cup C_k;$$

$$X_{(k)B} = B \cap ((A \cup B)_f \cup C_k) = B \cap (A \cup B)_f \cup C_k.$$

Теорема. Для существования именно замкнутого решения произвольного неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X необходима и достаточна замкнутость этого множества A.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть существует именно замкнутое решение произвольного неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Это замкнутое решение является просто решением этого уравнения без требования непременной замкнутости этого решения.

Поэтому существует решение произвольного неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X без требования непременной замкнутости этого решения.

По одной из предыдущих теорем для существования какого бы то ни было решения произвольного неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X необходима замкнутость этого множества A.

В итоге получается, что для существования именно замкнутого решения произвольного неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X необходима замкнутость этого множества A.

Тем самым необходимость доказана.

Другим, ещё более коротким, способом доказательства необходимости является по существу повторение доказательства названной теоремы.

А именно, производное множество любого положительного целого порядка, в частности порядка k, для произвольного множества, в том числе существующего по допущению необходимости именно замкнутого решения произвольного неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X,

именно в метрическом пространстве непременно замкнуто по теории множеств Кантора.

Этому производному множеству положительного целого порядка k для существующего по допущению необходимости именно замкнутого решения произвольного неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X равно согласно этому уравнению это множество A и поэтому тоже непременно замкнуто. Тем самым необходимость доказана и этим другим способом.

Достаточность. Пусть единственное заданное известное множество A именно замкнуто.

Замкнутое множество A по теории множеств Кантора представимо в виде своего теоретико-множественного разбиения как теоретико-множественного объединения своих непересекающихся совершенного подмножества A_C всех несчётно предельных точек сгущения (конденсации) замкнутого множества A, не более чем счётно бесконечного подмножества A_L всех счётно предельных точек замкнутого множества A и не более чем счётно бесконечного подмножества A_J всех отдельных (непредельных, изолированных) точек замкнутого множества A, причём любое из этих трёх подмножеств может быть и пустым множеством:

$$A = A_C \cup A_L \cup A_J;$$

$$A_C \cap A_L = A_C \cap A_J = A_L \cap A_J = \emptyset;$$

$$A_C =? \emptyset;$$

$$A_L =? \emptyset;$$

$$A_J =? \emptyset.$$

Поэтому для нахождения общего решения неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X достаточно, во-первых, найти множественные интегралы соответствующего этому уравнению положительного

целого порядка k от каждого из указанных трёх подмножеств A_C, A_L и A_J и, во-вторых, составить теоретико-множественное объединение всех трёх этих множественных интегралов и дополнительно произвольной множественной постоянной C_k того же самого положительного целого порядка k.

Для любого положительного целого числа k

$$X = X_{(k)A(C)} = {}_{(\subseteq)}A_{Cf} \cup C_k$$

с произвольным всюду плотным во множестве A_C его подмножеством ${}_{(\subseteq)}A_{Cf}$ обозначает общее решение неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A_C$$

с единственным заданным известным замкнутым множеством $A_C = A(C)$ и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Для любого положительного целого числа k

$$X = X_{(k)A(J)} = \int^{(k)} A_J \cup C_k$$

с находимым по общему методу замещающего последовательного кратного изолированного определивания заменяемых отдельных (непредельных, изолированных) точек множественным интегралом $\int^{(k)} A_J$ обозначает общее решение неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A_J$$

с единственным заданным известным замкнутым множеством $A_J = A(J)$ и с единственным искомым неизвестным множеством X.

С учётом множественного интеграла $\int^{(k)} A_J$ теперь для учёта известного замкнутого множества $A_L = A(L)$, состоящего именно и только из предельных точек замкнутого множества A_J, так что даже при невключении любой из этих предельных точек в решение уравнения для множества A эта предельная точка попадёт в производное множество для этого решения, можно включить произвольное подмножество ${}_{(\subseteq)}A_L$ множества A_L в общее решение

$$X = X_{(k)A} = X_{(k)A(C)} \cup X_{(k)A(L)} \cup X_{(k)A(J)} =$$

$$_{(\subseteq)}A_{Cf} \cup C_k \cup {}_{(\subseteq)}A_L \cup C_k \cup \int^{(k)} A_J \cup C_k \cup C_k =$$

$$_{(\subseteq)}A_{Cf} \cup {}_{(\subseteq)}A_L \cup \int^{(k)} A_J \cup C_k$$

произвольного неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$\mathbf{X^{(k)} = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

В частности, при k = 1 получается общее решение

$$\mathbf{X = X_{(1)A} = X_{(1)A(C)} \cup X_{(1)A(L)} \cup X_{(1)A(J)} =}$$

$$\mathbf{{}_{(\subseteq)}A_{Cf} \cup C_1 \cup {}_{(\subseteq)}A_L \cup C_1 \cup \int^{(k)} A_J \cup C_1 \cup C_1 =}$$

$$\mathbf{{}_{(\subseteq)}A_{Cf} \cup {}_{(\subseteq)}A_L \cup \int^{(1)} A_J \cup C_1}$$

произвольного неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка $\mathbf{X^{(1)} = A}$ с

единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

При этом для не более чем счётно бесконечного подмножества всех элементов не более чем счётно бесконечной совокупности (m = 1, 2, 3, 4, ...) счётно бесконечных последовательностей, сходящихся ко всем отдельным (непредельным, изолированным) точкам a_m их подмножества A_J замкнутого множества A обеспечивается принадлежность непременно всех элементов каждой такой последовательности именно окрестности её предела a_m, непременно отдалённой (в смысле отсутствия теоретико-множественных пересечений замыканий) от всех других таких окрестностей и от всех отличных от точки a_m точек замкнутого множества A.

До произвольного положительного целого порядка k можно добраться соответствующим числом шагов изложенного подробно выше и кратко здесь замкнутого интегрирования благодаря тому, что правая часть произвольного неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X всегда остаётся замкнутым множеством при одновременных снижении произвольного положительного целого порядка k и замкнутом интегрировании единственного заданного известного множества A.

22.2. ТЕОРИЯ ПОЛНЫХ ЛИНЕЙНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ЕДИНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ МНОЖЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Определение. Полным линейным каноническим единометрическим производным множественным уравнением положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X называется каноническое единометрическое производное множественное уравнение вида

$$_{\S}X \cup {}_{1}({}_{?}X^{(k)} \cup {}_{?}X^{(k+1)} \cup \ldots \cup {}_{?}X^{(n-1)} \cup {}_{?}X^{(n)}) = {}_{\S}A,$$

причём для также целого числа n выполнено двойное неравенство

$1 \leq k \leq n$,

с непременным наличием и единственного заданного известного множества A, составляющего правую часть уравнения, и единственного искомого неизвестного множества X, и непременно непустого теоретико-множественного объединения возможных производных множеств положительных целых порядков для единственного искомого неизвестного множества X, при наличии перечисленных с возрастанием этих порядков, указанием производных множеств наименьшего k и наибольшего n наличных порядков и возможными пропусками производных множеств промежуточных порядков.

Замечание. Если порядок линейного дифференциального уравнения определяется высшим порядком наличных производных, то порядок полного линейного канонического единометрического производного множественного уравнения с одним неизвестным определяется низшим порядком наличных производных множеств, поскольку, как показано выше, при теоретико-множественном объединении производное множество любого порядка полностью поглощает все производные множества более высоких порядков для того же произвольного метрического множества.

Следствие. Если в последнем определении имеет место равенство

$$\mathbf{k = n,}$$

то сразу получается полное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющее вид

$$X \cup X^{(k)} = A.$$

Теорема. Если в последнем определении имеет место строгое неравенство

$$k < n,$$

то полное линейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение положительного целого порядка k

$$_{\S}X \cup {}_{1}({}_{?}X^{(k)} \cup {}_{?}X^{(k+1)} \cup \ldots \cup {}_{?}X^{(n-1)} \cup {}_{?}X^{(n)}) = {}_{\S}A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X равносильно (эквивалентно) куда более простому полному линейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, имеющему вид

$$X \cup X^{(k)} = A.$$

Доказательство. По доказанной выше теореме имеет место иерархия вложенных в предыдущие последовательных производных множеств всех положительных целых порядков. Для произвольного метрического множества X

последовательность производных множеств всех положительных целых порядков с возрастанием этих порядков является не расширяющейся по отношению теоретико-множественного включения:

$$X^{(1)} \supseteq X^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(k)} \supseteq X^{(k+1)} \supseteq X^{(k+2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(n-1)} \supseteq X^{(n)} \supseteq \ldots .$$

В частности,

$$X^{(k+1)} \subseteq X^{(k)},$$
$$X^{(k+2)} \subseteq X^{(k)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X^{(n-1)} \subseteq X^{(k)},$$
$$X^{(n)} \subseteq X^{(k)}.$$

Отсюда следует, что теоретико-множественное объединение производных множеств положительных целых порядков для произвольного метрического множества равно

производному множеству наименьшего наличного положительного целого порядка для этого произвольного метрического множества. В итоге рассматриваемое полное линейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} \cup X^{(k+1)} \cup \ldots \cup X^{(n-1)} \cup X^{(n)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X равносильно (эквивалентно) куда более простому полному линейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, что и требовалось доказать.

Обозначение. Общее решение равносильных (эквивалентных) полного линейного канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} \cup X^{(k+1)} \cup \ldots \cup X^{(n-1)} \cup X^{(n)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X и куда более простого полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X обозначается

$$\mathbf{X = \Delta_k A.}$$

Теорема. Для разрешимости полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка (k = 1)

$$\mathbf{X \cup X^{(1)} = A,}$$

$$\mathbf{X \cup X' = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X

необходима и достаточна замкнутость единственного заданного известного множества A.

Доказательство.

Необходимость.

Пусть полное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение первого порядка (k = 1)

$$X \cup X^{(1)} = A,$$

$$X \cup X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X разрешимо, то есть существует хотя бы одно множество X, обращающее это уравнение в верное теоретико-множественное равенство.

Тогда по теории множеств Кантора теоретико-множественное объединение этого множества X со множеством всех предельных точек для него, то есть по общему определению производного множества первого порядка с производным множеством (первого порядка)

$$X^{(1)} = X'$$

для этого множества X, есть замыкание этого множества X, являющееся замкнутым множеством.

По самому этому уравнению это замыкание

$$X \cup X^{(1)},$$

$$X \cup X'$$

равно единственному заданному известному множеству A, поэтому тоже замкнутому.

Тем самым необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть единственное заданное известное множество A замкнуто.

Тогда само единственное заданное известное множество A и является своим собственным замыканием и поэтому одним из решений полного линейного канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, причём очевидным и тривиальным решением.

Действительно, пусть единственное искомое неизвестное множество X равно единственному заданному известному множеству A, замкнутому по допущению достаточности:

$$X = A.$$

Тогда по общему определению замкнутого множества единственному заданному известному множеству A принадлежат непременно все предельные точки для этого множества A.

Поэтому множество всех предельных точек для этого единственного заданного известного множества A, по общему определению производного множества являющееся производным множеством A′ для этого единственного заданного известного множества A, по общему определению теоретико-множественного включения включено в это замкнутое множество A:

$$X' = A' \subseteq A = X.$$

По закону монотонности применительно к теоретико-множественным объединению и включению

$$\mathbf{A' \subseteq A;}$$

$$\mathbf{A \cup A' \subseteq A \cup A = A;}$$

$$\mathbf{A \cup A' \subseteq A.}$$

По общему определению теоретико-множественного объединения

$$\mathbf{A \cup A' \supseteq A.}$$

Совокупность последних двух нестрогих теоретико-множественных включений даёт теоретико-множественное равенство

$$\mathbf{A \cup A' = A}$$

как свидетельство того, что единственное искомое неизвестное множество

$$\mathbf{X = A,}$$

равное единственному заданному известному множеству A, замкнутому по допущению достаточности, является своим собственным замыканием и поэтому одним из решений полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения

$$\mathbf{X \cup X^{(1)} = A,}$$

$$\mathbf{X \cup X' = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, причём очевидным и тривиальным решением.

В итоге из замкнутости единственного заданного известного множества A следует разрешимость полного линейного

приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения

$$X \cup X^{(1)} = A,$$

$$X \cup X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Тем самым доказательство достаточности и доказательство теоремы в целом завершены.

Не только применительно к полному линейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению первого порядка

$$X \cup X^{(1)} = A,$$

$$X \cup X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и единственным искомым неизвестным множеством X имеют место следующие теоремы.

Теорема. Предельная точка для конечного единометрического теоретико-множественного объединения является предельной точкой по меньшей мере для одного из объединяемых множеств.

Доказательство. Используется метод от противоречащего. Пусть в едином для всех объединяемых множеств метрическом пространстве предельная точка для конечного единометрического теоретико-множественного объединения не является предельной точкой ни для одного из объединяемых множеств.

По общему определению предельной точки для произвольного множества тогда для каждого из этих объединяемых множеств существует окрестность этой предельной точки, не содержащая никаких отличных от этой предельной точки точек этого объединяемого множества.

Конечное множество радиусов таких окрестностей для всех объединяемых множеств непременно содержит наименьший элемент, являющийся именно положительным числом.

Тогда в едином для всех объединяемых множеств метрическом пространстве существует окрестность этой предельной точки радиусом, равным именно этому положительному числу, не содержащая никаких отличных

от этой предельной точки точек ни одного из объединяемых множеств, а следовательно, и никаких отличных от этой предельной точки точек теоретико-множественного объединения всех этих множеств.

Поэтому по общему определению предельной точки для произвольного множества эта предельная точка для этого теоретико-множественного объединения не является предельной точкой для этого теоретико-множественного объединения.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема. Теоретико-множественное объединение единометрических произвольного множества и производного множества для этого произвольного множества непременно замкнуто.

Доказательство.

Произвольная предельная точка для именно конечного единометрического теоретико-множественного объединения двух множеств, в данном случае произвольного множества и производного множества для этого произвольного множества, по предыдущей теореме является предельной точкой для хотя бы одного из этих множеств.

Если произвольная предельная точка для единометрического теоретико-множественного объединения произвольного множества и производного множества для этого произвольного множества является предельной точкой для этого произвольного множества, то по общему определению производного множества для

произвольного множества это производное множество полностью состоит из непременно всех предельных точек для этого произвольного множества. Поэтому, в частности, и эта произвольная предельная точка непременно принадлежит этому производному множеству для этого произвольного множества и, следовательно, теоретико-множественному объединению произвольного множества и производного множества для этого произвольного множества.

Если произвольная предельная точка для единометрического теоретико-множественного объединения произвольного множества и производного множества для этого произвольного множества является предельной точкой для этого производного множества для

этого произвольного множества, то ввиду непременной замкнутости производного множества для произвольного множества эта произвольная предельная точка непременно принадлежит этому производному множеству для этого произвольного множества и, следовательно, теоретико-множественному объединению произвольного множества и производного множества для этого произвольного множества.

В итоге произвольная предельная точка для единометрического теоретико-множественного объединения произвольного множества и производного множества для этого произвольного множества необходимо является предельной точкой или хотя бы для этого произвольного множества, или хотя бы для производного

множества для этого произвольного множества. При каждой из этих обеих возможностей, образующих именно полную систему возможностей, хотя бы одна из которых непременно осуществляется, эта произвольная предельная точка непременно принадлежит этому производному множеству для этого произвольного множества и, следовательно, теоретико-множественному объединению произвольного множества и производного множества для этого произвольного множества.

То есть произвольная предельная точка для единометрического теоретико-множественного объединения произвольного множества и производного множества для этого произвольного множества необходимо принадлежит этому теоретико-множественному

объединению произвольного множества и производного множества для этого произвольного множества.

Следовательно, по общему определению замкнутого множества теоретико-множественное объединение единометрических произвольного множества и производного множества для этого произвольного множества непременно замкнуто, что и требовалось доказать.

Замечание. Эта теорема ведёт к другому доказательству необходимости замкнутости единственного заданного известного множества A для разрешимости полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X \cup X^{(1)} = A,$$

$$X \cup X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и единственным искомым неизвестным множеством X.

Теорема. Если единственное заданное известное множество A не замкнуто, то полное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение первого порядка

$$X \cup X^{(1)} = A,$$

$$X \cup X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и единственным искомым неизвестным множеством X не имеет решений.

Доказательство. Используется метод от противоречащего.

Пусть единственное заданное известное множество A не замкнуто, однако решение полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$\mathbf{X \cup X^{(1)} = A,}$$

$$\mathbf{X \cup X' = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и единственным искомым неизвестным множеством X существует.

Производное множество любого положительного целого порядка для любого множества, в частности производное множество первого порядка $X^{(1)} = X'$ для существующего решения X полного линейного приведённого канонического

единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X \cup X^{(1)} = A,$$

$$X \cup X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и единственным искомым неизвестным множеством X, замкнуто по теории множеств Кантора.

По теории множеств Кантора замкнуто замыкание любого множества, в частности множества X, составляющее целиком левую часть

$$X \cup X^{(1)},$$

$$X \cup X'$$

полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$\mathbf{X \cup X^{(1)} = A,}$$

$$\mathbf{X \cup X' = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и единственным искомым неизвестным множеством X.

По этому уравнению его левая часть, равная единственному заданному известному множеству A, замкнута.

Следовательно, единственное заданное известное множество A тоже замкнуто.

Поскольку единственное заданное известное множество A не может именно одновременно быть и замкнутым, и не

замкнутым, то полученное противоречие доказывает теорему.

Если единственное заданное известное множество A замкнуто, то произвольное решение X этого полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X \cup X^{(1)} = A,$$

$$X \cup X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X есть такое подмножество множества A, что теоретико-множественная разность A \ X включена в производное множество X′ для этого решения X:

$$A \setminus X \subseteq X'.$$

Общее обозначение

$$X = \Delta_k A$$

общего решения равносильных (эквивалентных) полного линейного канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} \cup X^{(k+1)} \cup ... \cup X^{(n-1)} \cup X^{(n)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X и куда более простого полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X даёт для случая k = 1 обозначение

$$X = \Delta_1 A = \Delta' A$$

общего решения полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X \cup X^{(1)} = A,$$

$$X \cup X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Замечание. Была доказана теорема о теоретико-множественной проектируемости общего решения

$$X = X_{(k)A} \cup X_{(k)B}$$

произвольного неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A \cup B$$

с необходимо замкнутым теоретико-множественным объединением A ∪ B заданных известных замкнутых множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X на эти объединяемые множества A и B в отдельности для получения общих решений

$$X = X_{(k)A} = (X_{(k)A} \cup X_{(k)B}) \cap A$$

и

$$X = X_{(k)B} = (X_{(k)A} \cup X_{(k)B}) \cap B$$

неполных линейных приведённых канонических единометрических производных множественных уравнений положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

и

$$X^{(k)} = B$$

с единственными заданными известными множествами A и B соответственно и с единственным искомым неизвестным множеством X. Однако подобная той теореме для неполных линейных приведённых канонических единометрических производных множественных уравнений любого положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством и с единственным искомым неизвестным множеством X теорема для полных

линейных приведённых канонических единометрических производных множественных уравнений любого положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством и с единственным искомым неизвестным множеством X не имеет места ни в общем случае, ни даже если оба заданных известных множества A и B являются совершенными множествами.

Теорема. Не имеет места теоретико-множественная проектируемость общего решения

$$X = X_{(k)A} \cup X_{(k)B}$$

произвольного полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = A \cup B}$$

с теоретико-множественным объединением A ∪ B заданных известных множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X на эти объединяемые множества A и B в отдельности для получения общих решений

$$\mathbf{X = X_{(k)A} = (X_{(k)A} \cup X_{(k)B}) \cap A}$$

и

$$\mathbf{X = X_{(k)B} = (X_{(k)A} \cup X_{(k)B}) \cap B}$$

полных линейных приведённых канонических единометрических производных множественных уравнений положительного целого порядка k

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = A}$$

и

$$X \cup X^{(k)} = B$$

с единственными заданными известными множествами A и B соответственно и с единственным искомым неизвестным множеством X ни в общем случае, ни даже если заданные известные множества A и B являются совершенными множествами.

Доказательство.

Для доказательства этого общего утверждения достаточен подходящий частный контрпример двух совершенных множеств

$$A = [0, 1] \setminus \cup_{j=1}{}^{\infty} U(q_j, 1/2^{j+1}),\ q_j \in Q \cap [0, 1],$$

$$j \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\};$$

$$B = [0, 1].$$

Следует отметить использование в настоящей научной монографии общепринятой теоретико-множественной разности в теории множеств Кантора с необязательностью теоретико-множественного включения вычитаемого множества в уменьшаемое множество. Этот контрпример и многое другое показывают явную нецелесообразность предложенного и неуклонно проводившегося выдающимся математиком Феликсом Хаусдорфом ограничения случаем непременного теоретико-множественного включения вычитаемого множества в уменьшаемое множество, что требует в общем случае заменять вычитаемое множество его теоретико-множественным пересечением с уменьшаемым множеством, а то и вводить дальнейшие усложнения.

Множество B есть отрезок действительных чисел между нулём и единицей в обоих случаях включительно и является совершенным множеством по известному общему определению совершенного множества X

$$X' = X$$

в теории множеств Кантора, поскольку

$$B' = [0, 1]' = [0, 1] = B.$$

Множество A есть теоретико-множественная разность. Уменьшаемым этой теоретико-множественной разности является тот же отрезок [0, 1] действительных чисел между нулём и единицей в обоих случаях включительно. Вычитаемым этой теоретико-множественной разности является счётно бесконечное теоретико-множественное объединение

$$\cup_{j=1}^{\infty}U(q_j, 1/2^{j+2}),\ q_j \in Q \cap [0, 1],\ j \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

счётно бесконечной последовательности окрестностей (открытых действительных интервалов с исключёнными концами) всех рациональных чисел q_j, принадлежащих теоретико-множественному пересечению

$$Q \cap [0, 1],$$

во-первых, множества всех рациональных чисел Q всей действительной числовой прямой R и, во-вторых, того же отрезка [0, 1] действительных чисел между нулём и единицей в обоих случаях включительно.

Каждая из этих окрестностей, или каждый из этих интервалов, имеет свои

положительный целый номер, или индекс, j;

рациональный центр, или рациональную середину, q_j;

рациональный радиус, или рациональную полудлину, $1/2^{j+2}$; рациональный диаметр, или рациональную длину,

$$2/2^{j+2} = 1/2^{j+1};$$

рациональные концы интервала, или диаметра окрестности,

$$q_j - 1/2^{j+2},$$
$$q_j + 1/2^{j+2}.$$

По определению этой счётно бесконечной последовательности интервалов во множество их рациональных середин q_j входят со своими номерами, или индексами, и оба конца нуль и единица отрезка [0, 1] как рациональные числа, или точки, этого действительного отрезка. Каждый из этих концов нуль и единица покрыт своим интервалом с соответствующим номером, или

индексом. Левый (алгебраически меньший) конец покрывающего нуль интервала из этой последовательности интервалов строго отрицателен и поэтому выходит за пределы отрезка [0, 1]. Правый (алгебраически больший) конец покрывающего единицу интервала из этой последовательности интервалов строго превышает единицу и поэтому тоже выходит за пределы отрезка [0, 1]. Наибольшую длину 1/4 имеет интервал с номером, или индексом, равным единице. Поэтому не существует такого интервала из этой счётно бесконечной последовательности интервалов, оба конца которого выходят за пределы отрезка [0, 1]. Ведь в противоречащем случае такой интервал покрывал бы целиком отрезок [0, 1] и поэтому необходимо имел бы длину, которая превышает единичную

длину отрезка [0, 1], что невозможно при наибольшей длине 1/4 интервалов из этой последовательности интервалов. Поэтому часть интервалов из этой последовательности интервалов имеет ровно по одному концу за пределами отрезка [0, 1], а все остальные интервалы из этой последовательности интервалов имеют оба конца на отрезке [0, 1], причём либо на его концах 0 и 1, либо внутри этого отрезка [0, 1]. Ввиду рациональности обоих концов каждого интервала из этой счётно бесконечной последовательности интервалов для каждого из этих концов принадлежность отрезку [0, 1] достаточна для того, чтобы этот конец был покрыт своим интервалом из этой счётно бесконечной последовательности интервалов, имеющим в качестве центра, или середины, именно этот

конец (и дополнительно, возможно, некоторыми другими интервалами из этой последовательности интервалов). Однако это достаточное условие, вообще говоря, не является необходимым. Ведь некоторые достаточно близкие к нулю отрицательные концы интервалов из этой последовательности интервалов могут быть покрыты интервалами с серединами в нуле или в достаточно близких к нулю положительных рациональных точках. А некоторые достаточно близкие к единице превышающие единицу концы интервалов из этой последовательности интервалов могут быть покрыты интервалами с серединами в единице или в достаточно близких к единице рациональных точках слева от единицы.

По теории множеств Кантора это теоретико-множественное пересечение $Q \cap [0, 1]$, являющееся множеством именно всех рациональных чисел действительного отрезка [0, 1], счётно бесконечно и может быть целиком представлено счётно бесконечной последовательностью

$$(q_j \mid q_j \in Q \cap [0, 1];\ j \in N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\})$$

бесконечной совокупностью способов, произвольный из которых фиксируется, например диагональный способ Кантора с неубыванием сумм числителя и знаменателя каждой из обыкновенных дробей при условии именно однозначного предварительного представления всех рациональных чисел несократимыми дробями с положительными знаменателями.

Счётно бесконечное теоретико-множественное объединение

$$\cup_{j=1}^{\infty}U(q_j, 1/2^{j+1}),\ q_j \in Q \cap [0, 1],\ j \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

счётно бесконечной последовательности открытых действительных интервалов с исключёнными концами, вообще говоря, частично пересекающихся, общая номинальная сумма длин которых равна

$$\Sigma_{j=1}^{\infty}2/2^{j+2} = \Sigma_{j=1}^{\infty}1/2^{j+1} = 1/2,$$

представимо в виде не более чем счётно бесконечного теоретико-множественного объединения непересекающихся интервалов без общих концов и без концов 0 и 1 самого отрезка [0, 1], поскольку все эти общие концы и концы 0 и 1 самого отрезка [0, 1] накрыты теоретико-множественным объединением всех этих интервалов как непременно рациональные точки действительного отрезка [0, 1]. Поэтому подлинная мера теоретико-множественного

объединения этой последовательности непересекающихся интервалов не превышает

$$\Sigma_{j=1}{}^{\infty}2/2^{j+2} = \Sigma_{j=1}{}^{\infty}1/2^{j+1} = 1/2.$$

Множество A равно теоретико-множественной разности действительного отрезка [0, 1] и теоретико-множественного объединения этой последовательности непересекающихся интервалов, имеет подлинную меру, не меньшую, чем

$$1 - \Sigma_{j=1}{}^{\infty}2/2^{j+2} = 1 - \Sigma_{j=1}{}^{\infty}1/2^{j+1} = 1 - 1/2 = 1/2,$$

и является не только непустым, но и совершенным множеством.

Поскольку множество A есть подмножество множества B, то теоретико-множественное объединение обоих этих множеств есть просто множество B:

$$A \cup B = B = [0, 1].$$

Множество

$$\{q_j \mid q_j \in Q \cap [0, 1]; j \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}\}$$

всех элементов счётно бесконечной последовательности

$$(q_j \mid q_j \in Q \cap [0, 1]; j \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\})$$

всех рациональных чисел действительного отрезка [0, 1] с включением обоих концов всюду представлено (всюду часто, всюду плотно) на этом отрезке [0, 1]. Поэтому производное множество

$$\{q_j \mid q_j \in Q \cap [0, 1]; j \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}\}^{(k)}$$

любого положительного целого порядка k для множества

$$\{q_j \mid q_j \in Q \cap [0, 1]; j \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}\}$$

всех элементов этой счётно бесконечной последовательности всех рациональных чисел действительного отрезка [0, 1] с включением обоих концов

есть именно этот действительный отрезок [0, 1]. Следовательно, само это множество

$$\{q_j \mid q_j \in Q \cap [0, 1];\ j \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}\}$$

является решением полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A \cup B$$

с двумя заданными известными множествами A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X. Действительно, имеет место совокупность отношений

$$X = \{q_j \mid q_j \in Q \cap [0, 1];\ j \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}\} \subset [0, 1] = A \cup B;$$

$$X^{(k)} = \{q_j \mid q_j \in Q \cap [0, 1];\ j \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}\}^{(k)} =$$
$$[0, 1] = A \cup B;$$

$$X = \{q_j \mid q_j \in Q \cap [0, 1];\ j \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}\} \subset$$
$$X^{(k)} = \{q_j \mid q_j \in Q \cap [0, 1];\ j \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}\}^{(k)} =$$
$$[0, 1] = A \cup B;$$
$$X \cup X^{(k)} = \{q_j \mid q_j \in Q \cap [0, 1];\ j \in N = \{1, 2, 3, ...\}\} \cup$$
$$\{q_j \mid q_j \in Q \cap [0, 1];\ j \in N = \{1, 2, 3, ...\}\}^{(k)} = [0, 1] = A \cup B.$$

Однако множество

$$X_{(k)A} = X \cap A = \varnothing$$

есть пустое теоретико-множественное пересечение X ∩ A, поскольку множество X состоит именно и только из всех рациональных чисел действительного отрезка [0, 1] с нулём и единицей включительно, а во множестве A вообще нет рациональных чисел ввиду теоретико-множественного вычитания из действительного отрезка [0, 1] с нулём и единицей включительно именно всех рациональных чисел

вместе с их окрестностями, образующими рассмотренную счётно бесконечную последовательность интервалов:

$$X_{(k)A} = X \cap A;$$

$$X \cap A = \varnothing.$$

Отсюда следует, что множество $X_{(k)A}$ необходимо является пустым множеством:

$$X_{(k)A} = \varnothing.$$

Но тогда

$$X_{(k)A} \cup X_{(k)A}{}^{(k)} = \varnothing \cup \varnothing^{(k)} = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

при непустом множестве A.

Поэтому

$$X_{(k)A} \cup X_{(k)A}{}^{(k)} \neq A$$

и множество $X_{(k)A}$ не является решением полного линейного приведённого канонического единометрического

производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, что и требовалось доказать.

Замечание. Последняя теорема для полных линейных приведённых канонических единометрических производных множественных уравнений любого положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством и с единственным искомым неизвестным множеством X доказана контрпримером с двумя непустыми совершенными множествами, одно из которых включено в другое и

которые, следовательно, пересекаются. А следующая теорема для полных линейных приведённых канонических единометрических производных множественных уравнений любого положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством и с единственным искомым неизвестным множеством X будет доказана контрпримером с двумя непересекающимися непустыми множествами, которые, однако, не обязаны быть даже замкнутыми.

Теорема. Не имеет места теоретико-множественная проектируемость общего решения

$$X = X_{(k)A} \cup X_{(k)B}$$

произвольного полного линейного приведённого канонического единометрического производного

множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A \cup B$$

с теоретико-множественным объединением A ∪ B заданных известных множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X на эти объединяемые множества A и B в отдельности для получения общих решений

$$X = X_{(k)A} = (X_{(k)A} \cup X_{(k)B}) \cap A$$

и

$$X = X_{(k)B} = (X_{(k)A} \cup X_{(k)B}) \cap B$$

полных линейных приведённых канонических единометрических производных множественных уравнений положительного целого порядка k

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = A}$$

и

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = B}$$

с единственными заданными известными множествами A и B соответственно и с <u>единственным</u> <u>искомым</u> <u>неизвестным</u> <u>множеством</u> X ни в общем случае, ни даже если заданные известные множества A и B <u>оба</u> являются <u>непересекающимися</u> <u>непустыми</u> множествами.

<u>Доказательство</u>.

Для доказательства этого общего утверждения <u>достаточен</u> любой из следующих двух подходящих частных <u>контрпримеров</u> двух очевидным образом <u>непересекающихся</u> <u>непустых</u> множеств A и B. Первый, <u>непрерывный</u> (<u>континуальный</u>), <u>контрпример</u> является

гораздо более простым. Второй, разрывный (дискретный), счётно бесконечный контрпример оказывается несравненно более сложным, однако добавляется как представляющий самостоятельный научный интерес.

Первый, непрерывный (континуальный), контрпример. Множество A является полуинтервалом-полуотрезком от нуля до единицы с исключением нуля и включением единицы:

$$A = (0, 1].$$

Множество B является отрезком от минус единицы до нуля с включением минус единицы и нуля:

$$B = [-1, 0].$$

Теоретико-множественное объединение обоих этих множеств есть отрезок от минус единицы до единицы с включением минус единицы и единицы:

$$\mathbf{A \cup B = (0, 1] \cup [-1, 0] = [-1, 1].}$$

Нетрудно убедиться, что это теоретико-множественное объединение

$$\mathbf{A \cup B = [-1, 1],}$$

как и любой действительный отрезок строго положительной длины, является решением полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = A \cup B}$$

с двумя заданными известными множествами A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X. Действительно, пусть

$$X = A \cup B = [-1, 1].$$

Лемма. Производное множество любого неотрицательного целого порядка для произвольного отрезка строго положительной длины есть сам этот отрезок.

Доказательство.

Лемма очевидна для тождественно (по определению производного множества нулевого порядка) совпадающего с самим этим отрезком производного множества нулевого порядка для произвольного отрезка неотрицательной длины. Лемма очевидна для производного множества первого порядка для произвольного отрезка строго

положительной длины как совершенного множества по соответствующему определению и соответствующей теореме в теории множеств Кантора. Приложение последнего утверждения к производному множеству любого неотрицательного целого порядка для произвольного отрезка строго положительной длины обеспечивает справедливость леммы для производного множества на единицу большего, чем предыдущий, положительного целого порядка для произвольного отрезка строго положительной длины. Тем самым обеспечивается индукционный шаг метода математической индукции, что очевидным образом и завершает требуемое доказательство.

С учётом этой доказанной леммы имеет место совокупность следующих отношений:

$$X = [-1, 1] = A \cup B;$$

$$X^{(k)} = [-1, 1] = A \cup B;$$

$$X \cup X^{(k)} = [-1, 1] \cup [-1, 1] = [-1, 1] = A \cup B.$$

Тем самым доказано, что теоретико-множественное объединение

$$A \cup B = [-1, 1],$$

как и любой действительный отрезок строго положительной длины, является решением полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A \cup B$$

с двумя заданными известными множествами A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Замечание. Для формального доказательства последнего утверждения именно для любого отрезка строго положительной длины, а не только для отрезка [-1, 1], достаточно просто заменить отрезок [-1, 1] произвольным отрезком [a, b], где произвольные действительные числа a и b удовлетворяют неравенству a < b:

$$\mathbf{X = [a, b];}$$

$$\mathbf{X^{(k)} = [a, b];}$$

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = [a, b] \cup [a, b] = [a, b].}$$

Замечание. Та же замена может быть рассмотрена для произвольного отрезка нулевой длины, тем самым вырождающегося в одноэлементное множество, состоящее из произвольной единственной действительной точки a,

или из произвольного единственного действительного числа a:

$$b = a;$$

$$[a, b] = [a, a] = \{a\}.$$

При этом лемма остаётся справедливой только для нулевого порядка, обеспечивающего тождественное совпадение производного множества с самим множеством. А вот производное множество любого положительного целого порядка k очевидным образом оказывается пустым множеством. В таком случае приведённая выше совокупность отношений преобразуется следующим образом:

$$X = [a, a] = \{a\};$$

$$X^{(k)} = \varnothing;$$

$$X \cup X^{(k)} = [a, a] \cup \varnothing = \{a\} \cup \varnothing = [a, a] = \{a\}.$$

Вернёмся к нашим двум заданным известным множествам A и B с их теоретико-множественным объединением

$$A \cup B = [-1, 1],$$

которое является решением полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A \cup B$$

с двумя заданными известными множествами A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Теперь для завершения доказательства общего утверждения теоремы посредством настоящего частного контрпримера достаточно доказать, что множество

$$X_{(k)A} = X \cap A = (X_{(k)A} \cup X_{(k)B}) \cap A = (A \cup B) \cap A = A$$

не является решением полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X. Действительно, имеет место совокупность следующих отношений:

$$X_{(k)A} = A = (0, 1];$$

$$X_{(k)A}{}^{(k)} = [0, 1];$$

$$X_{(k)A} \cup X_{(k)A}{}^{(k)} = (0, 1] \cup [0, 1] = [0, 1] \neq (0, 1] = A,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Анализ этого контрпримера с целью синтеза его возможных обобщений показывает, что для доказательства общего утверждения теоремы обобщающим этот контрпример контрпримером достаточно его удовлетворение совокупности следующих условий:

1. Одно из двух множеств A и B является именно полуотрезком-полуинтервалом или полуинтервалом-полуотрезком непременно положительной длины во избежание его вырождения при нулевой длине в пустое множество.

2. Другое из двух множеств A и B является непременно отрезком произвольной неотрицательной длины (допустимо его вырождение в точку как одноэлементное множество при нулевой длине), прилегающим к тому

полуотрезку-полуинтервалу или полуинтервалу-полуотрезку непременно со стороны исключённого конца того полуотрезка-полуинтервала или полуинтервала-полуотрезка.

3. Доказывается, что теоретико-множественное объединение обоих множеств A и B является отрезком, поэтому совершенным множеством и, следовательно, решением полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A \cup B$$

с двумя заданными известными множествами A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X, а то из этих множеств A и B, которое имеет вид полуотрезка-

полуинтервала или полуинтервала-полуотрезка, не является решением соответствующего полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A или B и с единственным искомым неизвестным множеством X. Ввиду действенности законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) для теоретико-множественных объединений и нахождений производных множеств можно считать множеством A именно полуотрезок-полуинтервал или полуинтервал-полуотрезок, который необходимо не пуст и поэтому имеет строго положительную длину. Один из двух концов этого

полуотрезка-полуинтервала или полуинтервала-полуотрезка включён в него, тогда как другой конец исключён. Исключённый конец может быть или левым концом полуинтервала-полуотрезка, или правым концом полуотрезка-полуинтервала. Поэтому для конкретности обозначений следует рассмотреть отдельно каждый из этих обоих случаев.

1. Исключённый конец полуинтервала-полуотрезка является его левым концом:

$$A = (L_A, R_A], L_A < R_A.$$

Тогда множество B есть отрезок произвольной неотрицательной длины с допустимостью вырождения в точку, непременно примыкающий к полуинтервалу-

полуотрезку A со стороны его исключённого конца L_A, в данном случае слева:

$$B = [L_B, R_B] = [L_B, L_A], L_B \leq R_B = L_A < R_A.$$

Теоретико-множественное объединение

$$A \cup B = (L_A, R_A] \cup [L_B, R_B] = [L_B, R_B] \cup (L_A, R_A] =$$

$$[L_B, L_A] \cup (L_A, R_A] = [L_B, R_A], L_B \leq R_B = L_A < R_A$$

является решением полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A \cup B$$

с двумя заданными известными множествами A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Теоретико-множественная проекция решения

$$\mathbf{X = A \cup B}$$

полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = A \cup B}$$

с теоретико-множественным объединением A ∪ B заданных известных множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X на множество A есть теоретико-множественное пересечение

$$\mathbf{(A \cup B) \cap A = A}$$

ввиду непременно строгого теоретико-множественного включения

$$\mathbf{A \subset A \cup B.}$$

Теперь для завершения доказательства общего утверждения теоремы посредством настоящего частного контрпримера достаточно доказать, что множество

$$X_{(k)A} = X \cap A = (X_{(k)A} \cup X_{(k)B}) \cap A = (A \cup B) \cap A = A$$

не является решением полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Действительно, имеет место совокупность следующих отношений:

$$X_{(k)A} = A = (L_A, R_A];$$

$$X_{(k)A}{}^{(k)} = [L_A, R_A];$$

$$X_{(k)A} \cup X_{(k)A}{}^{(k)} = (L_A, R_A] \cup [L_A, R_A] = [L_A, R_A] \neq (L_A, R_A] = A,$$

что и требовалось доказать.

2. Исключённый конец полуотрезка-полуинтервала является его правым концом:

$$A = [L_A, R_A),\ L_A < R_A.$$

Тогда множество B есть отрезок произвольной неотрицательной длины с допустимостью вырождения в точку, непременно примыкающий к полуотрезку-полуинтервалу A со стороны его исключённого конца R_A, в данном случае справа:

$$B = [L_B, R_B] = [R_A, R_B],\ L_A < R_A = L_B \leq R_B.$$

Теоретико-множественное объединение

$$A \cup B = [L_A, R_A) \cup [L_B, R_B] = [L_A, R_A) \cup [R_A, R_B] = [L_A, R_B],$$

$$L_A < R_A = L_B \leq R_B$$

является решением полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A \cup B$$

с двумя заданными известными множествами A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Теперь для завершения доказательства общего утверждения теоремы посредством настоящего частного контрпримера достаточно доказать, что множество

$$X_{(k)A} = X \cap A = (X_{(k)A} \cup X_{(k)B}) \cap A = (A \cup B) \cap A = A$$

не является решением полного линейного приведённого канонического единометрического производного

множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Действительно, имеет место совокупность следующих отношений:

$$X_{(k)A} = A = [L_A, R_A);$$

$$X_{(k)A}{}^{(k)} = [L_A, R_A];$$

$$X_{(k)A} \cup X_{(k)A}{}^{(k)} = [L_A, R_A) \cup [L_A, R_A] = [L_A, R_A] \neq [L_A, R_A) = A,$$

что и требовалось доказать.

Второй, разрывный (дискретный), счётно бесконечный контрпример.

Алгоритм построения такого контрпримера вначале для полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения только первого порядка

$$X \cup X' = A \cup B,$$

$$X \cup X^{(1)} = A \cup B$$

с теоретико-множественным объединением $A \cup B$ заданных известных множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X является следующим.

1. В произвольном всюду частом (всюду плотном) метрическом пространстве берётся произвольная именно сходящаяся пронумерованная всеми положительными

целыми числами подряд счётно бесконечная последовательность

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, \dots , b_n, \dots)$$

$$n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots),$$

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = b$$

непременно попарно различных точек

$$b_i \neq b_j \ (i \neq j,\ i \in N,\ j \in N)$$

пространства, не содержащая единственной предельной точки b для себя, принадлежащей этому метрическому пространству:

$$b \notin (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots , b_n, \dots).$$

2. В качестве множества A берётся именно счётно бесконечное множество

$$A = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \dots , b_n, \dots\}$$

всех элементов этой последовательности

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots , b_n, \ldots),$$

сходящейся к единственной предельной точке b для множества A.

Единственная предельная точка b для этого множества A не принадлежит ни той последовательности, ни этому множеству A, которое поэтому не является замкнутым множеством:

$$b \notin A.$$

Однако предельная точка b является единственной предельной точкой для множества A и поэтому образует именно одноэлементное производное множество первого порядка

$$A' = A^{(1)} = \{b\}$$

для этого множества A и принадлежит этому одноэлементному производному множеству:

$$\mathbf{b \in A' = A^{(1)} = \{b\}.}$$

3. В качестве множества B берётся именно это одноэлементное производное множество:

$$\mathbf{B = A' = A^{(1)} = \{b\}.}$$

Единственная предельная точка b принадлежит этому множеству B:

$$\mathbf{b \in B.}$$

Тогда теоретико-множественное объединение A ∪ B множеств A и B образует множество всех элементов той именно сходящейся последовательности, пополненное её единственной предельной точкой b как единственной

предельной точкой для этого множества A ∪ B, которое поэтому является именно замкнутым множеством:

$$b \in A \cup B.$$

Производное множество первого порядка

$$(A \cup B)' = (A \cup B)^{(1)}$$

для этого теоретико-множественного объединения A ∪ B множеств A и B является одноэлементным множеством, состоящим только из этой единственной предельной точки b этого множества A ∪ B, и включено в это теоретико-множественное объединение A ∪ B множеств A и B:

$$b \in (A \cup B)' = (A \cup B)^{(1)} = \{b\} \subset A \cup B,$$

которое, следовательно, является именно замкнутым множеством.

Тогда это множество

$$\mathbf{X = A \cup B}$$

является одним из решений полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$\mathbf{X \cup X' = A \cup B,}$$

$$\mathbf{X \cup X^{(1)} = A \cup B}$$

с теоретико-множественным объединением A ∪ B заданных известных множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Действительно, пусть

$$\mathbf{X = A \cup B.}$$

Тогда на деле верны требуемые теоретико-множественные равенства

$$\mathbf{X \cup X^{(1)} = (A \cup B) \cup (A \cup B)^{(1)} = A \cup B}$$

ввиду в данном случае именно строгого теоретико-множественного включения

$$(A \cup B)' = (A \cup B)^{(1)} \subset A \cup B.$$

Теоретико-множественная проекция решения

$$X = A \cup B$$

полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X \cup X' = A \cup B,$$

$$X \cup X^{(1)} = A \cup B$$

с теоретико-множественным объединением A ∪ B заданных известных множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X на множество A есть теоретико-множественное пересечение

$$X_{(k)A} = X \cap A = (X_{(k)A} \cup X_{(k)B}) \cap A = (A \cup B) \cap A = A$$

ввиду непременно строгого теоретико-множественного включения

$$A \subset A \cup B.$$

Однако множество A не содержит именно несобственной единственной предельной точки b для себя, являющейся именно собственной единственной предельной точкой для теоретико-множественного объединения A ∪ B множеств A и B, и не является замкнутым множеством.

Поэтому нарушено необходимое условие разрешимости полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X \cup X^{(1)} = A,$$

$$X \cup X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, и это уравнение вообще не может иметь решений.

Следовательно, теоретико-множественное проектирование множества A ∪ B, являющегося одним из решений полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X \cup X' = A \cup B,$$

$$X \cup X^{(1)} = A \cup B$$

с теоретико-множественным объединением A ∪ B заданных известных множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X, на множество A принципиально не может дать вообще не существующего

решения полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$\mathbf{X \cup X' = A,}$$

$$\mathbf{X \cup X^{(1)} = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, что и требовалось доказать контрпримером вначале только для полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$\mathbf{X \cup X' = A \cup B,}$$

$$\mathbf{X \cup X^{(1)} = A \cup B}$$

с теоретико-множественным объединением A ∪ B заданных известных множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Однако дальнейшей целью является построение контрпримера для полных линейных приведённых канонических единометрических производных множественных уравнений любого положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством и с единственным искомым неизвестным множеством X. В этих уравнениях при превышении единицы их порядком k замкнутость единственного заданного известного множества не является необходимым условием разрешимости. Поэтому целесообразно вначале после этого первого способа завершения последнего

доказательства предложить и другой способ завершения последнего доказательства, чтобы обойтись в последнем доказательстве без ссылки на незамкнутость единственного заданного известного множества A как теоретико-множественного пересечения

$$(A \cup B) \cap A = A$$

ввиду непременно строгого теоретико-множественного включения

$$A \subset A \cup B$$

как на достаточное условие неразрешимости полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X \cup X^{(1)} = A,$$

$$X \cup X' = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Этот другой способ завершения последнего доказательства основан на том, что теоретико-множественная проекция решения

$$\mathbf{X = A \cup B}$$

полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$\mathbf{X \cup X' = A \cup B,}$$

$$\mathbf{X \cup X^{(1)} = A \cup B}$$

с теоретико-множественным объединением A ∪ B заданных известных множеств A и B и с единственным искомым

неизвестным множеством X на множество A есть теоретико-множественное пересечение

$$X_{(k)A} = X \cap A = (X_{(k)A} \cup X_{(k)B}) \cap A = (A \cup B) \cap A = A$$

ввиду в данном случае именно строгого теоретико-множественного включения

$$A \subset A \cup B.$$

Требуется доказать, что это множество A не является одним из решений полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X \cup X' = A,$$

$$X \cup X^{(1)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Действительно, пусть

$$X = A.$$

Тогда на деле верны требуемые теоретико-множественные равенства и неравенство

$$X \cup X^{(1)} = A \cup A^{(1)} = A \cup \{b\} \neq A$$

ввиду того, что именно несобственная единственная предельная точка b для множества A образует одноэлементное производное множество первого порядка

$$A' = A^{(1)} = \{b\} = B$$

для этого множества A и принадлежит этому одноэлементному производному множеству:

$$b \in A' = A^{(1)} = \{b\} = B,$$

однако не принадлежит этому множеству A:

$$b \notin A.$$

То есть левая часть полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$\mathbf{X \cup X' = A,}$$

$$\mathbf{X \cup X^{(1)} = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X содержит единственную предельную точку b для множества A, а правая часть уравнения не содержит единственной предельной точки b для множества A.

Тем самым этот другой способ завершения того доказательства осуществлён.

Теперь представляется целесообразным исследовать этот способ построения контрпримера, достаточного для

полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$\mathbf{X \cup X' = A,}$$

$$\mathbf{X \cup X^{(1)} = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X, вначале именно непосредственно на предмет применимости к полному линейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению произвольного положительного целого порядка k

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = A}$$

с единственным заданным известным множеством A (вместо которого, как и выше, могут быть взяты единственное заданное известное множество B или теоретико-множественное объединение A ∪ B) и с единственным искомым неизвестным множеством X. При этом, естественно, используется приведённый выше другой способ завершения доказательства. Кроме того, поскольку применимость этого способа построения контрпримера для случая

$$k = 1$$

уже установлена, здесь можно считать

$$k \geq 2.$$

Производное множество первого порядка для множества

$$B = \{b\}$$

оказывается именно пустым:

$$B' = B^{(1)} = \{b\}' = \{b\}^{(1)} = \varnothing.$$

Производные множества первого порядка для множеств

$$A = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \dots , b_n, \dots\},$$

$$A \cup B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \dots , b_n, \dots\} \cup \{b\} =$$

$$\{b, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots , b_n, \dots\}$$

являются именно одноэлементными, состоящими из единственной предельной точки b для множества A:

$$A' = A^{(1)} = \{b\};\ b \notin A;$$

$$(A \cup B)' = (A \cup B)^{(1)} = \{b\} \subset A \cup B;\ b \in A \cup B.$$

Поэтому при $k \geq 2$ по общим определениям предельной точки и производного множества произвольного положительного целого порядка k для произвольного

множества все эти производные множества превышающих единицу порядков оказываются именно пустыми:

$$A^{(k)} = \emptyset;$$

$$B^{(k)} = \emptyset;$$

$$(A \cup B)^{(k)} = \emptyset.$$

Тогда это множество A ∪ B является одним из решений полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения произвольного положительного целого порядка $k \geq 2$

$$X \cup X^{(k)} = A \cup B$$

с теоретико-множественным объединением A ∪ B заданных известных множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Действительно, пусть

$$X = A \cup B.$$

Тогда на деле верн<u>ы</u> требуемые теоретико-множественные равенства

$$X \cup X^{(k)} = (A \cup B) \cup (A \cup B)^{(k)} = A \cup B$$

ввиду <u>пустоты</u> $(A \cup B)^{(k)}$ при $k \geq 2$:

$$(A \cup B)^{(k)} = \varnothing.$$

Теоретико-множественная <u>проекция</u> решения

$$X = A \cup B$$

<u>полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения произвольного положительного</u> целого порядка $k \geq 2$

$$X \cup X^{(k)} = A \cup B$$

с теоретико-множественным объединением $A \cup B$ заданных известных множеств A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X на множество A есть теоретико-множественное пересечение

$$X_{(k)A} = X \cap A = (X_{(k)A} \cup X_{(k)B}) \cap A = (A \cup B) \cap A = A$$

ввиду непременно строгого теоретико-множественного включения

$$A \subset A \cup B.$$

Однако можно доказать, что это множество A является одним из решений полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения произвольного положительного целого порядка $k \geq 2$

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X. Действительно, пусть

$$X = A.$$

Тогда на деле верны требуемые теоретико-множественные равенства

$$X \cup X^{(k)} = A \cup A^{(k)} = A$$

ввиду пустоты $A^{(k)}$ при $k \geq 2$:

$$A^{(k)} = \emptyset.$$

То есть контрпример для первого порядка (k = 1) не является контрпримером ни для одного из превышающих единицу порядков ($k \geq 2$).

Этиологический (причинно-следственный, то есть в самом широком философском, а не в узком медицинском смысле) анализ сопоставления действенности исследованного контрпримера, с одной стороны, для первого порядка и, с другой стороны, для превышающих единицу порядков даёт следующие за одним явно названным далее исключением эвристические (индуктивные, наводящие на решение в обоих смыслах: и нахождения решений задач, и принятия решений, например применительно к построению и/или изложению решений задач, в точках разветвления возможностей выбора) выводы.

1. Возможность действенности исследованного контрпримера

$$X = A$$

для полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$\mathbf{X \cup X' = A,}$$

$$\mathbf{X \cup X^{(1)} = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X обеспечивается именно непустотой производных множеств первого порядка для множества A и, следовательно, для теоретико-множественного объединения A ∪ B заданных известных множеств A и B.

2. Невозможность действенности исследованного контрпримера для всех превышающих единицу порядков обеспечивается именно пустотой производных множеств

всех превышающих единицу целых порядков для теоретико-множественного объединения A ∪ B заданных известных множеств A и B и, следовательно, для множества A.

3. Для действенности контрпримера

$$X = A$$

для полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения произвольного положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X необходима непустота производных множеств именно этого

положительного целого порядка k для множества A и, следовательно, для теоретико-множественного объединения A ∪ B заданных известных множеств A и B. Это именно строго доказуемо методом от противоречащего. Действительно, в противоречащем случае для такого контрпримера производное множество произвольного положительного целого порядка k ≥ 2 полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X для теоретико-множественного объединения A ∪ B заданных известных множеств A и B является именно пустым:

$$(A \cup B)^{(k)} = \emptyset.$$

Следовательно, при k ≥ 2 по общим определениям предельной точки и производного множества произвольного положительного целого порядка k для произвольного множества производные множества превышающих единицу порядков для всех подмножеств теоретико-множественного объединения A ∪ B заданных известных множеств A и B, в том числе и для множества A, оказываются именно пустыми:

$$A^{(k)} = \emptyset.$$

Тогда для такого контрпримера полное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение произвольного положительного целого порядка k ≥ 2

$$X \cup X^{(k)} = A \cup B$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X теряет своё единственное производное множество $X^{(k)}$ и приобретает вырожденный тривиальный разрешённый вид

$$X = A \cup B$$

с непременно единственным решением, равным теоретико-множественному объединению A ∪ B заданных известных множеств A и B. Теоретико-множественное проектирование такого решения

$$X = A \cup B$$

на любое подмножество этого теоретико-множественного объединения A ∪ B заданных известных множеств A и B, в том числе и на множество A, даёт именно это подмножество,

в том числе множество A, непременно являющееся именно единственным решением

$$X = A$$

такого вырождения полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения произвольного положительного целого порядка $k \geq 2$

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X для этого подмножества, в том числе множества A. В итоге такой контрпример оказывается недееспособным, что и требовалось доказать.

4. Для действенности обобщающего продолжения и развития принятого метода построения исследованного контрпримера для полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения произвольного положительного целого порядка $k \geq 2$

$$X \cup X^{(k)} = A \cup B$$

с теоретико-множественным объединением $A \cup B$ заданных известных множеств A и B (вместо которого, как и выше, могут быть взяты единственные заданные известные множества A или B) и с единственным искомым неизвестным множеством X чрезвычайно полезно дальнейшее углубление именно в саму сущность принятого метода построения исследованного контрпримера для

полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$\mathbf{X \cup X' = A \cup B,}$$
$$\mathbf{X \cup X^{(1)} = A \cup B.}$$

А именно, множество

$$\mathbf{B = \{b\} = A' = A^{(1)}}$$

является как раз первым производным множеством для множества

$$\mathbf{A = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots , b_n, \ldots\},}$$

что и обеспечило действенность исследованного контрпримера для полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения именно первого порядка

$$X \cup X' = A \cup B,$$

$$X \cup X^{(1)} = A \cup B.$$

То есть множество

$$A = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots , b_n, \ldots\}$$

является <u>одним</u> из <u>интегральных</u> множеств <u>первого</u> порядка <u>от</u> множества

$$B = \{b\} = A' = A^{(1)}.$$

Поэтому представляется целесообразным присвоить множеству A левый нижний индекс, равный единице и взятый, как и порядок <u>производного</u> множества, в круглые скобки:

$${}_{(1)}A = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots , b_n, \ldots\},$$

так что

$$B = \{b\} = {}_{(1)}A' = {}_{(1)}A^{(1)}.$$

Поэтому именно с сущностной точки зрения вполне достаточный более общий алгоритм построения требуемого действенного контрпримера для произвольного положительного целого порядка k представляется следующим.

1. Выбирается произвольное действительное число

$$b \in R.$$

2. Строится произвольная ни в коем случае не содержащая этого действительного числа b сходящаяся именно к этому действительному числу b счётно бесконечная последовательность непременно попарно различных действительных чисел

$$({}_{(1)}b_1,\ {}_{(1)}b_2,\ {}_{(1)}b_3,\ {}_{(1)}b_4,\ \dots ,\ {}_{(1)}b_n,\ \dots).$$

3. Составляется счётно бесконечное множество

$$ {}_{(1)}A = \{{}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \dots , {}_{(1)}b_n, \dots\} $$

всех элементов этой последовательности, являющееся одним из интегральных множеств указываемого в круглых скобках в левом нижнем индексе первого порядка от одноэлементного множества

$$ B = \{b\} = {}_{(1)}A' = {}_{(1)}A^{(1)} $$

как производного множества первого порядка для себя, единственным элементом которого является это действительное число b.

4. Упорядоченная пара (${}_{(1)}A$, B) этих множеств ${}_{(1)}A$ и B обеспечивает требуемый контрпример непроектируемости решения полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X \cup X' = {}_{(1)}A \cup B,$$

$$X \cup X^{(1)} = {}_{(1)}A \cup B$$

с единственным искомым неизвестным множеством X и единственным заданным известным множеством ${}_{(1)}A \cup B$ на его подмножество ${}_{(1)}A$. А именно, множество

$$X = {}_{(1)}A \cup B = \{b, {}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \dots , {}_{(1)}b_n, \dots\}$$

содержит b как собственную единственную предельную точку для себя, поэтому замкнуто и ввиду

$$X \cup X' = X \cup X^{(1)} = \{b, {}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \dots , {}_{(1)}b_n, \dots\} \cup$$

$$\{b, {}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \dots , {}_{(1)}b_n, \dots\}^{(1)} =$$

$$\{b, {}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \dots , {}_{(1)}b_n, \dots\} \cup \{b\} =$$

$$\{b, {}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \dots , {}_{(1)}b_n, \dots\} = {}_{(1)}A \cup B$$

является решением (одним из решений) этого уравнения. Однако проекция

$X = ({}_{(1)}A \cup B) \cap {}_{(1)}A = \{b, {}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \ldots , {}_{(1)}b_n, \ldots\} \cap \{{}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \ldots , {}_{(1)}b_n, \ldots\} = \{{}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \ldots , {}_{(1)}b_n, \ldots\} = {}_{(1)}A$ этого решения на множество ${}_{(1)}A$ как на подмножество теоретико-множественного объединения ${}_{(1)}A \cup B$ не является решением (одним из решений) соответствующего полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения первого порядка

$$X \cup X' = {}_{(1)}A,$$

$$X \cup X^{(1)} = {}_{(1)}A$$

с единственным искомым неизвестным множеством X и единственным заданным известным множеством ${}_{(1)}A$, поскольку левая часть этого уравнения содержит точку b, которой не содержит правая часть этого уравнения:

$$X \cup X' = X \cup X^{(1)} = \{{}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \ldots , {}_{(1)}b_n, \ldots\} \cup \{{}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \ldots , {}_{(1)}b_n, \ldots\}^{(1)} = \{{}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \ldots , {}_{(1)}b_n, \ldots\} \cup \{b\} = \{b, {}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \ldots , {}_{(1)}b_n, \ldots\} = {}_{(1)}A \cup B \neq {}_{(1)}A = \{{}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \ldots , {}_{(1)}b_n, \ldots\}.$$

5. Упорядоченная пара (${}_{(k)}A$, B) множеств ${}_{(k)}A$ и B обеспечивает требуемый контрпример непроектируемости решения полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = {}_{(k)}A \cup B$$

с единственным искомым неизвестным множеством X и единственным заданным известным множеством ${}_{(k)}A \cup B$ на его подмножество ${}_{(k)}A$. Для этого по изложенным выше общим методам либо дополняющего, либо замещающего

последовательного кратного изолированного определивания либо сохраняемых, либо заменяемых соответственно отдельных (непредельных, изолированных) точек при сохранении предельных точек (в данном случае с непременным обеспечением несобственности для множества $_{(k)}A$ при собственности для множества $_{(k)}A \cup B$ предельной точки b) произвольного множества в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве составляется счётно бесконечное множество

$$_{(k)}A = \{_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \dots , {}_{(k)}b_n, \dots\}$$

всех элементов произвольной ни в коем случае не содержащей этого действительного числа b сходящейся именно к этому действительному числу b счётно

бесконечной последовательности непременно попарно различных действительных чисел

$$({}_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \ldots , {}_{(k)}b_n, \ldots),$$

являющееся одним из интегральных множеств указываемого в круглых скобках в левом нижнем индексе положительного целого порядка k от одноэлементного множества

$$B = \{b\} = {}_{(k)}A^{(k)}$$

как производного множества положительного целого порядка k для себя, причём единственным элементом этого производного множества является это действительное число b.

А именно, множество

$$X = {}_{(k)}A \cup B = \{b, {}_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \ldots , {}_{(k)}b_n, \ldots\}$$

содержит b как собственную единственную предельную точку для себя, поэтому замкнуто и ввиду

$$X \cup X^{(k)} = \{b, {}_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \dots , {}_{(k)}b_n, \dots\} \cup \{b, {}_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \dots , {}_{(k)}b_n, \dots\}^{(1)} =$$
$$\{b, {}_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \dots , {}_{(k)}b_n, \dots\} \cup \{b\} =$$
$$\{b, {}_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \dots , {}_{(k)}b_n, \dots\} = {}_{(k)}A \cup B$$

является решением (одним из решений) этого уравнения

$$X \cup X^{(k)} = {}_{(k)}A \cup B.$$

Однако проекция

$$X = ({}_{(k)}A \cup B) \cap {}_{(k)}A = \{b, {}_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \dots , {}_{(k)}b_n, \dots\} \cap \{{}_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \dots , {}_{(k)}b_n, \dots\} =$$
$$\{{}_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \dots , {}_{(k)}b_n, \dots\} = {}_{(k)}A$$

этого решения на множество ${}_{(k)}A$ как на подмножество теоретико-множественного объединения ${}_{(k)}A \cup B$ не

является решением (одним из решений) соответствующего полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = {}_{(k)}A$$

с единственным искомым неизвестным множеством X и единственным заданным известным множеством $_{(k)}A$, поскольку левая часть этого уравнения содержит точку b, которой не содержит правая часть этого уравнения:

$$X \cup X^{(k)} = \{{}_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \dots , {}_{(k)}b_n, \dots\} \cup$$
$$\{{}_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \dots , {}_{(k)}b_n, \dots\}^{(1)} =$$
$$\{{}_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \dots , {}_{(k)}b_n, \dots\} \cup \{b\} =$$
$$\{b, {}_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \dots , {}_{(k)}b_n, \dots\} = {}_{(k)}A \cup B \neq$$
$${}_{(k)}A = \{{}_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \dots , {}_{(k)}b_n, \dots\}.$$

При этом такая счётно бесконечная последовательность

$$({}_{(1)}b_1,\ {}_{(1)}b_2,\ {}_{(1)}b_3,\ {}_{(1)}b_4,\ \dots,\ {}_{(1)}b_n,\ \dots),$$
$$({}_{(2)}b_1,\ {}_{(2)}b_2,\ {}_{(2)}b_3,\ {}_{(2)}b_4,\ \dots,\ {}_{(2)}b_n,\ \dots),$$
$$({}_{(3)}b_1,\ {}_{(3)}b_2,\ {}_{(3)}b_3,\ {}_{(3)}b_4,\ \dots,\ {}_{(3)}b_n,\ \dots),$$
$$({}_{(4)}b_1,\ {}_{(4)}b_2,\ {}_{(4)}b_3,\ {}_{(4)}b_4,\ \dots,\ {}_{(4)}b_n,\ \dots),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$({}_{(k)}b_1,\ {}_{(k)}b_2,\ {}_{(k)}b_3,\ {}_{(k)}b_4,\ \dots,\ {}_{(k)}b_n,\ \dots),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

сходящихся к одному и тому же действительному числу b счётно бесконечных последовательностей непременно попарно различных действительных чисел строится по любому из обоих указанных общих методов именно последовательно по методу математической индукции.

1. Выбирается произвольное действительное число

$$b \in R,$$

определяющее одноэлементную последовательность нулевого порядка (i = 0)

$$(b).$$

2. Строится для начала метода математической индукции произвольная ни в коем случае не содержащая этого действительного числа b сходящаяся именно к этому действительному числу b счётно бесконечная последовательность первого порядка (i = 1) непременно попарно различных действительных чисел

$$({}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \ldots , {}_{(1)}b_n, \ldots) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)),$$

например

$${}_{(1)}b_n = b + (-1)^n/n \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)).$$

3. По методу математической индукции принимается допущение, что построена такая произвольная ни в коем случае не содержащая этого действительного числа b счётно бесконечная последовательность любого положительного целого порядка i непременно попарно различных действительных чисел

$$({}_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \ldots , {}_{(i)}b_n, \ldots) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)),$$

что производное множество первого порядка

$${}_{(i)}A^{(1)} = \{{}_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \ldots , {}_{(i)}b_n, \ldots\}^{(1)} \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots))$$

для множества

$${}_{(i)}A = \{{}_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \ldots , {}_{(i)}b_n, \ldots\} \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots))$$

всех элементов этой счётно бесконечной последовательности положительного целого порядка i есть теоретико-множественное объединение множества

$$_{(i-1)}A = \{_{(i-1)}b_1, {}_{(i-1)}b_2, {}_{(i-1)}b_3, {}_{(i-1)}b_4, \dots , {}_{(i-1)}b_n, \dots\}$$

$$(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots))$$

всех элементов такой счётно бесконечной последовательности положительного целого порядка i-1

$$({}_{(i-1)}b_1, {}_{(i-1)}b_2, {}_{(i-1)}b_3, {}_{(i-1)}b_4, \dots , {}_{(i-1)}b_n, \dots) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots))$$

и одноэлементного множества

$$B = \{b\},$$

целиком состоящего из этого единственного действительного числа b:

$$_{(i)}A^{(1)} = \{_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \dots , {}_{(i)}b_n, \dots\}^{(1)} = {}_{(i-1)}A \cup B =$$

$$\{_{(i-1)}b_1, {}_{(i-1)}b_2, {}_{(i-1)}b_3, {}_{(i-1)}b_4, \dots , {}_{(i-1)}b_n, \dots\} \cup \{b\} =$$

$$\{b, {}_{(i-1)}b_1, {}_{(i-1)}b_2, {}_{(i-1)}b_3, {}_{(i-1)}b_4, \dots , {}_{(i-1)}b_n, \dots\},$$

причём для i = 1 и i-1 = 0 ввиду пустоты множества

$$_{(0)}A = \{_{(0)}b_1, {}_{(0)}b_2, {}_{(0)}b_3, {}_{(0)}b_4, \dots , {}_{(0)}b_n, \dots\} = \varnothing$$

всех указанных несуществующих элементов имеет место

$$_{(1)}A^{(1)} = \{_{(1)}b_1, {}_{1(i)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \ldots , {}_{(1)}b_n, \ldots\}^{(1)} = {}_{(0)}A \cup B =$$

$$\{_{(0)}b_1, {}_{(0)}b_2, {}_{(0)}b_3, {}_{(0)}b_4, \ldots , {}_{(0)}b_n, \ldots\} \cup \{b\} = \emptyset \cup \{b\} = \{b\} = B.$$

4. По допущению метода математической индукции множество положительного целого порядка i

$$_{(i)}A = \{_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \ldots , {}_{(i)}b_n, \ldots\} \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots))$$

всех элементов не содержащей этого действительного числа b счётно бесконечной последовательности положительного целого порядка i непременно попарно различных действительных чисел

$$(_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \ldots , {}_{(i)}b_n, \ldots) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots))$$

таково, что существует счётно бесконечная последовательность

$$(U({}_{(i)}b_1, {}_{(i)}\varepsilon_1), U({}_{(i)}b_2, {}_{(i)}\varepsilon_2), U({}_{(i)}b_3, {}_{(i)}\varepsilon_3), U({}_{(i)}b_4, {}_{(i)}\varepsilon_4), \dots , U({}_{(i)}b_n, {}_{(i)}\varepsilon_n), \dots)$$

не только попарно непересекающихся, но и попарно отдалённых друг от друга на непременно положительные расстояния достаточно малых имеющих положительные радиусы ${}_{(i)}\varepsilon_n$ окрестностей всех элементов ${}_{(i)}b_n$ счётно бесконечной последовательности положительного целого порядка i

$$({}_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \dots , {}_{(i)}b_n, \dots) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)).$$

5. Шаг математической индукции на основании сделанного допущения осуществляется построением такой произвольной ни в коем случае не содержащей этого действительного числа b счётно бесконечной

последовательности положительного целого порядка i+1 непременно попарно различных действительных чисел

$$({}_{(i+1)}b_1, {}_{(i+1)}b_2, {}_{(i+1)}b_3, {}_{(i+1)}b_4, \ldots , {}_{(i+1)}b_n, \ldots) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)),$$

что производное множество первого порядка

$${}_{(i+1)}A^{(1)} = \{{}_{(i+1)}b_1, {}_{(i+1)}b_2, {}_{(i+1)}b_3, {}_{(i+1)}b_4, \ldots , {}_{(i+1)}b_n, \ldots\}^{(1)}$$
$$(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots))$$

для множества

$${}_{(i+1)}A = \{{}_{(i+1)}b_1, {}_{(i+1)}b_2, {}_{(i+1)}b_3, {}_{(i+1)}b_4, \ldots , {}_{(i+1)}b_n, \ldots\}$$
$$(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots))$$

всех элементов этой счётно бесконечной последовательности положительного целого порядка i+1

$$({}_{(i+1)}b_1, {}_{(i+1)}b_2, {}_{(i+1)}b_3, {}_{(i+1)}b_4, \ldots , {}_{(i+1)}b_n, \ldots) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots))$$

есть теоретико-множественное объединение множества

$${}_{(i)}A = \{{}_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \ldots , {}_{(i)}b_n, \ldots\} \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots))$$

всех элементов такой счётно бесконечной последовательности положительного целого порядка i

$$({}_{(i)}b_1,\ {}_{(i)}b_2,\ {}_{(i)}b_3,\ {}_{(i)}b_4,\ \dots,\ {}_{(i)}b_n,\ \dots)\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots))$$

и одноэлементного множества

$$B = \{b\},$$

целиком состоящего из этого единственного действительного числа b:

$${}_{(i+1)}A^{(1)} = \{{}_{(i+1)}b_1,\ {}_{(i+1)}b_2,\ {}_{(i+1)}b_3,\ {}_{(i+1)}b_4,\ \dots,\ {}_{(i+1)}b_n,\ \dots\}^{(1)} = {}_{(i)}A \cup B =$$
$$\{{}_{(i)}b_1,\ {}_{(i)}b_2,\ {}_{(i)}b_3,\ {}_{(i)}b_4,\ \dots,\ {}_{(i)}b_n,\ \dots\} \cup \{b\} =$$
$$\{b,\ {}_{(i)}b_1,\ {}_{(i)}b_2,\ {}_{(i)}b_3,\ {}_{(i)}b_4,\ \dots,\ {}_{(i)}b_n,\ \dots\}.$$

Во-первых, для каждого элемента

$${}_{(i)}b_n\ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots))$$

счётно бесконечной последовательности положительного целого порядка i

$$({}_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \dots, {}_{(i)}b_n, \dots) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots))$$

непременно <u>внутри</u> соответствующей этому элементу ${}_{(i)}b_n$ окрестности

$$U({}_{(i)}b_n, {}_{(i)}\varepsilon_n)$$

строится своя <u>сходящаяся</u> к этому элементу ${}_{(i)}b_n$ <u>счётно бесконечная</u> последовательность

$$({}_{(i)}b_{n1}, {}_{(i)}b_{n2}, {}_{(i)}b_{n3}, {}_{(i)}b_{n4}, \dots, {}_{(i)}b_{nj}, \dots)$$

$$(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots), j \in N)$$

обязательно <u>отличных</u> от действительного числ<u>а</u> b и от этого элемента ${}_{(i)}b_n$ <u>попарно</u> <u>различных</u> между собой действительных чисел, по <u>свободному</u> <u>выбору</u> либо <u>содержащая</u>, либо <u>не</u> <u>содержащая</u> этот элемент ${}_{(i)}b_n$ по изложенным выше <u>общим</u> <u>методам</u> либо <u>дополняющего</u>, либо <u>замещающего</u> <u>последовательного</u> <u>кратного</u>

изолированного определивания либо сохраняемых, либо заменяемых соответственно отдельных (непредельных, изолированных) точек при сохранении предельных точек (в данном случае с непременным обеспечением несобственности для множества $_{(k)}A$ при собственности для множества $_{(k)}A \cup B$ предельной точки b) произвольного множества в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве.

Во-вторых, сразу для всех элементов

$$_{(i)}b_n \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...))$$

счётно бесконечной последовательности положительного целого порядка i

$$(_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, ... , {}_{(i)}b_n, ...) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...))$$

составляется счётно бесконечная последовательность сходящихся к этим элементам ${}_{(i)}b_n$ построенных поэлементных счётно бесконечных последовательностей:

$$({}_{(i)}b_{11}, {}_{(i)}b_{12}, {}_{(i)}b_{13}, {}_{(i)}b_{14}, \ldots , {}_{(i)}b_{1j}, \ldots) \ (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)),$$

$$\lim_{j\to+\infty} {}_{(i)}b_{1j} = {}_{(i)}b_1,$$

$$({}_{(i)}b_{21}, {}_{(i)}b_{22}, {}_{(i)}b_{23}, {}_{(i)}b_{24}, \ldots , {}_{(i)}b_{2j}, \ldots) \ (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)),$$

$$\lim_{j\to+\infty} {}_{(i)}b_{2j} = {}_{(i)}b_2,$$

$$({}_{(i)}b_{31}, {}_{(i)}b_{32}, {}_{(i)}b_{33}, {}_{(i)}b_{34}, \ldots , {}_{(i)}b_{3j}, \ldots) \ (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)),$$

$$\lim_{j\to+\infty} {}_{(i)}b_{3j} = {}_{(i)}b_3,$$

$$({}_{(i)}b_{41}, {}_{(i)}b_{42}, {}_{(i)}b_{43}, {}_{(i)}b_{44}, \ldots , {}_{(i)}b_{4j}, \ldots) \ (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)),$$

$$\lim_{j\to+\infty} {}_{(i)}b_{4j} = {}_{(i)}b_4,$$

...

$$({}_{(i)}b_{n1}, {}_{(i)}b_{n2}, {}_{(i)}b_{n3}, {}_{(i)}b_{n4}, \ldots , {}_{(i)}b_{nj}, \ldots) \ (j \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)),$$

$$\lim_{j\to+\infty} {}_{(i)}b_{nj} = {}_{(i)}b_n,$$

……………………………………………………………………………………………

В-третьих, строится именно единая искомая счётно бесконечная последовательность

$$({}_{(i+1)}b_1, {}_{(i+1)}b_2, {}_{(i+1)}b_3, {}_{(i+1)}b_4, \ldots , {}_{(i+1)}b_m, \ldots) \ (m \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots))$$

непременно всех элементов всех этих последовательностей в порядке неубывания сумм n+j обоих правых индексов n и j, например по предложенному Кантором способу диагоналей (или гипотенуз наращиваемых равнобедренных прямоугольных треугольников)

$$({}_{(i+1)}b_1, {}_{(i+1)}b_2, {}_{(i+1)}b_3, {}_{(i+1)}b_4, \ldots , {}_{(i+1)}b_m, \ldots) =$$

$$({}_{(i)}b_{11}, {}_{(i)}b_{12}, {}_{(i)}b_{21}, {}_{(i)}b_{31}, {}_{(i)}b_{22}, {}_{(i)}b_{13}, {}_{(i)}b_{14}, {}_{(i)}b_{23}, {}_{(i)}b_{32}, {}_{(i)}b_{41}, \ldots)$$

или по известному способу наращиваемых квадратов

$$({}_{(i+1)}b_1, {}_{(i+1)}b_2, {}_{(i+1)}b_3, {}_{(i+1)}b_4, \ldots , {}_{(i+1)}b_m, \ldots) =$$

$$({}_{(i)}b_{11}, {}_{(i)}b_{12}, {}_{(i)}b_{22}, {}_{(i)}b_{21}, {}_{(i)}b_{31}, {}_{(i)}b_{32}, {}_{(i)}b_{33}, {}_{(i)}b_{23}, {}_{(i)}b_{13}, {}_{(i)}b_{14}, \ldots).$$

Эта единая искомая счётно бесконечная последовательность положительного целого порядка i+1 ни в коем случае не содержит этого действительного числа b, которого нет ни в одной построенной поэлементной счётно бесконечной последовательности по способу её построения.

Эта единая искомая счётно бесконечная последовательность положительного целого порядка i+1

$({}_{(i+1)}b_1, {}_{(i+1)}b_2, {}_{(i+1)}b_3, {}_{(i+1)}b_4, \ldots , {}_{(i+1)}b_n, \ldots)$ $(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots))$

состоит, как и каждая построенная именно внутри своей отдалённой от всех других окрестностей их счётно бесконечной последовательности окрестности поэлементная счётно бесконечная последовательность, из непременно попарно различных действительных чисел.

Каждый элемент ${}_{(i)}b_n$ множества

$${}_{(i)}A = \{{}_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \ldots , {}_{(i)}b_n, \ldots\} \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots))$$

всех элементов такой счётно бесконечной последовательности положительного целого порядка i

$$({}_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \ldots , {}_{(i)}b_n, \ldots) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots))$$

является предельной точкой для множества

$${}_{(i+1)}A = \{{}_{(i+1)}b_1, {}_{(i+1)}b_2, {}_{(i+1)}b_3, {}_{(i+1)}b_4, \ldots , {}_{(i+1)}b_n, \ldots\}$$

$$(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)),$$

включающего все элементы сходящейся к этому элементу ${}_{(i)}b_n$ счётно бесконечной последовательности

$$({}_{(i)}b_{n1}, {}_{(i)}b_{n2}, {}_{(i)}b_{n3}, {}_{(i)}b_{n4}, \ldots , {}_{(i)}b_{nj}, \ldots)$$

$$(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots), j \in N), \lim_{j\to+\infty} {}_{(i)}b_{nj} = {}_{(i)}b_n$$

обязательно отличных от действительного числа b и от этого элемента ${}_{(i)}b_n$ попарно различных между собой

действительных чисел, по свободному выбору либо содержащей, либо не содержащей этот элемент $_{(i)}b_n$.

По допущению метода математической индукции производное множество первого порядка

$$_{(i)}A^{(1)} = \{_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \dots , {}_{(i)}b_n, \dots\}^{(1)} \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots))$$

для счётно бесконечного множества

$$_{(i)}A = \{_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \dots , {}_{(i)}b_n, \dots\} \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots))$$

всех элементов ни в коем случае не содержащей этого действительного числа b счётно бесконечной последовательности положительного целого порядка i непременно попарно различных действительных чисел

$$({}_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \dots , {}_{(i)}b_n, \dots) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots))$$

есть теоретико-множественное объединение множества

$$_{(i-1)}A = \{_{(i-1)}b_1, {}_{(i-1)}b_2, {}_{(i-1)}b_3, {}_{(i-1)}b_4, \dots , {}_{(i-1)}b_n, \dots\}$$

$$(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...))$$

всех элементов такой счётно бесконечной последовательности положительного целого порядка i-1

$$({}_{(i-1)}b_1, {}_{(i-1)}b_2, {}_{(i-1)}b_3, {}_{(i-1)}b_4, ... , {}_{(i-1)}b_n, ...) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, ...))$$

и одноэлементного множества

$$B = \{b\},$$

целиком состоящего из этого единственного действительного числа b:

$$_{(i)}A^{(1)} = \{{}_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, ... , {}_{(i)}b_n, ...\}^{(1)} = {}_{(i-1)}A \cup B =$$
$$\{{}_{(i-1)}b_1, {}_{(i-1)}b_2, {}_{(i-1)}b_3, {}_{(i-1)}b_4, ... , {}_{(i-1)}b_n, ...\} \cup \{b\} =$$
$$\{b, {}_{(i-1)}b_1, {}_{(i-1)}b_2, {}_{(i-1)}b_3, {}_{(i-1)}b_4, ... , {}_{(i-1)}b_n, ...\},$$

причём для i = 1 и i-1 = 0 ввиду пустоты множества

$$_{(0)}A = \{{}_{(0)}b_1, {}_{(0)}b_2, {}_{(0)}b_3, {}_{(0)}b_4, ... , {}_{(0)}b_n, ...\} = \varnothing$$

всех указанных несуществующих элементов имеет место

$$_{(1)}A^{(1)} = \{_{(1)}b_1, {}_{1(i)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \ldots , {}_{(1)}b_n, \ldots\}^{(1)} = {}_{(0)}A \cup B =$$
$$\{_{(0)}b_1, {}_{(0)}b_2, {}_{(0)}b_3, {}_{(0)}b_4, \ldots , {}_{(0)}b_n, \ldots\} \cup \{b\} = \emptyset \cup \{b\} = \{b\} = B.$$

В частности, по допущению метода математической индукции действительное число b является предельной точкой для счётно бесконечного множества

$$_{(i+1)}A = \{_{(i+1)}b_1, {}_{(i+1)}b_2, {}_{(i+1)}b_3, {}_{(i+1)}b_4, \ldots , {}_{(i+1)}b_n, \ldots\}$$
$$(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots)),$$

включающего все элементы сходящейся к каждому элементу $_{(i)}b_n$ счётно бесконечной последовательности

$$(_{(i)}b_{n1}, {}_{(i)}b_{n2}, {}_{(i)}b_{n3}, {}_{(i)}b_{n4}, \ldots , {}_{(i)}b_{nj}, \ldots)$$
$$(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots), j \in N), \lim_{j\to+\infty} {}_{(i)}b_{nj} = {}_{(i)}b_n$$

обязательно отличных от действительного числа b и от этого элемента $_{(i)}b_n$ попарно различных между собой

действительных чисел, по свободному выбору либо содержащей, либо не содержащей этот элемент $_{(i)}b_n$.

Никаких других предельных точек для счётно бесконечного множества

$$_{(i+1)}A = \{_{(i+1)}b_1,\ _{(i+1)}b_2,\ _{(i+1)}b_3,\ _{(i+1)}b_4,\ \ldots,\ _{(i+1)}b_n,\ \ldots\}$$

$$(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots))$$

не существует, поскольку каждая такая поэлементная сходящаяся к элементу $_{(i)}b_n$ счётно бесконечная последовательность

$$(_{(i)}b_{n1},\ _{(i)}b_{n2},\ _{(i)}b_{n3},\ _{(i)}b_{n4},\ \ldots,\ _{(i)}b_{nj},\ \ldots)$$

$$(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \ldots),\ j \in N),\ \lim_{j\to+\infty}\ _{(i)}b_{nj} = {}_{(i)}b_n$$

целиком включена в свою окрестность

$$U(_{(i)}b_n,\ _{(i)}\varepsilon_n),$$

а все эти окрестности их счётно бесконечной последовательности

$$(U({}_{(i)}b_1, {}_{(i)}\varepsilon_1), U({}_{(i)}b_2, {}_{(i)}\varepsilon_2), U({}_{(i)}b_3, {}_{(i)}\varepsilon_3), U({}_{(i)}b_4, {}_{(i)}\varepsilon_4), \dots , U({}_{(i)}b_n, {}_{(i)}\varepsilon_n), \dots)$$

отдалены друг от друга, так что внутри каждой такой окрестности есть лишь единственная предельная точка ${}_{(i)}b_n$ в центре окрестности, а вне теоретико-множественного объединения всех этих окрестностей вообще нет никаких точек множества

$${}_{(i+1)}A = \{{}_{(i+1)}b_1, {}_{(i+1)}b_2, {}_{(i+1)}b_3, {}_{(i+1)}b_4, \dots , {}_{(i+1)}b_n, \dots\}$$

$$(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots)).$$

Следовательно, производное множество первого порядка

$${}_{(i+1)}A^{(1)} = \{{}_{(i+1)}b_1, {}_{(i+1)}b_2, {}_{(i+1)}b_3, {}_{(i+1)}b_4, \dots , {}_{(i+1)}b_n, \dots\}^{(1)}$$

$$(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots))$$

для счётно бесконечного множества

$$_{(i+1)}A = \{_{(i+1)}b_1, {}_{(i+1)}b_2, {}_{(i+1)}b_3, {}_{(i+1)}b_4, \dots , {}_{(i+1)}b_n, \dots\}$$

$$(n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots))$$

всех элементов этой единой искомой счётно бесконечной последовательности положительного целого порядка i+1 есть теоретико-множественное объединение множества

$$_{(i)}A = \{_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \dots , {}_{(i)}b_n, \dots\} \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots))$$

всех элементов такой счётно бесконечной последовательности положительного целого порядка i

$$(_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \dots , {}_{(i)}b_n, \dots) \ (n \in N = (1, 2, 3, 4, 5, \dots))$$

и одноэлементного множества

$$B = \{b\},$$

целиком состоящего из этого единственного действительного числа b:

$$ {}_{(i+1)}A^{(1)} = \{{}_{(i+1)}b_1, {}_{(i+1)}b_2, {}_{(i+1)}b_3, {}_{(i+1)}b_4, \dots , {}_{(i+1)}b_n, \dots\}^{(1)} = {}_{(i)}A \cup B = $$
$$ \{{}_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \dots , {}_{(i)}b_n, \dots\} \cup \{b\} = $$
$$ \{b, {}_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \dots , {}_{(i)}b_n, \dots\}. $$

Тем самым полностью доказан шаг метода математической индукции на основании принятого допущения, чем и завершается доказательство по методу математической индукции.

В частности, для любого положительного целого порядка i

$$ {}_{(i)}A^{(1)} = \{{}_{(i)}b_1, {}_{(i)}b_2, {}_{(i)}b_3, {}_{(i)}b_4, \dots , {}_{(i)}b_n, \dots\}^{(1)} = {}_{(i-1)}A \cup B = $$
$$ \{{}_{(i-1)}b_1, {}_{(i-1)}b_2, {}_{(i-1)}b_3, {}_{(i-1)}b_4, \dots , {}_{(i-1)}b_n, \dots\} \cup \{b\} = $$
$$ \{b, {}_{(i-1)}b_1, {}_{(i-1)}b_2, {}_{(i-1)}b_3, {}_{(i-1)}b_4, \dots , {}_{(i-1)}b_n, \dots\}. $$

Для всей последовательности

$$ i \in (1, 2, 3, 4, 5, \dots , k-1, k) \ (k \in N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}) $$

получается последовательность производных множеств первого порядка

$$_{(1)}A^{(1)} = \{_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \dots , {}_{(1)}b_n, \dots\}^{(1)} = {}_{(0)}A \cup B =$$
$$\{_{(0)}b_1, {}_{(0)}b_2, {}_{(0)}b_3, {}_{(0)}b_4, \dots , {}_{(0)}b_n, \dots\} \cup \{b\} =$$
$$\{b, {}_{(0)}b_1, {}_{(0)}b_2, {}_{(0)}b_3, {}_{(0)}b_4, \dots , {}_{(0)}b_n, \dots\} = \varnothing \cup B = \varnothing \cup \{b\} = \{b\},$$
$$_{(2)}A^{(1)} = \{_{(2)}b_1, {}_{(2)}b_2, {}_{(2)}b_3, {}_{(2)}b_4, \dots , {}_{(2)}b_n, \dots\}^{(1)} = {}_{(1)}A \cup B =$$
$$\{_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \dots , {}_{(1)}b_n, \dots\} \cup \{b\} =$$
$$\{b, {}_{(1)}b_1, {}_{(1)}b_2, {}_{(1)}b_3, {}_{(1)}b_4, \dots , {}_{(1)}b_n, \dots\},$$
$$_{(3)}A^{(1)} = \{_{(3)}b_1, {}_{(3)}b_2, {}_{(3)}b_3, {}_{(3)}b_4, \dots , {}_{(3)}b_n, \dots\}^{(1)} = {}_{(2)}A \cup B =$$
$$\{_{(2)}b_1, {}_{(2)}b_2, {}_{(2)}b_3, {}_{(2)}b_4, \dots , {}_{(2)}b_n, \dots\} \cup \{b\} =$$
$$\{b, {}_{(2)}b_1, {}_{(2)}b_2, {}_{(2)}b_3, {}_{(2)}b_4, \dots , {}_{(2)}b_n, \dots\},$$
$$_{(4)}A^{(1)} = \{_{(4)}b_1, {}_{(4)}b_2, {}_{(4)}b_3, {}_{(4)}b_4, \dots , {}_{(4)}b_n, \dots\}^{(1)} = {}_{(3)}A \cup B =$$
$$\{_{(3)}b_1, {}_{(3)}b_2, {}_{(3)}b_3, {}_{(3)}b_4, \dots , {}_{(3)}b_n, \dots\} \cup \{b\} =$$
$$\{b, {}_{(3)}b_1, {}_{(3)}b_2, {}_{(3)}b_3, {}_{(3)}b_4, \dots , {}_{(3)}b_n, \dots\},$$

••

$$_{(k-1)}A^{(1)} = \{_{(k-1)}b_1, {}_{(k-1)}b_2, {}_{(k)-1}b_3, {}_{(k-1)}b_4, \ldots , {}_{(k-1)}b_n, \ldots\}^{(1)} = {}_{(k-2)}A \cup B =$$

$$\{_{(k-2)}b_1, {}_{(k-2)}b_2, {}_{(k-2)}b_3, {}_{(k-2)}b_4, \ldots , {}_{(k-2)}b_n, \ldots\} \cup \{b\} =$$

$$\{b, {}_{(k-2)}b_1, {}_{(k-2)}b_2, {}_{(k-2)}b_3, {}_{(k-2)}b_4, \ldots , {}_{(k-2)}b_n, \ldots\},$$

$$_{(k)}A^{(1)} = \{_{(k)}b_1, {}_{(k)}b_2, {}_{(k)}b_3, {}_{(k)}b_4, \ldots , {}_{(k)}b_n, \ldots\}^{(1)} = {}_{(k-1)}A \cup B =$$

$$\{_{(k-1)}b_1, {}_{(k-1)}b_2, {}_{(k-1)}b_3, {}_{(k-1)}b_4, \ldots , {}_{(k-1)}b_n, \ldots\} \cup \{b\} =$$

$$\{b, {}_{(k-1)}b_1, {}_{(k-1)}b_2, {}_{(k-1)}b_3, {}_{(k-1)}b_4, \ldots , {}_{(k-1)}b_n, \ldots\}.$$

Производное множество нулевого порядка для любого множества есть само это множество.

Ввиду одноэлементности множества

$$B = \{b\}$$

производное множество любого положительного целого порядка для этого множества есть пустое множество

$$B^{(i)} = \{b\}^{(i)} = \varnothing \ (i \in N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}).$$

Поэтому

$$_{(i)}A^{(i)} = (_{(i)}A^{(1)})^{(i-1)} = (_{(i-1)}A \cup B)^{(i-1)} = {}_{(i-1)}A^{(i-1)} \cup B^{(i-1)},$$

$$_{(k)}A^{(k)} = {}_{(k-1)}A^{(k-1)} = {}_{(k-2)}A^{(k-2)} = {}_{(k-3)}A^{(k-3)} = \ldots = {}_{(3)}A^{(3)} = {}_{(2)}A^{(2)} = {}_{(1)}A^{(1)} = {}_{(0)}A^{(0)} \cup B^{(0)} = \emptyset \cup B = B = \{b\}.$$

Тем самым полностью завершены построение и обоснование требуемого действенного контрпримера для произвольного положительного целого порядка k по вполне достаточному более общему алгоритму.

Зато имеет место следующая теорема слагаемости (аддитивности).

Теорема. Если множества A и B замкнуты и не пересекаются,

X_A есть общее решение полного линейного приведённого канонического единометрического производного

множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X,

X_B есть общее решение полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения того же самого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = B$$

с единственным заданным известным множеством B и с единственным искомым неизвестным множеством X,

то

$$X = X_A \cup X_B$$

есть общее решение полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения того же самого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A \cup B$$

с двумя заданными известными множествами A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Доказательство.

Во-первых,

$$X = X_A \cup X_B$$

есть решение полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A \cup B$$

с двумя заданными известными множествами A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X. Действительно, ввиду действенности законов переместительности (коммутативности) и сочетательности (ассоциативности) для теоретико-множественных объединений и нахождений производных множеств

$$X \cup X^{(k)} = (X_A \cup X_B) \cup (X_A \cup X_B)^{(k)} = (X_A \cup X_A^{(k)}) \cup (X_B \cup X_B^{(k)}) = A \cup B.$$

Во-вторых, обратно, пусть X есть решение полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A \cup B$$

с двумя заданными известными множествами A и B и с единственным искомым неизвестным множеством X.

В частности, отсюда следует, что это решение X является подмножеством теоретико-множественного объединения множеств A и B:

$$\mathbf{X \subseteq A \cup B.}$$

Вполне естественно рассмотрим и обозначим очевидные теоретико-множественные пересечения

$$\mathbf{X_A = X \cap A,}$$

$$\mathbf{X_B = X \cap B.}$$

Тогда

$$\mathbf{X_A \cup X_B = X \cap A \cup X \cap B = X \cap (A \cup B) = X.}$$

Поскольку

$$\mathbf{X_B{}^{(k)} = (X \cap B)^{(k)} \subseteq B,}$$

$$\mathbf{B \cap A = \varnothing,}$$

то

$$\mathbf{X_A \cup X_A{}^{(k)} = X \cap A \cup (X \cap A)^{(k)} = X \cap A \cup (X \cap (A \cup B))^{(k)} =}$$
$$\mathbf{X \cap A \cup X^{(k)} \cap (A \cup B) = X \cap A \cup X^{(k)} \cap A = (X \cup X^{(k)}) \cap A =}$$
$$\mathbf{(A \cup B) \cap A = A,}$$

что и требовалось доказать.

Для множества B доказательство аналогично доказательству для множества A:

Поскольку

$$\mathbf{X_A{}^{(k)} = (X \cap A)^{(k)} \subseteq A,}$$
$$\mathbf{A \cap B = \varnothing,}$$

то

$$\mathbf{X_B \cup X_B{}^{(k)} = X \cap B \cup (X \cap B)^{(k)} = X \cap B \cup (X \cap (B \cup A))^{(k)} =}$$
$$\mathbf{X \cap B \cup X^{(k)} \cap (B \cup A) = X \cap B \cup X^{(k)} \cap B = (X \cup X^{(k)}) \cap B =}$$

$$(A \cup B) \cap B = B,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Теоретико-множественное объединение

$$X = X_A \cup X_B$$

является разбиением, поскольку

$$X_A \cap X_B \subseteq A \cap B = \varnothing.$$

Теорема. Разбиение

$$X = X_A \cup X_B$$

является единственным, а именно:

$$X = X \cap A \cup X \cap B.$$

Доказательство. Используется метод от противоречащего. Допустим, что существует какое-либо, вообще говоря, иное разбиение

$$X = Y_A \cup Y_B.$$

Тогда

$$\mathbf{X_A \cup X_B = Y_A \cup Y_B.}$$

Если теоретико-множественная <u>разность</u> $\mathbf{X_A \setminus Y_A}$ не пуста, то существует элемент

$$\mathbf{x \in X_A \setminus Y_A.}$$

При этом имеет место совокупность отношений:

$$\mathbf{x \in X_A;}$$

$$\mathbf{x \notin Y_A;}$$

$$\mathbf{x \in Y_B.}$$

Однако

$$\mathbf{Y_B \subseteq B.}$$

Следовательно,

$$\mathbf{x \in A \cap B = \varnothing.}$$

Однако пустому множеству не принадлежит никакой элемент.

Полученное противоречие показывает вопреки предположению именно пустоту теоретико-множественной разности $X_A \setminus Y_A$:

$$X_A \setminus Y_A = \emptyset.$$

Следовательно,

$$X_A \subseteq Y_A.$$

Подобным же образом доказывается отношение

$$X_B \subseteq Y_B.$$

А именно, если теоретико-множественная разность $X_B \setminus Y_B$ не пуста, то существует элемент

$$x \in X_B \setminus Y_B.$$

При этом имеет место совокупность отношений:

$$x \in X_B;$$

$$x \notin Y_B;$$

$$x \in Y_A.$$

Однако

$$Y_A \subseteq A.$$

Следовательно,

$$x \in B \cap A = \emptyset.$$

Однако <u>пустому</u> множеству не принадлежит никакой элемент.

Полученное <u>противоречие</u> показывает вопреки предположению именно <u>пустоту</u> теоретико-множественной разности $X_B \setminus Y_B$:

$$X_B \setminus Y_B = \emptyset.$$

Следовательно,

$$\mathbf{X_B \subseteq Y_B.}$$

То есть имеет место совокупность отношений:

$$\mathbf{X_A \subseteq Y_A;}$$

$$\mathbf{X_B \subseteq Y_B.}$$

Представляется естественным для получения желаемых обратных теоретико-множественных <u>включений</u> заменить в теоретико-множественных <u>разностях</u> уменьшаемые вычитаемыми и, наоборот, вычитаемые уменьшаемыми.

А именно, если теоретико-множественная <u>разность</u> $\mathbf{Y_A \setminus X_A}$ не пуста, то существует элемент

$$\mathbf{x \in Y_A \setminus X_A.}$$

При этом имеет место совокупность отношений:

$$\mathbf{x \in Y_A;}$$

$$\mathbf{x \notin X_A;}$$

$$\mathbf{x \in X_B.}$$

Однако

$$\mathbf{X_B \subseteq B.}$$

Следовательно,

$$\mathbf{x \in A \cap B = \emptyset.}$$

Однако <u>пустому</u> множеству не принадлежит никакой элемент.

Полученное <u>противоречие</u> показывает вопреки предположению именно <u>пустоту</u> теоретико-множественной разности $\mathbf{Y_A \setminus X_A}$:

$$\mathbf{Y_A \setminus X_A = \emptyset.}$$

Следовательно,

$$\mathbf{Y_A \subseteq X_A.}$$

Подобным же образом доказывается отношение

$$\mathbf{Y_B \subseteq X_B.}$$

А именно, если теоретико-множественная <u>разность</u> $\mathbf{Y_B \setminus X_B}$ <u>не</u> <u>пуста</u>, то существует элемент

$$\mathbf{x \in Y_B \setminus X_B.}$$

При этом имеет место совокупность отношений:

$$\mathbf{x \in Y_B;}$$

$$\mathbf{x \notin X_B;}$$

$$\mathbf{x \in X_A.}$$

Однако

$$\mathbf{X_A \subseteq A.}$$

Следовательно,

$$\mathbf{x \in B \cap A = \varnothing.}$$

Однако <u>пустому</u> множеству не принадлежит никакой элемент.

Полученное <u>противоречие</u> показывает вопреки предположению именно <u>пустоту</u> теоретико-множественной <u>разности</u> $Y_B \setminus X_B$:

$$Y_B \setminus X_B = \emptyset.$$

Следовательно,

$$Y_B \subseteq X_B.$$

То есть имеет место совокупность отношений:

$$Y_A \subseteq X_A;$$
$$Y_B \subseteq X_B.$$

В итоге имеет место совокупность отношений:

$$X_A \subseteq Y_A;$$
$$X_B \subseteq Y_B;$$
$$Y_A \subseteq X_A;$$
$$Y_B \subseteq X_B.$$

Естественные спаривания дают совокупность отношений:

$$X_A \subseteq Y_A;\ Y_A \subseteq X_A;$$

$$X_B \subseteq Y_B;\ Y_B \subseteq X_B.$$

Отсюда очевидным образом следуют желанная пара равенств

$$X_A = Y_A;$$

$$X_B = Y_B,$$

поэтому совпадение обоих разбиений

$$X = X_A \cup X_B;$$

$$X = Y_A \cup Y_B$$

и, следовательно, единственность разбиения

$$X = X_A \cup X_B = X \cap A \cup X \cap B,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Существует замкнутое решение произвольного полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X при замкнутости множества A.

Доказательство.

Одним из замкнутых решений произвольного полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X при замкнутости множества A является само замкнутое множество A.

Теорема. Произвольное полное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X при не замкнутом множестве A может вообще не иметь решений.

Доказательство.

Для $k = 1$ доказательство очевидно ввиду необходимой замкнутости теоретико-множественного объединения

$$X \cup X^{(1)}$$

по теории множеств Кантора.

Для доказательства общего утверждения теоремы для любого положительного целого порядка k достаточен контрпример или произвольного непустого действительного интервала

$$A =]a, b[\ (a < b)$$

с исключением обоих его концов a и b, или произвольного непустого полуинтервала-полуотрезка

$$A = (a, b] \ (a < b)$$

либо полуотрезка-полуинтервала

$$A = [a, b) \ (a < b)$$

с исключением ровно одного из двух его концов a и b с рассмотрением непременно внутренней полуокрестности именно этого исключённого конца.

Пусть, например, исключён левый конец a. Тогда внутренней оказывается именно правая полуокрестность исключённого левого конца a.

Производное множество $X^{(k)}$ замкнуто по теории множеств Кантора, согласно полному линейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A = (a, b]$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X

является подмножеством множества A и поэтому не содержит точки a:

$$a \notin X^{(k)}.$$

Поэтому дополнение производного множества $X^{(k)}$ до действительной числовой прямой R, или теоретико-множественная разность

$$R \setminus X^{(k)},$$

является открытым множеством и содержит точку a вместе с некоторой её окрестностью:

$$a \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq R \setminus X^{(k)} \ (\varepsilon > 0).$$

Поэтому существует внутренняя именно правая полуокрестность $(a, a + \varepsilon_1)$ исключённого левого конца a, для которой согласно полному линейному приведённому каноническому единометрическому производному

множественному уравнению любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X выполнена совокупность отношений:

$$(a, a + \varepsilon_1) \subseteq R \setminus X^{(k)} \ (\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, b - a\} > 0);$$

$$(a, a + \varepsilon_1) \subseteq A;$$

$$(a, a + \varepsilon_1) \subseteq X.$$

Но в таком случае вопреки полному линейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению любого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с <u>единственным</u> <u>искомым</u> <u>неизвестным</u> <u>множеством</u> X <u>производное</u> множество $X^{(k)}$ любого <u>положительного</u> целого порядка k необходимо включает целый отрезок

$$[a, a + \varepsilon_1] \subseteq X^{(k)}$$

<u>с включением</u> <u>левого</u> конца a, что и завершает требуемое доказательство теоремы <u>методом</u> от <u>противоречащего</u>.

<u>Теорема</u>. Если для множества A <u>полное</u> <u>линейное</u> <u>приведённое</u> <u>каноническое</u> <u>единометрическое</u> <u>производное</u> <u>множественное</u> <u>уравнение</u> любого <u>положительного</u> целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с <u>единственным</u> <u>искомым</u> <u>неизвестным</u> <u>множеством</u> X

разрешимо, то для этого множества A разрешимы все полные линейные приведённые канонические единометрические производные множественные уравнения

$$X \cup X^{(k+p)} = A$$

более высоких положительных целых порядков k + p с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X при любом положительном целом числе p.

Доказательство.

Пусть для множества A множество Y является решением по условию теоремы разрешимого полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Тогда

$$\mathbf{Y \cup Y^{(k)} = A.}$$

Как было доказано выше, в метрическом пространстве для любого множества все его производные множества непременно положительных целых порядков являются замкнутыми множествами и с ростом порядка образуют не расширяющуюся в смысле отношения теоретико-множественного включения последовательность.

В частности,

$$\mathbf{Y^{(k+p)} \subseteq Y^{(k)}.}$$

Докажем, что множество

$$X = Y \cup (Y^{(k)} \setminus Y^{(k+p)})$$

является решением полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k + p при любом положительном целом числе p

$$X \cup X^{(k+p)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Действительно,

$$X \cup X^{(k+p)} = Y \cup (Y^{(k)} \setminus Y^{(k+p)}) \cup (Y \cup (Y^{(k)} \setminus Y^{(k+p)}))^{(k+p)} =$$

$$Y \cup (Y^{(k)} \setminus Y^{(k+p)}) \cup Y^{(k+p)} \cup (Y^{(k)} \setminus Y^{(k+p)})^{(k+p)} = Y \cup Y^{(k)} = A,$$

поскольку

$$(Y^{(k)} \setminus Y^{(k+p)})^{(k+p)} \subseteq (Y^{(k)})^{(k+p)} = Y^{(k+k+p)} \subseteq Y^{(k+p)}$$

ввиду непременной положительности целого числа k, чем и завершается доказательство теоремы.

Замечание. Обратное неверно, поскольку теоретико-множественное включение

$$\mathbf{Y^{(k)} \setminus Y^{(k+p)} \subseteq A}$$

не является необходимым. По этой же причине индуктивный метод, вообще говоря, не даёт именно всех решений полного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Определение. Множество A называется множеством линейного класса k для любого положительного целого числа k, если для этого множества A разрешимо полное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X и только при дополнительном условии k $\geq$ 2 полное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение порядка k-1

$$X \cup X^{(k-1)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X не разрешимо.

Следствие. Множествами линейного первого класса являются замкнутые множества, и только они.

Определение. Множество A называется линейно бесклассовым множеством, если для этого множества A и для любого положительного целого числа k полное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X не разрешимо.

Следствие. Множество, включающее окрестность или полуокрестность точки, не принадлежащей этому множеству, лишённую этой точки, является линейно бесклассовым.

Примеры. Интервалы с исключением обоих концов, полуинтервалы-полуотрезки и полуотрезки-полуинтервалы с исключением одного из двух концов (все с положительными длинами) являются линейно бесклассовыми множествами.

Теорема. Множество с несобственной, то есть не принадлежащей этому множеству, точкой сгущения (конденсации) является линейно бесклассовым.

Доказательство. Используется метод от противоречащего.

Пусть существует элемент a, являющийся для множества A несобственной, то есть не принадлежащей этому множеству, точкой сгущения (конденсации):

$$a \notin A.$$

Пусть также существует такой положительный целый порядок k, что полное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X разрешимо, то есть существует такое множество X, которое удовлетворяет этому уравнению.

Замкнутое по теории множеств Кантора производное множество $X^{(k)}$ этого положительного целого порядка k для этого множества X является согласно этому уравнению именно замкнутым подмножеством множества A и поэтому, как и множество A, не содержит несобственной точки сгущения (конденсации) a для множества A.

Поэтому дополнение (до целого метрического пространства) производного множества $X^{(k)}$ этого положительного целого порядка k для этого множества X является открытым, содержит несобственную точку сгущения (конденсации) a для множества A и, следовательно, включает некоторую окрестность $U_A(a, \delta)$, где δ положительно, то есть существует такое положительное число δ.

Отсюда следует, что теоретико-множественное пересечение этой окрестности $U_A(a, \delta)$ с производным множеством $X^{(k)}$ этого положительного целого порядка k для этого множества X является пустым множеством.

Поскольку элемент a является точкой сгущения (конденсации) для множества A, то по определению точки сгущения (конденсации) для множества именно каждая окрестность, в том числе и эта окрестность $U_A(a, \delta)$, включает непременно несчётно бесконечное подмножество множества A.

Из того, что теоретико-множественное пересечение этой окрестности $U_A(a, \delta)$ с производным множеством $X^{(k)}$ этого положительного целого порядка k для этого множества X является пустым множеством, следует, что теоретико-

множественное пересечение этого непременно несчётно бесконечного подмножества множества A с производным множеством $X^{(k)}$ этого положительного целого порядка k для этого множества X является пустым множеством.

Но тогда согласно полному линейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению этого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X это непременно несчётно бесконечное подмножество множества A целиком включено во множество X.

Значит, несобственная точка сгущения (конденсации) a для множества A является предельной точкой множества X и поэтому принадлежит непременно замкнутому производному множеству $X^{(1)}$ первого порядка для множества X.

Если бы несобственная точка сгущения (конденсации) a для множества A была именно изолированной точкой непременно замкнутого производного множества $X^{(1)}$ первого порядка для множества X, то каждая теоретико-множественная разность окрестностей с общим центром в точке a и радиусами 1/j и 1/(j + 1) с произвольным положительным целым числом j включала бы лишь конечное подмножество множества A и поэтому

окрестность $U_A(a, \delta)$ не более чем счётно бесконечное подмножество множества A.

Однако окрестность $U_A(a, \delta)$ включает именно несчётно бесконечное подмножество множества A.

Поэтому несобственная точка сгущения (конденсации) a для множества A не может быть разрозненной точкой непременно замкнутого производного множества $X^{(1)}$ первого порядка для множества X, принадлежит именно совершенной части непременно замкнутого производного множества $X^{(1)}$ первого порядка для множества X и сохраняется при нахождении производных множеств всех дальнейших более высоких, то есть превышающих единицу, положительных целых порядков для множества X.

В частности, несобственная точка сгущения (конденсации) a для множества A принадлежит производному множеству $X^{(k)}$ именно этого положительного целого порядка k для этого множества X.

Но тогда по условию теоремы несобственная точка сгущения (конденсации) a для множества A согласно полному линейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению этого положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X принадлежит этому множеству A, что невозможно.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема. Обратное неверно, то есть для линейно бесклассового множества могут вообще не существовать несобственные точки сгущения (конденсации).

Доказательство.

Общее утверждение теоремы полностью доказывается следующим опровергающим частным контрпримером.

Для счётно бесконечного множества Q всех рациональных чисел действительной числовой прямой R несобственные точки сгущения (конденсации) вообще не могут существовать по определению точек сгущения (конденсации), требующему именно несчётной бесконечности теоретико-множественного пересечения множества с произвольной окрестностью точки сгущения (конденсации). Однако любое такое теоретико-

множественное пересечение непременно является подмножеством этого множества. А любое подмножество счётно бесконечного множества Q всех рациональных чисел действительной прямой R не более чем счётно бесконечно.

Теперь достаточно доказать, что счётно бесконечное множество Q всех рациональных чисел действительной числовой прямой R является именно линейно бесклассовым множеством.

Используется метод доказательства от противоречащего.

А именно, в противоречащем случае существует такой положительный целый порядок k, что полное линейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение порядка k

$$\mathbf{X \cup X^{(k)} = Q}$$

с единственным заданным известным множеством Q и с единственным искомым неизвестным множеством X разрешимо, то есть существует такое множество X, которое удовлетворяет этому уравнению.

Замкнутое по теории множеств Кантора производное множество $X^{(k)}$ этого положительного целого порядка k для этого множества X является согласно этому уравнению именно замкнутым подмножеством множества Q.

Можно доказать методом от противоречащего, что теоретико-множественное пересечение замкнутого производного множества $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для этого множества X с произвольным отрезком

действительной числовой прямой, имеющим непременно положительную длину, является непустым множеством. Действительно, в противоречащем случае существует такой действительный отрезок

$$[a, b],\ a \in R,\ b \in R,\ a < b,$$

что теоретико-множественное пересечение замкнутого производного множества $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для этого множества X с этим отрезком действительной числовой прямой, имеющим непременно положительную длину, является пустым множеством:

$$X^{(k)} \cap [a, b] = \emptyset.$$

Тогда все рациональные числа этого действительного отрезка [a, b] принадлежат правой части этого полного линейного приведённого канонического единометрического

производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = Q$$

с единственным заданным известным множеством Q и с единственным искомым неизвестным множеством X и согласно этому уравнению также его левой части, а согласно допущению о пустоте этого теоретико-множественного пересечения

$$X^{(k)} \cap [a, b] = \emptyset$$

принадлежат множеству X.

То есть множество X включает всюду частое (всюду плотное) на этом действительном отрезке [a, b] множество всех рациональных чисел этого действительного отрезка [a, b].

Тогда каждая действительная точка этого действительного отрезка [a, b] является предельной точкой для множества X, по теории множеств Кантора непременно замкнутое производное множество $X^{(1)}$ первого порядка для множества X целиком включает этот действительный отрезок [a, b], являющийся именно совершенной частью множества $X^{(1)}$ и поэтому полностью включающийся во все по теории множеств Кантора непременно замкнутые производные множества положительных целых порядков для множества X.

В частности, этот действительный отрезок [a, b], имеющий непременно положительную длину, полностью включается в производное множество $X^{(k)}$ именно этого положительного целого порядка k для этого множества X.

Но этот вывод получен как необходимое следствие предположения о пустоте теоретико-множественного пересечения по теории множеств Кантора непременно замкнутого производного множества $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для этого множества X с этим отрезком [a, b] действительной числовой прямой, имеющим непременно положительную длину:

$$X^{(k)} \cap [a, b] = \varnothing.$$

Полученное противоречие доказывает методом от противоречащего, что теоретико-множественное пересечение по теории множеств Кантора непременно замкнутого производного множества $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для этого множества X с произвольным отрезком действительной числовой прямой, имеющим

непременно положительную длину, является непустым множеством.

Но в таком случае само по теории множеств Кантора непременно замкнутое производное множество $X^{(k)}$ именно этого положительного целого порядка k для этого множества X всюду представлено (всюду часто, всюду плотно) на всей действительной числовой прямой R, каждая её действительная точка является предельной для замкнутого производного множества $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для этого множества X, замкнутое производное множество $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для этого множества X необходимо содержит все предельные точки для себя и поэтому необходимо совпадает со всей действительной числовой прямой R.

Однако это противоречит полному линейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению положительного целого порядка k

$$X \cup X^{(k)} = Q$$

с единственным заданным известным множеством Q и с единственным искомым неизвестным множеством X, в котором левая часть есть несчётно бесконечное множество всех действительных чисел, а правая часть есть счётно бесконечное множество всех рациональных чисел.

Полученное противоречие доказывает теорему.

23. ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ЕДИНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ МНОЖЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Определение. Нелинейным называется такое каноническое единометрическое производное множественное уравнение с одним неизвестным, в котором заданному известному множеству приравнивается теоретико-множественное объединение возможного искомого неизвестного множества, возможных производных множеств для него и необходимых теоретико-множественных пересечений искомого неизвестного множества и производных множеств для него.

Замечание. В соответствии с этим определением при сохранении прежних обозначений нелинейное каноническое

единометрическое производное множественное уравнение с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X в принципе может иметь самый общий вид

$${}_{?}X \cup ({}_{?}X^{(r)} \cup {}_{?}X^{(r+1)} \cup \ldots \cup {}_{?}X^{(s-1)} \cup {}_{?}X^{(s)}) \cup$$

$${}_{\S}X \cap {}_{1}({}_{?}X^{(k)} \cup {}_{?}X^{(k+1)} \cup \ldots \cup {}_{?}X^{(n-1)} \cup {}_{?}X^{(n)}) = {}_{\S}A,$$

в котором для положительных целых чисел r, s, k и n выполнены двойные неравенства

$$1 \le r \le s,$$

$$1 \le k \le n,$$

с непременным наличием единственного заданного известного множества A, составляющего правую часть уравнения, и с левой частью как теоретико-множественным объединением, во-первых, возможного

единственного искомого неизвестного множества X, во-вторых, возможного теоретико-множественного объединения производных множеств положительных целых порядков для единственного искомого неизвестного множества X с возрастанием этих порядков при перечислении, указанием производных множеств наименьшего r и наибольшего s наличных порядков и возможными пропусками производных множеств промежуточных порядков и, в-третьих, необходимого теоретико-множественного пересечения единственного искомого неизвестного множества X с непременно непустым теоретико-множественным объединением производных множеств положительных целых порядков для единственного искомого неизвестного множества X с

возрастанием этих порядков при перечислении, указанием производных множеств наименьшего k и наибольшего n наличных порядков и возможными пропусками производных множеств промежуточных порядков (непременная непустота обозначается взятием теоретико-множественного объединения возможных объединяемых в круглые скобки с квантором модальности присутствия 1).

Замечание. Посредством кванторов модальностей может достигаться и выражаться переменность участия и действенности частей в предмете и тем самым переменность произвольного предмета.

Теорема. Теоретико-множественное объединение производных множеств положительных целых порядков для произвольного метрического множества равно

производному множеству наименьшего наличного положительного порядка для этого произвольного метрического множества.

Доказательство.

По доказанной выше теореме имеет место иерархия вложенных в предыдущие последовательных производных множеств всех положительных целых порядков. Для произвольного метрического множества X последовательность производных множеств всех положительных целых порядков с возрастанием этих порядков является не расширяющейся по отношению теоретико-множественного включения:

$$X^{(1)} \supseteq X^{(2)} \supseteq \dots \supseteq X^{(k)} \supseteq X^{(k+1)} \supseteq X^{(k+2)} \supseteq \dots \supseteq X^{(n-1)} \supseteq X^{(n)} \supseteq \dots .$$

Отсюда следует, что теоретико-множественное объединение производных множеств положительных целых порядков для произвольного метрического множества равно производному множеству наименьшего наличного положительного целого порядка для этого произвольного метрического множества, что и требовалось доказать.

Следствие. В частности, для положительных целых чисел r и s (1 ≤ r ≤ s) при наличии $X^{(r)}$

$$X^{(r+1)} \subseteq X^{(r)},$$

$$X^{(r+2)} \subseteq X^{(r)},$$

……………………

$$X^{(s-1)} \subseteq X^{(r)},$$

$$X^{(s)} \subseteq X^{(r)},$$

так что

$$X^{(r)} \cup X^{(r+1)} \cup \ldots \cup X^{(s-1)} \cup X^{(s)} = X^{(r)}.$$

Следствие. В частности, для положительных целых чисел k и n ($1 \le k \le n$) при наличии $X^{(k)}$

$$X^{(k+1)} \subseteq X^{(k)},$$
$$X^{(k+2)} \subseteq X^{(k)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$X^{(n-1)} \subseteq X^{(k)},$$
$$X^{(n)} \subseteq X^{(k)},$$

так что

$$X^{(k)} \cup X^{(k+1)} \cup \ldots \cup X^{(n-1)} \cup X^{(n)} = X^{(k)}.$$

Следствие. Нелинейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение с единственным заданным известным множеством A и с единственным

искомым неизвестным множеством X в принципе может иметь равносильный (эквивалентный) общий вид

$$ {}_{?}X \cup {}_{?}X^{(r)} \cup {}_{\S}X \cap {}_{1}X^{(k)} = {}_{\S}A, $$

с необходимым единственным заданным известным множеством A, с возможным единственным искомым неизвестным множеством X, с возможным производным множеством $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного искомого неизвестного множества X и с необходимым теоретико-множественным пересечением единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством положительного целого порядка k.

Теорема. При наличии именно свободного (от теоретико-множественных пересечений с производными множествами

положительных целых порядков для себя) единственного искомого неизвестного множества X нелинейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X

$$_1X \cup {}_?X^{(r)} \cup {}_\S X \cap {}_1X^{(k)} = {}_\S A$$

вырождается в линейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$_1X \cup {}_?X^{(r)} = {}_\S A$$

с необходимым единственным заданным известным множеством A, с наличным единственным искомым неизвестным множеством X, с возможным производным множеством $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для

единственного искомого неизвестного множества X и без необходимого теоретико-множественного пересечения единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X.

Доказательство.

Любое теоретико-множественное пересечение множеств по его определению необходимо включено в каждое из этих множеств.

В частности, теоретико-множественное пересечение единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного

множества X включено в единственное искомое неизвестное множество X:

$$X \cap X^{(k)} \subseteq X.$$

Поэтому

$${}_1X \cup {}_?X^{(r)} \cup {}_§X \cap {}_1X^{(k)} = {}_1X \cup {}_?X^{(r)}$$

с вырождением в линейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$${}_1X \cup {}_?X^{(r)} = {}_§A$$

с необходимым единственным заданным известным множеством A, с наличным единственным искомым неизвестным множеством X, с возможным производным множеством $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного искомого неизвестного множества X и без необходимого теоретико-множественного пересечения

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X, что и требовалось доказать.

Следствие. Наличие именно свободного (от теоретико-множественных пересечений с производными множествами положительных целых порядков для себя) единственного искомого неизвестного множества X в нелинейном каноническом единометрическом производном множественном уравнении с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X

$$_1\mathbf{X} \cup {}_?\mathbf{X}^{(r)} \cup {}_\S\mathbf{X} \cap {}_1\mathbf{X}^{(k)} = {}_\S\mathbf{A},$$

приводящее к выроождению в рассмотренное выше линейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$_1\mathbf{X} \cup {}_?\mathbf{X}^{(r)} = {}_§\mathbf{A}$$

с необходимым единственным заданным известным множеством A, с наличным единственным искомым неизвестным множеством X, с возможным производным множеством X$^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного искомого неизвестного множества X и без необходимого теоретико-множественного пересечения единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X, можно здесь больше не рассматривать.

Следствие. Именно существенно нелинейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X

$$_?X \cup {}_?X^{(r)} \cup {}_§X \cap {}_1X^{(k)} = {}_§A$$

с непременным отсутствием свободного (от теоретико-множественных пересечений с производными множествами положительных целых порядков для себя) единственного искомого неизвестного множества X имеет равносильный (эквивалентный) приведённый общий вид

$$_?X^{(r)} \cup {}_§X \cap {}_1X^{(k)} = {}_§A$$

с необходимым единственным заданным известным множеством A, с возможным производным множеством $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного

искомого неизвестного множества X и с необходимым теоретико-множественным пересечением единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X, так что рассмотрению подлежит полная совокупность обоих возможных случаев наличия или отсутствия производного множества $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного искомого неизвестного множества X.

Определение. Полным нелинейным приведённым каноническим единометрическим производным множественным уравнением называется нелинейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$_1X^{(r)} \cup {}_{\S}X \cap {}_1X^{(k)} = {}_{\S}A$$

с необходимым единственным заданным известным множеством A, с наличным производным множеством $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного искомого неизвестного множества X и с необходимым теоретико-множественным пересечением единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X.

Определение. Неполным нелинейным приведённым каноническим единометрическим производным множественным уравнением называется нелинейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$_{\S}X \cap {}_{1}X^{(k)} = {}_{\S}A$$

с необходимым единственным заданным известным множеством A и с необходимым теоретико-множественным пересечением единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X.

23.1. ТЕОРИЯ НЕПОЛНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРИВЕДЁННЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ЕДИНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ МНОЖЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Определение. Неполным нелинейным приведённым каноническим единометрическим производным множественным уравнением положительного целого порядка k с одним неизвестным называется нелинейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$X \cap X^{(k)} = A,$$

в котором единственному заданному известному множеству A приравнивается теоретико-множественное пересечение

единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X.

Теорема. Для наличия совершенного решения неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X \cap X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X необходимо и достаточно совершенство заданного известного множества A.

Необходимость.

Пусть существует именно совершенное решение X неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X \cap X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Тогда производное множество $X^{(k)}$ произвольного положительного целого порядка k для этого совершенного решения X тождественно равно этому совершенному решению X.

Следовательно, этому же совершенному решению X тождественно равно теоретико-множественное пересечение $X \cap X^{(k)}$ этого совершенного решения X и этого

производного множества $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для этого совершенного решения X.

Согласно неполному нелинейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению положительного целого порядка k

$$X \cap X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X заданное известное множество A тождественно равно этому теоретико-множественному пересечению $X \cap X^{(k)}$, а значит, этому же совершенному решению X и в итоге вместе с этим решением является именно совершенным множеством.

Таким образом, из наличия совершенного решения X неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X \cap X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X необходимо следует именно совершенство заданного известного множества A.

Тем самым необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть заданное известное множество A совершенно.

Тогда оно, то есть

$$X = A,$$

является одним из элементов множества всех решений неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Действительно,

$$X \cap X^{(k)} = A \cap A^{(k)} = A \cap A = A.$$

Таким образом, из совершенства заданного известного множества A необходимо следует наличие именно совершенного решения

$$X = A$$

неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения положительного целого порядка k

$$X \cap X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Тем самым достаточность доказана.

В итоге доказательство теоремы полностью завершено.

Теорема. Если заданное известное множество A замкнуто, то существует именно замкнутое решение неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения произвольного положительного целого порядка k

$$X \cap X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Доказательство.

Пусть заданное известное множество A замкнуто.

Построение искомого замкнутого решения неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cap X^{(k)} = A$$

с единственным заданным известным замкнутым множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X может быть осуществлено любым из следующих двух способов.

Первый способ в сущности является синтетическим и использует строящееся по изложенным выше общим методам либо дополняющего, либо замещающего последовательного кратного изолированного определивания либо сохраняемых, либо заменяемых соответственно отдельных (непредельных, изолированных) точек при сохранении предельных точек произвольного множества в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве произвольное замкнутое решение

$$X = X_{(k)A}$$

неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного

уравнения именно того же самого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с именно тем же самым единственным заданным известным замкнутым множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Поскольку это решение

$$X = X_{(k)A}$$

удовлетворяет этому уравнению

$$X^{(k)} = A,$$

то

$$X_{(k)A}{}^{(k)} = A.$$

Тогда решение

$$X = A \cup X_{(k)A}$$

удовлетворяет требуемому уравнению

$$X \cap X^{(k)} = A.$$

В самом деле, по доказанной выше теореме имеет место иерархия вложенных в предыдущие последовательных производных множеств всех положительных целых порядков. Для произвольного метрического множества X последовательность производных множеств всех положительных целых порядков с возрастанием этих порядков является не расширяющейся по отношению теоретико-множественного включения:

$$X^{(1)} \supseteq X^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(k)} \supseteq X^{(k+1)} \supseteq X^{(k+2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(n-1)} \supseteq X^{(n)} \supseteq \ldots .$$

По общему определению любого замкнутого множества X имеют место нестрогое теоретико-множественное включение

$$\mathbf{X^{(1)} \subseteq X}$$

и вместе с ним расширенная самим замкнутым множеством X как производным множеством нулевого порядка для себя

$$\mathbf{X^{(0)} = X}$$

не расширяющаяся по отношению теоретико-множественного включения последовательность производных множеств всех неотрицательных целых порядков с возрастанием этих порядков:

$$\mathbf{X^{(0)} \supseteq X^{(1)} \supseteq X^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(k)} \supseteq X^{(k+1)} \supseteq X^{(k+2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(n-1)} \supseteq X^{(n)} \supseteq \ldots .}$$

Следовательно, никакое замкнутое множество не расширяется никакими теоретико-множественными объединениями себя с производными множествами любых положительных целых порядков для него.

В частности, для единственного заданного известного замкнутого множества A

$$A^{(k)} \subseteq A^{(1)} \subseteq A,$$

$$A^{(k)} \cup A = A.$$

Тогда решение

$$X = A \cup X_{(k)A}$$

удовлетворяет требуемому уравнению

$$X \cap X^{(k)} = A,$$

поскольку

$$X \cap X^{(k)} = (A \cup X_{(k)A}) \cap (A \cup X_{(k)A})^{(k)} =$$

$$(A \cup X_{(k)A}) \cap (A^{(k)} \cup A) = (A \cup X_{(k)A}) \cap A = A,$$

что и требовалось доказать.

Второй способ в сущности является аналитическим и использует строящееся непременно по изложенному выше

общему методу дополняющего (а не замещающего) последовательного кратного изолированного определивания сохраняемых (а не заменяемых) отдельных (непредельных, изолированных) точек при сохранении предельных точек произвольного множества в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве.

Замкнутое множество A по теории множеств Кантора представимо в виде своего теоретико-множественного разбиения как теоретико-множественного объединения своих непересекающихся замкнутого совершенного подмножества A_C всех несчётно предельных точек сгущения (конденсации) замкнутого множества A, не более чем счётно бесконечного замкнутого подмножества A_L всех

счётно предельных точек замкнутого множества A и не более чем счётно бесконечного замкнутого подмножества A_J всех отдельных (непредельных, изолированных) точек замкнутого множества A, причём любое из этих трёх подмножеств может быть и пустым множеством:

$$A = A_C \cup A_L \cup A_J;$$

$$A_C \cap A_L = A_C \cap A_J = A_L \cap A_J = \varnothing;$$

$$A_C =?\ \varnothing;$$

$$A_L =?\ \varnothing;$$

$$A_J =?\ \varnothing.$$

Поэтому для нахождения частного замкнутого решения неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$\mathbf{X \cap X^{(k)} = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X достаточно, во-первых, целиком включить полностью сохраняемое нахождением производных множеств произвольных положительных целых порядков замкнутое совершенное подмножество A_C всех несчётно предельных точек сгущения (конденсации) замкнутого множества A в искомое решение, во-вторых, приложить изложенный выше общий метод дополняющего (а не замещающего) последовательного кратного изолированного определивания сохраняемых (а не заменяемых) отдельных (непредельных, изолированных) точек при сохранении предельных точек произвольного множества в счётно

частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве к не более чем счётно бесконечному замкнутому подмножеству A_L всех счётно предельных точек замкнутого множества A и не более чем счётно бесконечному замкнутому подмножеству A_J всех отдельных (непредельных, изолированных) точек замкнутого множества A, найдя множественные интегралы соответствующего этому уравнению положительного целого порядка k от каждого из указанных трёх подмножеств A_C, A_L и A_J, и, в-третьих, составить теоретико-множественное объединение всех трёх этих множественных интегралов.

Тогда решение

$$\mathbf{X = A_C \cup A_L \cup \int^{(k)} A_L \cup A_J \cup \int^{(k)} A_J =}$$

$$\mathbf{A_C \cup A_L \cup A_J \cup \int^{(k)} A_L \cup \int^{(k)} A_J = A \cup \int^{(k)} A_L \cup \int^{(k)} A_J \supseteq}$$

$$\mathbf{A_C \cup A_L \cup A_J = A}$$

удовлетворяет требуемому уравнению

$$\mathbf{X \cap X^{(k)} = A,}$$

поскольку

$$\mathbf{X^{(k)} = A_C{}^{(k)} \cup A_L{}^{(k)} \cup (\int^{(k)} A_L)^{(k)} \cup A_J{}^{(k)} \cup (\int^{(k)} A_J)^{(k)} =}$$

$$\mathbf{A_C \cup A_L{}^{(k)} \cup A_L \cup A_J{}^{(k)} \cup A_J = A_C \cup A_L \cup A_J = A,}$$

$$\mathbf{X \cap X^{(k)} = (A \cup \int^{(k)} A_L \cup \int^{(k)} A_J) \cap A = A,}$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Неполное нелинейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$\mathbf{X \cap X^{(k)} = A}$$

произвольного положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с

единственным искомым неизвестным множеством X всегда, то есть для любого единственного заданного известного множества A, разрешимо.

Доказательство.

Замыкание

$$[A] = A \cup (A^{(1)} \setminus A)$$

произвольного единственного заданного множества A является замкнутым множеством, включающим само заданное множество A.

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, двумя способами найдём решение

$$X = X_{[A]}$$

неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения

$$X \cap X^{(k)} = [A]$$

произвольного положительного целого порядка k с единственным заданным известным замкнутым множеством [A] и с единственным искомым неизвестным множеством X для этого замыкания [A], включающее и это замыкание [A], и тем более само заданное множество A.

Докажем, что тогда множество

$$X = X_A = X_{[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A)$$

является решением именно требуемого неполного нелинейного приведённого канонического

единометрического производного множественного уравнения

$$\mathbf{X \cap X^{(k)} = A}$$

произвольного положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X для самого заданного произвольного множества A.

Построение искомого замкнутого решения неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$\mathbf{X \cap X^{(k)} = [A]}$$

с единственным заданным известным замкнутым множеством [A] и с единственным искомым неизвестным

множеством X может быть осуществлено любым из следующих двух способов, далее непосредственно развиваемых с целью решения именно требуемого неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения

$$X \cap X^{(k)} = A$$

произвольного положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X для самого заданного произвольного множества A.

Первый способ в сущности является синтетическим и использует строящееся по изложенным выше общим методам либо дополняющего, либо замещающего

последовательного кратного изолированного определивания либо сохраняемых, либо заменяемых соответственно отдельных (непредельных, изолированных) точек при сохранении предельных точек произвольного множества в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве произвольное замкнутое решение

$$X = X_{(k)[A]}$$

неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения именно того же самого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = [A]$$

с именно тем же самым единственным заданным известным замкнутым множеством [A] и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Поскольку это решение

$$X = X_{(k)[A]}$$

удовлетворяет этому уравнению

$$X^{(k)} = [A],$$

то

$$X_{(k)[A]}{}^{(k)} = [A].$$

Тогда решение

$$X = [A] \cup X_{(k)[A]}$$

удовлетворяет уравнению для замкнутого множества [A]

$$X \cap X^{(k)} = [A].$$

В самом деле, по доказанной выше теореме имеет место иерархия вложенных в предыдущие последовательных производных множеств всех положительных целых порядков. Для произвольного метрического множества X последовательность производных множеств всех положительных целых порядков с возрастанием этих порядков является не расширяющейся по отношению теоретико-множественного включения:

$$X^{(1)} \supseteq X^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(k)} \supseteq X^{(k+1)} \supseteq X^{(k+2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(n-1)} \supseteq X^{(n)} \supseteq \ldots .$$

По общему определению любого замкнутого множества X имеют место нестрогое теоретико-множественное включение

$$X^{(1)} \subseteq X$$

и вместе с ним расширенная самим замкнутым множеством X как производным множеством нулевого порядка для себя

$$X^{(0)} = X$$

не расширяющаяся по отношению теоретико-множественного включения последовательность производных множеств всех неотрицательных целых порядков с возрастанием этих порядков:

$$X^{(0)} \supseteq X^{(1)} \supseteq X^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(k)} \supseteq X^{(k+1)} \supseteq X^{(k+2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(n-1)} \supseteq X^{(n)} \supseteq \ldots .$$

Следовательно, никакое замкнутое множество не расширяется никакими теоретико-множественными объединениями себя с производными множествами любых неотрицательных целых порядков для него.

В частности, для единственного заданного известного замкнутого множества [A]

$$[A]^{(k)} \subseteq [A]^{(1)} \subseteq [A],$$
$$[A]^{(k)} \cup [A] = [A].$$

Тогда решение

$$X = X_{[A]} = [A] \cup X_{(k)[A]}$$

удовлетворяет требуемому уравнению

$$X \cap X^{(k)} = [A],$$

поскольку

$$X \cap X^{(k)} = ([A] \cup X_{(k)[A]}) \cap ([A] \cup X_{(k)[A]})^{(k)} =$$
$$([A] \cup X_{(k)[A]}) \cap ([A]^{(k)} \cup [A]) = ([A] \cup X_{(k)[A]}) \cap [A] = [A].$$

Докажем, что тогда

$$X = X_A = X_{[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A) = [A] \cup X_{(k)[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A)$$

является решением именно требуемого <u>неполного</u> <u>нелинейного</u> <u>приведённого</u> <u>канонического</u>

единометрического производного множественного уравнения

$$X \cap X^{(k)} = A$$

произвольного положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X для самого заданного произвольного множества A.

Действительно,

$$X_A{}^{(k)} = (X_{[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A))^{(k)} = ([A] \cup X_{(k)[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A))^{(k)} = (A \cup (A^{(1)} \setminus A) \cup X_{(k)[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A))^{(k)} = (A \cup X_{(k)[A]})^{(k)} = A^{(k)} \cup X_{(k)[A]}{}^{(k)} = A^{(k)} \cup [A] = A^{(k)} \cup A \cup A^{(1)} = A \cup A^{(1)} = [A].$$

Поскольку включающая множество A теоретико-множественная разность

$$X_A = X_{[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A) = [A] \cup X_{(k)[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A) \supseteq A$$

исключает именно и только непременно все несобственные (не принадлежащие множеству A) предельные точки для множества A, причём

$$X_A = X_{[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A) = [A] \cup X_{(k)[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A) \supseteq A,$$

$$X_A{}^{(k)} = (X_{[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A))^{(k)} = A \cup A^{(1)} = [A] \supseteq A,$$

то включаемое в каждое из обоих множеств X_A и $X_A{}^{(k)}$ их теоретико-множественное пересечение

$$X_A \cap X_A{}^{(k)} \subseteq X_A{}^{(k)} = [A],$$

$$X_A \cap X_A{}^{(k)} \subseteq [A] \setminus (A^{(1)} \setminus A) = A,$$

$$X_A \cap X_A{}^{(k)} \subseteq A,$$

$$X_A \cap X_A{}^{(k)} \supseteq A,$$

$$X_A \cap X_A{}^{(k)} = A.$$

Поэтому

$$X = X_A = X_{[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A) = [A] \cup X_{(k)[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A)$$

является решением именно требуемого неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения

$$X \cap X^{(k)} = A$$

произвольного положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X для самого заданного произвольного множества A, что и требовалось доказать.

Второй способ в сущности является аналитическим и использует строящееся непременно по изложенному выше общему методу дополняющего (а не замещающего) последовательного кратного изолированного

определивания сохраняемых (а не заменяемых) отдельных (непредельных, изолированных) точек при сохранении предельных точек произвольного множества в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве.

Замкнутое множество [A] по теории множеств Кантора представимо в виде своего теоретико-множественного разбиения как теоретико-множественного объединения своих непересекающихся замкнутого совершенного подмножества $[A]_C$ всех несчётно предельных точек сгущения (конденсации) множества [A], не более чем счётно бесконечного замкнутого подмножества $[A]_L$ всех счётно предельных точек множества [A] и не более чем счётно бесконечного замкнутого подмножества $[A]_J$ всех отдельных

(непредельных, изолированных) точек множества [A], причём любое из этих трёх подмножеств может быть и пустым множеством:

$$[A] = [A]_C \cup [A]_L \cup [A]_J;$$

$$[A]_C \cap [A]_L = [A]_C \cap [A]_J = [A]_L \cap [A]_J = \emptyset;$$

$$[A]_C =? \emptyset;$$

$$[A]_L =? \emptyset;$$

$$[A]_J =? \emptyset.$$

Поэтому для нахождения частного замкнутого решения неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения любого положительного целого порядка k

$$X \cap X^{(k)} = [A]$$

с единственным заданным известным множеством [A] и с единственным искомым неизвестным множеством X достаточно, во-первых, целиком включить полностью сохраняемое нахождением производных множеств произвольных положительных целых порядков замкнутое совершенное подмножество $[A]_C$ всех несчётно предельных точек сгущения (конденсации) замкнутого множества [A] в искомое решение, во-вторых, приложить изложенный выше общий метод дополняющего (а не замещающего) последовательного кратного изолированного определивания сохраняемых (а не заменяемых) отдельных (непредельных, изолированных) точек при сохранении предельных точек произвольного множества в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом

пространстве к не более чем счётно бесконечному замкнутому подмножеству $[A]_L$ всех счётно предельных точек замкнутого множества $[A]$ и не более чем счётно бесконечному замкнутому подмножеству $[A]_J$ всех отдельных (непредельных, изолированных) точек замкнутого множества $[A]$, найдя множественные интегралы соответствующего этому уравнению положительного целого порядка k от каждого из указанных трёх подмножеств $[A]_C$, $[A]_L$ и $[A]_J$, и, в-третьих, составить теоретико-множественное объединение всех трёх этих множественных интегралов.

Тогда решение

$$X = X_{[A]} = [A]_C \cup [A]_L \cup \int^{(k)}[A]_L \cup [A]_J \cup \int^{(k)}[A]_J =$$

$$[A]_C \cup [A]_L \cup [A]_J \cup \int^{(k)}[A]_L \cup \int^{(k)}[A]_J = [A] \cup \int^{(k)}[A]_L \cup \int^{(k)}[A]_J \supseteq$$

$$[A]_C \cup [A]_L \cup [A]_J = [A]$$

удовлетворяет требуемому уравнению

$$X \cap X^{(k)} = [A],$$

поскольку

$$X^{(k)} = X_{[A]}{}^{(k)} = [A]_C{}^{(k)} \cup [A]_L{}^{(k)} \cup (\int^{(k)}[A]_L)^{(k)} \cup [A]_J{}^{(k)} \cup (\int^{(k)}[A]_J)^{(k)} =$$

$$[A]_C \cup [A]_L{}^{(k)} \cup [A]_L \cup [A]_J{}^{(k)} \cup [A]_J = [A]_C \cup [A]_L \cup [A]_J = [A],$$

$$X \cap X^{(k)} = X_{[A]} \cap X_{[A]}{}^{(k)} = ([A] \cup \int^{(k)}[A]_L \cup \int^{(k)}[A]_J) \cap [A] = [A].$$

Докажем, что тогда

$$X = X_A = X_{[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A) = [A] \cup \int^{(k)}[A]_L \cup \int^{(k)}[A]_J \setminus (A^{(1)} \setminus A)$$

является решением именно требуемого <u>неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения</u>

$$X \cap X^{(k)} = A$$

произвольного положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X для самого заданного произвольного множества A.

Действительно,

$$X_A{}^{(k)} = (X_{[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A))^{(k)} = ([A] \cup \int^{(k)}[A]_L \cup \int^{(k)}[A]_J \setminus (A^{(1)} \setminus A))^{(k)} = (A \cup (A^{(1)} \setminus A) \cup \int^{(k)}[A]_L \cup \int^{(k)}[A]_J \setminus (A^{(1)} \setminus A))^{(k)} = (A \cup \int^{(k)}[A]_L \cup \int^{(k)}[A]_J)^{(k)} = A^{(k)} \cup (\int^{(k)}[A]_L)^{(k)} \cup (\int^{(k)}[A]_J)^{(k)} = A^{(k)} \cup [A]_L \cup [A]_J = [A].$$

Последнее равенство доказывается рассмотрением составляющих именно полную систему следующих обоих возможных случаев.

Если пусто множество всех точек сгущения (конденсации) для множества A, то пусто и равное ему множество $[A]_C$ всех точек сгущения (конденсации) для замкнутого множества [A], так что

$$A^{(k)} \cup [A]_L \cup [A]_J \subseteq A^{(1)} \cup [A]_L \cup [A]_J \subseteq$$
$$A \cup A^{(1)} \cup [A]_L \cup [A]_J = [A] \cup [A]_L \cup [A]_J =$$
$$[A]_C \cup [A]_L \cup [A]_J \cup [A]_L \cup [A]_J =$$
$$[A]_C \cup [A]_L \cup [A]_J = [A],$$
$$A^{(k)} \cup [A]_L \cup [A]_J \supseteq \emptyset \cup [A]_L \cup [A]_J =$$
$$[A]_C \cup [A]_L \cup [A]_J = [A],$$
$$A^{(k)} \cup [A]_L \cup [A]_J = [A].$$

Если не пусто множество всех точек сгущения (конденсации) для множества A, то не пусто и равное ему множество $[A]_C$ всех точек сгущения (конденсации) для замкнутого множества [A], так что

$$A^{(k)} \cup [A]_L \cup [A]_J \subseteq A^{(1)} \cup [A]_L \cup [A]_J \subseteq A \cup A^{(1)} \cup [A]_L \cup [A]_J$$
$$= [A] \cup [A]_L \cup [A]_J = [A]_C \cup [A]_L \cup [A]_J \cup [A]_L \cup [A]_J =$$
$$[A]_C \cup [A]_L \cup [A]_J = [A],$$
$$A^{(k)} \cup [A]_L \cup [A]_J \supseteq [A]_C \cup [A]_L \cup [A]_J = [A],$$
$$A^{(k)} \cup [A]_L \cup [A]_J = [A].$$

Поскольку включающая множество A теоретико-множественная разность

$$X_A = X_{[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A) = [A] \cup \int^{(k)}[A]_L \cup \int^{(k)}[A]_J \setminus (A^{(1)} \setminus A) \supseteq A$$

исключает именно и только непременно все несобственные (не принадлежащие множеству A) предельные точки для множества A, причём

$$X_A = X_{[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A) =$$

$$[A] \cup \int^{(k)}[A]_L \cup \int^{(k)}[A]_J \setminus (A^{(1)} \setminus A) \supseteq A,$$

$$X_A{}^{(k)} = (X_{[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A))^{(k)} = A \cup A^{(1)} = [A] \supseteq A,$$

то включаемое в каждое из обоих множеств X_A и $X_A{}^{(k)}$ их теоретико-множественное пересечение

$$X_A \cap X_A{}^{(k)} \subseteq X_A{}^{(k)} = [A],$$

$$X_A \cap X_A{}^{(k)} \subseteq [A] \setminus (A^{(1)} \setminus A) = A,$$

$$X_A \cap X_A{}^{(k)} \subseteq A,\ X_A \cap X_A{}^{(k)} \supseteq A,$$

$$X_A \cap X_A{}^{(k)} = A.$$

Поэтому

$$X = X_A = X_{[A]} \setminus (A^{(1)} \setminus A) = [A] \cup \int^{(k)}[A]_L \cup \int^{(k)}[A]_J \setminus (A^{(1)} \setminus A)$$

является решением именно требуемого неполного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения

$$X \cap X^{(k)} = A$$

произвольного положительного целого порядка k с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X для самого заданного произвольного множества A, что и требовалось доказать.

23.2. ТЕОРИЯ ПОЛНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРИВЕДЁННЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ЕДИНОМЕТРИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ МНОЖЕСТВЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

Определение. Полным нелинейным приведённым каноническим единометрическим производным множественным уравнением с одним неизвестным называется нелинейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение связанного положительного целого порядка k и свободного положительного целого порядка r

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(r)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A, со свободным (от теоретико-множественных пересечений с производными множествами положительных целых порядков для себя) производным множеством $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного искомого неизвестного множества X и с теоретико-множественным пересечением единственного искомого неизвестного множества X со связанным производным множеством $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X.

Теорема. Если свободный положительный целый порядок r не больше связанного положительного целого порядка k, то полное нелинейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

связанного положительного целого порядка k и свободного положительного целого порядка r

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(r)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A, со свободным (от теоретико-множественных пересечений с производными множествами положительных целых порядков для себя) производным множеством $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного искомого неизвестного множества X и с теоретико-множественным пересечением единственного искомого неизвестного множества X со связанным производным множеством положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X

вырождается в неполное линейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$X^{(r)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A, с наличным единственным искомым неизвестным множеством X, с производным множеством $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного искомого неизвестного множества X и без необходимого теоретико-множественного пересечения единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X.

Доказательство.

Любое теоретико-множественное пересечение множеств по его определению необходимо включено в каждое из этих множеств.

В частности, теоретико-множественное пересечение единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X включено в производное множество $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X:

$$X \cap X^{(k)} \subseteq X^{(k)}.$$

По доказанной выше теореме имеет место иерархия вложенных в предыдущие последовательных производных множеств всех положительных целых порядков. Для

произвольного метрического множества X последовательность производных множеств всех положительных целых порядков с возрастанием этих порядков является не расширяющейся по отношению теоретико-множественного включения:

$$X^{(1)} \supseteq X^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(k)} \supseteq X^{(k+1)} \supseteq X^{(k+2)} \supseteq \ldots \supseteq X^{(n-1)} \supseteq X^{(n)} \supseteq \ldots .$$

Поскольку свободный положительный целый порядок r не больше связанного положительного целого порядка k, то связанное производное множеством $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X включено в свободное (от теоретико-множественных пересечений с производными множествами положительных целых порядков для себя) производное

множество $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного искомого неизвестного множества X:

$$X^{(k)} \subseteq X^{(r)}.$$

Ввиду переносности (транзитивности) отношения нестрогого теоретико-множественного включения

$$X \cap X^{(k)} \subseteq X^{(k} \subseteq X^{(r)}$$

имеет место нестрогое теоретико-множественное включение

$$X \cap X^{(k)} \subseteq X^{(r)}.$$

Отсюда следует, что

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(r)} = X^{(r)}$$

и полное нелинейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

связанного положительного целого порядка k и свободного положительного целого порядка r

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(r)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A, со свободным (от теоретико-множественных пересечений с производными множествами положительных целых порядков для себя) производным множеством $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного искомого неизвестного множества X и с теоретико-множественным пересечением единственного искомого неизвестного множества X со связанным производным множеством положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X

вырождается в неполное линейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$X^{(r)} = A$$

с необходимым единственным заданным известным множеством A, с наличным единственным искомым неизвестным множеством X, с возможным производным множеством $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного искомого неизвестного множества X и без необходимого теоретико-множественного пересечения единственного искомого неизвестного множества X с производным множеством положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X, что и требовалось доказать.

Следствие. Случай, когда свободный положительный целый порядок r не больше связанного положительного целого порядка k, приводящий к вырождению полного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения связанного положительного целого порядка k и свободного положительного целого порядка r

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(r)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A, со свободным (от теоретико-множественных пересечений с производными множествами положительных целых порядков для себя) производным множеством $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного искомого неизвестного множества X и с теоретико-

множественным пересечением единственного искомого неизвестного множества X со связанным производным множеством положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X в рассмотренное выше неполное линейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$X^{(r)} = A$$

с необходимым единственным заданным известным множеством A, с наличным единственным искомым неизвестным множеством X, с возможным производным множеством $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного искомого неизвестного множества X и без необходимого теоретико-множественного пересечения единственного искомого неизвестного множества X с

производным множеством положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X, можно здесь больше не рассматривать.

Следствие. Полное нелинейное каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(r)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A, с единственным искомым неизвестным множеством X, со свободным (от теоретико-множественных пересечений с производными множествами положительных целых порядков для себя) производным множеством $X^{(r)}$ положительного целого порядка r для единственного искомого неизвестного множества X и с теоретико-множественным пересечением единственного искомого

неизвестного множества X со связанным производным множеством положительного целого порядка k для единственного искомого неизвестного множества X имеет равносильный (эквивалентный) приведённый общий вид полного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A$$

произвольного двойного положительного целого порядка (k, p) (то есть со связанным положительным целым порядком k и с положительным целым превышением p свободного положительного целого порядка r

$$r = k+p$$

над связанным положительным целым порядком k), с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Теорема. Для наличия совершенного решения полного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения произвольного двойного положительного целого порядка (k, p)

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X необходимо и достаточно совершенство заданного известного множества A.

Необходимость.

Пусть существует именно совершенное решение X полного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения произвольного двойного положительного целого порядка (k, p)

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Тогда производное множество $X^{(k)}$ произвольного положительного целого порядка k для этого совершенного решения X тождественно равно этому совершенному решению X.

Следовательно, этому же совершенному решению X тождественно равно теоретико-множественное пересечение

$X \cap X^{(k)}$ этого совершенного решения X и этого производного множества $X^{(k)}$ положительного целого порядка k для этого совершенного решения X.

Кроме того, тогда производное множество $X^{(k+p)}$ произвольного положительного целого порядка k+p для этого совершенного решения X тождественно равно этому совершенному решению X.

Согласно полному нелинейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению произвольного двойного положительного целого порядка (k, p)

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X

заданное известное множество A тождественно равно этому теоретико-множественному объединению

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p))},$$

а значит, этому же совершенному решению X и в итоге вместе с этим решением является именно совершенным множеством.

Таким образом, из наличия совершенного решения X полного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения произвольного двойного положительного целого порядка (k, p)

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X

необходимо следует именно совершенство заданного известного множества A.

Тем самым необходимость доказана.

Достаточность.

Пусть заданное известное множество A совершенно.

Тогда оно, то есть

$$X = A,$$

является одним из элементов множества всех решений полного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения произвольного двойного положительного целого порядка (k, p)

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X. Действительно,

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A \cap A^{(k)} \cup A^{(k+p)} = A \cap A \cup A = A.$$

Таким образом, из совершенства заданного известного множества A необходимо следует наличие именно совершенного решения

$$X = A$$

полного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения произвольного двойного положительного целого порядка (k, p)

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Тем самым достаточность доказана.

В итоге доказательство теоремы полностью завершено.

Теорема. Если заданное известное множество замкнуто, то существует именно замкнутое решение полного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения произвольного двойного положительного целого порядка (k, p)

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A$$

с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Доказательство.

Пусть заданное известное множество A замкнуто.

Построение искомого замкнутого решения полного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения произвольного двойного положительного целого порядка (k, p)

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A$$

с единственным заданным известным замкнутым множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X может быть осуществлено любым из следующих двух способов.

Первый способ в сущности является синтетическим и использует строящееся по изложенным выше общим методам либо дополняющего, либо замещающего

последовательного кратного изолированного определивания либо сохраняемых, либо заменяемых соответственно отдельных (непредельных, изолированных) точек при сохранении предельных точек произвольного множества в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве произвольное замкнутое решение

$$X = X_{(k)A}$$

неполного линейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения именно того же самого положительного целого порядка k

$$X^{(k)} = A$$

с именно тем же самым единственным заданным известным замкнутым множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

Поскольку это решение

$$X = X_{(k)A}$$

удовлетворяет этому уравнению

$$X^{(k)} = A,$$

то

$$X_{(k)A}{}^{(k)} = A.$$

Тогда решение

$$X = A \cup X_{(k)A}$$

удовлетворяет требуемому полному нелинейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению

$$\mathbf{X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A}$$

двойного положительного целого порядка (k, p) с тем же самым положительным целым порядком k, с тем же самым единственным заданным известным замкнутым множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X.

В самом деле, по доказанной выше теореме имеет место иерархия вложенных в предыдущие последовательных производных множеств всех положительных целых порядков. Для произвольного метрического множества X последовательность производных множеств всех положительных целых порядков с возрастанием этих порядков является не расширяющейся по отношению теоретико-множественного включения:

$$\mathbf{X}^{(1)} \supseteq \mathbf{X}^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{X}^{(k)} \supseteq \mathbf{X}^{(k+1)} \supseteq \mathbf{X}^{(k+2)} \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{X}^{(n-1)} \supseteq \mathbf{X}^{(n)} \supseteq \ldots .$$

По общему определению любого <u>замкнутого</u> множества X имеют место нестрогое теоретико-множественное <u>включение</u>

$$\mathbf{X}^{(1)} \subseteq \mathbf{X}$$

и вместе с ним <u>расширенная</u> самим <u>замкнутым</u> множеством X как <u>производным</u> множеством <u>нулевого</u> порядка <u>для</u> себя

$$\mathbf{X}^{(0)} = \mathbf{X}$$

<u>не расширяющаяся</u> по отношению теоретико-множественного <u>включения</u> последовательность <u>производных</u> множеств <u>всех</u> <u>неотрицательных</u> целых порядков с <u>возрастанием</u> этих порядков:

$$\mathbf{X}^{(0)} \supseteq \mathbf{X}^{(1)} \supseteq \mathbf{X}^{(2)} \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{X}^{(k)} \supseteq \mathbf{X}^{(k+1)} \supseteq \mathbf{X}^{(k+2)} \supseteq \ldots \supseteq \mathbf{X}^{(n-1)} \supseteq \mathbf{X}^{(n)} \supseteq \ldots .$$

Следовательно, никакое замкнутое множество не расширяется никакими теоретико-множественными объединениями себя с производными множествами любых положительных целых порядков для него.

В частности, для единственного заданного известного замкнутого множества A

$$A^{(k)} \subseteq A^{(1)} \subseteq A,$$

$$A^{(k)} \cup A = A.$$

Тогда решение

$$X = A \cup X_{(k)A}$$

удовлетворяет требуемому уравнению

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A,$$

поскольку

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = (A \cup X_{(k)A}) \cap (A \cup X_{(k)A})^{(k)} \cup (A \cup X_{(k)A})^{(k+p)} =$$

$$(A \cup X_{(k)A}) \cap (A^{(k)} \cup A) \cup A^{(k+p)} \cup X_{(k)A}{}^{(k+p)} =$$
$$(A \cup X_{(k)A}) \cap A \cup A^{(k+p)} \cup X_{(k)A}{}^{(k+p)} = A \cup A^{(k+p)} \cup (X_{(k)A}{}^{(k)})^{(p)} =$$
$$A \cup A^{(k+p)} \cup A^{(p)} = A,$$

что и требовалось доказать.

Второй способ в сущности является аналитическим и использует строящееся непременно по изложенному выше общему методу дополняющего (а не замещающего) последовательного кратного изолированного определивания сохраняемых (а не заменяемых) отдельных (непредельных, изолированных) точек при сохранении предельных точек произвольного множества в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве.

Замкнутое множество A по теории множеств Кантора представимо в виде своего теоретико-множественного разбиения как теоретико-множественного объединения своих непересекающихся замкнутого совершенного подмножества A_C всех несчётно предельных точек сгущения (конденсации) замкнутого множества A, не более чем счётно бесконечного замкнутого подмножества A_L всех счётно предельных точек замкнутого множества A и не более чем счётно бесконечного замкнутого подмножества A_J всех отдельных (непредельных, изолированных) точек замкнутого множества A, причём любое из этих трёх подмножеств может быть и пустым множеством:

$$A = A_C \cup A_L \cup A_J;$$

$$A_C \cap A_L = A_C \cap A_J = A_L \cap A_J = \emptyset;$$

$$\mathbf{A_C =?\ \emptyset;}$$

$$\mathbf{A_L =?\ \emptyset;}$$

$$\mathbf{A_J =?\ \emptyset.}$$

Поэтому для нахождения <u>частного</u> <u>замкнутого</u> решения <u>полного</u> <u>нелинейного</u> <u>приведённого</u> <u>канонического</u> <u>единометрического</u> <u>производного</u> <u>множественного</u> <u>уравнения</u> любого <u>двойного</u> <u>положительного</u> целого порядка (k, p)

$$\mathbf{X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A}$$

с единственным заданным известным множеством A и с <u>единственным</u> <u>искомым</u> <u>неизвестным</u> <u>множеством</u> X достаточно, во-первых, целиком включить полностью сохраняемое нахождением <u>производных</u> множеств произвольных <u>положительных</u> целых порядков <u>замкнутое</u>

совершенное подмножество A_C всех несчётно предельных точек сгущения (конденсации) замкнутого множества A в искомое решение, во-вторых, приложить изложенный выше общий метод дополняющего (а не замещающего) последовательного кратного изолированного определивания сохраняемых (а не заменяемых) отдельных (непредельных, изолированных) точек при сохранении предельных точек произвольного множества в счётно частом (счётно плотном, сепарабельном) метрическом пространстве к не более чем счётно бесконечному замкнутому подмножеству A_L всех счётно предельных точек замкнутого множества A и не более чем счётно бесконечному замкнутому подмножеству A_J всех отдельных (непредельных, изолированных) точек замкнутого

множества A, найдя множественные интегралы соответствующего этому уравнению положительного целого порядка k от каждого из указанных трёх подмножеств A_C, A_L и A_J, и, в-третьих, составить теоретико-множественное объединение всех трёх этих множественных интегралов.

Тогда решение

$$X = A_C \cup A_L \cup \int^{(k)} A_L \cup A_J \cup \int^{(k)} A_J =$$

$$A_C \cup A_L \cup A_J \cup \int^{(k)} A_L \cup \int^{(k)} A_J = A \cup \int^{(k)} A_L \cup \int^{(k)} A_J \supseteq$$

$$A_C \cup A_L \cup A_J = A$$

удовлетворяет требуемому уравнению

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A,$$

поскольку

$$X^{(k)} = A_C{}^{(k)} \cup A_L{}^{(k)} \cup (\int^{(k)} A_L)^{(k)} \cup A_J{}^{(k)} \cup (\int^{(k)} A_J)^{(k)} =$$

$$\mathbf{A_C \cup A_L{}^{(k)} \cup A_L \cup A_J{}^{(k)} \cup A_J = A_C \cup A_L \cup A_J = A,}$$

$$\mathbf{X^{(k+p)} = A_C{}^{(k+p)} \cup A_L{}^{(k+p)} \cup (\int^{(k)}A_L)^{(k+p)} \cup A_J{}^{(k+p)} \cup (\int^{(k)}A_J)^{(k+p)} =}$$

$$\mathbf{A_C \cup A_L{}^{(k+p)} \cup A_L{}^{(p)} \cup A_J{}^{(k+p)} \cup A_J{}^{(p)} \subseteq A_C \cup A_L \cup A_J = A,}$$

$$\mathbf{X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = (A \cup \int^{(k)}A_L \cup \int^{(k)}A_J) \cap A \cup X^{(k+p)} = A,}$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Полное нелинейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$\mathbf{X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A}$$

произвольного двойного положительного целого порядка (k, p) с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X не всегда разрешимо.

Доказательство. Вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Если единственное заданное известное множество A имеет несобственную (не принадлежащую множеству A) точку сгущения (конденсации), то полное нелинейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$\mathbf{X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A}$$

произвольного двойного положительного целого порядка (k, p) с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X не разрешимо.

Доказательство. Используется метод от противоречащего. Пусть существует элемент a, являющийся для множества A несобственной, то есть не принадлежащей этому множеству, точкой сгущения (конденсации):

$$a \notin A.$$

Пусть также существует такой двойной положительный целый порядок (k, p), что полное нелинейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A$$

произвольного двойного положительного целого порядка (k, p) с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X разрешимо, то есть существует такое множество X, которое удовлетворяет этому уравнению.

Замкнутое по теории множеств Кантора производное множество $X^{(k+p)}$ порядка k+p для этого множества X является согласно этому уравнению именно замкнутым

подмножеством множества A и поэтому, как и множество A, не содержит несобственной точки сгущения (конденсации) a для множества A.

Поэтому дополнение (до целого метрического пространства) производного множества $X^{(k+p)}$ положительного целого порядка k+p для этого множества X является открытым, содержит несобственную точку сгущения (конденсации) a для множества A и, следовательно, включает некоторую окрестность $U_A(a, \delta)$, где δ положительно, то есть существует такое положительное число δ.

Отсюда следует, что теоретико-множественное пересечение этой окрестности $U_A(a, \delta)$ с производным множеством $X^{(k+p)}$

положительного целого порядка k+p для этого множества X является пустым множеством.

Поскольку элемент a является точкой сгущения (конденсации) для множества A, то по определению точки сгущения (конденсации) для множества именно каждая окрестность, в том числе и эта окрестность $U_A(a, \delta)$, включает непременно несчётно бесконечное подмножество множества A.

Из того, что теоретико-множественное пересечение этой окрестности $U_A(a, \delta)$ с производным множеством $X^{(k+p)}$ положительного целого порядка k+p для этого множества X является пустым множеством, следует, что теоретико-множественное пересечение этого непременно несчётного подмножества множества A с производным множеством

$X^{(k+p)}$ положительного целого порядка k+p для этого множества X является пустым множеством.

Но тогда согласно полному нелинейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A$$

произвольного двойного положительного целого порядка (k, p) с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X это непременно несчётно бесконечное подмножество множества A целиком включено во множество X.

Значит, несобственная точка сгущения (конденсации) a для множества A является предельной точкой для множества X и поэтому принадлежит непременно замкнутому

производному множеству $X^{(1)}$ первого порядка для множества X.

Если бы несобственная точка сгущения (конденсации) a для множества A была именно изолированной точкой непременно замкнутого производного множества $X^{(1)}$ первого порядка для множества X, то каждая теоретико-множественная разность окрестностей с общим центром в точке a и радиусами 1/j и 1/(j + 1) с произвольным положительным целым числом j включала бы лишь конечное подмножество множества A и поэтому окрестность $U_A(a, \delta)$ не более чем счётно бесконечное подмножество множества A.

Однако окрестность $U_A(a, \delta)$ включает именно несчётно бесконечное подмножество множества A.

Поэтому несобственная точка сгущения (конденсации) a для множества A не может быть изолированной точкой непременно замкнутого производного множества $X^{(1)}$ первого порядка для множества X, принадлежит именно совершенной части непременно замкнутого производного множества $X^{(1)}$ первого порядка для множества X и сохраняется при нахождении производных множеств всех дальнейших более высоких положительных целых порядков для множества X.

В частности, несобственная точка сгущения (конденсации) a для множества A принадлежит производному множеству $X^{(k+p)}$ именно этого положительного целого порядка k+p для этого множества X.

Но тогда по условию теоремы несобственная точка сгущения (конденсации) a для множества A согласно полному нелинейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению

$$\mathbf{X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A}$$

произвольного двойного положительного целого порядка (k, p) с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X принадлежит этому множеству A, что невозможно.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Определение. Множество A называется нелинейно бесклассовым множеством, если для этого множества A и для любого двойного положительного целого порядка (k, p)

полное нелинейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = A$$

двойного положительного целого порядка (k, p) с единственным заданным известным множеством A и с единственным искомым неизвестным множеством X не разрешимо.

Следствие. Множество, включающее окрестность или полуокрестность точки, не принадлежащей этому множеству, лишённое этой точки, является нелинейно бесклассовым.

Примеры. Интервалы с исключением обоих концов, полуинтервалы-полуотрезки и полуотрезки-полуинтервалы

с исключением одного из двух концов являются нелинейно бесклассовыми множествами.

Теорема. Для нелинейно бесклассового множества могут вообще не существовать несобственные точки сгущения (конденсации).

Доказательство. Общее утверждение теоремы полностью доказывается следующим опровергающим частным контрпримером.

Для счётно бесконечного множества Q всех рациональных чисел действительной числовой прямой R несобственные точки сгущения (конденсации) вообще не могут существовать по определению точек сгущения (конденсации), требующему именно несчётной бесконечности теоретико-множественного пересечения

множества с произвольной окрестностью точки сгущения (конденсации). Однако любое такое теоретико-множественное пересечение непременно является подмножеством этого множества. А любое подмножество счётно бесконечного множества Q всех рациональных чисел действительной числовой прямой R не более чем счётно бесконечно.

Теперь достаточно доказать, что счётно бесконечное множество Q всех рациональных чисел действительной прямой R является именно нелинейно бесклассовым множеством.

Используется метод доказательства от противоречащего.

А именно, в противоречащем случае существует такой двойной положительный целый порядок (k, p), что полное

нелинейное приведённое каноническое единометрическое производное множественное уравнение

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = Q$$

двойного положительного целого порядка (k, p) с единственным заданным известным множеством Q и с единственным искомым неизвестным множеством X разрешимо, то есть существует такое множество X, которое удовлетворяет этому уравнению.

Замкнутое по теории множеств Кантора производное множество $X^{(k+p)}$ положительного целого порядка k+p для этого множества X является согласно этому уравнению именно замкнутым подмножеством множества Q.

Можно доказать методом от противоречащего, что теоретико-множественное пересечение замкнутого

производного множества $X^{(k+p)}$ положительного целого порядка k+p для этого множества X с произвольным отрезком действительной числовой прямой R, имеющим непременно положительную длину, является непустым множеством.

Действительно, в противоречащем случае существует такой отрезок действительной числовой прямой R

$$[a, b],\ a \in R,\ b \in R,\ a < b,$$

что теоретико-множественное пересечение замкнутого производного множества $X^{(k+p)}$ положительного целого порядка k+p для этого множества X с этим отрезком действительной числовой прямой R, имеющим непременно положительную длину, является пустым множеством:

$$X^{(k+p)} \cap [a, b] = \emptyset.$$

Тогда все рациональные числа этого действительного отрезка [a, b] принадлежат правой части этого полного нелинейного приведённого канонического единометрического производного множественного уравнения

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = Q$$

двойного положительного целого порядка (k, p) с единственным заданным известным множеством Q и с единственным искомым неизвестным множеством X и согласно этому уравнению также его левой части, а согласно допущению о пустоте этого теоретико-множественного пересечения

$$X^{(k+p)} \cap [a, b] = \varnothing$$

принадлежат множеству X.

То есть множество X включает всюду частое (всюду плотное) на этом действительном отрезке [a, b] множество всех рациональных чисел этого действительного отрезка [a, b].

Тогда каждая действительная точка этого действительного отрезка [a, b] является предельной точкой для множества X, непременно замкнутое производное множество $X^{(1)}$ первого порядка для множества X целиком включает этот действительный отрезок [a, b], являющийся именно совершенной частью множества $X^{(1)}$ и поэтому полностью включающийся во все непременно замкнутые производные множества положительных целых порядков для множества X.

В частности, этот действительный отрезок [a, b], имеющий непременно положительную длину, полностью включается в производное множество $X^{(k+p)}$ именно этого положительного целого порядка k+p для этого множества X.

Но этот вывод получен как необходимое следствие предположения о пустоте теоретико-множественного пересечения непременно замкнутого производного множества $X^{(k+p)}$ положительного целого порядка k+p для этого множества X с этим отрезком [a, b] действительной

числовой прямой R, имеющим непременно положительную длину:

$$X^{(k+p)} \cap [a, b] = \emptyset.$$

Полученное противоречие доказывает методом от противоречащего, что теоретико-множественное пересечение непременно замкнутого производного множества $X^{(k+p)}$ положительного целого порядка k+p для этого множества X с произвольным отрезком действительной числовой прямой R, имеющим непременно положительную длину, является непустым множеством.

Но в таком случае само непременно замкнутое производное множество $X^{(k+p)}$ именно этого положительного целого порядка k+p для этого множества X всюду представлено (всюду часто, всюду плотно) на всей действительной числовой прямой R, каждая её действительная точка является предельной для непременно замкнутого производного множества $X^{(k+p)}$ положительного целого порядка k+p для этого множества X, непременно замкнутое производное множество $X^{(k+p)}$ положительного целого порядка k+p для этого множества X содержит все свои предельные точки и

поэтому необходимо совпадает со всей действительной числовой прямой R.

Однако это противоречит полному нелинейному приведённому каноническому единометрическому производному множественному уравнению

$$X \cap X^{(k)} \cup X^{(k+p)} = Q$$

двойного положительного целого порядка (k, p) с единственным заданным известным множеством Q и с единственным искомым неизвестным множеством X, в котором левая часть есть несчётно бесконечное множество всех действительных чисел, а правая часть есть счётно бесконечное множество всех рациональных чисел.

Полученное противоречие доказывает теорему.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, открыты целые системы взаимосвязанных основополагающих принципиальных изъянов основополагающей, продвинутой, прикладной и вычислительной частей классической математики. Созданы (все)общие логика с общей методологией преодоления антиномий теории множеств Кантора и синергичные математические теории и (мета)методологии количественно и/или качественно изменяющихся (переменных) чётко-нечётких множеств, домножеств (предмножеств) и квантимножеств (количественных множеств), сверхмножеств, сверхконтинуума, сверхкардиналов,

сверхординалов, сверхпоследовательностей, сверхрядов, сверхчисел, сверхколичеств, общих пределов, иерархий целочастичности, системных задач, множественных действий в топологических и метрических пространствах, полных и неполных линейных и нелинейных канонических единометрических производных множественных уравнений с одним неизвестным. Они открывают, развивают и эффективно используют природу и сущность математики, а также изобретают принципиально новые общие методы и методологии.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Советское радио, 1970. 152 с.

2. Акилов Г. П., Макаров Б. М., Хавин В. П. Элементарное введение в теорию интеграла. Л.: изд-во Ленинградского университета, 1969. 349 с.

3. Акчурин И. А. Единство естественнонаучного знания. М.: Наука, 1974. 207 с.

4. Александров А. Д., Колмогоров А. Н., Лаврентьев М. А. (ред.) Математика, её содержание, методы и значение. Том 1. М.: Изд. АН СССР, 1956. 296 с.

5. Александров А. Д., Колмогоров А. Н., Лаврентьев М. А. (ред.) Математика, её содержание, методы и значение. Том 2. М.: Изд. АН СССР, 1956. 397 с.

6. Александров А. Д., Колмогоров А. Н., Лаврентьев М. А. (ред.) Математика, её содержание, методы и значение. Том 3. М.: Изд. АН СССР, 1956. 336 с.

7. Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 411 с.

8. Александров П. С. Комбинаторная топология. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 660 с.

9. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми знаниями из алгебры. М.: Наука, 1968. 912 с.

10. Александров П. С. Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969. 240 с.

11. Александров П. С. Что такое неэвклидова геометрия. М.: Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1950. 72 с.

12. Александров П. С., Ефремович В. А. О простейших понятиях современной топологии. М.; Л.: Гл. ред. общетехн. лит и номографии, 1935. 32 с.

13. Александров П. С., Ефремович В. А. Очерк основных понятий топологии. М.; Л.: Гл. ред. общетехн. лит и номографии, 1936. 95 с.

14. Александров П. С., Колмогоров А. Н. Введение в теорию функций действительного переменного. М.; Л.: Государственное объединённое научно-техническое

издательство, Ред. технико-теоретической литературы, 1933. 275 с.

15. Александров П. С., Колмогоров А. Н. Введение в теорию функций действительного переменного. Изд. 3-е, перераб. М.; Л.: Государственное объединённое научно-техническое издательство, Ред. технико-теоретической литературы, 1938. 268 с.

16. Александров П. С., Маркушевич А. И., Хинчин А. Я. Энциклопедия элементарной математики в 5 книгах. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951–1966.

17. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973. 576 с.

18. Альтшуллер Г. С. Алгоритм изобретения. М.: Московский рабочий, 1969. 272 с.

19. Альтшуллер Г. С. Алгоритм изобретения. 2-е изд., испр. М.: Московский рабочий, 1973. 296 с.

20. Альтшуллер Г. С. Как научиться изобретать. Тамбов: Тамбовское книжное изд-во, 1961. 128 с.

21. Альтшуллер Г. С. Основы изобретательства. Воронеж: Центрально-черноземное книжное издательство, 1964. 238 с.

22. Амосов Н. М. Искусственный разум. Киев: Наукова думка, 1969. 153 с.

23. Амосов Н. М. (ред.) Кибернетика и живой организм. Киев: Наукова думка, 1964. 117 с.

24. Амосов Н. М. Моделирование сложных систем. Киев: Наукова думка, 1968. 81 с.

25. Амосов Н. М., Касаткин А. М., Касаткина Л. М., Талаев С. А. Автоматы и разумное поведение: Опыт моделирования. 1973. 380 с.
26. Андреев И. Д. Познаваемость мира и его закономерностей. М.: Знание, 1953. 64 с.
27. Арбиб М. Мозг, машина и математика / пер. с англ. М.: Наука, 1968. 224 с.
28. Аристотель. Аналитики первая и вторая / пер. с греч. Б. А. Фохта. Л.: Государственное издательство политической литературы, 1952. 440 с.
29. Арнольд И. В. Теоретическая арифметика. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1938. 480 с.

30. Арсеньев А. С., Библер В. С., Кедров Б. М. Анализ развивающегося понятия. М.: Наука, 1967. 440 с.

31. Артин Э. Геометрическая алгебра / пер. с англ. В. М. Котлова под ред. Л. А. Калужнина. М., Наука, 1969. 283 с.

32. Архангельский А. В., Пономарёв В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974. 424 с.

33. Архангельский Н. А., Зайцев Б. И. Автоматические цифровые машины. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 128 с.

34. Архимед. Сочинения / перевод, вступительная статья и комментарии Ю. Н. Веселовского; перевод арабских текстов Б. А. Розенфельда. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 640 с.

35. Асмус В. Ф. Логика. М.: Государственное издательство политической литературы (ОГИЗ), 1947. 387 с.

36. Асмус В. Ф. Проблема интуиции в философии и математике (Очерк истории: XVII – начало XX в.). М.: Мысль, 1965. 312 с.

37. Асмус В. Ф. Учение логики о доказательстве и опровержении. М.: Государственное издательство политической литературы, 1954. 88 с.

38. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. 2-ое изд. М.: Наука, 1965. 408 с.

39. Бакрадзе К. С. Логика. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та им. Сталина, 1951. 456 с.

40. Банах С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1966. 436 с.

41. **Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 936 с.**
42. **Барра Ж.-Р. Основные понятия математической статистики. М.: Мир, 1974. 282 с.**
43. **Бартлетт М. С. Введение в теорию случайных процессов. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1958. 384 с.**
44. **Бахман Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии. М.: Наука, 1969. 380 с.**
45. **Бахман Ф., Шмидт Э. N-угольники / пер. с нем. А. И. Сирота. М.: Мир, 1973. 249 с.**
46. **Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения. М.: Наука, 1972. 68 с.**

47. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 326 с.

48. Беккенбах Э. (ред.). Прикладная комбинаторная математика: сб. статей / пер. с англ. М.: Мир, 1968. 364 с.

49. Беккенбах Э. Ф. (ред.) Современная математика для инженеров / пер. с англ. И. Н. Векуа. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1958. 498 с.

50. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства / пер. с англ. М.: Мир, 1965. 168 с.

51. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.

52. Беллман Р. Э. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.

53. **Беллман Р. (ред.) Математические проблемы в биологии. Сборник переводов. М.: Мир, 1966. 278 с.**
54. **Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 464 с.**
55. **Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 620 с.**
56. **Березин С. И. Техника элементарных вычислений. Л.: Машиностроение. 1974. 136 с.**
57. **Берман Г. Н. Приёмы счёта. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 88 с.**

58. Берман Г. Н. Счёт и число. Как люди учились считать. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 36 с.

59. Берман Г. Н. Число и наука о нём. Общедоступные очерки по арифметике натуральных чисел. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 164 с.

60. Бернал Дж. Наука в истории общества. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1956. 736 с.

61. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: в 4 т. Том I. Конструктивная теория функций (1905–1930 гг.). М.: Издательство Академии Наук СССР, 1952. 582 с.

62. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: в 4 т. Том II. Конструктивная теория функций (1931–1950 гг.). М.: Издательство Академии Наук СССР, 1954. 628 с.

63. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: в 4 т. Том III. Дифференциальные уравнения, вариационное исчисление и геометрия (1903–1947 гг.). М.: Издательство Академии Наук СССР, 1960. 441 с.

64. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: в 4 т. Том IV. Теория вероятностей и математическая статистика (1917–1946 гг.). М.: Издательство Академии Наук СССР, 1964. 579 с.

65. Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. Изд. 2-е, доп. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934. 412 с.

66. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Часть 1. М.; Л.: Главная редакция общетехнической литературы, 1937. 200 с.
67. Бесконечность и Вселенная: сбор. статей. М.: Мысль, 1969. 325 с.
68. Биркгоф Г. Теория структур. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1952. 407 с.
69. Блекуэлл Д., Гиршик М. А. Теория игр и статистических решений. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1958. 376 с.
70. Богданов А. А. Тектология. Всеобщая организационная наука: в 2-х кн. Берлин; Москва; Санкт-Петербург: Издательство З. И. Гржебина, 1922.

71. Боголюбов Н. Н. Мергелян С. Н. Советская математическая школа. М.: Знание, 1967. 65 с.
72. Богомолов С. А. Актуальная бесконечность. Зенон Элейский, Ис. Ньютон, Г. Кантор. Л.; М.: ОНТИ Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934. 78 с.
73. Богуславский В. М. Задачи по логике. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1952. 112 с.
74. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
75. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973. 448 с.

76. Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1965. 108 с.

77. Больцано Б. Парадоксы бесконечного. Одесса: Mathesis, 1911. 111 с.

78. Боревич З. И. Определители и матрицы. М.: Наука, 1970. 200 с.

79. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. Изд. 2-е. М.: Наука, 1972. 496 с.

80. Борель Э. Вероятность и достоверность. М.: Наука, 1969. 110 с.

81. Борель Э. Случай / пер. с французского Ю. И. Костицыной под редакцией В. А. Костицына. М.; Пг.: Госиздат, 1923. 227 с.

82. Борель Эм., Дельтейль Р., Юрон Р. Вероятности, ошибки. М.: Статистика, 1972. 176 с.

83. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1972. 368 с.

84. Ботвинник М. М. Алгоритм игры в шахматы. М.: Наука, 1968. 94 с.

85. Ботвинник М. М. О кибернетической цели игры. М.: Советская радио, 1955. 120 с.

86. Боумен У. Графическое представление информации / пер. с англ. М.: Мир, 1971. 228 с.

87. Боярский А. Я. Теоретические исследования по статистике. М.: Статистика, 1974. 305 с.

88. Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1959. 178 с.

89. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 392 с.

90. Бродский И. Н. Отрицательные высказывания. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1973. 104 с.

91. Бродский И. Н. Элементарное введение в символическую логику. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1964. 66 с.

92. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 11-е изд., стер. М.: Наука, 1967. 608 с.

93. Брудно А. Л. Теория функций действительного переменного. М.: Наука, 1971. 119 с.

94. Бугулов Е. А., Толасов Б. А. Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам. Орджоникидзе: Северо-Осетинское книжное изд-во, 1962. 226 с.

95. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972. 259 с.

96. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер / пер. с франц. Д. А. Райкова. М.: Наука, 1967. 400 с.

97. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры / пер. с франц. С. Н. Крачковского; под ред. Д. А. Райкова. М.: Наука, 1968. 275 с.

98. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства / пер. с франц. С. Н. Крачковского; под ред. Д. А. Райкова. М.: Наука, 1969. 392 с.

99. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 292 с.

100. Бурбаки Н. Теория множеств. Книга 1. Основные структуры анализа / пер. с франц. Г. Н. Поварова, Ю. А. Шихановича; под ред. В. А. Успенского. М.: Мир, 1965. 456 с.

101. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. Элементарная теория / пер. с франц. Е. И. Стечкиной. М.: Наука, 1965. 424 с.

102. Бут Э. Д. Численные методы / пер. с англ. Т. М. Тер-Микаэляна под ред. В. М. Курочкина. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 237 с.

103. Бухштаб А. А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966. 384 с.

104. Бэкон Р. Большое сочинение. Часть первая, в которой устраняются четыре общие причины человеческого невежества // Антология мировой философии. Т. 1, ч. 2. М., 1969. С. 862–877.

105. Бэкон Ф. Новый органон. Л.: ОГИЗ СОЦЭКГИЗ, 1935. 384 с.

106. Бэр Р. Теория разрывных функций / пер. с фр. и редакция А. Я. Хинчина. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1932. 134 с.

107. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том 1 / пер. с англ. Б. Т. Вавилова. М.: Мир, 1972. 337 с.

108. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том 2 / пер. с английского В. Я. Алтаева. М.: Мир, 1973. 489 с.

109. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том 3 / пер. с англ. Б. Т. Вавилова. М.: Мир, 1973. 504 с.

110. Вайскопф В. Наука и удивительное. Как человек понимает природу / пер. А. С. Компанеец. М.: Наука, 1965. 234 с.

111. Вальд А. Последовательный анализ. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 328 с.

112. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1960. 435 с.

113. Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции / пер. с голландского Н. Веселовского. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 456 с.

114. Варпаховский Ф. Л. Элементы теории алгоритмов. М.: Просвещение, 1970. 25 с.

115. Васильев А. В. Целое число. М.: Научное книгоиздательство, 1919. 272 с.

116. Васильев Н. А. Логика и металогика // Логос. 1912–1913. Кн. 1–2. С. 53–81.

117. Васильев Н. А. Воображаемая (неаристотелева) логика // Журнал мин-ва нар. просвещения. Нов. Сер. 1912. Август. С. 207–246.

118. Введенский А. И. Лекции по логике. СПб.: Типография В. Безобразова и К°, 1896. 446 с.

119. Введенский А. И. Лекции по психологии 1890–91 акад. г. СПб.: Издательство студентов Императорского историко-филологического института, 1891. 204 с.

120. Введенский А. И. Лекции психологии. СПб.: Типография В. Безобразова и К°, 1908. 523 с.

121. Введенский А. И. Логика для гимназий. Пг.: Типография М. М. Стасюлевича, 1915. 181 с.

122. Введенский А. И. Логика как часть теории познания. Пг.: Типография М. М. Стасюлевича, 1917. 430 с.

123. Введенский А. И. О видах веры в ее отношениях к знанию. СПб.: Типография лит. т-ва И. Н. Кушнерев и К°, 1894. 76 с.

124. Введенский А. И. О пределах и признаках одушевления. СПб.: Типография В. С. Балашева, 1892. 119 с.

125. Введенский А. И. Психология без всякой метафизики. Пг.: Типография М. М. Стасюлевича, 1917. 359 с.

126. Вейль А. Основы теории чисел. М.: Мир, 1972. 410 с.

127. Вейль Г. О философии математики. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934. 128 с.

128. Вейль Г. Полвека математики / перевод с английского З. А. Кузичевой. М.: Знание, 1969. 48 с.

129. Вейль Г. Симметрия / перевод с английского Б. В. Бирюкова и Ю. А. Данилова под редакцией Б. А. Розенфельда. М.: Наука, 1968. 192 с.

130. Великанов М. А. Ошибки измерения и эмпирические зависимости. Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1962. 302 с.

131. Венков Б. А. Элементарная теория чисел. М.; Л.: Гл. ред. общетехн. и техно-теорет. лит., 1937. 220 с.

132. Вентцель Е. С. Введение в исследование операций. М.: Советское радио, 1964. 388 с.

133. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.

134. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 68 с.

135. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. Задачи и упражнения. М.: Наука, 1969. 368 с.

136. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 468 с.

137. Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 320 с.

138. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 328 с.
139. Виленкин Н. Я. Метод последовательных приближений. М.: Наука, 1968. 108 с.
140. Виленкин Н. Я., Горин Е. А., Костюченко А. Г. и др. Функциональный анализ (Справочная математическая библиотека). М.: Наука, 1964. 424 с.
141. Винер Н. Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине. 2-е изд. М.: Советское радио, 1968. 201 с.
142. Винер Н. Моё отношение к кибернетике. Её прошлое и будущее. М.: Советское радио, 1969. 24 с.
143. Винер Н. Я – математик. М.: Наука, 1964. 354 с.

144. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. 180 с.
145. Виноградов С. Н., Кузьмин А. Ф. Логика. 8-е изд. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1954. 176 с.
146. Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы. М.: Наука, 1966. 248 с.
147. Воробьёв Н. Н. Признаки делимости. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 72 с.
148. Воробьёв Н. Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1969. 112 с.

149. Воробьёв Н. Н., Врублевская И. Н. (ред.) Позиционные игры. Сборник статей. М.: Наука, 1967. 524 с.

150. Время и современная физика / под ред. Дж. Ригала. М.: Мир, 1970. 152 с.

151. Вудсон У., Коновер Д. Справочник по инженерной психологии для инженеров и художников-конструкторов. М.: Мир, 1968. 260 с.

152. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967. 415 с.

153. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. Введение в теорию интеграла. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1973. 350 с.

154. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в Древнем мире. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Наука, 1967. 320 с.

155. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1964. 872 с.
156. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. М.: Наука, 1966. 424 с.
157. Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений. М.: Наука, 1971. 248 с.
158. Гагарин Ю. А., Лебедев В. И. Психология и космос. М.: Молодая гвардия, 1968. 208 с.
159. Галилей Г. Избранные труды: в 2 т. М.: Наука, 1964.
160. Галлагер Р. Теория информации и надёжная связь / перевод с английского под ред. М. С. Минскера, Б. С. Цыбакова. М.: Советское радио, 1974. 720 с.
161. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 2-е изд., доп. М.: Наука, 1966. 576 с.

162. Гарднер М. Математические досуги. М.: Мир, 1972. 496 с.

163. Гарднер М. Математические новеллы / пер. с англ. М.: Мир, 1974. 456 с.

164. Гарднер М. Этот правый, левый мир. М.: Мир, 1967. 267 с.

165. Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел / перевод Б. Б. Демьянова, общая редакция И. М. Виноградова, комментарии Б. Н. Делоне. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1959. 979 с.

166. Гегель Г. В. Ф. Наука логики: в 3-х томах. Т. 1. М.: Мысль, 1970. 501 с.

167. Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. М.: Мир, 1965. 201 с.

168. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе / пер. с англ. Б. И. Голубова. М.: Мир, 1967. 252 с.

169. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщённые функции и действия над ними (Обобщённые функции, выпуск 1) (2-е изд.). М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 472 с.

170. Гельфонд А. О. Избранные труды. М.: Наука, 1973. 440 с.

171. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 400 с.

172. Гельфонд А. О., Линник Ю. В. Элементарные методы в аналитической теории чисел. М.: Государственное

издательство физико-математической литературы, 1962. 272 с.

173. Генкин Л. О математической индукции. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 36 с.

174. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 384 с.

175. Гершель Д. Философия естествознания. Об общем характере, пользе и принципах исследования природы. СПб.: Русская книжная торговля, 1868. 355 с.

176. Гильберт Д. Основания геометрии / перевод с седьмого немецкого издания И. С. Градштейна; под редакцией и со вступительной статьёй П. К. Рашевского. М.; Л.: ОГИЗ,

Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 491 с.

177. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1947. 306 с.

178. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. М.: Наука, 1972. 288 с.

179. Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков. М.: Мир, 1970. 326 с.

180. Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки. М.: Наука, 1973. 368 с.

181. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969. 476 с.

182. Гливенко В. И. Интеграл Стильтьеса. Л.: ОНТИ, 1936. 217 с.
183. Глушков В. М. Введение в кибернетику. Киев: Изд-во АН УССР, 1964. 324 с.
184. Глушков В. М. Введение в теорию самосовершенствующихся систем. Киев: Изд-во КВИРТУ, 1962. 109 с.
185. Глушков В. М. Гносеологические основы математизации науки. Киев.: Наук, думка, 1965. 25 с.
186. Глушков В. М. Кибернетика и умственный труд. М.: Знание, 1965. 46 с.
187. Глушков В. М. Мышление и кибернетика. М.: Знание, библиотечка философских проблем техники, 1966. 32 с.

188. Глушков В. М. Введение в АСУ. Киев: Техніка, 1972. 312 с.
189. Гнеденко Б. В. Беседы о математической статистике. М.: Знание, 1968. 48 с.
190. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Изд. 5-е. М.: Наука, 1969. 400 с.
191. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1946. 246 с.
192. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьёв А. Д. Математические методы в теории надёжности. М.: Наука, 1965. 524 с.
193. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1970. 168 с.

194. Гоббс Т. Избранные произведения в двух томах. Т. 1–2. М.: Мысль, 1964.

195. Голдман С. Теория информации / пер. с англ. Б. Г. Белкина, под ред. В. В. Фурдуева. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1957. 446 с.

196. Головина Л. И., Яглом И. М. Индукция в геометрии. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 100 с.

197. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. Изд. 2-е, перераб. М.: Гостехтеориздат, 1954. 328 с.

198. Гордин А. Б. Занимательная кибернетика. М.: Энергия, 1974. 64 с.

199. Горский Д. П. Вопросы абстракции и образование понятий. М.: Издательство Академии наук СССР, 1961. 352 с.

200. Горский Д. П. Логика. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1958. 292 с.

201. Горский Д. П. Определение (логико-методологические проблемы). М.: Мысль, 1974. 311 с.

202. Горский Д. П., Таванец П. В. (ред.) Логика. М.: Государственное издательство политической литературы, 1956. 279 с.

203. Градштейн И. С. Прямая и обратная теоремы. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 80 с.

204. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, перераб. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 1100 с.
205. Гребенча М. К. Теория чисел. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1949. 128 с.
206. Гришкин И. И. Понятие информации. Логико-методологический аспект. М.: Наука, 1973. 231 с.
207. Грузенберг С. О. Гений и творчество: Основы теории и психологии творчества: с прил. неизд. материалов по вопросам психологии творчества и указ. лит. Л.: Изд-во П. П. Сойкина, 1924. 254 с.
208. Гудстейн Р. Л. Рекурсивный математический анализ. М.: Наука, 1970. 472 с.

209. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций / пер. М. А. Евграфова. М.: Наука, 1968. 648 с.

210. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 232 с.

211. Гутер Р. С., Овчинский Б. В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М.: Наука, 1970. 432 с.

212. Гутер Р. С., Овчинский Б. В., Резниковский П. Т. Программирование и вычислительная математика. М.: Наука, 1965. 448 с.

213. Гутчин И. Б. Кибернетические модели творчества. М.: Знание, 1969. 64 с.

214. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. Том 1. Изд. 12-е, испр. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 224 с.
215. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. Том 2. Изд. 3-е, перераб. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1945. 223 с.
216. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. Том 3. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 264 с.
217. Дайменд С. Мир вероятностей. Статистика в науке. М.: Статистика, 1970. 155 с.

218. Данскин Дж. М. Теория максимина и её приложение к задачам распределения вооружения. М.: Советское радио, 1970. 200 с.

219. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование / пер. с англ. Д. А. Бабаева. М.: Мир, 1972. 311 с.

220. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973. 228 с.

221. Де Брёйн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М.: Мир, 1966. 248 с.

222. Дедекиндъ Р. Непрерывность и ирраціональныя числа. Одесса: Mathesis, 1906. 40 с.

223. **Декарт Р. Избранные произведения = Oeuvres choisies. М.: Государственное издательство политической литературы, 1950. 712 с.**
224. **Декарт Р. Рассуждение о методе. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1953. 655 с. (Серия: Классики науки).**
225. **Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 7-е изд., стер. М.: Наука, 1969. 544 с.**
226. **Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Изд. 2-е. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 660 с.**
227. **Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Приближение функций,**

дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Наука, 1967. 368 с.

228. Депман И. Я. История арифметики. Пособие для учителей. 2-е изд., испр. М.: Просвещение, 1965. 416 с.

229. Депман И. Я. Первое знакомство с математической логикой. Л.: Знание, 1965. 59 с.

230. Депман И. Я. Рассказы о математике. Л.: Детгиз, 1957. 142 с.

231. Депман И. Я. Рассказы о решении задач. Л.: Детская литература, 1957. 127 с.

232. Джевонс У. С. Основы науки. Трактат о логике и научном методе = The Principles of Science: A Treatise on Logic and Scientific Method / пер. со 2-го англ. изд. М.

Антоновича. СПб.: Издательство Л. Ф. Пантелеева, 1881. 713 с.

233. Диалектика и логика. Законы мышления / под общей редакцией члена-корреспондента АН СССР Б. М. Кедрова. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1962. 336 с.

234. Диалектика и логика. Формы мышления / под общей редакцией члена-корреспондента АН СССР Б. М. Кедрова. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1962. 312 с.

235. Диофант Александрийский. Арифметика и книга о многоугольных числах. М.: Наука, 1974. 328 с.

236. Доморяд А. П. Математические игры и развлечения. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 267 с.

237. Дороднов А. М., Острецов И. Н., Петросов В. А., Приходов В. Ю., Сафонов И. Б. Графики функций. М.: Высшая школа, 1972. 104 с.

238. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Краткое пособие по математике для поступающих в Московский университет. М.: изд-во МГУ, 1964. 209 с.

239. Дрешер М. Стратегические игры. Теория и приложения / пер. с англ. И. В. Соловьева. М.: Советское радио, 1964. 352 с.

240. Дринфельд Г. И. Дополнения к общему курсу математического анализа. Харьков: Изд-во Харьковского государственного университета им. А. М. Горького, 1958. 115 с.

241. **Дринфельд Г. И. Трансцендентность чисел пи и е. Харьков: Изд-во Харьковского государственного университета им. А. М. Горького, 1952. 76 с.**

242. **Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1956. 609 с.**

243. **Дубнов Я. С. Измерение отрезков. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 100 с.**

244. **Дубнов Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 72 с.**

245. **Дьедонне Ж. Основы современного анализа / пер. с англ. М. А. Вайнштейна. М.: Мир, 1964. 430 с.**

246. Дьяченко В. Ф. Основные понятия вычислительной математики. М. Наука, 1972. 120 с.

247. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел / пер. с англ. Б. З. Мороза; под ред. Ю. В. Линника. М.: Наука, 1965. 175 с.

248. Жуков Н. И. Информация. Философский анализ центрального понятия кибернетики. Минск: Наука и техника, 1971. 280 с.

249. Журдэн Ф. Природа математики / пер. с английского А. А. Мочульский; под редакцией профессора И. Ю. Тимченко. Одесса: Матезис, 1923. 178 с.

250. Заде Л. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // Математика сегодня. М.: Знание, 1974. С. 5–49.

251. Зайдель А. Н. Элементарные оценки ошибок измерений. Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1967. 88 с.

252. Збірник задач республіканських математичних олімпіад / В. І. Михайловський, М. Й. Ядренко, Г. Й. Призва, В. А. Вишенський; за заг. ред. доц. В. І. Михайловського. К.: Вища школа, 1969. 120 с.

253. Зедгенидзе Г. П., Гогсадзе Р. Ш. Математические методы в измерительной технике. М: Изд-во Комитета стандартов, 1970. 616 с.

254. Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих и её приложения к физике. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 560 с.

255. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1967. 648 с.
256. Зиновьев А. А. Комплексная логика. М.: Наука, 1970. 206 с.
257. Зиновьев А. А. Логика науки. М.: Мысль, 1971. 279 с.
258. Зиновьев А. А. Логическая физика. М.: Наука, 1972. 193 с.
259. Ивин А. А. Логика норм. М.: Изд-во Московского ун-та, 1973. 121 с.
260. Ивин А. А. Основания логики оценок. М.: Изд-во Московского ун-та, 1970. 230 с.
261. Ивс Г., Ньюсом К. В. О математической логике и философии математики / пер. с англ. М.: Знание, 1968. 48 с.

262. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех: опыт математической хрестоматии: книга для семьи и школы. Кн. 1. 4-е изд., перераб. СПб.: Тип. Т-ва А. С. Суворина «Новое Время», 1914. 275 с.
263. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех: опыт математической хрестоматии: книга для семьи и школы. Кн. 2. СПб.: Тип. А. С. Суворина «Новое Время», 1909. 282 с.
264. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех: опыт математической хрестоматии: книга для семьи и школы. Кн. 3. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Тип. Т-ва А. С. Суворина «Новое Время», 1915. 322 с.
265. Идельсон А. В., Минц Г. Е. (ред.) Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967. 351 с.

266. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

267. История математики: в 3 томах / под редакцией А. П. Юшкевича. Том 1. С древнейших времен до начала нового времени. М.: Наука, 1970. 352 с.

268. История математики: в 3 томах / под редакцией А. П. Юшкевича. Том 2. Математика XVII столетия. М.: Наука, 1970. 301 с.

269. История математики: в 3 томах / под редакцией А. П. Юшкевича. Том 3. Математика XVIII столетия. М.: Наука, 1972. 496 с.

270. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973. 150 с.

271. Кавальери Б. Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. Том 1. Основы учения о неделимых / перевод со вступительной статьёй и примечаниями С. Я. Лурье. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1940. 416 с.

272. Каган В. Ф. Лобачевский (2-е изд.). М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 506 с.

273. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. Общедоступные очерки. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 305 с.

274. Калитин Н. И. Искусство быть читателем. М.: Молодая гвардия, 1962. 160 с.

275. Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру. М.: Наука, 1973. 448 с.

276. Калужнин Л. А. Основная теорема арифметики. М.: Наука, 1969. 32 с.

277. Камке Э. Интеграл Лебега–Стилтьеса. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 328 с.

278. Кантор Г. Основы общего учения о многообразиях. О различных точках зрения на актуально-бесконечное. К учению о трансфинитном / перевод П. С. Юшкевича // А. В. Васильев (ред.). Новые идеи в математике. Сборник 6-ой. Теория ассамблей 1. СПб.: Образование, 1914. 184 с.

279. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Математическое оптимальное программирование в экономике. М.: Знание, 1968. 66 с.
280. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Оптимальные решения в экономике. М.: Наука, 1972. 232 с.
281. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближённые методы высшего анализа. 5-е изд. М.; Л.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 708 с.
282. Каринский М. И. Классификация выводов. СПб.: тип. Ф. Г. Елеонского и К°, 1880. 271 с.
283. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964. 835 с.

284. Карлин С. Основы теории случайных процессов / пер. с англ. М.: Мир, 1971. 537 с.
285. Карнап Р. Значение и необходимость. Исследование по семантике и модальной логике. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1959. 384 с.
286. Кассандрова О. Н., Лебедев В. В. Обработка результатов наблюдений. М.: Наука, 1970. 104 с.
287. Катлер Э., Мак-Шейн Р. Система быстрого счёта по Трахтенбергу. М.: Просвещение, 1967. 134 с.
288. Кац М., Улам С. Математика и логика. Ретроспектива и перспективы / пер. с английского Н. И. Плужниковой под редакцией И. М. Яглома. М.: Мир, 1971. 253 с.
289. Келли Дж. Общая топология. М.: Наука, 1968. 384 с.

290. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения. М.: Советское радио, 1972. 192 с.
291. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. М.: Мир, 1965. 484 с.
292. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972. 192 с.
293. Кеплер И. (Ioanne Kepplero). Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки. С присоединением дополнения к архимедовой стереометрии / перевод и предисловие Г. Н. Свешникова, вступительная статья М. Я. Выгодского. М.; Л.: Государственное

издательство технико-теоретической литературы, 1935. 360 с.

294. Кибернетика, мышление, жизнь / под ред. А. И. Берга, Б. В. Бирюкова, И. Б. Новика, И. В. Кузнецова, А. Г. Спиркина. М.: Мысль, 1964. 510 с.

295. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть 1. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 432 с.

296. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2 томах. Том 1. М.: ОНТИ, 1933. 472 с.

297. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2 томах. Том 2. М.: ОНТИ, 1934. 444 с.

298. Клиланд Д., Кинг В. Системный анализ и целевое управление / пер. с англ. М.: Советское радио, 1974. 280 с.

299. Клини С. Введение в метаматематику. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1957. 526 с.

300. Клини С. Математическая логика. М.: Мир, 1973. 480 с.

301. Кобринский Н. Е., Пекелис В. Д. Быстрее мысли. М.: Молодая гвардия, 1963. 475 с.

302. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / пер. с нем. М.: Мир, 1969. 448 с.

303. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. М.: Мир, 1971. 312 с.

304. Колмогоров А. Н. О профессии математика. М.: МГУ, 1959. 30 с.

305. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 80 с.
306. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. 2-е изд. М.: Наука, 1974. 120 с.
307. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
308. Кольман Э. Я. История математики в древности. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 235 с.
309. Кольман Э., Зих О. Занимательная логика. М.: Наука, 1966. 128 с.
310. Кондаков Н. И. Введение в логику. М.: Наука, 1967. 467 с.

311. Кондаков Н. И. Логический словарь. М.: Наука, 1971. 656 с.

312. Кондратюк Ю. В. Завоевание межпланетных пространств / под ред. В. П. Ветчинкина. Новосибирск: Изд. авт., 1929. 72 с.

313. Коперник Н. О вращениях небесных сфер. М: Наука, 1964. 653 с.

314. Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966. 160 с.

315. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 576 с.

316. Кордемский Б. А., Русалев Н. В. Удивительный квадрат. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. 160 с.
317. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.
318. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 224 с.
319. Косса П. Кибернетика. От человеческого мозга к мозгу искусственному / перевод со второго французского издания под общей редакцией и предисловием действительного члена АМН СССР доктора медицинских наук П. К. Анохина. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1958. 123 с.

320. Коши Г. А. Л. Дифференциальное и интегральное исчисление / пер. с фр. В. Я. Буняковского. СПб.: Императорская Академия Наук, 1831. 243 с.

321. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир, 1969. 348 с.

322. Коэн П. Дж., Херш Р. Некантороровская теория множеств // Математика в современном мире: сб. статей / сост. А. В. Шилейко. М.: Знание, 1969. 32 с. С. 20–32.

323. Коялович Б. М. Исследование о бесконечных системах линейных уравнений // Известия физико-математического ин-та им. В. А. Стеклова. 1930. 3. С. 41–167.

324. Крайзмер Л. П. Техническая кибернетика. М.; Л. Государственное энергетическое издательство, 1958. 82 с.

325. Крамер Г. Математические методы статистики / пер. с англ.; под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 632 с.
326. Кречмар В. А. Задачник по алгебре. М.: Наука, 1964. 388 с.
327. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, 1968. 432 с.
328. Крылов А. Н. Избранные труды. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1958. 806 с.
329. Крылов А. Н. Лекции о приближённых вычислениях. Изд. 2-е, перераб. и знач. доп. Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1933. 541 с.
330. Крылов В. И. Приближённое вычисление интегралов. Изд. 2-е. М.: Наука, 1967. 500 с.

331. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы высшей математики. Том 1 / под ред. И. П. Мысовских. Минск: Вышэйшая школа, 1972. 584 с.

332. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1966. 370 с.

333. Кузичев А. С. Диаграммы Венна. М.: Наука, 1968. 253 с.

334. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 472 с.

335. Кульбак С. Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967. 408 с.

336. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. 4-е изд., перераб., доп. М.: Наука, 1967. 704 с.
337. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. 2-е изд., перераб., доп. М.: Наука, 1970. 671 с.
338. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов / перевод с английского под редакцией А. Н. Колмогорова. М.: Государственное издание технико-теоретической литературы, 1947. 664 с.
339. Куратовский К. Топология. Том 1. М.: Мир, 1966. 594 с.
340. Куратовский К. Топология. Том 2. М.: Мир, 1969. 624 с.

341. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

342. Курош А. Г. Алгебраические уравнения произвольных степеней. М.; Л.: Государственное издание технико-теоретической литературы, 1961. 32 с.

343. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. 9-е изд. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1968. 431 с.

344. Кутюра Л. Алгебра логики / переводъ съ французскаго съ прибавленіями профессора И. Слешинскаго. Одесса: Матезисъ, 1909. 134 с.

345. Кушнер Б. А. Лекции по конструктивному математическому анализу. М.: Наука, 1973. 448 с.

346. Кымпан Ф. История числа пи. М.: Наука, 1971. 216 с.

347. Кэррол Л. История с узелками / перевод с английского Ю. А. Данилова; под ред. Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1973. 408 с.

348. Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы / пер. с англ. И. Н. Веселовского. М.: Наука, 1967. 152 с.

349. Ламперти Дж. Вероятность. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1973. 184 с.

350. Ланге В. Н. Физические парадоксы, софизмы и занимательные задачи. М.: Просвещение, 1967. 168 с.

351. Ланге О. Оптимальные решения. Основы программирования. М.: Изд-во МГУ, 1967. 284 с.

352. Ландау Э. Основы анализа. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1947. 182 с.

353. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1962. 208 с.

354. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 524 с.

355. Лаплас П. Опыт философии теории вероятностей / пер. с фр. М.: Тип. Т-ва И. Н. Кушнерев и Ко, 1908. 210 с.

356. Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций / пер. и ред. проф. Н. К. Бари; доп. статьи акад. Н.

Н. Лузина. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934. 325 с.

357. Лебег А. Об измерении величин. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1960. 204 с.

358. Лейбниц Г. В. Избранные философские сочинения / ред. и вступ. ст. В. П. Преображенского // Труды Московского психологического общества. 1890. Вып. 4 (переиздано в 1908 г.).

359. Лейкфельд П. Э. Логическое учение об индукции в главнейшие исторические моменты его разработки. СПб.: Типография В. С. Балашева и К°, 1896. 248 с.

360. Лейкфельд П. Э. Психология: краткое извлечение из курса, читанного в Императорском Харьковском

университете. Харьков: Издание студента Дав. Килосанидзе, 1906. 146 с.

361. Лейкфельд П. Э. Психология: краткое извлечение из курса, читанного в Императорском Харьковском университете. Харьков: Типо-литография С. Иванченко, 1913. 176 с.

362. Лейкфельд П. Э. Различные направления в логике и основные задачи этой науки. Харьков: Типография Губернского Правления, 1890. 387 с.

363. Лейтес Н. С. Об умственной одарённости. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1960. 216 с.

364. Лефор Г. Алгебра и анализ. Задачи / перевод с французского Е. И. Стечкиной. М.: Наука, 1973. 463 с.

365. Линдон Р. Заметки по логике. М.: Мир, 1968. 128 с.

366. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Изд. 2-е, доп. и испр. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 352 с.

367. Литлвуд Дж. Математическая смесь / пер. с англ. Изд. 2, стереот. М.: Наука, 1965. 150 с.

368. Литцман В. Весёлое и занимательное о числах и фигурах. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 264 с.

369. Литцман В. Где ошибка? М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 192 с.

370. Литцман В. Старое и новое о круге. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 60 с.
371. Литцман В. Теорема Пифагора. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 116 с.
372. Литцманн В., Триер В. В чём ошибка? Ложные умозаключения и ученические ошибки / перевод с немецкого Л. С. Левиной-Бри. Одесса: Mathesis 1923. 78 с.
373. Лобачевский Н. И. Геометрические исследования по теории параллельных линий / перевод, комментарии, вступительные статьи и примечания профессора В. Ф. Кагана. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1945. 176 с.

374. Лобачевский Н. И. Три сочинения по геометрии. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 416 с.

375. Логика, автоматы, алгоритмы / М. А. Айзерман, Л. А. Гусев, Л. И. Розоноэр, И. М. Смирнова, А. А. Таль. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 556 с.

376. Локк Дж. Избранные философские произведения: в 2 т. М.: Соцэкгиз [Гос. социально-экономическое издательство], 1960.

377. Ломов Б. Ф., Васильев А. А., Офицеров В. В., Рубахин В. Ф. Военная инженерная психология. М.: Воениздат, 1970. 400 с.

378. Ломоносов М. В. Полное собрание сочинений. Том 04. Труды по физике, астрономии и приборостроению 1744-1765 гг. М.; Л.: Издательство Академии наук СССР, 1955. 832 с.

379. Ломоносов М. В. Полное собрание сочинений. В 11 т. Т. 6. Труды по русской истории, общественно-экономическим вопросам и географии, 1747-1765 гг. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1952. 689 с.

380. Ломоносов М. В. Полное собрание сочинений. В 11 т. Т. 7. Труды по филологии, 1739-1758 гг. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1952. 993 с.

381. Ломоносов М. В. Полное собрание сочинений. В 11 т. Т. 8. Поэзия. Ораторская проза. Надписи 1732-1764 гг. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1959. 1289 с.

382. Лоэв М. Теория вероятностей. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1962. 720 с.

383. Лузин Н. Н. Дифференциальное исчисление. 7-е изд. М.: Высш. шк., 1961. 479 с.

384. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. 544 с.

385. Лузин Н. Н. Интегральное исчисление. 7-е изд. М.: Высш. шк., 1961. 479 с.

386. Лузин Н. Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 360 с.

387. Лузин Н. Н. О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1935. 400 с.

388. Лузин Н. Н. Современное состояние теории функций действительного переменного. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1933. 58 с.

389. Лузин Н. Н. Теория функций действительного переменного. Общая часть. Изд. 2. Уч. пособие для педвузов. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1948. 320 с.

390. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.:

Государственное издательство иностранной литературы, 1959. 311 с.

391. Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1961. 642 с.

392. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1965. 520 с.

393. Ляминъ А. А. Математическіе парадоксы и интересныя задачи для любителей математики. М.: типографія Г. Лисснера и Д. Собко, 1911. 334 с.

394. Маделунг Э. Математический аппарат физики. Справочное руководство. М.: Государственное

издательство физико-математической литературы, 1961. 620 с.

395. Мазмишвили А. И. Способ наименьших квадратов. М.: Недра, 1968. 440 с.

396. Мазур М. Качественная теория информации. М.: Мир, 1974. 238 с.

397. Майстров Л. Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. М.: Наука, 1967. 321 с.

398. Макаров И. П. Дополнительные главы математического анализа. Учебное пособие. М.: Просвещение, 1968. 308 с.

399. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. М.: Мир, 1969. 582 с.

400. Маковельский А. О. История логики. М.: Наука, 1967. 504 с.

401. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 393 с.

402. Мандельброт Б. Теория информации и психологическая теория частот слов // Математические методы в социальных науках. М.: Наука, 1973. С. 316–447.

403. Марков А. А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля / биографический очерк и примечания Н. И. Ахиезера. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 411 с. (Классики естествознания. Математика. Механика. Физика. Астрономия).

404. Марков А. А. Избранные труды. Теория чисел, теория вероятностей. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1951. 720 с.
405. Марков А. А. Теория алгорифмов. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1954. 377 с.
406. Маркс К. Математические рукописи. М.: Наука, 1968. 640 с.
407. Марон И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. М.: Наука, 1970. 400 с.
408. Матвеев И. В. Функции и их графики. М.: МГУ, 1970. 104 с.
409. Математический анализ. Вычисление элементарных функций / под ред. Л. А. Люстерника, О. А. Червоненкиса, А. Р. Янпольского. М.: Государственное издательство

физико-математической литературы, 1963. 239 с. (Справочная математическая библиотека).

410. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные др<u>о</u>би / под ред. Л. А. Люстерника и А. Р. Янпольского. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 266 с.

411. Медведев Ф. А. Развитие понятия интеграла. М.: Наука, 1974. 423 с.

412. Медведев Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке. М.: Наука, 1965. 231 с.

413. Мейер Цур Капеллен В. Математические инструменты. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1950. 318 с.

414. Мелентьев П. В. Приближённые вычисления. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 388 с.

415. Мельников Г. П. Азбука математической логики. М.: Знание, 1967. 104 с.

416. Мендельсон Э. Введение в математическую логику / пер. с англ. Ф. А. Кабакова; под ред. С. И. Адяна. М.: Наука; Государственное издательство физико-математической литературы, 1971. 322 с.

417. Метельский Н. В. Очерки истории методики математики. Минск: Вышэйшая школа, 1968. 340 с.

418. Мизес Р. Э. фон. Вероятность и статистика. М.; Л.: Госиздат., 1930. 250 с.

419. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 527 с.

420. Милль Д. С. Система логики силлогистической и индуктивной: изложение принципов доказательства в связи с методами научного исследования / перевод с английского под редакцией приват-доцента Императорского Московского университета В. Н. Ивановского. М.: Издание магазина «Книжное дело», 1900. 119 с.

421. Милн В. Э. Численный анализ / перевод с англ. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1951. 292 с.

422. Милсум Дж. Анализ биологических систем управления. М.: Мир, 1968. 502 с.

423. Минто В. Дедуктивная и индуктивная логика / пер. с англ. С. А. Котляревского; под ред. В. Н. Ивановского; примеры для упражнений подобраны В. Н. Ивановским и А. С. Белкиным. 2-е испр. и доп. изд. М.: Тип. т-ва И. Д. Сытина, 1896. 540 с.
424. Митропольский А. К. Теория моментов. Л.: Государственное издательство колхозной и совхозной литературы, 1933. 223 с.
425. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. М.: Наука, 1971. 576 с.
426. Митягин Б. С. (ред.) Математическая экономика и функциональный анализ. М.: Наука, 1974. 264 с.

427. Митягин Б.С. (ред.) Математическая экономика. Равновесные модели, оптимальное планирование и управление. М.: Мир, 1974. 246 с.

428. Михеева А. В. и др. Словарь-минимум для чтения научной литературы на английском языке. М.: Наука, 1969. 138 с.

429. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближённые методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 384 с.

430. Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII веке. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1953. 180 с.

431. Молодший В. Н. Очерки по вопросам обоснования математики. М.: Государственное учебно-педагогическое

издательство Министерства просвещения РСФСР, 1958. 232 с.

432. Мордухай-Болтовской Д. Д. Психология математического мышления // Вопросы философии и психологии. 1908. Год 19. Вып. 94. Кн. 4. С. 491–534.

433. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. М.: Мир, 1969. 432 с.

434. Мостовский А. Конструктивные множества и их приложения. М.: Мир, 1973. 256 с.

435. Мысовских И. П. Лекции по методам вычислений. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 342 с.

436. Нагибин Ф. Ф. Математическая шкатулка. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1958. 168 с.

437. Налимов В. В., Мульченко З. М. Наукометрия. М.: Наука, 1969. 192 с.

438. Налимов В. В., Чернова Н. А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М.: Наука, 1965. 340 с.

439. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 688 с.

440. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. 2-е изд. М.: Наука, 1968. 727 с.

441. Натансон И. П. Простейшие задачи на максимум и минимум. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 32 с.

442. Натансон И. П. Суммирование бесконечно малых величин. 3-е изд. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 58 с.

443. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. 2-е изд., перераб. М.: Гостехиздат, 1957. 552 с.

444. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 484 с.

445. Научное наследие П. Л. Чебышева. Выпуск 1. Математика. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР. 1945. 174 с.

446. Начала Евклида. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949–1951.

447. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир , 1969. 431 с.

448. Нивен А. Числа рациональные и иррациональные / пер. с англ. В. В. Сазонова; под ред. И. М. Яглома. М.: Мир, 1966. 199 с.

449. Никитин В. В. Сборник логических упражнений. Пособие для учителей математики. М.: Просвещение, 1970. 96 с.

450. Нильсон Н. Искусственный интеллект. Методы поиска решений. М.: Мир, 1973. 273 с.

451. Новиков П. С. Элементы математической логики. 2-е изд., испр. М.: Наука, 1973. 399 с.

452. Носиро К. Предельные множества. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 253 с.

453. Ньютон И. Всеобщая арифметика, или Книга об арифметических синтезе и анализе. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1948. 444 с. (Классики науки).

454. Ньютон И. Математические нач<u>а</u>ла натуральной философии / пер. с латин. с примечаниями и пояснениями А. Н. Крылова // А. Н. Крылов. Собрание трудов. Т. VII. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1936. 696 с.

455. Ньютон И. Математические работы / пер. с лат., вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 478 с. (Классики естествознания).
456. Оре О. Графы и их применение. М.: Мир, 1965. 175 с.
457. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений / пер. с англ. Л. З. Румынского, Б. Л. Румынского. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 383 с.
458. Оуэн Г. Теория игр / пер. с англ. под ред. А. А. Корбута; вступ. статья Н. Н. Воробьёва. М.: Мир, 1971. 230 с.
459. Пархоменко А. С. Что такое линия. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 140 с.

460. Паскаль Б. Трактат об арифметическом треугольнике (Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traités sur la même matière, 1654, издан в 1665).

461. Пекелис В. Д. Кибернетическая смесь. М.: Знание, 1973. 240 с.

462. Перельман Я. И. Быстрый счёт. Тридцать простых приёмов устного счёта. Л.: Дом занимательной науки, 1941. 12 с.

463. Перельман Я. И. Живая математика. М.: Наука, 1967. 160 с.

464. Перельман Я. И. Живой учебник геометрии. Л.: Время, 1930. 127 с.

465. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. М.: Наука, 1970. 198 с.

466. Перельман Я. И. Занимательная арифметика: загадки и диковинки в мире чисел. Изд. 9-е. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 190 с.

467. Перельман Я. И. Занимательная геометрия. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 206 с.

468. Перельман Я. И. Занимательная математика. Л.: Время, 1927. 98 с.

469. Перельман Я. И. Фокусы и развлечения. 3-е изд. М.: Детгиз, 1935. 171 с.

470. Петер Р. Игра с бесконечностью / перевод с венгерского В. М. Боцу, А. Я. Маргулиса, А. Ш. Мейлихзона. М.: Просвещение, 1967. 272 с.

471. Платон. Собрание сочинений в 3 т. (в 4 кн.) (Серия «Философское наследие»). Т. 1. М.: Мысль, 1968. 624 с.

472. Платон. Собрание сочинений: в 3 т. (в 4 кн.) (Серия «Философское наследие»). Т. 2. М.: Мысль, 1970. 611 с.

473. Поварнин С. И. Введение в логику. Пг.: Наука и школа, 1921. 70 с.

474. Поварнин С. И. Искусство спора. О теории и практике спора. Пг.: Культурно-просветительное кооперативное товарищество «Начатки знаний», 1923. 128 с.

475. Поварнин С. И. Как читать книги. Л.: Изд-во Ленинградского государственного университета, 1960. 88 с.

476. Поварнин С. И. Логика: общее учение о доказательстве. Пг.: Тип. Акц. Общ. Типографского Дела, 1916. 210 с.

477. Пойа Д. Как решать задачу: пособие для учителя / пер. с англ. В. Г. Звонаревой и Д. Н. Белла; под ред. Ю. М. Гайдука. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1959. 208 с.

478. Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения / пер. с англ.; под ред. С. А. Яновской. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1957. 536 с.

479. Пойа Дж. Математическое открытие / пер. с англ. В. Бермана. М.: Наука, 1970. 456 с.

480. Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа (в 2-х частях). М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.

481. Попов П. С. История логики Нового времени. М.: Издательство Московского университета, 1960. 254 с.

482. Попов П. С., Стяжкин Н. И. Развитие логических идей от Античности до эпохи Возрождения. М.: Издательство Московского университета, 1974. 223 с.

483. Поспелов Д. А., Пушкин В. Н. Мышление и автоматы. М.: Советское радио, 1972. 226 с.

484. Постников М. М. Магические квадраты. М.: Наука, 1964. 84 с.

485. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. 512 с.

486. Преподавание математики: пособие для учителей / Ж. Пиаже, Э. Бет, Ж. Дьедонне, А. Лихнерович, Г. Шоке, К. Гаттеньо; перевод с французского А. И. Фетисова. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1960. 161 с.

487. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1967. 496 с.

488. Психологические измерения: сборник / пер. с англ. под ред. Л. Д. Мешалкина. М.: Мир, 1967. 196 с.

489. Пуанкаре А. Избранные труды. Том 1. М.: Наука, 1971. 772 с.

490. Пуанкаре А. Избранные труды. Том 2. М.: Наука, 1972. 358 с.

491. Пуанкаре А. Избранные труды. Том 3. М.: Наука, 1974. 772 с.

492. Пуанкаре А. Наука и гипотеза / перевод с французского А. Г. Бачинского, Н. М. Соловьёва, Р. М. Соловьёва;

предисловие Н. А. Умова. М.: Т-во тип. А. И. Мамонтова, 1904. 273 с.

493. Пуанкаре А. Наука и методъ / переводъ съ французскаго И. К. Брусиловскаго; подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана. Одесса: Mathesis, 1910. 384 с.

494. Пуанкаре А. Последние мысли / пер. с франц. А. И. Стожарова; под ред. [и с предисл.] А. П. Афанасьева. Пг.: Научное книгоизд-во, 1923. 134 с.

495. Пуанкаре А. Ценность науки / пер. с франц. под ред. А. Г. Бачинского, Н. М. Соловьёва. М.: Творческая мысль, 1906. 195 с.

496. Пустыльник Е. И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М.: Наука, 1968. 288 с.

497. Радемахер Г., Тёплиц О. Числа и фигуры. Опыты математического мышления / пер. с нем. В. И. Контова; под редакцией И. М. Яглома. 2-ое издание. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 264 с. (Серия «Библиотека математического кружка»).

498. Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика. М.: Мир, 1965. 154 с.

499. Ракитов А. И. Курс лекций по логике науки. М.: Высшая школа, 1971. 176 с.

500. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики / пер. с англ. М.: Наука, 1972. 592 с.

501. Рачинский С. А. (сост.) 1001 задача для умственного счёта: пособие для учителей сельских школ. СПб.: Синодальная типография, 1899. 88 с.

502. Рвачёв Л. А. Математика и семантика. Киев: Наукова думка, 1966. 81 с.

503. Реньи А. Диалоги о математике. М.: Мир, 1969. 98 с.

504. Реньи А. Письма о вероятности / пер. с венг. Д. Сааса и А. Крамли; под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Мир, 1970. 93 с.

505. Риман Б. Сочинения. М.: Гостехиздат, 1948. 543 с.

506. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 288 с.

507. Розенберг В. Я., Прохоров А. И. Что такое теория массового обслуживания. М.: Советское радио, 1962. 254 с.

508. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Омар Хайям. М.: Наука, 1965. 192 с.

509. Романовский В. И. Избранные труды. Том 2. Теория вероятностей, статистика и анализ. Ташкент: Наука, 1964. 392 с.

510. Романовский В. И. Основные задачи теории ошибок. 1947. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 116 с.

511. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1966. 320 с.

512. Румшиский Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента. М.: Наука, Государственное издательство физико-математической литературы, 1971. 192 с.

513. Рурк К., Сандерсон Б. Введение в кусочно линейную топологию. М.: Мир, 1974. 213 с.

514. Рыбников К. А. История математики. Т. 1. М.: Изд-во МГУ, 1960. 190 с.
515. Рыбников К. А. История математики. Т. 2. М.: Изд-во МГУ, 1963. 336 с.
516. Сакс С. Теория интеграла / пер. И. С. Березина, Б. М. Будака, Л. А. Гусарова. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1949. 494 с.
517. Сборник задач московских математических олимпиад / сост. А. А. Леман; ред. В. Г. Болтянский. М.: Просвещение, 1965. 384 с.
518. Серебрянников О. Ф. Эвристические принципы и логические исчисления. М.: Наука, 1970. 283 с.
519. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. М.: Просвещение, 1968. 168 с.

520. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах / перевод с польского И. Г. Мельникова. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 88 с.
521. Серпинский В. О теории множеств / перевод с польского З. З. Рачинского. М.: Просвещение, 1966. 62 с.
522. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1959. 112 с.
523. Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. М.; Л.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 92 с.
524. Серр Ж.-П. Курс арифметики. М.: Мир, 1972. 183 с.
525. Сикорский Р. Булевы алгебры. М.: Мир, 1969. 376 с.

526. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. М.: Наука, 1970. 148 с.

527. Смирнов В. И. Курс высшей математики: в 5 т. М.: Наука, 1961–1969.

528. Смолянский М. Л. Таблицы неопределённых интегралов. 2-е изд., испр. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 112 с.

529. Соболев В. И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. М.: Наука, 1968. 288 с.

530. Соминский И. С. Метод математической индукции. М.: Наука, 1965. 58 с. Серия: Популярные лекции по математике.

531. Соминский И. С., Головина Л. И., Яглом И. М. О математической индукции. М.: Наука, 1967. 144 с.
532. Стеклов В. А. Математика и её значение для человечества. Берлин: ГИ РСФСР, 1923. 137 с.
533. Стилтьес Т. И. Исследования о непрерывных дробях. Харьков: Научно-техническое издательство Украины, 1936. 160 с.
534. Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. Геометрия отображений отрезков, кривых, окружностей и кругов. М.: Мир, 1967. 224 с.
535. Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968. 231 с.
536. Столяр А. А. Как мы рассуждаем? Минск: Нар. асвета, 1968. 112 с.

537. Столяр А. А. Логические проблемы преподавания математики. Минск: Вышэйшая школа, 1965. 254 с.
538. Столяр А. А. Логическое введение в математику. Минск: Вышэйшая школа, 1971. 224 с.
539. Стяжкин Н. И. Формирование математической логики. М.: Наука, 1967. 508 с.
540. Таванец П. В. (ред.). Проблемы логики. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1963. 152 с.
541. Таванец П. В. (ред.). Философские вопросы современной формальной логики. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1962. 365 с.
542. Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 327 с.

543. Тейл Г. Эконометрические прогнозы и принятие решений. М.: Статистика, 1971. 488 с.

544. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 624 с.

545. Торндайк Э. Л. Вопросы преподавания алгебры (Психология алгебры) / пер. с англ. А. С. Долговой; под ред. И. К. Андронова, Д. Л. Волковского. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1934. 192 с.

546. Торндайк Э. Л. Новые методы преподавания арифметики / пер. с англ. А. С. Долговой; под ред. и с предисл. Д. Л. Волковского. М.: Работник просвещения, 1930. 296 с.

547. Торндайк Э. Л. Принципы обучения, основанные на психологии / пер. с англ. Е. А. Герье; вступит. ст. Л. С. Выготского. Изд. 3-е. М.: Работник просвещения, 1930. 230 с.

548. Торндайк Э. Л. Психология арифметики / пер. с англ. А. С. Долговой; под ред. Д. Л. Волковского. М.; Л.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1932. 302 с.

549. Трахтенброт Б. А. Алгоритмы и машинное решение задач. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. 96 с.

550. Троицкий М. М. Учебник логики с подробными указаниями на историю и современное состояние этой

науки в России и в других странах. Кн. 1. Изд. 2-е. М.: тип. Э. Лисснера и Ю. Романа, 1886. 247 с.

551. Троицкий М. М. Учебник логики с подробными указаниями на историю и современное состояние этой науки в России и в других странах. Кн. 2. Логика начал. М.: тип. А. А. Гатцука, 1886. 253 с.

552. Троицкий М. М. Учебник логики с подробными указаниями на историю и современное состояние этой науки в России и в других странах. Кн. 3, вып. 1. Логика геометрии и наук о духе. М.: тип. А. А. Гатцука, 1888. 148 с.

553. Троицкий М. М. Элементы логики: руководство к логике, составленное для средних учебных заведений. М.: Издание книжного магазина В. Думнова, 1887. 152 с.

554. Тромгольтъ С. Игры со спичками. Задачи и развлеченія / переводъ съ нѣмецкаго. 2-е изданіе. Одесса: Mathesis, 1912. 146 с.
555. Трост Э. Простые чи́сла. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 135 с.
556. Тростников В. Н. Человек и информация. М.: Наука, 1970. 187 с.
557. Тьюринг А. М. Может ли машина мыслить / перевод с англ. Ю. А. Данилова. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 67 с.
558. Уёмов А. И. Аналогия в практике научного исследования. М.: Наука, 1970. 266 с.

559. Уёмов А. И. Задачи и упражнения по логике. М.: Высшая школа, 1961. 355 с.

560. Уёмов А. И. Логические основы метода моделирования. М.: Мысль, 1971. 311 с.

561. Уёмов А. И. Логические ошибки: как они мешают правильно мыслить. М.: Государственное издательство политической литературы, 1958. 120 с.

562. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967. 632 с.

563. Уитни Х. Геометрическая теория интегрирования / перевод с английского И. А. Вайнштейна; под редакцией В. Г. Болтянского. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1960. 534 с.

564. Уиттекер Э., Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений / перевод под редакцией члена-корреспондента Академии Наук СССР проф. Н. М. Гюнтера. 2-е изд. М.: ОНТИ, 1935. 368 с.

565. Уиттекер Э. Т. Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Часть 1. Основные операции анализа. 2-е изд. / пер. с англ. под ред. Ф. В. Широкова. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 344 с.

566. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Часть 2. Трансцендентные функции / пер. с англ. под ред. Ф. В. Широкова. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 516 с.

567. Улам С. Нерешённые математические задачи. М.: Наука, 1964. 168 с.
568. Урманцев Ю. А. Симметрия природы и природа симметрии. М.: Мысль, 1974. 229 с.
569. Урсул А. Д. Информация и мышление. М.: Знание, 1970. 50 с.
570. Урсул А. Д. Информация. Методологические аспекты. М.: Наука, 1971. 293 с.
571. Урсул А. Д. Отражение и информация. М.: Мысль, 1973. 231 с.
572. Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. Том 1 / редакция, примечания и вступительная статья П. С. Александрова. М.; Л.:

Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. 512 с.

573. Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. Том 2 / редакция, примечания и вступительная статья П. С. Александрова. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1951. 481 с.

574. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. М.: Наука, 1966. 36 с.

575. Уэвелл У. История индуктивных наук от древнейшего и до настоящего времени: в 3 т. СПб.: Русская книжная торговля, 1867–1869.

576. Фаермарк Д. С. Задача пришла с картины. М.: Наука, 1974. 160 с.

577. Файнстейн А. Основы теории информации. М.: Мир, 1960. 138 с.
578. Фейс Р. Модальная логика. М.: Наука. 1974. 520 с. (Математическая логика и основания математики).
579. Феликс Л. Элементарная математика в современном изложении. М.: Просвещение, 1967. 488 с.
580. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1. М.: Мир, 1964. 500 с.
581. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. М.: Мир, 1967. 752 с.
582. Феферман С. Числовые системы. Основания алгебры и анализа: пер. с англ. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. 440 с.

583. Философская энциклопедия: в 5 т. / глав. ред. академик Ф. В. Константинов. М.: Советская энциклопедия, 1960–1970.

584. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 томах. 7-е изд. Т. 1. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. 607 с.

585. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 томах. 3-е изд. Т. 2. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. 664 с.

586. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 томах. 5-е изд. Т. 3. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. 656 с.

587. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 1. М.: Наука, 1968. 440 с.

588. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 2. М.: Наука, 1968. 463 с.

589. Фишер Р. А. Статистические методы для исследователей. М.: Госстатиздат, 1958. 267 с.

590. Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика: пер. с фр. М.: Мир, 1966. 271 с.

591. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений / пер. с англ. В. П. Ильина и Ю. И. Кузнецова. М.: Мир, 1969. 167 с.

592. Фрейденталь Х. Язык логики. М.: Наука, 1969. 136 с.

593. Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М.: Мир, 1966. 555 с.

594. Фридман А. А. Мир как пространство и время. М.: Наука, 1965. 112 с.

595. Халмош П. Теория меры / перевод с английского Д. А. Василькова; под ред. С. В. Фомина. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1953. 282 с.
596. Хао В., Мак-Нотон Р. Аксиоматические системы теории множеств / пер. с франц. И. Б. Погребысского; под ред. Л. А. Калужнина. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 55 с. (Б-ка сборника «Математика»).
597. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. 301 с.
598. Харди Г. Курс чистой математики / пер. с англ. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1949. 512 с.
599. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1951. 504 с.

600. Харди Г. Г., Литлвуд Дж. И., Пойа Д. Неравенства. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 456 с.

601. Хаусдорф Ф. Теория множеств / перевод с немецкого Н. Б. Веденисова; под редакцией и с дополнениями проф. П. С. Александрова и проф. А. Н. Колмогорова. М.; Л.: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, 1937. 306 с.

602. Хемминг Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 400 с.

603. Хинчин А. Я. Восемь лекций по математическому анализу. 3-е изд. М.; Л.: Государственное издательство технико-технической литературы, 1948. 260 с.

604. Хинчин А. Я. Краткий курс математического анализа. 3-е изд. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. 628 с.

605. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1955. 124 с.

606. Хинчин А. Я. Основные законы теории вероятностей. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1932. 84 с.

607. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 236 с.

608. Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 72 с.
609. Хинчин А. Я. Учение Мизеса о вероятностях и принципы физической статистики // Успехи физических наук. 1929. 9, вып. 2. С. 141–166.
610. Хинчин А. Я. Цепные др<u>о</u>би. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 112 с.
611. Хованский А. Н. Приложения цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого анализа. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 204 с.
612. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970. 424 с.

613. Холл М. Комбинаторный анализ. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 99 с.

614. Хургин Я. И. Ну и что? М.: Молодая гвардия, 1970. 320 с.

615. Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г. Основы теории категорий. М.: Наука,1974. 256 с.

616. Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1932. 232 с.

617. Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках. М.; Л.: ОНТИ. Редакция технико-теоретической литературы, 1938. 470 с.

618. Цетлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука, 1969. 316 с.
619. Циолковский К. Э. Избранные труды / ред.-сост. Б. Н. Воробьёв, В. Н. Сокольский; общая ред. акад. А. А. Благонравова. М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1962. 535 с. (Классики науки / Акад. наук СССР).
620. Цянь-Сюэ-Сэнь. Техническая кибернетика. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1956. 462 с.
621. Чеботарёв А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. М.: Геодезиздат, 1958. 606 с.

622. Чебышёв П. Л. Избранные труды / ред. И. М. Виноградов. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1955. 929 с.

623. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Часть 1. Одесса: Mathesis, 1913. 646 с.

624. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Часть 2. Одесса: Mathesis, 1914. 486 с.

625. Челпанов Г. И. Учебник логики (для гимназий и самообразования). Изд. 9-е. М.; Пг.: Т-во В. В. Думнов – насл. бр. Салаевых, 1917. 204 с.

626. Ченцов Н. Н., Шклярский Д. О., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М.: Наука, 1970. 336 с.

627. Черри К. Человек и информация. М.: Связь, 1972. 368 с.

628. Чефранов Г. В. Бесконечность и интеллект. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 1971. 176 с.

629. Чёрч А. Введение в математическую логику / пер. с английского В. С. Черняевского; под редакцией В. А. Успенского. Том 1. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1960. 484 с.

630. Чистяков В. Д. Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами и подробными решениями. Минск: Изд-во Мин. высшего, средн. спец. и проф. обр. БССР, 1962. 204 с.

631. Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1963. 95 с.

632. Шамбадаль П. Развитие и приложения понятия энтропии / перевод с французского. М.: Наука, 1967. 280 с.

633. Шапиро С. И. От алгоритмов – к суждениям. Эксперименты по обучению элементам математического мышления. М.: Советское радио, 1973. 288 с.

634. Шаскольская М. П., Эльцин И. А. Сборник избранных задач по физике. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959. 208 с.

635. Швец М. Н. О приближённых числах. Киев: Радянська школа, 1968. 127 с.

636. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента / пер. с англ. Е. Г. Коваленко; под ред. Н. П. Бусленко. М.: Мир, 1972. 382 с.
637. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 832 с.
638. Шеннон К. Э., Маккарти Дж. (ред.) Автоматы. Сборник статей. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1956. 402 с.
639. Шеръ М. О безконечности въ геометріи. Теорема о параллельныхъ. М.: Типографія А. А. Стрельцова, 1915. 24 с.
640. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.

641. Шилов Г. Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М.: Наука, 1969. 429 с.
642. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. 2-е изд. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 436 с.
643. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Части 1–2. М.: Наука, 1970. 528 с.
644. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Часть 3. М.: Наука, 1970. 352 с.
645. Шилов Г. Е. Простая гамма. Устройство музыкальной шкалы. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 20 с.
646. Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная (общая теория). М.: Наука, Главная редакция

физико-математической литературы, 1967. 220 с. Дарственная надпись: «Гелимсону Льву за успехи на IX Республиканской Олимпиаде юных математиков. Председатель Жюри профессор Николай Алексеевич Давыдов. Ужгород, 30 марта 1969 года.» Занято третье место.

647. Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. М.: Наука, 1967. 192 с.

648. Шиханович Ю. А. Введение в современную математику. Начальные понятия. М.: Наука, 1965. 376 с.

649. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 1. Арифметика и алгебра. М.: Наука, 1965. 455 с.

650. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 2. Геометрия (планиметрия). М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. 380 с.

651. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 3. Геометрия (стереометрия). М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 267 с.

652. Шмальгаузен И. И. Кибернетические вопросы биологии. Новосибирск: Наука, 1968. 224 с.

653. Шнирельман Л. Г. Простые числа. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1940. 60 с.
654. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971. 254 с.
655. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 150 с.
656. Шубертъ Г. Математическія развлеченія и игры. Одесса: Mathesis, 1911. 388 с.
657. Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве. М.: Наука, 1972. 349 с.

658. Шустеф Ф. М., Фельдман А. М., Гуревич В. Ю. Сборник олимпиадных задач по математике. Минск, Учпедгиз БССР, 1962. 84 с.

659. Щиголев Б. М. Математическая обработка наблюдений. М.: Наука, 1969. 344 с.

660. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. 1. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 315 с.

661. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. 2. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 391 с.

662. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М.; Л.: Геодезиздат, 1949.. 580 с.

663. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1956. 415 с.

664. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1957. 368 с.

665. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 3. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 447 с.

666. Эйлер Л. Письма к учёным. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1963. 400 с.

667. Эмпахер А. Сила аналогий / пер. с польск. Ф. Г. Хацянова; под ред. А. В. Шилейко. М.: Мир, 1965. 155 с.

668. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 128 с.

669. Эшби У. Р. Введение в кибернетику. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1959. 432 с.

670. Эшби У. Р. Конструкция мозга. Происхождение адаптивного поведения. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1962. 399 с.

671. Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. Издание третье, переработанное и дополненное. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1973. 512 с.

672. Яглом И. М. Необыкновенная алгебра. М.: Наука, 1968. 72 с.

673. Яглом И. М., Яглом А. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. Задачи по комбинаторике и

теории вероятностей. Задачи из разных областей математики. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 544 с.

674. Яновская С. А. К теории египетских дробей // Труды Института истории естествознания. 1947. 1. С. 269–282.

675. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений / пер. с англ. М.: Мир, 1968. 458 с.

676. Arnauld A., Nicole P. La Logique Ou L′art De Penser: Contenant Outre Les Regles Communes, Plusieurs Observations Nouvelles, Propres À Former Le Jugement / Edition critique par P. Clair et F. Girbal. Paris: Presses Universitaires de France, 1965. 429 pp.

677. Cantor G. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Berlin: Springer-Verlag, 1932. 489 S.

678. Cotes R. Aestimatio errorum in mixta mathesi, per variationes partim trianguli plani et sphaerici. Lemgoviae: Meyer, 1768. 224 pp.

679. Gauß C. F. Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium. Hamburgi: Sumtibus F. Perthes et I. H. Besser, 1809. 247 pp.

680. Hadamard J. S. An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field. Princeton: Princeton University Press, 1945. 145 pp.

681. Legendre A.-M. Appendice sur la méthode des moindres quarrés // Annexe à l′ouvrage Nouvelles méthodes pour la

détermination des orbites des comètes. Paris: Firmin-Didot, 1805. P. 72–80.

682. Leonardo da Pisa alias Fibonacci. Liber Abaci. 1202, 1228.

683. Pascal B. Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la mesme matière (Treatise on the arithmetic triangle). Paris: Guillaume Desprez, 1665. 113 pp. (Reprinted in: Pascal B. Oeuvres / edited by L. Brunschvicg and P. Boutroux. Vol. III. Paris: Hachette, 1908. P. 433–598).

684. Poincaré H. L′invention mathématique // Enseignement mathématique. 1908. Vol. 10. P. 357–371.

685. Robinson A. Non-standard analysis. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1966. 293 pp.

686. **Vasiliev N. A. Imaginary (non-aristotelian) logic // Estratto dagli Atti dei V Congresso internationale di Filosofìa, 5–9 maggio, 1924, Napoli (Naples), 1925. P. 107–109.**

687. Wittgenstein L. Logisch-philosophische Abhandlung / W. Ostwald (Hrsg.) // Annalen der Naturphilosophie. 1921. Band 14. S. 185–262.

688. Wittgenstein L. Remarks on the foundations of mathematics / edited by G. H. Von Wright, R. Rhees and G. E. M. Anscombe; translated by G. E. M. Anscombe. Oxford: Basil Blackwell, 1956. 400 pp.

689. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. T. 8, № 3. P. 338–353.

CONTRIBUTOR'S PROFILE & ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Name	**Gelimson Lev Grigorevic, literary and artistic pseudonym Leo Himmelsohn**
Ф.И.О. (полностью)	**Гелимсон Лев Григорьевич, литературно-художественный псевдоним Лео Гимельзон**
Degree Current position	**Ph. D. & Dr. Sc. in Engineering in the section "Physical and Mathematical Sciences" by the Highest Attestation Commission Classifier Director Director, Producer, Literary and Artistic Manager**
Учёная степень Должность	**доктор технических наук в разделе «Физико-математические науки» по Классификатору Высшей Аттестационной Комиссии директор директор, продюсер и литературно-художественный руководитель**

Institutional affiliation	**Academic Institute for Creating Universal Sciences, Munich, Germany Multilingual Literary and Musical Theater, Munich, Germany**
Место работы	**Академический институт создания всеобщих наук, Многоязычный литературно-музыкальный театр, Мюнхен, Германия**
e-mail, эл. почта	**Leohi@mail.ru**
Postal address Почтовый адрес	**Ph. D. & Dr. Sc. Lev Gelimson, Westendstrasse 68, D-80339 Munich, Germany**
Science Index (SPIN)	**8046-6818**
Scopus ID	**6505889792**
Researcher ID	**R-5007-2016**
ORCID ID	**0000-0003-0627-84**