ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, УТОЧНЕНИЕ, УГЛУБЛЕНИЕ, ОБОБЩЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАРАЛЬДА БОРА

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Gelimson

Академический институт создания всеобщих наук (Мюнхен)

Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум», 1971, 2020

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, УТОЧНЕНИЕ, УГЛУБЛЕНИЕ, ОБОБЩЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАРАЛЬДА БОРА

Посвящается памяти основных преподавателей высшей математики:

профессора, кандидата физико-математических наук Иосифа Яковлевича Черткова;

заведующего кафедрой, доцента, кандидата физико-математических наук Виталия Фёдоровича Власенко;

ректора, заведующего кафедрой, профессора, доктора физико-математических наук Фёдора Николаевича Лимана.

Гелимсон Лев Григорьевич,

литературно-художественный псевдоним Лео Гимельзон, доктор технических наук в разделе «Физико-математические науки» по Классификатору Высшей Аттестационной Комиссии,

директор, Академический институт создания всеобщих наук, Мюнхен, Германия,

русский, украинский, английский и немецкий поэт, директор, продюсер и литературно-художественный руководитель, Многоязычный литературно-музыкальный театр, Мюнхен, Германия, E-mail: Leohi@mail.ru

Web: http://kekmir.ru/members/person_6149.html

Аннотация. Впервые дано именно элементарное доказательство весьма частной теоремы Харальда Бора об ограниченности функции, непрерывной и имеющей нулевое интегральное среднее на отрезке, равные значения на его концах и ограниченную производную всюду внутри него. Всесторонне исследованы и использованы разнообразные возможности уточнения, углубления, обобщения и развития этой теоремы, её условий и заключения ещё 14 теоремами.

Ph. D. & Dr. Sc. LEV GRIGOREVIC GELIMSON: ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, УТОЧНЕНИЕ, УГЛУБЛЕНИЕ, ОБОБЩЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАРАЛЬДА БОРА 5/511

Ключевые слова: **Харальд Бор, Олимпийские игры 1908 года, Нильс Бор, непрерывная функция, интегральное среднее, ограниченная производная, Сергей Натанович Бернштейн, Виталий Фёдорович Власенко, Иосиф Яковлевич Чертков, Фёдор Николаевич Лиман, теорема Лагранжа о среднем значении, Лев Григорьевич Гелимсон, Лео Гимельзон, Академический институт создания всеобщих наук, Мюнхен, Германия. УДК 517**

Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум», 1971, 2020

Ph. D. & Dr. Sc. LEV GRIGOREVIC GELIMSON: ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, УТОЧНЕНИЕ, УГЛУБЛЕНИЕ, ОБОБЩЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАРАЛЬДА БОРА 6/511

ELEMENTARY PROOF, REFINEMENT, DEEPENING, GENERALIZATION AND DEVELOPMENT OF ONE THEOREM BY HARALD BOHR

Dedicated to the memory of the main teachers of higher mathematics:

professor, Ph. D. in Physics and Mathematics Iosif Yakovlevich Chertkov;

head of the department, associate professor, Ph. D. in Physics and Mathematics Vitaly Fedorovich Vlasenko;

rector, head of the department, professor, Ph. D. & Dr. Sc. in Physics and Mathematics Fedor Nikolaevich Liman.

Gelimson Lev Grigorevic,

literary and artistic pseudonym Leo Himmelsohn,
Ph. D. & Dr. Sc. in Engineering
in the section "Physical and Mathematical Sciences"
by the Highest Attestation Commission Classifier,
Director, Academic Institute for Creating Universal Sciences,
Munich, Germany,
Russian, Ukrainian, English and German poet,
Director, Producer, Literary and Artistic Manager,
Multilingual Literary and Musical Theater, Munich, Germany
E-mail: Leohi@mail.ru
Web: http://kekmir.ru/members/person_6149.html

Abstract. For the first time, an elementary proof of a very particular theorem by Harald Bohr on the boundedness of a function that is continuous and has a zero integral mean on a closed interval, equal values at its ends and a bounded derivative everywhere inside it have been given. All various possibilities of refinement, deepening, generalization and development of this theorem, its conditions and conclusion have been comprehensively investigated and used by 14 further theorems.

Ph. D. & Dr. Sc. LEV GRIGOREVIC GELIMSON: ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, УТОЧНЕНИЕ, УГЛУБЛЕНИЕ, ОБОБЩЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАРАЛЬДА БОРА 9/511

Keywords: Harald Bohr, Olympic Games 1908, Niels Bohr, continuous function, integral mean, bounded derivative, Sergei Natanovich Bernstein, Vitaly Fedorovich Vlasenko, Joseph Yakovlevich Chertkov, Fedor Nikolaevich Liman, Lagrange mean value theorem, Lev Grigorevic Gelimson, Leo Himmelsohn, Academic Institute for Creating Universal Sciences, Munich, Germany.

UDC 517

Publishing House of the All-World Academy of Sciences "Collegium", Munich, 1971, 2020

ПРЕДИСЛОВИЕ

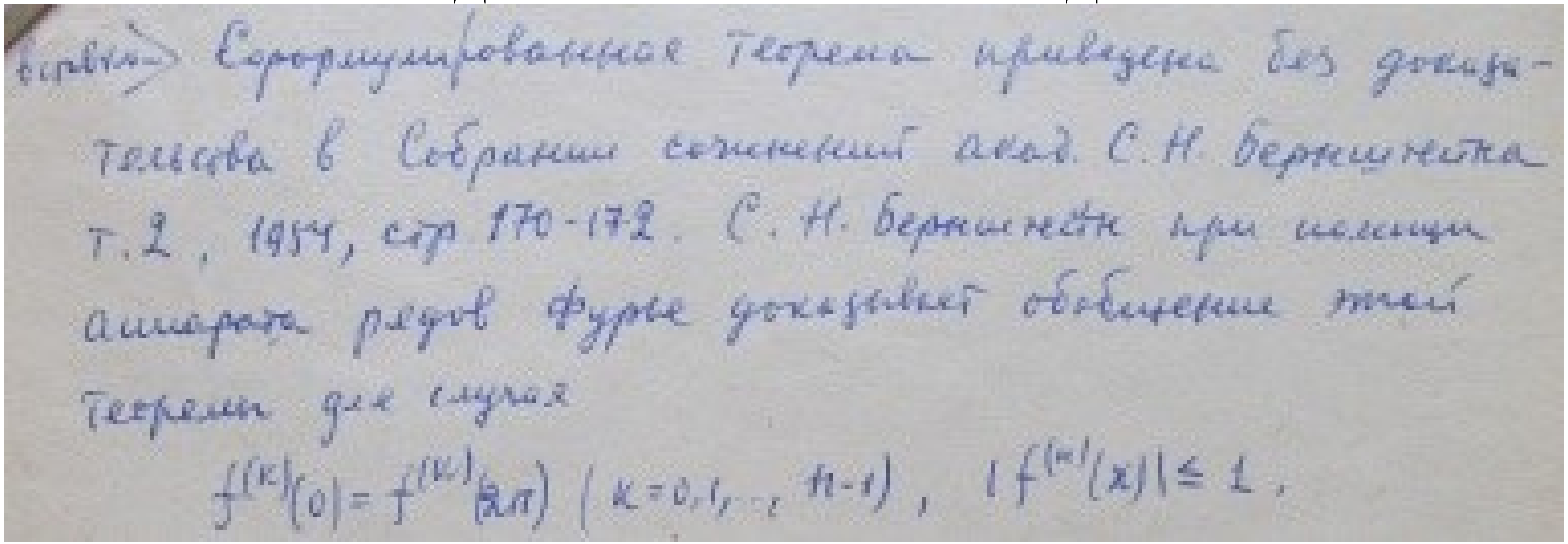
Это научная монография, излагающая полностью самостоятельно выполненную собственную студенческую научную работу 1971 года в 19-летнем возрасте после выигрыша областных олимпиад по всем предметам и третьих мест на Всеукраинской и Всесоюзной олимпиадах по математике и окончания физико-математического специального класса будущих гимназии и лицея с золотой медалью, одной из двух в областном центре, в 1969 году.

Научный руководитель, кандидат физико-математических наук, доцент Виталий Фёдорович Власенко предложил рассмотреть одну теорему Харальда Бора:

«Сформулированная теорема приведена без доказательства в Собрании сочинений академика Сергея Натановича Бернштейна, том 2, 1954, с. 170–172.

Сергей Натанович Бернштейн при помощи аппарата рядов Фурье доказывает обобщение такой теоремы для случая

$$f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi)\ (k = 0, 1, 2, \dots , n - 1),\ |f^{(n)}(x)| \le 1.»$$

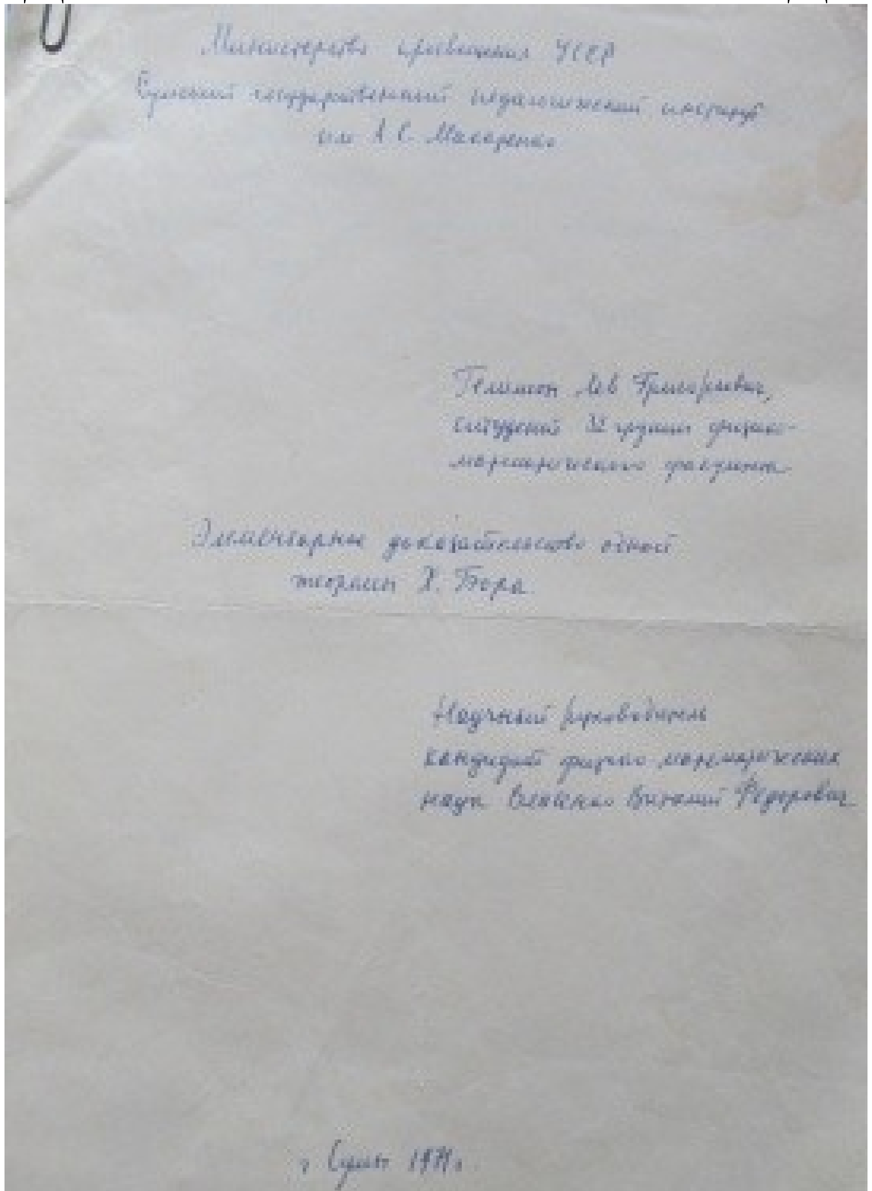


вставка Сформулированная теорема приведена без доказательства в Собрании сочинений акад. С.Н. Бернштейна т. 2, 1954, стр. 170-172. С.Н. Бернштейн при помощи аппарата рядов Фурье доказывает обобщение этой теоремы для случая

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(2\pi)\ (k=0,1,\dots,n-1),\quad |f^{(n)}(x)|\le 1,$$

Кроме того, научный руководитель, кандидат физико-математических наук, доцент Виталий Фёдорович Власенко собственноручно составил титульный лист этой студенческой научной работы 1971 года.

Ph. D. & Dr. Sc. LEV GRIGOREVIC GELIMSON: ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, УТОЧНЕНИЕ, УГЛУБЛЕНИЕ, ОБОБЩЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАРАЛЬДА БОРА 13/511



Министерство просвещения УССР
Сумской государственный педагогический институт
им. А. С. Макаренко

Гелимсон Лев Григорьевич,
студент 32 группы физико-
математического факультета

Элементарное доказательство одной
теоремы Х. Бора

Научный руководитель
кандидат физико-математических
наук Вельмин Виталий Федорович

г. Сумы 1971 г.

Во всём остальном настоящая научная работа выполнена автором, тогда 19-летним студентом, полностью самостоятельно.

Справка Википедии:

«Харальд Август Бор (дат. Harald August Bohr; 22 апреля 1887, Копенгаген – 22 января 1951) – датский математик и футболист. Серебряный призёр Олимпийских игр 1908 года. Известен своими работами в области теории функций. Брат знаменитого физика Нильса Бора.»

Целью настоящей научной работы является именно элементарного доказательства, уточнения, углубления и развития весьма частной теоремы Харальда Бора об ограниченности функции, непрерывной и имеющей нулевое интегральное среднее на отрезке, равные значения на его концах и

ограниченную производную всюду внутри него.

ТЕОРЕМА ХАРАЛЬДА БОРА

Теорема 1 (Харальд Бор).

Пусть непрерывная на отрезке [0, 2π] действительная функция f(x) удовлетворяет совокупности следующих трёх условий:

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и

по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

2. Значения функции f(x) в начале и в конце отрезка [0, 2π] равны между собой:

$$f(0) = f(2\pi).$$

3. Интеграл функции f(x) на отрезке [0, 2π] равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

Тогда на указанном отрезке [0, 2π] абсолютная величина значений функции f(x) строго меньше π/2, то есть имеет место неравенство:

$$|f(x)| < \pi/2 \ (0 \le x \le 2\pi).$$

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ХАРАЛЬДА БОРА

Именно элементарное доказательство впервые дано автором и основано на методе от противоречащего.

Допустим противоречащее. Тогда существующий и принимаемый ввиду непрерывности на отрезке функции f(x) максимум её абсолютной величины

$$M = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| \geq \pi/2.$$

Поэтому существует хотя бы одно такое

$$x_0 \in [0, 2\pi],$$

что или

$$f(x_0) = M,$$

или

$$f(x_0) = - M.$$

Ограничимся первым случаем

$$f(x_0) = M,$$

поскольку второй случай

$$f(x_0) = - M$$

сводится к первому случаю тривиальной подстановкой

$$h(x) = - f(x).$$

Обозначим

$$a = f(0) = f(2\pi).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \; [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции f(x) на отрезке $[0, x_0]$, получаем

$$M - a = |M - a| = |f(x_0) - f(0)| = |f'(c)||x_0 - 0| =$$
$$|f'(c)|x_0 \leq x_0 \; [c \in (0, x_0),\ 0 < x_0],$$

или

(1)

$$M - a \leq x_0.$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \ [c \in (x', x), x' < x]$$

к функции f(x) на отрезке $[x_0, 2\pi]$, получаем

$$M - a = |a - M| = |f(2\pi) - f(x_0)| = |f'(c)||2\pi - x_0| =$$
$$|f'(c)|(2\pi - x_0) \leq 2\pi - x_0 \ [c \in (x_0, 2\pi), x_0 < 2\pi],$$

или

$$M - a \leq 2\pi - x_0. \quad (2)$$

Кроме того,

(3)

$$0 \le x_0 \le 2\pi.$$

Обозначим

$$x_1 = (a + x_0 - M)/2,$$

$$x_2 = (M + x_0 + 2\pi - a)/2.$$

Пользуясь неравенствами (1), (2) и (3), легко установить, что

$$0 \le x_1 \le x_0 \le x_2 \le 2\pi.$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x')\ [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[0, x]$ $(0 \le x \le x_1)$, ввиду

$$f'(c) \geq -1$$

и

$$x \geq 0$$

получаем

$$f(x) - a = f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) = f'(c)x \geq -x$$

$$[c \in (0, x),\ 0 < x],$$

или

$$f(x) \geq -x + a\ (0 \leq x \leq x_1).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \ [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[x, x_0]$ $(x_1 \leq x \leq x_0)$, ввиду

$$f'(c) \leq 1$$

и

$$x_0 - x \geq 0$$

получаем

$$M - f(x) = f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x) \leq x_0 - x$$
$$[c \in (x, x_0),\ x < x_0],$$

или

$$f(x) \geq x - x_0 + M \ (x_1 \leq x \leq x_0).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \ [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ $(x_0 \leq x \leq x_2)$, ввиду

$$f'(c) \geq - 1$$

и

$$x - x_0 \geq 0$$

получаем

$$f(x) - M = f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) = f'(c)(x - x_0) \geq x_0 - x \; [c \in (x_0, x),\; x_0 < x],$$

или

$$f(x) \geq - x + x_0 + M \; (x_0 \leq x \leq x_2).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \; [c \in (x', x),\; x' < x]$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[x, 2\pi]$ $(x_2 \leq x \leq 2\pi)$, ввиду

$$f'(c) \leq 1$$

и

$$2\pi - x \geq 0$$

получаем

$$a - f(x) = f(2\pi) - f(x) = f'(c)(2\pi - x) \leq 2\pi - x$$
$$[c \in (0, x),\ 0 < x],$$

или

$$f(x) \geq x - 2\pi + a\ (x_2 \leq x \leq 2\pi).$$

Непосредственно выше мы четырежды применили теорему Лагранжа о среднем

значении к функции f(x) на охватываемых отрезках соответственно

$$[0, x]\ (0 \le x \le x_1),$$

$$[x, x_0]\ (x_1 \le x \le x_0),$$

$$[x_0, x]\ (x_0 \le x \le x_2),$$

$$[x, 2\pi]\ (x_2 \le x \le 2\pi).$$

А теперь рассмотрим совокупность полученных итоговых неравенств для функции f(x) на соответствующих охватывающих отрезках, в совокупности

<u>составляющих</u> отрезок [0, 2π] как его части с общими концами внутри него:

$$f(x) \geq -x + a \; (0 \leq x \leq x_1),$$
$$f(x) \geq x - x_0 + M \; (x_1 \leq x \leq x_0),$$
$$f(x) \geq -x + x_0 + M \; (x_0 \leq x \leq x_2),$$
$$f(x) \geq x - 2\pi + a \; (x_2 \leq x \leq 2\pi).$$

Правые части последних четырёх неравенств определяют на так <u>составленном</u> отрезке [0, 2π] кусочно-линейную функцию, которую обозначим φ(x):

$$\varphi(x) = -x + a \ (0 \leq x \leq x_1),$$

$$\varphi(x) = x - x_0 + M \ (x_1 \leq x \leq x_0),$$

$$\varphi(x) = -x + x_0 + M \ (x_0 \leq x \leq x_2),$$

$$\varphi(x) = x - 2\pi + a \ (x_2 \leq x \leq 2\pi).$$

Совокупность тех же четырёх неравенств доказывает, что на отрезке [0, 2π] выполнено неравенство

(4)

$$f(x) \geq \varphi(x).$$

Докажем правильность именно такого определения функции φ(x), в котором промежуточные точки x_1, x_0, x_2 деления отрезка [0, 2π] включены по два раза каждая, и тем самым докажем непрерывность функции φ(x) ввиду её кусочной линейности и поэтому заведомой непрерывности внутри всех охватывающих отрезков, совместно составляющих отрезок [0, 2π]. Для этого определим и сопоставим соответствующие

односторонние пределы функции φ(x) в указанных промежуточных точках x_1, x_0, x_2 деления отрезка [0, 2π]:

$$\lim_{x\to x(1)-0}\varphi(x) = \lim_{x\to x(1)-0}(- x + a) = - x(1) + a = - x_1 + a = - (a + x_0 - M)/2 + a = (a - x_0 + M)/2;$$

$$\lim_{x\to x(1)+0}\varphi(x) = \lim_{x\to x(1)+0}(x - x_0 + M) = x(1) - x_0 + M = x_1 - x_0 + M = (a + x_0 - M)/2 - x_0 + M = (a - x_0 + M)/2;$$

$$\lim_{x\to x(0)-0}\varphi(x) = \lim_{x\to x(0)-0}(x - x_0 + M) = x(0) - x_0 + M = x_0 - x_0 + M = M;$$

$$\lim_{x\to x(0)+0}\varphi(x) = \lim_{x\to x(0)+0}(- x + x_0 + M) = - x(0) + x_0 + M = - x_0 + x_0 + M = M;$$

$$\lim_{x\to x(2)-0}\varphi(x) = \lim_{x\to x(2)-0}(- x + x_0 + M) = - x(2) + x_0 + M = - x_2 + x_0 + M = - (M + x_0 + 2\pi - a)/2 + x_0 + M = (M + x_0 - 2\pi + a)/2;$$

$$\lim_{x\to x(2)+0}\varphi(x) = \lim_{x\to x(2)+0}(x - 2\pi + a) = x(2) - 2\pi + a = x_2 - 2\pi + a = (M + x_0 + 2\pi - a)/2 - 2\pi + a = (M + x_0 - 2\pi + a)/2.$$

Следовательно, соответствующие односторонние пределы попарно равны между собой:

$$\lim_{x\to x(1)-0}\varphi(x) = (a - x_0 + M)/2 = \lim_{x\to x(1)+0}\varphi(x);$$

$$\lim_{x\to x(0)-0}\varphi(x) = M = \lim_{x\to x(0)+0}\varphi(x);$$

$$\lim_{x\to x(2)-0}\varphi(x) = (M + x_0 - 2\pi + a)/2 = \lim_{x\to x(2)+0}\varphi(x).$$

Значит, функция $\varphi(x)$ непрерывна и даже без учёта непрерывности как кусочно-линейная интегрируема на отрезке $[0, 2\pi]$.

В силу (4)

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx \geq \int_0^{2\pi} \varphi(x)dx = 2\pi a - \pi^2 + (1/2)(M + x_0 - a)(M + 2\pi - x_0 - a).$$

Введём обозначение последней правой части

$$A = 2\pi a - \pi^2 + (1/2)(M + x_0 - a)(M + 2\pi - x_0 - a).$$

Если

$$a > \pi/2,$$

то с учётом неравенств

$$a \leq M$$

и (3) имеет место

$$A = 2\pi a - \pi^2 + (1/2)(M + x_0 - a)(M + 2\pi - x_0 - a) > 2\pi\pi/2 - \pi^2 + (1/2)x_0(2\pi - x_0) \geq 0,$$

то есть в итоге неравенство

$$A > 0.$$

Если

$$a \leq \pi/2,$$

то, учитывая неравенство

(5)

$$M \geq \pi/2$$

по допущению и следующее из (1), (2) и (5) неравенство

$$\pi/2 - a \le x_0 \le 3\pi/2 + a,$$

имеем:

$$A = 2\pi a - \pi^2 + (1/2)(M + x_0 - a)(M + 2\pi - x_0 - a) \ge 2\pi a - \pi^2 + (1/2)(\pi/2 + x_0 - a)(\pi/2 + 2\pi - x_0 - a) = 2\pi a - \pi^2 + (1/2)[(x_0 + a - \pi/2) + (\pi - 2a)][(3\pi/2 + a - x_0) + (\pi - 2a)] = 2\pi a - \pi^2 + (1/2)(x_0 + a - \pi/2)(3\pi/2 + a - x_0) + (1/2)(\pi - 2a)[(x_0 + a -$$

$\pi/2) + (3\pi/2 + a - x_0)] + (1/2)(\pi - 2a)^2 = (1/2)(x_0 + a - \pi/2)(3\pi/2 + a - x_0) + \pi(2a - \pi) + (1/2)(\pi - 2a)(\pi + 2a) + (1/2)(\pi - 2a)^2 = (1/2)(x_0 + a - \pi/2)(3\pi/2 + a - x_0) + (1/2)(\pi - 2a)(- 2\pi + \pi + 2a + \pi - 2a) = (1/2)(x_0 + a - \pi/2)(3\pi/2 + a - x_0) \geq 0.$

Итак, во всех случаях имеет место неравенство

$$\int_0^{2\pi}\varphi(x)dx \geq 0.$$

Если хотя бы в одной точке оправдывается именно строгий смысл неравенства (4), то в силу непрерывности функции f(x) в целой окрестности этой точки имеет место неравенство

$$f(x) > \varphi(x),$$

откуда следует неравенство

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx > 0,$$

что противоречит условию 3.

Остаётся считать функции f(x) и φ(x) тождественно равными между собой на отрезке [0, 2π].

Но, как легко видеть, функция φ(x) не дифференцируема хотя бы в одной внутренней точке отрезка [0, 2π], поскольку односторонние производные в этой точке составляют 1 с одной стороны и -1 с другой стороны.

Этой точкой служит или x_0, если имеет место неравенство

$$0 < x_0 < 2\pi,$$

или π, если максимум абсолютной величины функции $f(x)$ достигается на концах отрезка $[0, 2\pi]$.

Итак, допущение неравенства

$$M \geq \pi/2$$

приведено к противоречию с условием 3, что и доказывает теорему 1.

УТОЧНЕНИЕ, УГЛУБЛЕНИЕ, ОБОБЩЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ТЕОРЕМЫ ХАРАЛЬДА БОРА

Тем самым мы доказали именно строгое неравенство

$$|f(x)| < \pi/2$$

и усилили теорему академика Сергея Натановича Бернштейна, утверждающую лишь, что имеет место нестрогое неравенство

$$|f(x)| \leq \pi/2,$$

то есть не исключающую возможность

$$|f(x)| = \pi/2.$$

В связи с этим возникает вопрос о возможности дальнейшего усиления теоремы 1 в смысле замены π/2 в её заключении строго меньшим числом. Этот вопрос решает отрицательно следующая теорема.

Теорема 2.

Для любого действительного числа

$$M \in [0, \pi/2)$$

(из полуотрезка от включаемого 0 до исключаемого π/2) существует непрерывная на отрезке [0, 2π] функция g(x), удовлетворяющая совокупности условий:

1) в каждой точке интервала (0, 2π) производная g′(x) функции g(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|g'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi);$$

2′) $g^{(n)}(0) = g^{(n)}(2\pi)$ **(n = 0, 1, 2, ...);**

3) интеграл функции g(x) на отрезке [0, 2π] равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} g(x)dx = 0,$$

для которой

$$M' = \max_{x\in[0,2\pi]}|g(x)| > M.$$

Замечание. Очевидно, такая функция удовлетворяет и условию 2, обобщаемому условием 2′, дающим условие 2 в предположении n = 0.

Доказательство.

Пусть M – любое действительное число из полуотрезка от включаемого 0 до исключаемого π/2, то есть имеет место двойное неравенство

$$0 \le M < \pi/2.$$

Выберем произвольное действительное число M′, удовлетворяющее двойному неравенству

(6)

$$\max\{M, \pi/10\} < M' < \pi/2,$$

например полусумму (среднее арифметическое) последних двух границ:

$$M' = \{\max[M, \pi/10] + \pi/2\}/2.$$

Полагая

$$\alpha = (\pi/2 - M')/4,$$

из двойного неравенства (6) получаем систему двух неравенств

(7)

$$\alpha > 0,$$

$$5\alpha < \pi/2,$$

из которой выводим цепь неравенств

$$0 < 3\alpha < 4\alpha < \pi/2 - \alpha < \pi/2.$$

Строим на отрезке $[0, \pi/2]$ функцию

$$\psi(x) = 0 \ (0 \leq x \leq 3\alpha),$$

$$\psi(x) = (1/2)(x - 3\alpha)^2/\alpha \ (3\alpha \leq x \leq 4\alpha),$$

$$\psi(x) = x - 7\alpha/2 \ (4\alpha \leq x \leq \pi/2 - \alpha),$$

$$\psi(x) = M' - (1/2)(\pi/2 - x)^2/\alpha \ (\pi/2 - \alpha \leq x \leq \pi/2).$$

Затем строим на отрезке $[0, \pi]$ следующую функцию:

$$\chi(x) = \psi(x) \ (0 \leq x \leq \pi/2),$$

$$\chi(x) = \psi(\pi - x) \ (\pi/2 \leq x \leq \pi).$$

Представим функцию χ(x) в явном виде:

$$\chi(x) = 0 \ (0 \le x \le 3\alpha),$$

$$\chi(x) = (1/2)(x - 3\alpha)^2/\alpha \ (3\alpha \le x \le 4\alpha),$$

$$\chi(x) = x - 7\alpha/2 \ (4\alpha \le x \le \pi/2 - \alpha),$$

$$\chi(x) = M' - (1/2)(\pi/2 - x)^2/\alpha \ (\pi/2 - \alpha \le x \le \pi/2),$$

$$\chi(x) = M' - (1/2)(x - \pi/2)^2/\alpha \ (\pi/2 \le x \le \pi/2 + \alpha),$$

$$\chi(x) = \pi - x - 7\alpha/2 \ (\pi/2 + \alpha \le x \le \pi - 4\alpha),$$

$$\chi(x) = (1/2)(\pi - x - 3\alpha)^2/\alpha \ (\pi - 4\alpha \le x \le \pi - 3\alpha),$$

$$\chi(x) = 0 \ (\pi - 3\alpha \le x \le \pi).$$

Теперь строим на отрезке $[0, 2\pi]$ следующую функцию:

$$g(x) = \chi(x) \ (0 \le x \le \pi),$$

$$g(x) = - \chi(2\pi - x) \ (\pi \le x \le 2\pi).$$

Представим функцию $g(x)$ в явном виде:

$$g(x) = 0 \ (0 \le x \le 3\alpha),$$

$$g(x) = (1/2)(x - 3\alpha)^2/\alpha \ (3\alpha \le x \le 4\alpha),$$

$$g(x) = x - 7\alpha/2 \ (4\alpha \le x \le \pi/2 - \alpha),$$

$$g(x) = M' - (1/2)(\pi/2 - x)^2/\alpha \ (\pi/2 - \alpha \le x \le \pi/2),$$

$$g(x) = M' - (1/2)(x - \pi/2)^2/\alpha \ (\pi/2 \le x \le \pi/2 + \alpha),$$

$$g(x) = \pi - x - 7\alpha/2 \ (\pi/2 + \alpha \leq x \leq \pi - 4\alpha),$$

$$g(x) = (1/2)(\pi - x - 3\alpha)^2/\alpha \ (\pi - 4\alpha \leq x \leq \pi - 3\alpha),$$

$$g(x) = 0 \ (\pi - 3\alpha \leq x \leq \pi),$$

$$g(x) = 0 \ (\pi \leq x \leq \pi + 3\alpha),$$

$$g(x) = - (1/2)(x - \pi - 3\alpha)^2/\alpha \ (\pi + 3\alpha \leq x \leq \pi + 4\alpha),$$

$$g(x) = - x + \pi + 7\alpha/2 \ (\pi + 4\alpha \leq x \leq 3\pi/2 - \alpha),$$

$$g(x) = - M' + (1/2)(3\pi/2 - x)^2/\alpha \ (3\pi/2 - \alpha \leq x \leq 3\pi/2),$$

$$g(x) = - M' + (1/2)(x - 3\pi/2)^2/\alpha \ (3\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2 + \alpha),$$

$$g(x) = - 2\pi + x + 7\alpha/2 \ (3\pi/2 + \alpha \leq x \leq 2\pi - 4\alpha),$$

$$g(x) = - (1/2)(2\pi - x - 3\alpha)^2/\alpha \ (2\pi - 4\alpha \leq x \leq 2\pi - 3\alpha),$$

$g(x) = 0$ ($2\pi - 3\alpha \leq x \leq 2\pi$).

Докажем правильность именно такого определения функции $g(x)$, в котором промежуточные точки

3α, 4α, $\pi/2 - \alpha$, $\pi/2$, $\pi/2 + \alpha$, $\pi - 4\alpha$, $\pi - 3\alpha$, π, $\pi + 3\alpha$, $\pi + 4\alpha$, $3\pi/2 - \alpha$, $3\pi/2$, $3\pi/2 + \alpha$, $2\pi - 4\alpha$, $2\pi - 3\alpha$

деления отрезка $[0, 2\pi]$ включены по два раза каждая, и тем самым докажем непрерывность функции $g(x)$ ввиду её кусочной непрерывности и поэтому заведомой

непрерывности внутри всех охватывающих отрезков, совместно составляющих отрезок [0, 2π]. Тем самым попутно очевидным образом будет доказана правильность определения и непрерывность промежуточных функций ψ(x) и χ(x), являющихся сужениями итоговой функции g(x) по областям определения и по промежуточным точкам деления соответствующих областей определения.

Для этого определим и сопоставим соответствующие односторонние пределы функции g(x) в указанных промежуточных точках деления отрезка [0, 2π]:

$$\lim_{x\to 3\alpha-0} g(x) = \lim_{x\to 3\alpha-0} 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to 3\alpha+0} g(x) = \lim_{x\to 3\alpha+0} (1/2)(x - 3\alpha)^2/\alpha = 0;$$

$$\lim_{x\to 4\alpha-0} g(x) = \lim_{x\to 4\alpha-0} (1/2)(x - 3\alpha)^2/\alpha = \alpha/2 = (\pi/2 - M')/8;$$

$$\lim_{x\to 4\alpha+0} g(x) = \lim_{x\to 4\alpha+0} (x - 7\alpha/2) = \alpha/2 = (\pi/2 - M')/8;$$

Ph. D. & Dr. Sc. LEV GRIGOREVIC GELIMSON: ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, УТОЧНЕНИЕ, УГЛУБЛЕНИЕ, ОБОБЩЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАРАЛЬДА БОРА 56/511

$$\lim_{x\to\pi/2-\alpha-0} g(x) = \lim_{x\to\pi/2-\alpha-0}(x - 7\alpha/2) = \pi/2 - 9\alpha/2 = \pi/2 - 9(\pi/2 - M')/8 = 9M'/8 - \pi/16;$$

$$\lim_{x\to\pi/2-\alpha+0} g(x) = \lim_{x\to\pi/2-\alpha+0}[M' - (1/2)(\pi/2 - x)^2/\alpha] = M' - \alpha/2 = M' - (\pi/2 - M')/8 = 9M'/8 - \pi/16;$$

$$\lim_{x\to\pi/2-0} g(x) = \lim_{x\to\pi/2-0}[M' - (1/2)(\pi/2 - x)^2/\alpha] = M';$$

$$\lim_{x\to\pi/2+0} g(x) = \lim_{x\to\pi/2+0}[M' - (1/2)(x - \pi/2)^2/\alpha] = M';$$

$$\lim_{x\to\pi/2+\alpha-0} g(x) = \lim_{x\to\pi/2+\alpha-0}[M' - (1/2)(x - \pi/2)^2/\alpha] = M' - \alpha/2 = M' - (\pi/2 - M')/8 = 9M'/8 - \pi/16;$$

$$\lim_{x\to\pi/2+\alpha+0} g(x) = \lim_{x\to\pi/2+\alpha+0}(\pi - x - 7\alpha/2) = \pi/2 - 9\alpha/2 = \pi/2 - 9(\pi/2 - M')/8 = 9M'/8 - \pi/16;$$

$$\lim_{x\to\pi-4\alpha-0} g(x) = \lim_{x\to\pi-4\alpha-0}(\pi - x - 7\alpha/2) = \alpha/2 = (\pi/2 - M')/8;$$

$$\lim_{x\to\pi-4\alpha+0} g(x) = \lim_{x\to\pi-4\alpha+0}(1/2)(\pi - x - 3\alpha)^2/\alpha = \alpha/2 = (\pi/2 - M')/8;$$

$$\lim_{x\to\pi-3\alpha-0} g(x) = \lim_{x\to\pi-3\alpha-0}(1/2)(\pi - x - 3\alpha)^2/\alpha = 0;$$

$$\lim_{x\to\pi-3\alpha+0} g(x) = \lim_{x\to\pi-3\alpha+0} 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to\pi-0} g(x) = \lim_{x\to\pi-0} 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to\pi+0} g(x) = \lim_{x\to\pi+0} 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to\pi+3\alpha-0} g(x) = \lim_{x\to\pi+3\alpha-0} 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to\pi+3\alpha+0} g(x) = \lim_{x\to\pi+3\alpha+0}[- (1/2)(x - \pi - 3\alpha)^2/\alpha] = 0;$$

$$\lim_{x\to\pi+4\alpha-0}g(x) = \lim_{x\to\pi+4\alpha-0}[-(1/2)(x - \pi - 3\alpha)^2/\alpha] = -\alpha/2 = -(\pi/2 - M')/8;$$

$$\lim_{x\to\pi+4\alpha+0}g(x) = \lim_{x\to\pi+4\alpha+0}(-x + \pi + 7\alpha/2) = -\alpha/2 = -(\pi/2 - M')/8;$$

$$\lim_{x\to3\pi/2-\alpha-0}g(x) = \lim_{x\to3\pi/2-\alpha-0}(-x + \pi + 7\alpha/2) = -\pi/2 + 9\alpha/2 = -\pi/2 + 9(\pi/2 - M')/8 = -9M'/8 + \pi/16;$$

$$\lim_{x\to3\pi/2-\alpha+0}g(x) = \lim_{x\to3\pi/2-\alpha+0}[-M' + (1/2)(3\pi/2 - x)^2/\alpha] = -M' + \alpha/2 = -M' + (\pi/2 - M')/8 = -9M'/8 + \pi/16;$$

$$\lim_{x\to3\pi/2-0}g(x) = \lim_{x\to3\pi/2-0}[-M' + (1/2)(3\pi/2 - x)^2/\alpha] = -M';$$

$$\lim_{x\to3\pi/2+0}g(x) = \lim_{x\to3\pi/2+0}[-M' + (1/2)(x - 3\pi/2)^2/\alpha] = -M';$$

$\lim_{x\to 3\pi/2+\alpha-0} g(x) = \lim_{x\to 3\pi/2+\alpha-0}[- M' + (1/2)(x - 3\pi/2)^2/\alpha] = - M' + \alpha/2 = - M' + (\pi/2 - M')/8 = - 9M'/8 + \pi/16;$

$\lim_{x\to 3\pi/2+\alpha+0} g(x) = \lim_{x\to 3\pi/2+\alpha+0}(- 2\pi + x + 7\alpha/2) = - \pi/2 + 9\alpha/2 = - \pi/2 + 9(\pi/2 - M')/8 = - 9M'/8 + \pi/16;$

$\lim_{x\to 2\pi-4\alpha-0} g(x) = \lim_{x\to 2\pi-4\alpha-0}(- 2\pi + x + 7\alpha/2) = - \alpha/2 = - (\pi/2 - M')/8;$

$\lim_{x\to 2\pi-4\alpha+0} g(x) = \lim_{x\to 2\pi-4\alpha+0}[- (1/2)(2\pi - x - 3\alpha)^2/\alpha] = - \alpha/2 = - (\pi/2 - M')/8;$

$\lim_{x\to 2\pi-3\alpha-0} g(x) = \lim_{x\to 2\pi-3\alpha-0}[- (1/2)(2\pi - x - 3\alpha)^2/\alpha] = 0;$

$\lim_{x\to 2\pi-3\alpha+0} g(x) = \lim_{x\to 2\pi-3\alpha+0} 0 = 0.$

Следовательно, соответствующие односторонние пределы в каждой из промежуточных точек

$$3\alpha,\ 4\alpha,\ \pi/2 - \alpha,\ \pi/2,\ \pi/2 + \alpha,\ \pi - 4\alpha,\ \pi - 3\alpha,\ \pi,\ \pi + 3\alpha,\ \pi + 4\alpha,\ 3\pi/2 - \alpha,\ 3\pi/2,\ 3\pi/2 + \alpha,\ 2\pi - 4\alpha,\ 2\pi - 3\alpha$$

деления отрезка $[0, 2\pi]$ попарно равны между собой:

$$\lim_{x\to 3\alpha-0} g(x) = 0 = \lim_{x\to 3\alpha+0} g(x);$$

$$\lim_{x\to 4\alpha-0} g(x) = \alpha/2(\pi/2 - M')/8 = \lim_{x\to 4\alpha+0} g(x);$$

$$\lim_{x\to \pi/2-\alpha-0} g(x) = 9M'/8 - \pi/16 = \lim_{x\to \pi/2-\alpha+0} g(x);$$

$$\lim_{x\to\pi/2-0} g(x) = M' = \lim_{x\to\pi/2+0} g(x);$$

$$\lim_{x\to\pi/2+\alpha-0} g(x) = 9M'/8 - \pi/16 = \lim_{x\to\pi/2+\alpha+0} g(x);$$

$$\lim_{x\to\pi-4\alpha-0} g(x) = (\pi/2 - M')/8 = \lim_{x\to\pi-4\alpha+0} g(x);$$

$$\lim_{x\to\pi-3\alpha-0} g(x) = 0 = \lim_{x\to\pi-3\alpha+0} g(x);$$

$$\lim_{x\to\pi-0} g(x) = 0 = \lim_{x\to\pi+0} g(x);$$

$$\lim_{x\to\pi+3\alpha-0} g(x) = 0 = \lim_{x\to\pi+3\alpha+0} g(x);$$

$$\lim_{x\to\pi+4\alpha-0} g(x) = - (\pi/2 - M')/8 = \lim_{x\to\pi+4\alpha+0} g(x);$$

$$\lim_{x\to3\pi/2-\alpha-0} g(x) = - 9M'/8 + \pi/16 = \lim_{x\to3\pi/2-\alpha+0} g(x);$$

$$\lim_{x\to3\pi/2-0} g(x) = - M' = \lim_{x\to3\pi/2+0} g(x);$$

$$\lim_{x\to3\pi/2+\alpha-0} g(x) = - 9M'/8 + \pi/16 = \lim_{x\to3\pi/2+\alpha+0} g(x);$$

$$\lim_{x\to 2\pi-4\alpha-0} g(x) = -(\pi/2 - M')/8 = \lim_{x\to 2\pi-4\alpha+0} g(x);$$

$$\lim_{x\to 2\pi-3\alpha-0} g(x) = 0 = \lim_{x\to 2\pi-3\alpha+0} g(x).$$

Значит, функция g(x) непрерывна и, следовательно, интегрируема на отрезке [0, 2π].

Теперь последовательно проверим выполнение функцией g(x) условий 1, 2′ и 3.

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная g′(x) функции g(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|g'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

Продифференцируем функцию g(x) на всей совокупности отрезков её разбиения:

$$g'(x) = 0 \ (0 \leq x \leq 3\alpha),$$

$$g'(x) = (x - 3\alpha)/\alpha \ (3\alpha \leq x \leq 4\alpha),$$

$$g'(x) = 1 \ (4\alpha \leq x \leq \pi/2 - \alpha),$$

$$g'(x) = -(x - \pi/2)/\alpha \ (\pi/2 - \alpha \leq x \leq \pi/2),$$

$$g'(x) = -(x - \pi/2)/\alpha \ (\pi/2 \leq x \leq \pi/2 + \alpha),$$

$$g'(x) = -1 \ (\pi/2 + \alpha \leq x \leq \pi - 4\alpha),$$

$$g'(x) = (-\pi + x + 3\alpha)/\alpha \ (\pi - 4\alpha \leq x \leq \pi - 3\alpha),$$

$$g'(x) = 0 \ (\pi - 3\alpha \le x \le \pi),$$

$$g'(x) = 0 \ (\pi \le x \le \pi + 3\alpha),$$

$$g'(x) = -(x - \pi - 3\alpha)/\alpha \ (\pi + 3\alpha \le x \le \pi + 4\alpha),$$

$$g'(x) = -1 \ (\pi + 4\alpha \le x \le 3\pi/2 - \alpha),$$

$$g'(x) = (x - 3\pi/2)/\alpha \ (3\pi/2 - \alpha \le x \le 3\pi/2),$$

$$g'(x) = (x - 3\pi/2)/\alpha \ (3\pi/2 \le x \le 3\pi/2 + \alpha),$$

$$g'(x) = 1 \ (3\pi/2 + \alpha \le x \le 2\pi - 4\alpha),$$

$$g'(x) = -(-2\pi + x + 3\alpha)/\alpha \ (2\pi - 4\alpha \le x \le 2\pi - 3\alpha),$$

$$g'(x) = 0 \ (2\pi - 3\alpha \le x \le 2\pi).$$

Докажем правильность именно такого определения производной g′(x) функции g(x), в котором промежуточные точки

3α, 4α, $\pi/2 - \alpha$, $\pi/2$, $\pi/2 + \alpha$, $\pi - 4\alpha$, $\pi - 3\alpha$, π, $\pi + 3\alpha$, $\pi + 4\alpha$, $3\pi/2 - \alpha$, $3\pi/2$, $3\pi/2 + \alpha$, $2\pi - 4\alpha$, $2\pi - 3\alpha$

деления отрезка [0, 2π] включены по два раза каждая, и тем самым докажем непрерывность производной g′(x) ввиду её кусочной непрерывности и поэтому заведомой непрерывности внутри всех отрезков,

совместно составляющих отрезок [0, 2π]. Для этого определим и сопоставим соответствующие односторонние пределы производной g′(x) функции g(x) в указанных промежуточных точках деления отрезка [0, 2π]:

$$\lim_{x\to 3\alpha-0} g'(x) = \lim_{x\to 3\alpha-0} 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to 3\alpha+0} g'(x) = \lim_{x\to 3\alpha+0} (x - 3\alpha)/\alpha = 0;$$

$$\lim_{x\to 4\alpha-0} g'(x) = \lim_{x\to 4\alpha-0} (x - 3\alpha)/\alpha = 1;$$

$$\lim_{x\to 4\alpha+0} g'(x) = \lim_{x\to 4\alpha+0} 1 = 1;$$

$$\lim_{x\to\pi/2-\alpha-0} g'(x) = \lim_{x\to\pi/2-\alpha-0} 1 = 1;$$

$$\lim_{x\to\pi/2-\alpha+0} g'(x) = \lim_{x\to\pi/2-\alpha+0} [-\ (x - \pi/2)/\alpha] = 1;$$

$$\lim_{x\to\pi/2-0} g'(x) = \lim_{x\to\pi/2-0} [-\ (x - \pi/2)/\alpha] = 0;$$

$$\lim_{x\to\pi/2+0} g'(x) = \lim_{x\to\pi/2+0} [-\ (x - \pi/2)/\alpha] = 0;$$

$$\lim_{x\to\pi/2+\alpha-0} g'(x) = \lim_{x\to\pi/2+\alpha-0} [-\ (x - \pi/2)/\alpha] = -\ 1;$$

$$\lim_{x\to\pi/2+\alpha+0} g'(x) = \lim_{x\to\pi/2+\alpha+0} (-\ 1) = -\ 1;$$

$$\lim_{x\to\pi-4\alpha-0} g'(x) = \lim_{x\to\pi-4\alpha-0} (-\ 1) = -\ 1;$$

$$\lim_{x\to\pi-4\alpha+0} g'(x) = \lim_{x\to\pi-4\alpha+0} (-\ \pi + x + 3\alpha)/\alpha = -\ 1;$$

$$\lim_{x\to\pi-3\alpha-0} g'(x) = \lim_{x\to\pi-3\alpha-0} (-\ \pi + x + 3\alpha)/\alpha = 0;$$

$$\lim_{x\to\pi-3\alpha+0} g'(x) = \lim_{x\to\pi-3\alpha+0} 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to\pi-0} g'(x) = \lim_{x\to\pi-0} 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to\pi+0} g'(x) = \lim_{x\to\pi+0} 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to\pi+3\alpha-0} g'(x) = \lim_{x\to\pi+3\alpha-0} 0 = 0;$$

$$\lim_{x\to\pi+3\alpha+0} g'(x) = \lim_{x\to\pi+3\alpha+0} [-(x-\pi-3\alpha)/\alpha] = 0;$$

$$\lim_{x\to\pi+4\alpha-0} g'(x) = \lim_{x\to\pi+4\alpha-0} [-(x-\pi-3\alpha)/\alpha] = -1;$$

$$\lim_{x\to\pi+4\alpha+0} g'(x) = \lim_{x\to\pi+4\alpha+0} (-1) = -1;$$

$$\lim_{x\to3\pi/2-\alpha-0} g'(x) = \lim_{x\to3\pi/2-\alpha-0} (-1) = -1;$$

$$\lim_{x\to3\pi/2-\alpha+0} g'(x) = \lim_{x\to3\pi/2-\alpha+0} [(x-3\pi/2)/\alpha] = -1;$$

$$\lim_{x\to3\pi/2-0} g'(x) = \lim_{x\to3\pi/2-0} [(x-3\pi/2)/\alpha] = 0;$$

$$\lim_{x\to3\pi/2+0} g'(x) = \lim_{x\to3\pi/2+0} [(x-3\pi/2)/\alpha] = 0;$$

$$\lim_{x\to 3\pi/2+\alpha-0} g'(x) = \lim_{x\to 3\pi/2+\alpha-0}[(x - 3\pi/2)/\alpha] = 1;$$

$$\lim_{x\to 3\pi/2+\alpha+0} g'(x) = \lim_{x\to 3\pi/2+\alpha+0} 1 = 1;$$

$$\lim_{x\to 2\pi-4\alpha-0} g'(x) = \lim_{x\to 2\pi-4\alpha-0} 1 = 1;$$

$$\lim_{x\to 2\pi-4\alpha+0} g'(x) = \lim_{x\to 2\pi-4\alpha+0}[- (- 2\pi + x + 3\alpha)/\alpha] = 1;$$

$$\lim_{x\to 2\pi-3\alpha-0} g'(x) = \lim_{x\to 2\pi-3\alpha-0}[- (- 2\pi + x + 3\alpha)/\alpha] = 0;$$

$$\lim_{x\to 2\pi-3\alpha+0} g'(x) = \lim_{x\to 2\pi-3\alpha+0} 0 = 0.$$

Следовательно, соответствующие <u>односторонние</u> <u>пределы</u> в каждой из промежуточных точек

3α, 4α, $\pi/2 - \alpha$, $\pi/2$, $\pi/2 + \alpha$, $\pi - 4\alpha$, $\pi - 3\alpha$, π, $\pi + 3\alpha$, $\pi + 4\alpha$, $3\pi/2 - \alpha$, $3\pi/2$, $3\pi/2 + \alpha$, $2\pi - 4\alpha$, $2\pi - 3\alpha$ деления отрезка $[0, 2\pi]$ **попарно** **равны** между собой:

$$\lim_{x\to 3\alpha-0} g'(x) = 0 = \lim_{x\to 3\alpha+0} g'(x);$$
$$\lim_{x\to 4\alpha-0} g'(x) = 1 = \lim_{x\to 4\alpha+0} g'(x);$$
$$\lim_{x\to \pi/2-\alpha-0} g'(x) = 1 = \lim_{x\to \pi/2-\alpha+0} g'(x);$$
$$\lim_{x\to \pi/2-0} g'(x) = 0 = \lim_{x\to \pi/2+0} g'(x);$$
$$\lim_{x\to \pi/2+\alpha-0} g'(x) = -1 = \lim_{x\to \pi/2+\alpha+0} g'(x);$$
$$\lim_{x\to \pi-4\alpha-0} g'(x) = -1 = \lim_{x\to \pi-4\alpha+0} g'(x);$$

$$\lim_{x\to\pi-3\alpha-0} g'(x) = 0 = \lim_{x\to\pi-3\alpha+0} g'(x);$$

$$\lim_{x\to\pi-0} g'(x) = 0 = \lim_{x\to\pi+0} g'(x);$$

$$\lim_{x\to\pi+3\alpha-0} g'(x) = 0 = \lim_{x\to\pi+3\alpha+0} g'(x);$$

$$\lim_{x\to\pi+4\alpha-0} g'(x) = -1 = \lim_{x\to\pi+4\alpha+0} g'(x);$$

$$\lim_{x\to3\pi/2-\alpha-0} g'(x) = -1 = \lim_{x\to3\pi/2-\alpha+0} g'(x);$$

$$\lim_{x\to3\pi/2-0} g'(x) = 0 = \lim_{x\to3\pi/2+0} g'(x);$$

$$\lim_{x\to3\pi/2+\alpha-0} g'(x) = 1 = \lim_{x\to3\pi/2+\alpha+0} g'(x);$$

$$\lim_{x\to2\pi-4\alpha-0} g'(x) = 1 = \lim_{x\to2\pi-4\alpha+0} g'(x);$$

$$\lim_{x\to2\pi-3\alpha-0} g'(x) = 0 = \lim_{x\to2\pi-3\alpha+0} g'(x).$$

Значит, функция g(x) непрерывно дифференцируема на отрезке интегрирования $[0, 2\pi]$.

Заметим, что в начале и в конце отрезка интегрирования $[0, 2\pi]$ производная $g'(x)$ функции g(x) принимает нулевые значения, да и в осуществляющих разбиение этого отрезка указанных промежуточных точках принимает значения из множества

$$\{-1, 0, 1\}.$$

Кроме того, на каждом из указанных отрезков, совместно составляющих отрезок $[0, 2\pi]$ интегрирования, производная $g'(x)$ функции $g(x)$ линейна и поэтому всюду на отрезке интегрирования $[0, 2\pi]$ принимает значения от -1 до 1 в обоих случаях включительно, причём именно все эти значения, то есть областью изменения производной $g'(x)$ функции $g(x)$ является отрезок $[-1, 1]$. В итоге доказано, что функция $g(x)$ и ее производная $g'(x)$ с превышением выполняют условия 1.

Теперь проверим выполнение следующего условия теоремы.

2′. $g^{(n)}(0) = g^{(n)}(2\pi)$ (n = 0, 1, 2, ...).

На крайних составляющих отрезках отрезка интегрирования [0, 2π], примыкающих к его началу 0 и к концу 2π, функция g(x) <u>тождественно</u> <u>равна</u> <u>нулю</u>. Следовательно, <u>тождественно</u> <u>равны</u> <u>нулю</u>, а значит, и <u>между</u> <u>собой</u> на этих <u>крайних</u> <u>отрезках</u> и её <u>производные</u> <u>всех</u> <u>порядков</u>, в том числе в

начале 0 и в конце 2π отрезка интегрирования $[0, 2\pi]$. Поэтому и условие $2'$ с превышением выполнено функцией g(x) и её производными всех натуральных (положительных целых) порядков.

Остаётся проверить выполнение функцией g(x) последнего условия теоремы.

3. Интеграл функции g(x) на отрезке $[0, 2\pi]$ равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} g(x)dx = 0.$$

Это <u>может</u> быть <u>доказано</u> (способ 1) <u>прямым</u> <u>последовательным</u> <u>нарастающим</u> <u>вычислением</u> этого <u>интеграла</u> функции g(x) на всех отрезках, совместно составляющих отрезок интегрирования [0, 2π] от начала 0 до конца 2π. Однако <u>аннулирование</u> указанного <u>интеграла</u> следует из самог<u>о</u> <u>алгоритма</u> <u>построения</u> (способ 2) <u>антисимметричной</u> (относительно x = π) функции g(x) на отрезке [0, 2π]:

$$g(x) = \chi(x)\ (0 \leq x \leq \pi),$$
$$g(x) = -\chi(2\pi - x)\ (\pi \leq x \leq 2\pi).$$

Сразу видно (способ 3), что при интегрировании на отрезке [π, 2π] пригодится замена переменных

$$2\pi - x = t,$$

$$dx = - dt.$$

Ввиду общеизвестных теорем об интегрировании

$$\int_0^{2\pi} g(x)dx = \int_0^{\pi} g(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} g(x)dx = \int_0^{\pi} \chi(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} [-\chi(2\pi - x)]dx = \int_0^{\pi} \chi(x)dx - \int_{\pi}^{2\pi} \chi(2\pi - x)dx = \int_0^{\pi} \chi(x)dx + \int_{\pi}^{0} \chi(t)dt = \int_0^{\pi} \chi(x)dx - \int_0^{\pi} \chi(t)dt = 0.$$

В итоге функция g(x) непрерывно дифференцируема на отрезке [0, 2π] и удовлетворяет условиям 1, 2′ и 3. Кроме того,

$$M' = \max_{x \in [0, 2\pi]} |g(x)| > M,$$

чем и завершается доказательство теоремы 2.

Следствие.

Функция

$$g_1(x) = (M/M')g(x)$$

имеет наперёд заданный максимум абсолютной величины

$$\mathbf{M = max_{x\in[0,2\pi]}|g_1(x)|\ (0 \le M < \pi/2)}$$

и удовлетворяет условиям 2′, 3 и усиливающему условие 1 условию

$$\mathbf{|g_1'(x)| \le M/M' < 1.}$$

Представляет определённый интерес выяснение зависимости оценки для M от условий 1 и 2. В этом направлении докажем следующие теоремы.

Теорема 3.

Пусть непрерывная на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ удовлетворяет совокупности условий:

1′. $|f'(x)| \leq c$ $(0 < x < 2\pi,\ c \geq 0)$.

2. Значения функции $f(x)$ в начале и в конце отрезка $[0, 2\pi]$ равны между собой:

$$f(0) = f(2\pi).$$

3. Интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\mathbf{M \le c\pi/2,}$$

в котором равенство осуществляется лишь при условии

$$\mathbf{c = 0.}$$

Доказательство.

Если

$$\mathbf{c = 0,}$$

то, как видно хотя бы из теоремы Лагранжа о среднем значении, функция f(x) на отрезке [0, 2π]

постоянна, причём равна нулю в силу условия 3, то есть

$$M = 0.$$

Пусть теперь неотрицательное число c строго положительно. Функция

$$f_1(x) = f(x)/c$$

удовлетворяет условиям 1, 2 и 3. Тогда, обозначив

$$M_1 = \max_{x \in [0,2\pi]} |f_1(x)|,$$

по теореме 1 получаем неравенство

$$M_1 < \pi/2.$$

Но, как легко видеть,

$$M_1 = M/c,$$

так что в этом случае имеет место именно строгое неравенство

$$M < c\pi/2.$$

Рассмотрением обоих этих случаев исчерпывается доказательство теоремы 3.

Куда менее очевидна и гораздо труднее доказывается следующая теорема.

Теорема 4.

Пусть непрерывная на отрезке [0, 2π] функция f(x) удовлетворяет совокупности следующих условий:

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

2″. $f(0)f(2\pi) \geq 0$.

3. Интеграл функции f(x) на отрезке [0, 2π] равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

Тогда для

$$M = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|$$

имеет место строгое неравенство

$$M < 2(2^{1/2} - 1)\pi.$$

Доказательство методом от противоречащего.

Допустим, что существует удовлетворяющая всем условиям теоремы функция f(x), для которой, тем не менее, имеет место противоречащее требуемому нестрогое неравенство

$$M \geq 2(2^{1/2} - 1)\pi.$$

Тогда существует хотя бы одно $x_0 \in [0, 2\pi]$ такое, что или $f(x_0) = M$, или $f(x_0) = - M$.

Как и при доказательстве теоремы 1, ограничимся случаем

$$f(x_0) = M = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)|.$$

Можно считать, что имеет место неравенство

$$0 \leq x_0 \leq \pi.$$

Если это не так и имеет место неравенство

$$\pi < x_0 \leq 2\pi,$$

то такой случай сводится к случаю

$$0 \leq x_0 \leq \pi$$

очевидной подстановкой

$$t = 2\pi - x.$$

Наконец, имеет место неравенство

$$M \leq \pi.$$

Действительно, в противоречащем случае

$$M > \pi.$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \ [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[x, x_0]$ $(0 \le x \le x_0)$, ввиду

$$f'(c) \le 1$$

и

$$x_0 - x \ge 0$$

получаем

$$M - f(x) = f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x) \le x_0 - x$$
$$[c \in (x, x_0),\ x < x_0],$$

или

$$f(x) \ge x - x_0 + M \ (0 \le x \le x_0).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x')\ [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции f(x) на отрезке $[x_0, x]$ ($x_0 \le x \le 2\pi$), ввиду

$$f'(c) \ge -1$$

и

$$x - x_0 \ge 0$$

получаем

$$f(x) - M = f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \ge - x + x_0$$

$$[c \in (x_0, x),\ x_0 < x],$$

или

$$f(x) \ge - x + x_0 + M\ (x_0 \le x \le 2\pi).$$

То есть имеет место именно нестрогое неравенство

$$f(x) \geq \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = x - x_0 + M \ (0 \leq x \leq x_0),$$

$$\varphi(x) = - x + x_0 + M \ (x_0 \leq x \leq 2\pi).$$

Поэтому в противоречащем случае

$$M > \pi$$

по теореме Лагранжа о среднем значении имело бы место именно строгое неравенство

$$f(x) > \varphi_1(x) \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

где

$$\varphi_1(x) = x - x_0 + \pi \ (0 \leq x \leq x_0),$$

$$\varphi_1(x) = - x + x_0 + \pi \ (x_0 \le x \le 2\pi),$$

а при обозначении

$$x(0) = x_0$$

имеем:

$$\int_0^{2\pi}\varphi_1(x)dx = \int_0^{x(0)}\varphi_1(x)dx + \int_{x(0)}^{2\pi}\varphi_1(x)dx =$$

$$\int_0^{x(0)}(x - x_0 + \pi)dx + \int_{x(0)}^{2\pi}(- x + x_0 + \pi)dx =$$

$$x_0^2/2 - x_0^2 + \pi x_0 - 2\pi^2 + x_0^2/2 + 2\pi x_0 - x_0^2 + 2\pi^2 - \pi x_0$$

$$= 2\pi x_0 - x_0^2 = x_0(2\pi - x_0) \ge 0.$$

Очевидным образом нарушается условие 3, поскольку для непрерывных на отрезке [0, 2π]

функций $f(x)$ и $\varphi_1(x)$ имеет место именно строгое неравенство

$$f(x) > \varphi_1(x) \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

так что

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx > \int_0^{2\pi} \varphi_1(x)dx \geq 0.$$

Поэтому доказано нестрогое неравенство

$$M \leq \pi.$$

Для x_0 имеются две возможности:

A. $x_0 \geq M$.

B. $0 \leq x_0 < M$.

Обе эти возможности последовательно приведём к противоречиям с условиями теоремы.

Пусть вначале имеет место возможность A. $x_0 \geq M$.

Тогда, как доказано выше, вместе со строгим неравенством

$$f(x) > \varphi_1(x)$$

имеет место нестрогое неравенство

$$f(x) \geq \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = x - x_0 + M \ (0 \leq x \leq x_0),$$

$$\varphi(x) = - x + x_0 + M \ (x_0 \leq x \leq 2\pi).$$

Но при этом очевидным образом нарушается условие 3 теоремы, поскольку

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx \geq \int_0^{2\pi} \varphi(x)dx = \int_0^{x(0)} \varphi(x)dx + \int_{x(0)}^{2\pi} \varphi(x)dx = \int_0^{x(0)} (x - x_0 + M)dx + \int_{x(0)}^{2\pi} (- x + x_0 + M)dx = x_0^2/2 - x_0^2 + Mx_0 - 2\pi^2 + x_0^2/2 + 2\pi x_0 - x_0^2 + 2\pi M - Mx_0 = - 2\pi^2 + 2\pi x_0 - x_0^2 + 2\pi M = 2\pi M - \pi^2 - (\pi - x_0)^2 \geq 2\pi M - \pi^2 - (\pi - M)^2 = [\pi(2 + 2^{1/2}) - M][M - \pi(2 - 2^{1/2})] > 0$$

в соответствии с доказанным неравенством

$$M \leq \pi$$

и допущением

$$M \geq 2(2^{1/2} - 1)\pi.$$

Пусть имеет место возможность B. $0 \le x_0 < M$.

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \; [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[0, x_0]$, получаем

$$M - f(0) = |M - f(0)| = |f(x_0) - f(0)| = |f'(c)||x_0 - 0| = |f'(c)|x_0 \le x_0 < M \; [c \in (0, x_0),\ 0 < x_0],$$

или неравенство

$$f(0) > 0.$$

Тогда в соответствии с условием 2″

$$f(2\pi) \ge 0.$$

Далее, имеет место нестрогое неравенство

$$f(x) \geq \varphi_2(x),$$

где

$$\varphi_2(x) = x - x_0 + M \ (0 \leq x \leq x_0),$$
$$\varphi_2(x) = - x + x_0 + M \ [x_0 \leq x \leq (x_0 + M)/2 + \pi],$$
$$\varphi_2(x) = x - 2\pi \ [(x_0 + M)/2 + \pi \leq x \leq 2\pi].$$

На первых двух из этих трёх отрезков это неравенство уже доказано выше, поскольку на них имеет место тождественное равенство функций

$$\varphi_2(x) \equiv \varphi(x).$$

Поэтому остаётся доказать требуемое неравенство лишь на последнем из этих трёх отрезков.

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \ [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции f(x) на отрезке [x, 2π] [(x$_0$ + M)/2 + π ≤ x ≤ 2π], ввиду

$$f'(c) \leq 1$$

и

$$2\pi - x \geq 0$$

получаем

$$0 - f(x) \leq f(2\pi) - f(x) = f'(c)(2\pi - x) \leq 2\pi - x$$

$$[c \in (x, 2\pi),\ x < 2\pi],$$

или

$$f(x) \geq x - 2\pi \; [(x_0 + M)/2 + \pi \leq x \leq 2\pi].$$

Так что имеет место нестрогое неравенство

$$f(x) \geq \varphi_2(x).$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx \geq \int_0^{2\pi} \varphi_2(x)dx = \int_0^{x(0)} \varphi_2(x)dx + \int_{x(0)}^{[x(0)+M]/2+\pi} \varphi_2(x)dx + \int_{[x(0)+M]/2+\pi}^{2\pi} \varphi_2(x)dx = \int_0^{x(0)} (x - x_0 + M)dx + \int_{x(0)}^{[x(0)+M]/2+\pi} (- x + x_0 + M)dx + \int_{[x(0)+M]/2+\pi}^{2\pi} (x - 2\pi)dx = x_0^2/2 - x_0^2 + Mx_0 - [(x_0 + M)/2 + \pi]^2/2 + x_0^2/2 + [(x_0 + M)/2 + \pi]x_0 - x_0^2 + M[(x_0 +$$

$$M)/2 + \pi] - Mx_0 + 2\pi^2 - [(x_0 + M)/2 + \pi]^2/2 - 4\pi^2 + 2\pi[(x_0 + M)/2 + \pi] = - [(x_0 + M)/2 + \pi]^2 + [(x_0 + M)/2 + \pi]x_0 - x_0^2 + M[(x_0 + M)/2 + \pi] - 2\pi^2 + 2\pi[(x_0 + M)/2 + \pi] = - x_0^2/4 - M^2/4 - \pi^2 - Mx_0/2 - \pi x_0 - \pi M + x_0^2/2 + Mx_0/2 + \pi x_0 - x_0^2 + Mx_0/2 + M^2/2 + \pi M - 2\pi^2 + \pi x_0 + \pi M + 2\pi^2 = x_0^2/4 + M^2/4 - \pi^2 - x_0^2 + Mx_0/2 + \pi x_0 + \pi M = M^2 - (M - x_0)^2/2 - (2\pi - M - x_0)^2/4 \geq M^2 - M^2/2 - (2\pi - M)^2/4 = [M - 2(2^{1/2} - 1)\pi]$$

$$[2^{1/2}M + 2\pi - M](2^{1/2} + 1)/4 \geq 0,$$

причём равенство

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$$

имеет место лишь при совокупности трёх условий

$$f(x) = \varphi_2(x)\ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$x_0 = 0,$$

$$M = 2(2^{1/2} - 1)\pi.$$

Но при этом

$$f(x) = \varphi_2(x) = - x + 2(2^{1/2} - 1)\pi\ (0 \le x \le 2^{1/2}\pi),$$

$$f(x) = \varphi_2(x) = x - 2\pi\ (2^{1/2}\pi \le x \le 2\pi).$$

Эта кусочно-линейная функция непрерывна на всём отрезке $[0, 2\pi]$, так как в точке стыка $2^{1/2}\pi$ обоих отрезков области определения этой функции

$$f(2^{1/2}\pi) = \varphi_2(2^{1/2}\pi) = - 2^{1/2}\pi + 2(2^{1/2} - 1)\pi = 2^{1/2}\pi - 2\pi,$$

$$f(2^{1/2}\pi) = \varphi_2(2^{1/2}\pi) = 2^{1/2}\pi - 2\pi,$$

однако недифференцируема в этой внутренней для интервала $(0, 2\pi)$ точке стыка $2^{1/2}\pi$ ввиду различия односторонних производных:

$$f'(x) = \varphi_2'(x) = - 1\ (0 \leq x \leq 2^{1/2}\pi),$$

$$\mathbf{f'(x) = \varphi_2{}'(x) = 1\ (2^{1/2}\pi \le x \le 2\pi).}$$

Но при этом очевидным образом <u>нарушается условие 1</u> теоремы:

1. В <u>каждой</u> точке <u>интервала</u> (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) <u>существует</u> и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$\mathbf{|f'(x)| \le 1\ (0 < x < 2\pi).}$$

Полученное <u>противоречие</u> полностью <u>завершает</u> <u>доказательство</u> <u>теоремы 4</u>.

Теорема 5.

Оценки для M в теоремах 3 и 4 не могут быть улучшены.

Доказательство.

Для теоремы 3 это очевидным образом следует из теоремы 2.

Для теоремы 4 построим функцию $g_2(x)$ в духе идей построения функции g(x) при доказательстве теоремы 2.

Пусть M – любое число полуотрезка от 0 включительно до $2(2^{1/2} - 1)\pi$ исключительно:

$$0 \leq M < 2(2^{1/2} - 1)\pi.$$

Рассмотрим число

$$M'' = 2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi.$$

Нетрудно видеть, что существует такое действительное число β, что выполнена совокупность неравенств

$$0 < \beta < 2^{1/2}\pi/4$$

и

$$M < M'' < 2(2^{1/2} - 1)\pi.$$

В частности, эта совокупность неравенств выполняется при

$$\beta = [2(2^{1/2} - 1)\pi - M]/4,$$

так что

$$M = 2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta.$$

Проверка выполнения этих неравенств.

$$0 < \beta,$$

поскольку

$$M < 2(2^{1/2} - 1)\pi.$$

$$2^{1/2}\pi/4 - \beta = 2^{1/2}\pi/4 - [2(2^{1/2} - 1)\pi - M]/4 = [2^{1/2}\pi - 2(2^{1/2} - 1)\pi + M]/4 = [2^{1/2}\pi - 2\pi(2^{1/2} - 1) + M]/4 = [2^{1/2}\pi - 2^{1/2}2\pi + 2\pi + M]/4 = [(2 - 2^{1/2})\pi + M]/4 > 0,$$

поскольку

$$0 \leq M,$$

так что

$$\beta < 2^{1/2}\pi/4.$$

$$M'' - M = 2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi - 2(2^{1/2} - 1)\pi + 4\beta = 2^{3/2}\beta - 8\beta^2/(3\pi) = 2\beta(2^{1/2}3\pi - 8\beta)/(3\pi) > 2\beta(2^{1/2}3\pi - 8\pi 2^{1/2}/4)/(3\pi) = 2\beta(2^{1/2} - 2^{1/2}2/3) = 2^{3/2}\beta/3 > 0,$$

поскольку

$$0 < \beta < 2^{1/2}\pi/4,$$

так что

$$M < M''.$$

$$2(2^{1/2} - 1)\pi - M'' = 2(2^{1/2} - 1)\pi - [2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi] = 2(2^{1/2} - 1)\pi - 2(2^{1/2} - 1)\pi + 4\beta - 2^{3/2}\beta + (8/3)\beta^2/\pi = 4\beta - 2^{3/2}\beta + (8/3)\beta^2/\pi = 2(2 - 2^{1/2})\beta + (8/3)\beta^2/\pi > 0,$$

так что

$$M'' < 2(2^{1/2} - 1)\pi.$$

Тем самым доказано, что выполнена совокупность неравенств

$$0 < \beta < 2^{1/2}\pi/4,$$

$$M < M'' < 2(2^{1/2} - 1)\pi.$$

Построим на отрезке [0, 2π] функцию

$$g_2(x) = M'' - x \ (0 \le x \le 2^{1/2}\pi - 4\beta),$$

$$g_2(x) =$$

$$(1/4)(x + 2\beta - 2^{1/2}\pi)^2/\beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi$$

$$(2^{1/2}\pi - 4\beta \le x \le 2^{1/2}\pi),$$

$$g_2(x) = x - 2\pi + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi \ (2^{1/2}\pi \le x \le 2\pi),$$

которая на отрезке [0, 2π] непрерывна и удовлетворяет условиям 1, 2′′ и 3, что и проверим.

Проверка непрерывности функции $g_2(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$.

$$g_2(x) = M'' - x \ (0 \le x \le 2^{1/2}\pi - 4\beta),$$

$$g_2(x) = (1/4)(x + 2\beta - 2^{1/2}\pi)^2/\beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi \ (2^{1/2}\pi - 4\beta \le x \le 2^{1/2}\pi),$$

$$g_2(x) = x - 2\pi + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi$$

$$(2^{1/2}\pi \le x \le 2\pi),$$

$$\lim_{x\to 2\hat{}(1/2)\pi - 4\beta + 0}[(1/4)(x + 2\beta - 2^{1/2}\pi)^2/\beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi] = (1/4)(2^{1/2}\pi - 4\beta + 2\beta - 2^{1/2}\pi)^2/\beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi = (1/4)(- 4\beta + 2\beta)^2/\beta$$

$$- \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi = \beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi = 2^{1/2}\pi - 2\pi + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi,$$

$$\lim_{x\to 2^\wedge(1/2)\pi-4\beta-0}(M'' - x) = 2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi - 2^{1/2}\pi + 4\beta = 2^{1/2}\pi - 2\pi + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi,$$

$$\lim_{x\to 2^\wedge(1/2)\pi-4\beta+0} g_2(x) = \lim_{x\to 2^\wedge(1/2)\pi-4\beta-0} g_2(x);$$

$$\lim_{x\to 2^\wedge(1/2)\pi-0}[(1/4)(x + 2\beta - 2^{1/2}\pi)^2/\beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi] = (1/4)(2^{1/2}\pi + 2\beta - 2^{1/2}\pi)^2/\beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi = (1/4)(2\beta)^2/\beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi =$$

$$\beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi = 2^{1/2}\pi - 2\pi + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi,$$

$$\lim_{x\to 2^\wedge(1/2)\pi+0}[x - 2\pi + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi] = 2^{1/2}\pi - 2\pi + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi,$$

$$\lim_{x\to 2^\wedge(1/2)\pi+0} g_2(x) = \lim_{x\to 2^\wedge(1/2)\pi-0} g_2(x).$$

Так что функция $g_2(x)$ непрерывна на обоих стыках всех трёх отрезков области определения, а внутри этих отрезков непрерывность этой функции очевидна.

1. В каждой точке интервала $(0, 2\pi)$ производная $g_2'(x)$ функции $g_2(x)$ существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|g_2'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

Проверка.

$$g_2'(x) = -1 \ (0 \leq x \leq 2^{1/2}\pi - 4\beta),$$

$$g_2'(x) = (1/2)(x + 2\beta - 2^{1/2}\pi)/\beta \ (2^{1/2}\pi - 4\beta \leq x \leq 2^{1/2}\pi),$$

$$g_2'(x) = 1 \ (2^{1/2}\pi \leq x \leq 2\pi).$$

$$\lim_{x\to 2\text{^}(1/2)\pi-4\beta+0}(1/2)(x + 2\beta - 2^{1/2}\pi)/\beta = (1/2)(2^{1/2}\pi - 4\beta + 2\beta - 2^{1/2}\pi)/\beta = (1/2)(- 4\beta + 2\beta)/\beta = -1 = \lim_{x\to 2\text{^}(1/2)\pi-4\beta-0}(-1),$$

$$\lim_{x\to 2^{\wedge}(1/2)\pi-0}(1/2)(x + 2\beta - 2^{1/2}\pi)/\beta = (1/2)(2^{1/2}\pi + 2\beta - 2^{1/2}\pi)/\beta = (1/2)(2\beta)/\beta = 1 = \lim_{x\to 2^{\wedge}(1/2)\pi+0}1,$$

$$g_2''(x) = 1/(2\beta) > 0 \ (2^{1/2}\pi - 4\beta \leq x \leq 2^{1/2}\pi),$$

так что <u>непрерывная</u> <u>производная</u> $g_2'(x)$ функции $g_2(x)$ <u>строго</u> <u>монотонно</u> <u>возрастает</u> на этом отрезке от -1 до 1, принимая также все промежуточные значения, то есть условие 1 выполнено.

2″. $g_2(0)g_2(2\pi) \geq 0$. Доказательство усиленного строгого неравенства $g_2(0)g_2(2\pi) > 0$.

$$g_2(x) = M'' - x \ (0 \leq x \leq 2^{1/2}\pi - 4\beta),$$

$$g_2(x) = (1/4)(x + 2\beta - 2^{1/2}\pi)^2/\beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi \ (2^{1/2}\pi - 4\beta \leq x \leq 2^{1/2}\pi),$$

$$g_2(x) = x - 2\pi + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi \ (2^{1/2}\pi \leq x \leq 2\pi).$$

$$g_2(0)g_2(2\pi) = M''[2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi] = 2\beta M''[2^{1/2} - (8/3)\beta/\pi] > 2\beta M''[2^{1/2} - (8/3)2^{1/2}\pi/(4\pi)] = 2\beta M''[2^{1/2} - (2/3)2^{1/2}] = 2\beta M''2^{1/2}/3 > 0,$$

поскольку

$$0 < \beta < 2^{1/2}\pi/4,$$

$$0 < M < M''.$$

3. Интеграл функции $g_2(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} g_2(x)dx = 0.$$

$$g_2(x) = M'' - x = 2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi - x$$

$$(0 \le x \le 2^{1/2}\pi - 4\beta),$$

$$g_2(x) = (1/4)(x + 2\beta - 2^{1/2}\pi)^2/\beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi \ (2^{1/2}\pi - 4\beta \le x \le 2^{1/2}\pi),$$

$$g_2(x) = x - 2\pi + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi \ (2^{1/2}\pi \le x \le 2\pi).$$

$$\int_0^{2\pi} g_2(x)dx = \int_0^{2^\wedge(1/2)\pi - 4\beta} g_2(x)dx + \int_{2^\wedge(1/2)\pi - 4\beta}^{2^\wedge(1/2)\pi} g_2(x)dx + \int_{2^\wedge(1/2)\pi}^{2\pi} g_2(x)dx.$$

Для лучших упорядоченности и обозримости вычислим вначале все три интеграла в правой части по отдельности.

$$\int_0^{2\wedge(1/2)\pi - 4\beta} g_2(x)dx = \int_0^{2\wedge(1/2)\pi - 4\beta}[2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi - x]dx = (2^{1/2}\pi - 4\beta)[2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi] - (2^{1/2}\pi - 4\beta)^2/2 =$$

$$2^{1/2}\pi[(2^{3/2} - 2)\pi - 4\beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi]$$

$$+ 4\beta[- (2^{3/2} - 2)\pi + 4\beta - 2^{3/2}\beta + (8/3)\beta^2/\pi] - (\pi - 2^{3/2}\beta)^2 =$$

$$(4 - 2^{3/2})\pi^2 - 2^{1/2}4\beta\pi + 4\beta\pi - (2^{1/2}8/3)\beta^2$$

$$- (2^{3/2} - 2)4\beta\pi + 16\beta^2 - 2^{1/2}8\beta^2 + 32\beta^3/(3\pi)$$

$$- \pi^2 + 2^{1/2}4\beta\pi - 8\beta^2 =$$

$$(3 - 2^{3/2})\pi^2 + 4\beta\pi - (2^{1/2}8/3)\beta^2$$

$$- (2^{3/2} - 2)4\beta\pi + 8\beta^2 - 2^{1/2}8\beta^2 + 32\beta^3/(3\pi) =$$

$$(3 - 2^{3/2})\pi^2 + (3 - 2^{3/2})4\beta\pi + (1 - 2^{1/2}4/3)8\beta^2 + 32\beta^3/(3\pi).$$

$$\int_{2\wedge(1/2)\pi - 4\beta}^{2\wedge(1/2)\pi} g_2(x)dx = \int_{2\wedge(1/2)\pi - 4\beta}^{2\wedge(1/2)\pi}[(1/4)(x + 2\beta - 2^{1/2}\pi)^2/\beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi]dx =$$

$$[(2^{1/2}\pi + 2\beta - 2^{1/2}\pi)^3 - (2^{1/2}\pi - 4\beta + 2\beta - 2^{1/2}\pi)^3]/(12\beta) + 4\beta[- \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi] =$$

$$16\beta^3/(12\beta) - 4(2 - 2^{1/2})\beta\pi - 4\beta^2 + 2^{3/2}4\beta^2 - (32/3)\beta^3/\pi =$$

$$4\beta^2/3 - 4(2 - 2^{1/2})\beta\pi - 4\beta^2 + 2^{3/2}4\beta^2 - (32/3)\beta^3/\pi =$$

$$- 4(2 - 2^{1/2})\beta\pi + 4\beta^2(2^{3/2} - 2/3) - (32/3)\beta^3/\pi.$$

$$\int_{2\wedge(1/2)\pi}^{2\pi} g_2(x)dx = \int_{2\wedge(1/2)\pi}^{2\pi}[x - 2\pi + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi]dx =$$

$$(4\pi^2 - 2\pi^2)/2 + (2\pi - 2^{1/2}\pi)[- 2\pi + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi] =$$

$$\pi^2 - 2(2 - 2^{1/2})\pi^2 + (2^{1/2} - 1)4\beta\pi - (8/3)(2 - 2^{1/2})\beta^2 =$$

$$(- 3 + 2^{1/2}\, 2)\pi^2 + (2^{1/2} - 1)4\beta\pi - (8/3)(2 - 2^{1/2})\beta^2.$$

$$\int_0^{2\pi} g_2(x)dx = \int_0^{2\hat{}(1/2)\pi - 4\beta} g_2(x)dx$$
$$+ \int_{2\hat{}(1/2)\pi - 4\beta}^{2\hat{}(1/2)\pi} g_2(x)dx$$
$$+ \int_{2\hat{}(1/2)\pi}^{2\pi} g_2(x)dx =$$
$$(3 - 2^{3/2})\pi^2 + (3 - 2^{3/2})4\beta\pi + (1 - 2^{1/2}4/3)8\beta^2 + 32\beta^3/(3\pi)$$
$$- 4(2 - 2^{1/2})\beta\pi + 4\beta^2(2^{3/2} - 2/3) - (32/3)\beta^3/\pi$$
$$+ (- 3 + 2^{1/2}\, 2)\pi^2 + (2^{1/2} - 1)4\beta\pi - (8/3)(2 - 2^{1/2})\beta^2 =$$
$$(3 - 2^{3/2})4\beta\pi + (1 - 2^{1/2}4/3)8\beta^2$$
$$-(2 - 2^{1/2})4\beta\pi + 4\beta^2(2^{3/2} - 2/3)$$
$$+ (2^{1/2} - 1)4\beta\pi - (8/3)(2 - 2^{1/2})\beta^2 =$$
$$(3 - 2^{1/2}2 - 2 + 2^{1/2} + 2^{1/2} - 1)4\beta\pi$$
$$+ 8\beta^2(1 - 2^{1/2}4/3 + 2^{1/2} - 1/3 - 2/3 + 2^{1/2}/3)$$
$$= 0.$$

Доказательство (при этом $M'' > M$)

$$\max_{x \in [0, 2\pi]} |g_2(x)| = M''.$$

Непрерывно дифференцируемая (односторонне на концах) на отрезке $[0, 2\pi]$ функция $g_2(x)$ может иметь непременно принимаемые экстремумы или там внутри интервала $(0, 2\pi)$, где её производная равна нулю, или на концах отрезка $[0, 2\pi]$.

Абсолютная величина $|g_2(x)|$ является непрерывной на отрезке $[0, 2\pi]$ функцией и своими максимумами может иметь либо абсолютные величины максимумов функции $g_2(x)$, либо абсолютные величины минимумов функции $g_2(x)$.

$$g_2(x) = M'' - x = 2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi - x$$
$$(0 \le x \le 2^{1/2}\pi - 4\beta),$$
$$g_2(x) = (1/4)(x + 2\beta - 2^{1/2}\pi)^2/\beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi\ (2^{1/2}\pi - 4\beta \le x \le 2^{1/2}\pi),$$
$$g_2(x) = x - 2\pi + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi\ (2^{1/2}\pi \le x \le 2\pi).$$

Значения функции $g_2(x)$ на концах отрезка $[0, 2\pi]$:

$$g_2(0) = M'' = 2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi > M > 0,$$
$$g_2(2\pi) = 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi = 2\beta(2^{1/2}3\pi - 8\beta)/(3\pi) >$$
$$2\beta(2^{1/2}3\pi - 2^{1/2}8\pi/4)/(3\pi) = 2^{1/2}2\beta/3 > 0,$$
$$g_2(0) - g_2(2\pi) = 2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta = M > 0,$$

поскольку (понадобилось и точное значение β)

$$0 < \beta < 2^{1/2}\pi/4,\ \beta = [2(2^{1/2} - 1)\pi - M]/4,\ 0 < M < M''.$$

Производная $g_2'(x)$ функции $g_2(x)$

$$g_2'(x) = -1 \ (0 \le x \le 2^{1/2}\pi - 4\beta),$$

$$g_2'(x) = (1/2)(x + 2\beta - 2^{1/2}\pi)/\beta \ (2^{1/2}\pi - 4\beta \le x \le 2^{1/2}\pi),$$

$$g_2'(x) = 1 \ (2^{1/2}\pi \le x \le 2\pi)$$

равна нулю только при

$$x = 2^{1/2}\pi - 2\beta$$

на среднем из трёх отрезков области определения функции $g_2(x)$:

$$g_2(x) = (1/4)(x + 2\beta - 2^{1/2}\pi)^2/\beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi \ (2^{1/2}\pi - 4\beta \le x \le 2^{1/2}\pi),$$

$$g_2(2^{1/2}\pi - 2\beta) = (1/4)(2^{1/2}\pi - 2\beta + 2\beta - 2^{1/2}\pi)^2/\beta - \pi(2 - 2^{1/2}) - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi = - (2 - 2^{1/2})\pi - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi.$$

$$M'' = 2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi.$$

$$M'' - g_2(2^{1/2}\pi - 2\beta) = 2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta + (2 - 2^{1/2})\pi + \beta =$$

$$3(2^{1/2} - 1)\pi - 3\beta > 3(2^{1/2} - 1)\pi - 2^{1/2}3\pi/4 = 3\pi(2^{1/2}3/4 - 1) > 0.$$

$$M'' + g_2(2^{1/2}\pi - 2\beta) = 2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi$$

$$- (2 - 2^{1/2})\pi - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi =$$

$$(2 - 2^{1/2})\pi + (2^{1/2}4 - 5)\beta - (8/3)\beta^2/\pi =$$

$$(2 - 2^{1/2})\pi + \beta(2^{1/2}4 - 5 - 8\beta/(3\pi)) >$$

$$(2 - 2^{1/2})\pi + \beta(2^{1/2}4 - 5 - 2^{1/2}2/3) =$$

$$(2 - 2^{1/2})\pi + \beta(2^{1/2}10 - 15)/3 >$$

$$(2 - 2^{1/2})\pi + 2^{1/2}\pi/4(2^{1/2}10 - 15)/3 =$$

$$\pi(2 - 2^{1/2} + (20 - 2^{1/2}15)/12) > 0,$$

$$|g_2(2^{1/2}\pi - 2\beta)| < M''.$$

Следовательно, что и требовалось доказать,

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|g_2(x)| = M'' > M.$$

С учётом точного значения

$$\beta = [2(2^{1/2} - 1)\pi - M]/4,$$

а не только неравенств,

$$g_2(0) = M'' = 2(2^{1/2} - 1)\pi - 4\beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi =$$
$$2(2^{1/2} - 1)\pi - 2(2^{1/2} - 1)\pi + M + 2^{3/2}[2(2^{1/2} - 1)\pi - M]/4 - (8/3)$$
$$[2(2^{1/2} - 1)\pi - M]^2/(16\pi) =$$
$$M + [2(2^{1/2} - 1)\pi - M]/2^{1/2} - [2(2^{1/2} - 1)\pi - M]^2/(6\pi),$$
$$g_2(2\pi) = [2(2^{1/2} - 1)\pi - M]/2^{1/2} - [2(2^{1/2} - 1)\pi - M]^2/(6\pi),$$
$$g_2(2^{1/2}\pi - 2\beta) = -(2 - 2^{1/2})\pi - \beta + 2^{3/2}\beta - (8/3)\beta^2/\pi =$$
$$(8 - 2^{1/2}5)\pi - (2^{1/2}2 - 1)M/4 - [2(2^{1/2} - 1)\pi - M]^2/(6\pi).$$

Функция же

$$g_3(x) = (M/M'')g_2(x)$$

имеет наперёд заданный максимум абсолютной величины

$$M = \max_{x\in[0,2\pi]}|g_3(x)|$$

и удовлетворяет условиям 2′′, 3 и усиливающему условие 1 условию

$$|g_3'(x)| \leq M/M'' < 1.$$

Замечание.

Для удобства приведём совокупность последних условий для функции f(x).

1. В каждой точке интервала $(0, 2\pi)$ производная $f'(x)$ функции $f(x)$ существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

2′′. $f(0)f(2\pi) \geq 0$.

3. Интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

Совокупность условий 2′′ и 3 вместе с условием 1 накладывает совместные ограничения на отклонение функции f(x) от нулевой константы. Поскольку условие 1 носит пропорциональный характер, то его роль вполне ясна и поэтому нет смысла ни отказываться от этого условия, ни изменять его. А раздельные влияния условий для значений функции f(x) в начале и в конце отрезка [0, 2π] (типа условий 2, 2′ и 2′′) и для

интеграла функции f(x) на отрезке [0, 2π] (условие 3) неочевидны и представляют собой достаточно интересные предметы дополнительных исследований. Соответствующие выводы даются следующими двумя теоремами.

В первой из этих двух теорем мы отказываемся от условия для значений функции в начале и в конце отрезка [0, 2π] (типа условий 2, 2′ и 2″).

Теорема 6.

Пусть непрерывная на отрезке [0, 2π] действительная функция f(x) удовлетворяет совокупности следующих условий:

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

3. Интеграл функции f(x) на отрезке [0, 2π] равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

Тогда на указанном отрезке [0, 2π] абсолютная величина значений функции f(x) не превышает π, то есть имеет место неравенство:

$$|f(x)| \le \pi \ (0 \le x \le 2\pi).$$

Доказательство методом от противоречащего.

Допустим противоречащее. Тогда существующий и принимаемый ввиду непрерывности функции f(x) максимум её абсолютной величины

$$M = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| > \pi.$$

Поэтому существует хотя бы одно такое

$$x_0 \in [0, 2\pi],$$

что или

$$f(x_0) = M,$$

или

$$f(x_0) = - M.$$

Ограничимся первым случаем

$$\mathbf{f(x_0) = M,}$$

поскольку второй случай

$$\mathbf{f(x_0) = - M}$$

сводится к первому случаю тривиальной подстановкой

$$\mathbf{h(x) = - f(x).}$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$\mathbf{f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \ [c \in (x', x), x' < x]}$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[x, x_0]$ $(0 \leq x \leq x_0)$, ввиду

$$f'(c) \leq 1$$

и

$$x_0 - x \geq 0$$

получаем

$$M - f(x) = f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x) \leq x_0 - x$$

$$[c \in (x, x_0),\ x < x_0],$$

или

$$f(x) \geq x - x_0 + M \ (0 \leq x \leq x_0).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \; [c \in (x', x), x' < x]$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ $(x_0 \leq x \leq 2\pi)$, ввиду

$$f'(c) \geq - 1$$

и

$$x - x_0 \geq 0$$

получаем

$$f(x) - M = f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \geq - x + x_0$$

$$[c \in (x_0, x), x_0 < x],$$

или

$$f(x) \geq - x + x_0 + M \ (x_0 \leq x \leq 2\pi).$$

Поэтому ввиду принятого допущения

$$M > \pi$$

по теореме Лагранжа о среднем значении имело бы место именно строгое неравенство

$$f(x) > \Phi(x),$$

где

$$\Phi(x) = x - x_0 + \pi \ (0 \leq x \leq x_0),$$

$$\Phi(x) = - x + x_0 + \pi \ (x_0 \leq x \leq 2\pi),$$

а при обозначении

$$x(0) = x_0$$

имеем:

$$\int_0^{2\pi}\Phi(x)dx = \int_0^{x(0)}\Phi(x)dx + \int_{x(0)}^{2\pi}\Phi(x)dx =$$

$$\int_0^{x(0)}(x - x_0 + \pi)dx + \int_{x(0)}^{2\pi}(- x + x_0 + \pi)dx =$$

$$x_0^2/2 - x_0^2 + \pi x_0 - 2\pi^2 + x_0^2/2 + 2\pi x_0 - x_0^2 + 2\pi^2 - \pi x_0$$

$$= 2\pi x_0 - x_0^2 = x_0(2\pi - x_0) \geq 0.$$

Очевидным образом нарушается условие 3, поскольку имеет место именно строгое неравенство

$$f(x) > \Phi(x),$$

так что

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx > \int_0^{2\pi} \Phi(x)dx \geq 0.$$

Полученное противоречие доказывает теорему 6.

Теорема 7. Теорема 6 не может быть усилена ни уменьшением постоянной π, ни даже отказом от равенства ей в заключении теоремы 6

$$|f(x)| \leq \pi \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

при этом отказе заменяемом на

$$|f(x)| < \pi \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Это доказывается любым из двух следующих контрпримеров функций, вполне удовлетворяющих всем условиям теоремы 6:

$$f(x) = g(x) = \pi - x \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$f(x) = h(x) = -\pi + x \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Проверка выполнения всех условий теоремы 6 функцией $f(x) = g(x) = \pi - x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$, $M = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| = \pi$.

1. В каждой точке интервала $(0, 2\pi)$ производная $f'(x)$ функции $f(x)$ существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = -1, \ |f'(x)| = 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

3. Интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ равен нулю: $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\pi - x)dx = \pi(2\pi - 0) - ((2\pi)^2 - 0^2)/2 =$$

$$2\pi^2 - 2\pi^2 = 0.$$

$$f(0) = \pi, \ f(2\pi) = -\pi, \ |f(0)| = |f(2\pi)| = M = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| = \pi.$$

Проверка выполнения всех условий теоремы 6 функцией $f(x) = h(x) = -\pi + x$ $(0 \le x \le 2\pi)$, $M = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| = \pi$.

1. В каждой точке интервала $(0, 2\pi)$ производная $f'(x)$ функции $f(x)$ существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = 1, |f'(x)| = 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

3. Интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ равен нулю: $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi}(-\pi + x)dx = -\pi(2\pi - 0) + ((2\pi)^2 - 0^2)/2 =$$

$$-2\pi^2 + 2\pi^2 = 0.$$

$$f(0) = -\pi, f(2\pi) = \pi, |f(0)| = |f(2\pi)| = M = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| = \pi.$$

Определение. Множество непременно всех элементов, удовлетворяющих совокупности условий, называется исчерпывающим для этой совокупности условий.

Пример. Исчерпывающее множество контрпримеров, удовлетворяющих всем условиям теоремы 6 и требующих знака именно нестрогого неравенства

$$|f(x)| \leq \pi$$

в её заключении, состоит именно и только из указанных двух контрпримеров

$$g(x) = \pi - x \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$h(x) = - \pi + x \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Приведённое множество контрпримеров является исчерпывающим в том смысле, что для любой функции f(x), удовлетворяющей всем условиям теоремы 6 и отличающейся от приведённых двух контрпримеров, в заключении теоремы 6 по теореме 8 равенство не достигается, то есть выполняется условие

$$|f(x)| < \pi \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Теорема 8.

Пусть непрерывная на отрезке [0, 2π] действительная функция f(x) удовлетворяет совокупности следующих условий:

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

3. Интеграл функции f(x) на отрезке [0, 2π] равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

4. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] не совпадает именно тождественно ни с одной из двух функций

$$g(x) = \pi - x \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$h(x) = -\pi + x \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Тогда на указанном отрезке [0, 2π] абсолютная величина значений функции f(x) строго меньше π, то есть имеет место неравенство

$$|f(x)| < \pi \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Доказательство методом от противоречащего.

Допустим противоречащее. Тогда существует такая удовлетворяющая всем условиям теоремы отличающаяся от обеих указанных функций π - x и x - π функция f(x), что существующий и принимаемый ввиду непрерывности функции f(x) максимум её абсолютной величины

$$M = \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)| \geq \pi.$$

Поэтому существует хотя бы одно такое

$$x_0 \in [0, 2\pi],$$

что или

$$f(x_0) = M,$$

или

$$f(x_0) = - M.$$

Ограничимся первым случаем

$$f(x_0) = M,$$

поскольку второй случай

$$f(x_0) = - M$$

сводится к первому случаю тривиальной подстановкой

$$h(x) = - f(x).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \ [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[x, x_0]$ $(0 \le x \le x_0)$, ввиду

$$f'(c) \le 1$$

и

$$x_0 - x \ge 0$$

получаем

$$M - f(x) = f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x) \le x_0 - x$$

$$[c \in (x, x_0),\ x < x_0],$$

или

$$f(x) \ge x - x_0 + M \ (0 \le x \le x_0).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x')\ [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ ($x_0 \leq x \leq 2\pi$), ввиду

$$f'(c) \geq -1$$

и

$$x - x_0 \geq 0$$

получаем

$$f(x) - M = f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \geq -x + x_0$$

$$[c \in (x_0, x),\ x_0 < x],$$

или

$$f(x) \geq -x + x_0 + M\ (x_0 \leq x \leq 2\pi).$$

Поэтому по теореме Лагранжа о среднем значении верно именно <u>нестрогое</u> неравенство

$$f(x) \geq \Phi_1(x),$$

где

$$\Phi_1(x) = x - x_0 + M \ (0 \leq x \leq x_0),$$

$$\Phi_1(x) = - x + x_0 + M \ (x_0 \leq x \leq 2\pi).$$

А ввиду принятого допущения

$$M \geq \pi$$

имеет место именно <u>нестрогое</u> неравенство

$$\Phi_1(x) \geq \Phi(x),$$

где

$$\Phi(x) = x - x_0 + \pi \ (0 \le x \le x_0),$$

$$\Phi(x) = - x + x_0 + \pi \ (x_0 \le x \le 2\pi).$$

Для функции Ф(x) при обозначении

$$x(0) = x_0$$

имеем:

$$\int_0^{2\pi}\Phi(x)dx = \int_0^{x(0)}\Phi(x)dx + \int_{x(0)}^{2\pi}\Phi(x)dx =$$

$$\int_0^{x(0)}(x - x_0 + \pi)dx + \int_{x(0)}^{2\pi}(- x + x_0 + \pi)dx =$$

$$x_0^2/2 - x_0^2 + \pi x_0 - 2\pi^2 + x_0^2/2 + 2\pi x_0 - x_0^2 + 2\pi^2 - \pi x_0$$

$$= 2\pi x_0 - x_0^2 = x_0(2\pi - x_0) \ge 0.$$

Ввиду непрерывности всех трёх функций, связанных отношениями именно нестрогих неравенств

$$f(x) \geq \Phi_1(x) \geq \Phi(x),$$

для выполнения условия 3 теоремы 8

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$$

необходимо выполнение именно в совокупности следующих трёх условий.

A. Функции f(x) и $\Phi_1(x)$ именно тождественно равны на отрезке $[0, 2\pi]$. Кроме того,

поскольку функция f(x) дифференцируема всюду в интервале (0, 2π), то x_0 не может быть именно внутренней точкой этого интервала, в которой кусочно-линейная функция $\Phi_1(x)$ имеет различные односторонние производные единицу слева и минус единицу справа, а может быть только одним из его концов 0 и 2π.

B. Функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi(x)$ именно тождественно равны на отрезке $[0, 2\pi]$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы в нестрогом неравенстве в принятом допущении

$$M \geq \pi$$

осуществлялось именно равенство

$$M = \pi.$$

C. В нестрогом неравенстве для интеграла функции $\Phi(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\int_0^{2\pi} \Phi(x)dx = x_0(2\pi - x_0) \geq 0$$

осуществляется именно равенство

$$\int_0^{2\pi}\Phi(x)dx = x_0(2\pi - x_0) = 0.$$

Для этого вновь необходимо и достаточно прежнее условие о том, что x_0 не может быть именно внутренней точкой интервала $(0, 2\pi)$, а может быть только одним из его концов 0 и 2π.

Рассмотрим поочередно обе эти возможности, которые только и могут осуществиться.

A. $x_0 = 0$.

Кроме того,

$$M = \pi,$$

$$f(x) \equiv \Phi_1(x) \equiv \Phi(x).$$

Поскольку

$$\Phi(x) = x - x_0 + \pi \ (0 \leq x \leq x_0),$$

$$\Phi(x) = - x + x_0 + \pi \ (x_0 \leq x \leq 2\pi),$$

то

$$f(x) = - x + \pi \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

что тождественно равно первому из двух контрпримеров

$$g(x) = \pi - x \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

B. $x_0 = 2\pi$. Кроме того,

$$M = \pi,$$

$$f(x) \equiv \Phi_1(x) \equiv \Phi(x).$$

Поскольку

$$\Phi(x) = x - x_0 + \pi \ (0 \le x \le x_0),$$

$$\Phi(x) = - x + x_0 + \pi \ (x_0 \le x \le 2\pi),$$

то

$$f(x) = x - 2\pi + \pi = x - \pi \ (0 \le x \le 2\pi),$$

что тождественно равно <u>второму</u> из <u>двух</u> <u>контрпримеров</u>

$$h(x) = - \pi + x \ (0 \le x \le 2\pi).$$

Полученное <u>противоречие</u> доказывает <u>отсутствие</u> <u>любого</u> <u>третьего</u> <u>контрпримера</u> и <u>теорему 8</u>.

Замечание. Для непрерывной на отрезке [0, 2π] и дифференцируемой (с нестрогой доединичностью абсолютной величины производной по условию 1) внутри этого отрезка функции f(x) с нулевым интегралом на этом отрезке (по условию 3) последние три теоремы 6, 7 и 8 отказались от условия 2 равенства значений функции f(x) на концах этого отрезка. Теорема 6 доказала именно нестрогую ограниченность абсолютной величины функции f(x) числом, равным π. Теорема 7 двумя контрпримерами доказала невозможность ни уменьшения этой верхней границы, ни даже замены

нестрогой ограниченности на строгую при сохранении этой верхней границы. Теорема 8 доказала, что эти два контрпримера образуют именно исчерпывающее множество всех контрпримеров, так что при условии 4 исключения обоих этих контрпримеров нестрогая ограниченность может быть заменена строгой ограниченностью при сохранении этой верхней границы. Однако остаётся последний вопрос о возможности усиления теоремы 8 именно уменьшением этой верхней границы. Этот вопрос решается отрицательно теоремой 9.

Теорема 9. Для любого действительного числа M от 0 включительно до π исключительно существует обладающая равным именно этому числу M максимумом абсолютной величины на отрезке [0, 2π] непрерывная на этом отрезке действительная функция f(x), удовлетворяющая совокупности следующих условий:

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и

по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

3. Интеграл функции f(x) на отрезке [0, 2π] равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

4. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] <u>не совпадает</u> именно <u>тождественно</u> ни с одной из двух функций

$$g(x) = \pi - x \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$h(x) = -\pi + x \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Доказательство. Дадим конструктивное доказательство этой теоремы построением даже двух примеров требуемых функций.

Для любого числа M от 0 включительно до π исключительно умножим обе части обоих этих контрпримеров на одно и то же строго меньшее единицы неотрицательное отношение M/π:

$$f(x) = g(x)M/\pi = (\pi - x)M/\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$f(x) = h(x)M/\pi = (- \pi + x)M/\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Проверка выполнения всех условий теоремы 9 функцией

$$f(x) = g(x)M/\pi = (\pi - x)M/\pi \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| = M.$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = - M/\pi, \ |f'(x)| = M/\pi < 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

3. Интеграл функции f(x) на отрезке [0, 2π] равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\pi - x)(M/\pi)dx =$$

$$\pi(2\pi - 0)M/\pi - ((2\pi)^2 - 0^2)(M/\pi)/2 =$$

$$2\pi^2 M/\pi - 2\pi^2 M/\pi = 0.$$

$$f(0) = \pi M/\pi = M,$$

$$f(2\pi) = -\pi M/\pi = -M,$$

$$|f(0)| = |f(2\pi)| = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| = M.$$

Проверка выполнения всех условий теоремы 9 функцией

$$f(x) = h(x)M/\pi = (-\pi + x)M/\pi \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| = M.$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = M/\pi, \ |f'(x)| = M/\pi < 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

3. Интеграл функции f(x) на отрезке [0, 2π] равен нулю: $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (-\pi + x)(M/\pi)dx =$$

$$-\pi(2\pi - 0)M/\pi + ((2\pi)^2 - 0^2)(M/\pi)/2 =$$

$$-2\pi^2 M/\pi + 2\pi^2 M/\pi = 0.$$

$$f(0) = -\pi M/\pi = -M,$$

$$f(2\pi) = \pi M/\pi = M,$$

$$|f(0)| = |f(2\pi)| = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| = M.$$

Тем самым теорема 9 доказана.

Замечание. В теореме 7 были указаны два контрпримера

$$f(x) = g(x) = \pi - x \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$f(x) = h(x) = - \pi + x \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

не позволяющие ослабить заключение теоремы 6 даже заменой нестрогого неравенства

$$|f(x)| \leq \pi \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

на строгое неравенство

$$|f(x)| < \pi \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

В теореме 8 было доказано, что оба этих контрпримера g(x) и h(x) в совокупности образуют именно исчерпывающее множество контрпримеров.

В теореме 9 оба этих контрпримера g(x) и h(x) своим умножением на меньшую единицы неотрицательную постоянную M/π дали два примера

$$f(x) = g(x)M/\pi = (\pi - x)M/\pi \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$f(x) = h(x)M/\pi = (- \pi + x)M/\pi \ (0 \le x \le 2\pi),$$

доказавшие невозможность ослабить заключение теоремы 6 именно уменьшением постоянной, равной π. Однако остаётся открытым вопрос, конечно или бесконечно множество таких примеров, а если оно конечно, то из скольких элементов состоит. На этот вопрос отвечает теорема 10.

Теорема 10. Пусть для любого действительного числа M от 0 включительно до π исключительно обладающая равным именно этому числу M максимумом абсолютной величины на отрезке [0, 2π]

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| = M$$

непрерывная на этом отрезке действительная функция f(x) удовлетворяет совокупности следующих условий:

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

3. Интеграл функции f(x) на отрезке [0, 2π] равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

4. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] не совпадает именно тождественно ни с одной из двух функций

$$g(x) = \pi - x \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$h(x) = -\pi + x \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Тогда множество всех таких функций f(x) одноэлементно при

$$M = 0$$

и бесконечно при

$$0 < M < \pi.$$

Доказательство.

Если

$$M = 0,$$

то условие

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| = M$$

влечёт тождественное аннулирование функции f(x),

$$f(x) = 0\ (0 \le x \le 2\pi),$$

так что при нулевом M оба приведённых в предыдущей теореме 9 примера

$$f(x) = g(x)M/\pi = (\pi - x)M/\pi\ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$f(x) = h(x)M/\pi = (- \pi + x)M/\pi\ (0 \le x \le 2\pi)$$

тождественно аннулируются и совпадают между собой, что видно и непосредственно, и поэтому множество всех таких функций действительно одноэлементно.

Пусть теперь

$$0 < M < \pi.$$

Логична попытка изменения каждого из примеров

$$f(x) = g(x)M/\pi = (\pi - x)M/\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$f(x) = h(x)M/\pi = (- \pi + x)M/\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

путём добавления к их правым частям с некоторым достаточно малым по абсолютной величине постоянным коэффициентом дифференцируемой на

отрезке [0, 2π] функции с нулевым интегралом на этом отрезке, обращающейся в нуль на обоих концах и посредине этого отрезка. Эта достаточная малость должна обеспечить, во-первых, отсутствие изменения максимума абсолютной величины суммарной функции по сравнению с максимумом абсолютной величины одной лишь функции соответствующего примера, а во-вторых, отсутствие превышения единицы абсолютной величиной производной этой суммарной функции. Попытаемся добавить функцию asin(x) или bx(x - π)(x - 2π) (с действительными постоянными a, b).

Другой логичной, простой и удобной представляется попытка замены каждого из этих примеров

$$f(x) = g(x)M/\pi = (\pi - x)M/\pi \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$f(x) = h(x)M/\pi = (- \pi + x)M/\pi \ (0 \le x \le 2\pi)$$

центрально симметричной относительно точки (π, 0) с абсциссой середины π отрезка интегрирования [0, 2π] и поэтому на нём обладающей именно нулевым интегралом и гладкой, то есть непрерывно дифференцируемой, именно строго монотонной (или возрастающей, или убывающей) кусочно-степенной функцией с теми же, что и в примере, значениями на концах и посредине этого отрезка.

Первый из двух примеров с добавлением asin(x) даёт $f(x) = g(x)M/\pi + a\sin(x) = (\pi - x)M/\pi + a\sin(x)$ ($0 \le x \le 2\pi$). Непрерывность и дифференцируемость этой функции на отрезке $[0, 2\pi]$ очевидны.

Имеющая постоянную производную величины ($-M/\pi$) и абсолютной величины M/π на отрезке $[0, 2\pi]$ функция

$$g(x)M/\pi = (\pi - x)M/\pi \ (0 \le x \le 2\pi)$$

достигает равного именно этому числу M максимума абсолютной величины на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|g(x)M/\pi| = \max_{x\in[0,2\pi]}|(\pi - x)M/\pi| = M$$

на обоих концах 0 и 2π этого отрезка, как раз там, где, как и в середине π этого отрезка с

аннулированием функции g(x)M/π, функция asin(x) аннулируется и имеет наибольшую абсолютную величину |a| производной. Чтобы и сумма f(x) этих двух функций имела именно тот же максимум M абсолютной величины на отрезке [0, 2π]

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| = \max_{x\in[0,2\pi]}|(\pi - x)M/\pi + a\sin(x)| = M,$$

достаточно, чтобы максимум |a| абсолютной величины |a| производной acos(x) функции asin(x) не превышал абсолютной величины M/π постоянной производной функции (π - x)M/π, то есть достаточно выполнение неравенства

$$|a| \leq M/\pi.$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 10 функцией $f(x) = g(x)M/\pi + a\sin(x) = (\pi - x)M/\pi + a\sin(x)$ $(0 \le x \le 2\pi)$.

1. В каждой точке интервала $(0, 2\pi)$ производная $f'(x)$ функции $f(x)$ существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$|f'(x)| = |- M/\pi + a\cos(x)| \le M/\pi + |a| \ (0 \le x \le 2\pi),$$

так что для

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi)$$

достаточно выполнение неравенства

$$|a| \le 1 - M/\pi.$$

3. Интеграл функции f(x) на отрезке [0, 2π] равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (\pi - x)(M/\pi)dx + \int_0^{2\pi} a\sin(x)dx =$$

$$2\pi M - (M/\pi)(4\pi^2 - 0^2)/2 + (a\cos(0) - a\cos(2\pi)) = 0 + 0 = 0.$$

4. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] <u>явно</u> <u>не совпадает</u> именно <u>тождественно</u> ни с одной из двух функций

$$g(x) = \pi - x\ (0 \le x \le 2\pi),\ h(x) = -\pi + x\ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге <u>достаточно</u> объединённое условие

$$|a| \le \min\{M/\pi, 1 - M/\pi\},$$

дающее <u>множество</u> <u>различных</u> функций f(x) <u>мощности</u> <u>континуума</u>. Такова и <u>мощность</u> <u>множества</u> <u>всех</u> <u>непрерывных</u> функций.

Первый из двух примеров с добавлением функции $bx(x - \pi)(x - 2\pi)$ даёт

$$f(x) = g(x)M/\pi + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$

$$(\pi - x)M/\pi + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\ (0 \le x \le 2\pi).$$

Для отсутствия даже локальных экстремумов непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ именно внутри отрезка $[0, 2\pi]$ достаточны отрицательность там производной

$$f'(x) = - M/\pi + b(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) = - M/\pi + b[3(x - \pi)^2 - \pi^2]$$

и поэтому при $b \ge 0$

$$f'(x) < - M/\pi + 2\pi^2 b\ (0 < x < 2\pi),$$

$$- M/\pi + 2\pi^2 b \le 0,\ 0 \le b \le M/(2\pi^3),$$

а при $b < 0$

$$f'(x) \leq - M/\pi - \pi^2 b \ (0 < x < 2\pi),$$

$$- M/\pi - \pi^2 b < 0, \ - M/\pi^3 < b < 0,$$

так что в итоге

$$- M/\pi^3 < b \leq M/(2\pi^3).$$

На обоих концах 0 и 2π отрезка $[0, 2\pi]$ с

$$f(0) = (\pi - 0)M/\pi + 0 = M,$$

$$f(2\pi) = (\pi - 2\pi)M/\pi + 0 = - M$$

функция $f(x)$ достигает равного именно этому числу M максимума абсолютной величины на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| = \max_{x\in[0,2\pi]}|g(x)M/\pi| =$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|(\pi - x)M/\pi| = M.$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 10 функцией

$$f(x) = (\pi - x)M/\pi + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \ (0 \le x \le 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = - M/\pi + b(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) = - M/\pi + b[3(x - \pi)^2 - \pi^2]$$

и для $|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi)$ **при** $0 \le b \le M/(2\pi^3)$

$$- M/\pi - \pi^2 b \le f'(x) < - M/\pi + 2\pi^2 b \le - M/\pi + 2\pi^2 M/(2\pi^3) = 0,$$

$$- 1 \le - M/\pi - \pi^2 b,\ M/\pi + \pi^2 b \le 1,\ b \le 1/\pi^2 - M/\pi^3,$$

$$0 \le b \le \min\{M/(2\pi^3),\ 1/\pi^2 - M/\pi^3\},$$

а для $|f'(x)| \le 1$ $(0 < x < 2\pi)$ при $-M/\pi^3 < b < 0$

$$-M/\pi + 2\pi^2 b < f'(x) \le -M/\pi - \pi^2 b \ (0 < x < 2\pi),$$

$$f'(x) \le -M/\pi - \pi^2 b < -M/\pi + \pi^2 M/\pi^3 = 0,$$

$$-1 \le -M/\pi + 2\pi^2 b,\ 2\pi^2 b \ge -1 + M/\pi,\ b \ge -1/(2\pi^2) + M/(2\pi^3),$$

$$-\min\{M/\pi^3,\ 1/(2\pi^2) - M/(2\pi^3)\} < b < 0,$$

так что в итоге <u>достаточно</u> выполнение неравенств

$$-\min\{M/\pi^3,\ 1/(2\pi^2) - M/(2\pi^3)\} < b \le \min\{M/(2\pi^3),\ 1/\pi^2 - M/\pi^3\}.$$

3. Интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi}(\pi - x)(M/\pi)dx + \int_0^{2\pi} b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)dx = [2\pi M - (M/\pi)(4\pi^2 - 0^2)/2] + b(2^4\pi^4/4 - 3\pi 2^3\pi^3/3 + 2\pi^2 2^2\pi^2/2) = (2\pi M - 2\pi M) + b(4\pi^4 - 8\pi^4 + 4\pi^4) = 0 + 0 = 0.$$

4. Функция $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ <u>явно</u> <u>не совпадает</u> именно <u>тождественно</u> ни с одной из двух функций

$$g(x) = \pi - x\ (0 \leq x \leq 2\pi),\ h(x) = -\pi + x\ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

В итоге <u>достаточно</u> объединённое условие

$$-\min\{M/\pi^3, 1/(2\pi^2) - M/(2\pi^3)\} < b \leq \min\{M/(2\pi^3), 1/\pi^2 - M/\pi^3\},$$

дающее <u>множество</u> <u>различных</u> функций $f(x)$ <u>мощности</u> <u>континуума</u>. Такова и <u>мощность</u> <u>множества</u> <u>всех</u> <u>непрерывных</u> функций.

Остаётся попытка замены первого из примеров

$$f(x) = g(x)M/\pi = (\pi - x)M/\pi \ (0 \le x \le 2\pi)$$

центрально симметричной относительно точки (π, 0) с абсциссой середины π отрезка интегрирования [0, 2π] и поэтому на нём обладающей именно нулевым интегралом и гладкой, то есть непрерывно дифференцируемой, именно строго монотонной (или возрастающей, или убывающей) кусочно-степенной функцией

$$f(x) = M - M(x/\pi)^d \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f(x) = - M + M(2 - x/\pi)^d \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1)$$

с теми же, что и у функции g(x)M/π, значениями

$$f(0) = M,\ f(\pi) = 0,\ f(2\pi) = - M$$

на концах и посредине этого отрезка [0, 2π].

Функция f(x) непрерывна на [0, 2π], поскольку

$$f(\pi) = M - M(\pi/\pi)^d = - M + M(2 - \pi/\pi)^d = 0.$$

Производная функции f(x)

$$f'(x) = - d(x/\pi)^{d-1}M/\pi \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f'(x) = - d(2 - x/\pi)^{d-1}M/\pi \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1)$$

непрерывна на отрезке [0, 2π], поскольку

$$f'(\pi) = - d(\pi/\pi)^{d-1}M/\pi = - d(2 - \pi/\pi)^{d-1}M/\pi = - dM/\pi,$$

причём на отрезке [0, π] строго монотонно убывает от 0 до этого значения (-dM/π), а на отрезке [π, 2π] строго монотонно возрастает от значения (-dM/π) до 0, так что именно это значение (-dM/π) и является на отрезке [0, 2π] минимумом производной

$$\min_{x\in[0,2\pi]} f'(x) = f'(\pi) = -\, dM/\pi$$

с максимумом dM/π её абсолютной величины

$$\max_{x\in[0,2\pi]} |f'(x)| = |f'(\pi)| = dM/\pi.$$

Поэтому сама функция $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ строго монотонно убывает от M до $(-M)$, так что именно эти значения и являются максимумом

$$\max_{x\in[0,2\pi]} f(x) = f(0) = M$$

и минимумом

$$\min_{x\in[0,2\pi]} f(x) = f(2\pi) = -\, M$$

функции $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ с максимумом её абсолютной величины

$$\max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| = |f(0)| = |f(2\pi)| = M.$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 10 функцией

$$f(x) = M - M(x/\pi)^d \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f(x) = - M + M(2 - x/\pi)^d \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = - d(x/\pi)^{d-1}M/\pi \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f'(x) = - d(2 - x/\pi)^{d-1}M/\pi \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1),$$

$$- \min_{x\in[0,2\pi]}f'(x) = - f'(\pi) = \max_{x\in[0,2\pi]}|f'(x)| = |f'(\pi)| = dM/\pi,$$

$$dM/\pi \le 1,\ 1 < d \le \pi/M.$$

3. Интеграл функции f(x) на отрезке [0, 2π] равен нулю: $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi}[M - M(x/\pi)^d]dx + \int_\pi^{2\pi}[- M + M(2 - x/\pi)^d]dx$$
$$= [\pi M - \pi M(\pi/\pi)^{d+1}/(d + 1)] + [- (2\pi - \pi)M - \pi M(2 - 2\pi/\pi)^{d+1}/(d + 1) + \pi M(2 - \pi/\pi)^{d+1}/(d + 1)] =$$
$$- \pi M/(d + 1) + \pi M/(d + 1) = 0.$$

4. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] <u>явно</u> <u>не совпадает</u> именно <u>тождественно</u> ни с одной из двух функций

$$g(x) = \pi - x \ (0 \le x \le 2\pi,\ d = 1),\ h(x) = - \pi + x \ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге <u>достаточно</u> условие $1 < d \le \pi/M$, дающее <u>множество различных</u> функций f(x) <u>мощности</u> <u>континуума</u>. Такова и <u>мощность</u> <u>множества</u> <u>всех</u> <u>непрерывных</u> функций.

Второй из двух примеров с добавлением asin(x) даёт $f(x) = h(x)M/\pi + a\sin(x) = (x - \pi)M/\pi + a\sin(x)$ ($0 \leq x \leq 2\pi$). Непрерывность и дифференцируемость этой функции на отрезке [0, 2π] очевидны.

Имеющая постоянную производную величины и абсолютной величины M/π на отрезке [0, 2π] функция

$$h(x)M/\pi = (x - \pi)M/\pi \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

достигает равного именно этому числу M максимума абсолютной величины на отрезке [0, 2π]

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|h(x)M/\pi| = \max_{x\in[0,2\pi]}|(x - \pi)M/\pi| = M$$

на обоих концах 0 и 2π этого отрезка, как раз там, где, как и в середине π этого отрезка с

аннулированием функции h(x)M/π, функция asin(x) аннулируется и имеет наибольшую абсолютную величину |a| производной. Чтобы и сумма f(x) этих двух функций имела именно тот же максимум M абсолютной величины на отрезке [0, 2π]

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| = \max_{x\in[0,2\pi]}|(\pi - x)M/\pi + a\sin(x)| = M,$$

достаточно, чтобы максимум |a| абсолютной величины |a| производной acos(x) функции asin(x) не превышал абсолютной величины M/π постоянной производной функции (π - x)M/π, то есть достаточно выполнение неравенства

$$|a| \le M/\pi.$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 10 функцией $f(x) = h(x)M/\pi + a\sin(x) = (x - \pi)M/\pi + a\sin(x)$ $(0 \le x \le 2\pi)$.

1. В каждой точке интервала $(0, 2\pi)$ производная $f'(x)$ функции $f(x)$ существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$|f'(x)| = |M/\pi + a\cos(x)| \le M/\pi + |a| \ (0 \le x \le 2\pi),$$

так что для

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi)$$

достаточно выполнение неравенства

$$|a| \le 1 - M/\pi.$$

3. Интеграл функции f(x) на отрезке [0, 2π] равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi}(x - \pi)(M/\pi)dx + \int_0^{2\pi} a\sin(x)dx =$$

$$(M/\pi)(4\pi^2 - 0^2)/2 - 2\pi M + (a\cos(0) - a\cos(2\pi)) = 0 + 0 = 0.$$

4. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из двух функций

$$g(x) = \pi - x\ (0 \le x \le 2\pi),\ h(x) = -\pi + x\ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге достаточно объединённое условие

$$|a| \le \min\{M/\pi, 1 - M/\pi\},$$

дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Второй из двух примеров с добавлением функции $bx(x - \pi)(x - 2\pi)$ даёт

$$f(x) = h(x)M/\pi + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$

$$(x - \pi)M/\pi + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Для отсутствия даже локальных экстремумов непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ именно внутри отрезка $[0, 2\pi]$ достаточны положительность там производной

$$f'(x) = M/\pi + b(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) = M/\pi + b[3(x - \pi)^2 - \pi^2]$$

и поэтому при $b \geq 0$

$$f'(x) \geq M/\pi - \pi^2 b > 0 \ (0 < x < 2\pi),$$

$$0 \leq b < M/\pi^3,$$

а при b < 0

$$f'(x) > M/\pi + 2\pi^2 b \geq 0 \ (0 < x < 2\pi),$$

$$- M/(2\pi^3) \leq b < 0,$$

так что в итоге

$$- M/(2\pi^3) \leq b < M/\pi^3.$$

На обоих концах 0 и 2π отрезка [0, 2π] с

$$f(0) = (0 - \pi)M/\pi + 0 = - M,$$

$$f(2\pi) = (2\pi - \pi)M/\pi + 0 = M$$

функция f(x) достигает равного именно этому числу M максимума абсолютной величины на отрезке [0, 2π]

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x)| = \max_{x\in[0,2\pi]}|h(x)M/\pi| =$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|(\pi - x)M/\pi| = M.$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 10 функцией

$$f(x) = (x - \pi)M/\pi + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1\ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = M/\pi + b(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) = M/\pi + b[3(x - \pi)^2 - \pi^2]$$

и поэтому для $|f'(x)| \leq 1\ (0 < x < 2\pi)$ при $0 \leq b < M/\pi^3$

$$M/\pi - \pi^2 b \leq f'(x) < M/\pi + 2\pi^2 b \leq 1,$$

$$M/\pi + 2\pi^2 b \leq 1,\ b \leq 1/(2\pi^2) - M/(2\pi^3),$$

достаточно $0 \leq b < \min\{M/\pi^3, 1/(2\pi^2) - M/(2\pi^3)\},$

а для $|f'(x)| \leq 1$ $(0 < x < 2\pi)$ при $-M/(2\pi^3) \leq b < 0$

$$M/\pi + 2\pi^2 b < f'(x) \leq M/\pi - \pi^2 b \quad (0 < x < 2\pi),$$

$$f'(x) \leq M/\pi - \pi^2 b \leq 1,$$

$$M/\pi - \pi^2 b \leq 1, \; \pi^2 b \geq -1 + M/\pi,$$

$$b \geq -1/\pi^2 + M/\pi^3,$$

$$-\min\{M/(2\pi^3), 1/\pi^2 - M/\pi^3\} \leq b < 0,$$

так что в итоге <u>достаточно</u> выполнение неравенств

$$-\min\{M/(2\pi^3), 1/\pi^2 - M/\pi^3\} \leq b < \min\{M/\pi^3, 1/(2\pi^2) - M/(2\pi^3)\}.$$

3. Интеграл функции f(x) на отрезке $[0, 2\pi]$ равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi}(x - \pi)(M/\pi)dx + \int_0^{2\pi} b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)dx = [(M/\pi)(4\pi^2 - 0^2)/2 - 2\pi M] + b(2^4\pi^4/4 - 3\pi 2^3\pi^3/3 + 2\pi^2 2^2\pi^2/2) = (2\pi M - 2\pi M) + b(4\pi^4 - 8\pi^4 + 4\pi^4) = 0 + 0 = 0.$$

4. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из двух функций

$$g(x) = \pi - x\ (0 \le x \le 2\pi),\ h(x) = -\pi + x\ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге достаточно объединённое условие

$$-\min\{M/(2\pi^3),\ 1/\pi^2 - M/\pi^3\} \le b < \min\{M/\pi^3,\ 1/(2\pi^2) - M/(2\pi^3)\},$$

дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Остаётся попытка замены второго из примеров

$$f(x) = h(x)M/\pi = (x - \pi)M/\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

центрально симметричной относительно точки (π, 0) с абсциссой середины π отрезка интегрирования [0, 2π] и поэтому на нём обладающей именно нулевым интегралом и гладкой, то есть непрерывно дифференцируемой, именно строго монотонной (или возрастающей, или убывающей) кусочно-степенной функцией

$$f(x) = - M + M(x/\pi)^d \ (0 \leq x \leq \pi, d > 1),$$

$$f(x) = M - M(2 - x/\pi)^d \ (\pi \leq x \leq 2\pi, d > 1)$$

с теми же, что и у функции $h(x)M/\pi$, значениями

$$f(0) = - M,\ f(\pi) = 0,\ f(2\pi) = M$$

на концах и посредине этого отрезка [0, 2π]. Функция f(x) непрерывна на [0, 2π], поскольку

$$f(\pi) = - M + M(\pi/\pi)^d = M - M(2 - \pi/\pi)^d = 0.$$

Производная функции f(x)

$$f'(x) = d(x/\pi)^{d-1}M/\pi\ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f'(x) = d(2 - x/\pi)^{d-1}M/\pi\ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1)$$

непрерывна на отрезке [0, 2π], поскольку

$$f'(\pi) = d(\pi/\pi)^{d-1}M/\pi = d(2 - \pi/\pi)^{d-1}M/\pi = dM/\pi,$$

причём на отрезке [0, π] строго монотонно возрастает от 0 до этого значения dM/π, а на отрезке [π, 2π] строго монотонно убывает от значения dM/π

до 0, так что именно это значение dM/π и является на отрезке $[0, 2\pi]$ максимумом и производной

$$\max_{x\in[0,2\pi]} f'(x) = f'(\pi) = dM/\pi,$$

и её абсолютной величины

$$\max_{x\in[0,2\pi]} |f'(x)| = |f'(\pi)| = dM/\pi.$$

Поэтому сама функция $f(x)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ строго монотонно возрастает от $(-M)$ до M, так что именно эти значения и являются минимумом

$$\min_{x\in[0,2\pi]} f(x) = f(0) = -M$$

и максимумом

$$\max_{x\in[0,2\pi]} f(x) = f(2\pi) = M$$

функции f(x) на отрезке [0, 2π] с максимумом её абсолютной величины

$$\max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| = |f(0)| = |f(2\pi)| = M.$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 10 функцией

$$f(x) = -M + M(x/\pi)^d \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f(x) = M - M(2 - x/\pi)^d \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1).$$

1. В <u>каждой</u> точке <u>интервала</u> (0, 2π) <u>производная</u> f′(x) функции f(x) <u>существует</u> и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = d(x/\pi)^{d-1}M/\pi \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f'(x) = d(2 - x/\pi)^{d-1}M/\pi \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1),$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]} f'(x) = f'(\pi) = \max_{x\in[0,2\pi]}|f'(x)| = |f'(\pi)| = dM/\pi,$$

$$dM/\pi \le 1,\ 1 < d \le \pi/M.$$

3. Интеграл функции f(x) на отрезке [0, 2π] равен нулю:

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0.$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi}[- M + M(x/\pi)^d]dx + \int_{\pi}^{2\pi}[M - M(2 - x/\pi)^d]dx = [- \pi M + \pi M(\pi/\pi)^{d+1}/(d + 1)] + [(2\pi - \pi)M + \pi M(2 - 2\pi/\pi)^{d+1}/(d + 1) - \pi M(2 - \pi/\pi)^{d+1}/(d + 1)] =$$

$$\pi M/(d + 1) - \pi M/(d + 1) = 0.$$

4. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из двух функций

$$g(x) = \pi - x \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$h(x) = -\pi + x \ (0 \le x \le 2\pi, d = 1).$$

В итоге достаточно условие $1 < d \le \pi/M$, дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Тем самым теорема 10 доказана полностью.

Замечание. Остаётся исследовать влияние отказа от условия 3 об аннулировании интеграла функции f(x) на отрезке [0, 2π].

Однако тогда нужно воспрепятствовать возможности прибавления к функции f(x) или вычитания из неё постоянной, абсолютная величина которой может быть сделана сколь угодно большой.

С этой целью вместо условия 2 зададим, причём в общей форме, лишь одно из значений функции f(x),

да ещё и без указания, в какой именно точке отрезка [0, 2π] это значение принимается функцией f(x).

Теорема 11. Пусть непрерывная на отрезке [0, 2π] действительная функция f(x) удовлетворяет совокупности следующих условий:

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

2‴. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

Тогда на указанном отрезке [0, 2π] значения функции f(x) отклоняются от этого значения V не более чем на 2π в каждую из обеих сторон (вниз и вверх), то есть имеет место двойное неравенство:

$$V - 2\pi \leq f(x) \leq V + 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

или, равносильно,

$$|f(x) - V| \leq 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Доказательство.

По условию 2‴ существует хотя бы одно такое

$$x_0 \in [0, 2\pi],$$

что

$$f(x_0) = V.$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \ [c \in (x', x), x' < x]$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[x, x_0]$ $(0 \le x \le x_0)$, ввиду

$$f'(c) \le 1$$

и

$$x_0 - x \ge 0$$

получаем

$$V - f(x) = f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x) \le x_0 - x$$

$$[c \in (x, x_0),\ x < x_0],$$

или

$$f(x) \ge x - x_0 + V\ (0 \le x \le x_0).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x')\ [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[x, x_0]$ $(0 \leq x \leq x_0)$, ввиду

$$f'(c) \geq -1$$

и

$$x_0 - x \geq 0$$

получаем

$$V - f(x) = f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x)\ f'(c) \geq x - x_0$$

$$[c \in (x, x_0),\ x < x_0],$$

или

$$f(x) \le x_0 - x + V \ (0 \le x \le x_0).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \ [c \in (x', x), x' < x]$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ $(x_0 \le x \le 2\pi)$, ввиду

$$f'(c) \le 1$$

и

$$x - x_0 \ge 0$$

получаем

$$f(x) - V = f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \le x - x_0$$

$$[c \in (x_0, x), x_0 < x],$$

или

$$f(x) \le x - x_0 + V \ (x_0 \le x \le 2\pi).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \ [c \in (x', x), x' < x]$$

к функции $f(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ ($x_0 \le x \le 2\pi$), ввиду

$$f'(c) \geq - 1$$

и

$$x - x_0 \geq 0$$

получаем

$$f(x) - V = f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \geq - x + x_0$$

$$[c \in (x_0, x), x_0 < x],$$

или

$$f(x) \geq - x + x_0 + V \ (x_0 \leq x \leq 2\pi).$$

Поэтому имеют место двойные неравенства

$$x - x_0 \leq f(x) - V \leq x_0 - x \ (0 \leq x \leq x_0),$$

$$-x + x_0 \leq f(x) - V \leq x - x_0 \ (x_0 \leq x \leq 2\pi).$$

Следовательно,

$$|f(x) - V| \leq |x - x_0| \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Поскольку

$$x \in [0, 2\pi]$$

и

$$x_0 \in [0, 2\pi],$$

то

$$|x - x_0| \leq 2\pi - 0 = 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

В итоге

$$|f(x) - V| \leq |x - x_0| \leq 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$|f(x) - V| \leq 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$V - 2\pi \leq f(x) \leq V + 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

что и требовалось доказать теоремой 11.

Теорема 12. Теорема 11 не может быть усилена ни уменьшением постоянной 2π, ни даже отказом от равенства ей в заключении теоремы 11

$$|f(x) - V| \leq 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

при этом заменяемом на

$$|f(x) - V| < 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Это доказывается любым из четырёх следующих контрпримеров функций, вполне удовлетворяющих всем условиям теоремы 11:

$$f(x) = g(x) = - x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$f(x) = G(x) = x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$f(x) = h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$f(x) = H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Эти контрпримеры основываются на двух необходимых и в совокупности достаточных условиях:

A. Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ всюду на отрезке $[0, 2\pi]$ постоянна и равна или +1, или -1.

B. Точка x_0, в которой функция принимает заданное значение V, располагается или в начале 0 отрезка [0,

2π], или в конце 2π отрезка [0, 2π], чтобы обеспечить возможность равенства

$$|x - x_0| = 2\pi$$

путём выбора x в противоположном относительно точки x_0 конце отрезка [0, 2π].

Замечание. Исчерпывающее множество контрпримеров, удовлетворяющих всем условиям теоремы 12 и требующих знака именно нестрогого неравенства

$$|f(x) - V| \leq 2\pi$$

в её заключении, состоит именно и только из указанных четырёх контрпримеров

$$f(x) = g(x) = - x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$f(x) = G(x) = x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$f(x) = h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$f(x) = H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Приведённое множество контрпримеров является исчерпывающим в том смысле, что для любой функции f(x), удовлетворяющей всем условиям

теоремы 12 и отличающейся от приведённых четырёх контрпримеров, в заключении теоремы 12 равенство не достигается, то есть выполняется условие

$$|f(x) - V| < 2\pi \ (0 \le x \le 2\pi).$$

Проверка выполнения всех условий теоремы 12 функцией

$$f(x) = g(x) = - x + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = -1, |f'(x)| = 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

2′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

$$f(0) = V.$$

Имеет место двойное неравенство:

$$V - 2\pi \leq f(x) \leq V + 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

или, равносильно,

$$|f(x) - V| \leq 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

$$f(0) = V, \ f(2\pi) = - 2\pi + V,$$

$$V - 2\pi \leq f(x) \leq V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$- 2\pi \leq f(x) - V \leq 0 \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Проверка выполнения всех условий теоремы 12 функцией

$$f(x) = G(x) = x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала $(0, 2\pi)$ производная $f'(x)$ функции $f(x)$ существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = 1, |f'(x)| = 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

2′′. В одной из точек отрезка $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ принимает значение V.

$$f(0) = V.$$

Имеет место двойное неравенство:

$$V - 2\pi \leq f(x) \leq V + 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

или, равносильно,

$$|f(x) - V| \leq 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

$$f(0) = V,\ f(2\pi) = 2\pi + V,$$

$$V \leq f(x) \leq V + 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$0 \leq f(x) - V \leq 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Проверка выполнения всех условий теоремы 12 функцией

$$f(x) = h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = -1, |f'(x)| = 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

2′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

$$f(2\pi) = V.$$

Имеет место двойное неравенство:

$$V - 2\pi \le f(x) \le V + 2\pi \ (0 \le x \le 2\pi),$$

или, равносильно,

$$|f(x) - V| \le 2\pi \ (0 \le x \le 2\pi).$$

$$f(0) = 2\pi + V, \ f(2\pi) = V,$$

$$V \le f(x) \le V + 2\pi \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$0 \le f(x) - V \le 2\pi \ (0 \le x \le 2\pi).$$

Проверка выполнения всех условий теоремы 12 функцией

$$f(x) = H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

1. В <u>каждой</u> точке <u>интервала</u> $(0, 2\pi)$ <u>производная</u> $f'(x)$ функции $f(x)$ существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = 1, |f'(x)| = 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

2′′. В одной из точек отрезка $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ принимает значение V.

$$f(2\pi) = V.$$

Имеет место двойное неравенство:

$$V - 2\pi \leq f(x) \leq V + 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

или, равносильно,

$$|f(x) - V| \leq 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

$$f(0) = V - 2\pi, \ f(2\pi) = V,$$

$$V - 2\pi \leq f(x) \leq V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$- 2\pi \leq f(x) - V \leq 0 \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

что и требовалось доказать теоремой 12.

Теорема 13.

Пусть непрерывная на отрезке [0, 2π] действительная функция f(x) удовлетворяет совокупности следующих условий:

1. В <u>каждой</u> точке <u>интервала</u> (0, 2π) <u>производная</u> f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы: |f′(x)| ≤ 1 (0 < x < 2π).

2′′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] <u>не совпадает</u> именно <u>тождественно</u> ни с одной из <u>четырёх</u> функций

$$g(x) = - x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$G(x) = x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

Тогда на указанном отрезке [0, 2π] абсолютная величина значений функции f(x) - V строго меньше 2π, то есть имеет место неравенство

$$|f(x) - V| < 2\pi \ (0 \le x \le 2\pi).$$

Доказательство методом от противоречащего. Допустим противоречащее. Тогда существует такая удовлетворяющая всем условиям теоремы отличающаяся от всех

четырёх указанных функций g(x), G(x), h(x) и H(x) функция f(x), что существующий и принимаемый ввиду непрерывности функции f(x) - V максимум её абсолютной величины

$$M = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| \geq 2\pi.$$

По условию 2‴ существует хотя бы одно такое

$$x_0 \in [0, 2\pi],$$

что

$$f(x_0) = V.$$

Теоремой 11 посредством четырёхкратного применения теоремы Лагранжа о среднем значении доказано следующее.

Имеют место двойные неравенства

$$x - x_0 \leq f(x) - V \leq x_0 - x \ (0 \leq x \leq x_0),$$

$$- x + x_0 \leq f(x) - V \leq x - x_0 \ (x_0 \leq x \leq 2\pi).$$

Следовательно,

$$|f(x) - V| \leq |x - x_0| \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Поскольку

$$x \in [0, 2\pi]$$

и

$$x_0 \in [0, 2\pi],$$

то

$$|x - x_0| \le 2\pi - 0 = 2\pi \ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге

$$|f(x) - V| \le |x - x_0| \le 2\pi \ (0 \le x \le 2\pi),$$
$$|f(x) - V| \le 2\pi \ (0 \le x \le 2\pi),$$
$$V - 2\pi \le f(x) \le V + 2\pi \ (0 \le x \le 2\pi).$$

А по <u>допущению</u> <u>противоречащего</u> существует такая <u>удовлетворяющая</u> <u>всем</u> <u>условиям</u> <u>теоремы</u> <u>отличающаяся</u> от <u>всех</u> <u>четырёх</u> <u>указанных</u> <u>функций</u> g(x), G(x),

h(x) и H(x) функция f(x), что существующий и принимаемый ввиду непрерывности функции f(x) - V максимум её абсолютной величины

$$M = \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x) - V| \geq 2\pi.$$

Сопоставление этого нестрогого неравенства с доказанным неравенством

$$|f(x) - V| \leq 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

необходимо даёт именно и только равенство

$$M = \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x) - V| = 2\pi$$

в том нестрогом неравенстве.

Поэтому необходимо существует хотя бы одно такое

$$x_1 \in [0, 2\pi],$$

что для пары $(f(x_1), V)$ есть только две возможности: или

$$f(x_1) - V = 2\pi,$$

или

$$f(x_1) - V = - 2\pi.$$

Кроме того,

$$|f(x) - V| \leq |x - x_0| \leq 2\pi \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

так что, в частности, эти верные для любого $x \in [0, 2\pi]$ нестрогие неравенства верны и для x_1:

$$|f(x_1) - V| \le |x_1 - x_0| \le 2\pi,$$

причём по условию существования именно такого x_1 в обоих этих нестрогих неравенствах имеют место именно равенства:

$$|f(x_1) - f(x_0)| = |f(x_1) - V| = |x_1 - x_0| = 2\pi.$$

Поскольку

$$x_0 \in [0, 2\pi],$$

$$x_1 \in [0, 2\pi],$$

то

$$|x_1 - x_0| \le 2\pi - 0 = 2\pi \ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге и для упорядоченной пары (x_0, x_1) есть только две возможности: или

$$(x_0, x_1) = (0, 2\pi),$$

или

$$(x_0, x_1) = (2\pi, 0).$$

Рассмотрим по порядку 4 случая A, B, C, D всевозможных сочетаний этих обеих пар возможностей:

A. $x_0 = 0$, $x_1 = 2\pi$,

$f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = - 2\pi$.

B. $x_0 = 0$, $x_1 = 2\pi$, $f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = 2\pi$.

C. $x_0 = 2\pi$, $x_1 = 0$, $f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = 2\pi$.

D. $x_0 = 2\pi$, $x_1 = 0$,

$f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = - 2\pi$.

A. $x_0 = 0$, $x_1 = 2\pi$,

$$f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = - 2\pi.$$

Докажем, что для этого необходимо и достаточно

$$f(x) = g(x) = - x + V \; (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Имеем

$$f(x_0) = f(0) = V,$$

$$f(x_1) = f(2\pi) = V - 2\pi.$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x')\ [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции f(x) на отрезке [0, x] ($0 \le x \le 2\pi$), ввиду

$$f'(c) \ge -1$$

и

$$x \ge 0$$

получаем

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \ge -x$$

$$[c \in (0, x),\ 0 < x],$$

$$f(x) \ge -x + f(0)\ (0 \le x \le 2\pi).$$

Ввиду f(0) = V

$$f(x) \ge -x + V\ (0 \le x \le 2\pi).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \ [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции f(x) на отрезке [x, 2π] (0 ≤ x ≤ 2π), ввиду

$$f'(c) \geq -1$$

и

$$2\pi - x \geq 0$$

получаем

$$f(2\pi) - f(x) = f'(c)(2\pi - x) \geq -(2\pi - x) = x - 2\pi$$

$$[c \in (x, 2\pi),\ x < 2\pi],$$

$$f(x) \leq -x + 2\pi + f(2\pi) \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Ввиду f(2π) = V - 2π

$$f(x) \leq -x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Полученная совокупность двух нестрогих неравенств

$$f(x) \geq - x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$f(x) \leq - x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

влечёт требуемое тождество

$$f(x) = g(x) = - x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Обратно, из этого тождества следуют

$$f(0) = V, \ x_0 = 0,$$

$$f(2\pi) = V - 2\pi, \ x_1 = 2\pi,$$

$$f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = - 2\pi,$$

$$\text{A. } x_0 = 0, \ x_1 = 2\pi, \ f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = - 2\pi.$$

Требуемые <u>необходимость</u> и <u>достаточность</u> <u>доказаны</u>.

B. $x_0 = 0$, $x_1 = 2\pi$,

$$f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = 2\pi.$$

Докажем, что для этого необходимо и достаточно

$$f(x) = G(x) = x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Имеем

$$f(x_0) = f(0) = V,$$

$$f(x_1) = f(2\pi) = V + 2\pi.$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \ [c \in (x', x), x' < x]$$

к функции f(x) на отрезке [0, x] ($0 \leq x \leq 2\pi$), ввиду

$$f'(c) \leq 1$$

и

$$x \geq 0$$

получаем

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \leq x$$

$$[c \in (0, x), 0 < x],$$

$$f(x) \leq x + f(0) \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Ввиду f(0) = V

$$f(x) \leq x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \; [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции f(x) на отрезке [x, 2π] (0 ≤ x ≤ 2π), ввиду

$$f'(c) \le 1$$

и

$$2\pi - x \ge 0$$

получаем

$$f(2\pi) - f(x) = f'(c)(2\pi - x) \le 2\pi - x$$

$$[c \in (x, 2\pi),\ x < 2\pi],$$

$$f(x) \ge x - 2\pi + f(2\pi) \; (0 \le x \le 2\pi).$$

Ввиду f(2π) = V + 2π

$$f(x) \ge x + V \; (0 \le x \le 2\pi).$$

Полученная совокупность двух нестрогих неравенств

$$f(x) \leq x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$f(x) \geq x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

влечёт требуемое тождество

$$f(x) = G(x) = x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Обратно, из этого тождества следуют

$$f(0) = V, \ x_0 = 0,$$

$$f(2\pi) = V + 2\pi, \ x_1 = 2\pi,$$

$$f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = 2\pi,$$

B. $x_0 = 0, \ x_1 = 2\pi, \ f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = 2\pi.$

Требуемые <u>необходимость</u> и <u>достаточность</u> <u>доказаны</u>.

C. $$x_0 = 2\pi,\ x_1 = 0,$$

$$f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = 2\pi.$$

Докажем, что для этого необходимо и достаточно

$$f(x) = h(x) = - x + 2\pi + V\ (0 \le x \le 2\pi).$$

Имеем

$$f(x_0) = f(2\pi) = V,$$

$$f(x_1) = f(0) = V + 2\pi.$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \; [c \in (x', x), x' < x]$$

к функции f(x) на отрезке [0, x] ($0 \le x \le 2\pi$), ввиду

$$f'(c) \ge -1$$

и

$$x \ge 0$$

получаем

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \ge -x$$

$$[c \in (0, x), 0 < x],$$

$$f(x) \ge -x + f(0) \; (0 \le x \le 2\pi).$$

Ввиду $f(0) = V + 2\pi$

$$f(x) \ge -x + 2\pi + V \; (0 \le x \le 2\pi).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \; [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции f(x) на отрезке [x, 2π] (0 ≤ x ≤ 2π), ввиду

$$f'(c) \geq -1$$

и

$$2\pi - x \geq 0$$

получаем

$$f(2\pi) - f(x) = f'(c)(2\pi - x) \geq -(2\pi - x) = x - 2\pi$$

$$[c \in (x, 2\pi),\ x < 2\pi],$$

$$f(x) \leq -x + 2\pi + f(2\pi) \; (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Ввиду f(2π) = V

$$f(x) \leq -x + 2\pi + V \; (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Полученная совокупность двух нестрогих неравенств

$$f(x) \geq - x + 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$f(x) \leq - x + 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

влечёт требуемое тождество

$$f(x) = h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Обратно, из этого тождества следуют

$$f(0) = V + 2\pi, \ x_1 = 0,$$

$$f(2\pi) = V, \ x_0 = 2\pi,$$

$$f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = - 2\pi,$$

С. $x_0 = 2\pi$, $x_1 = 0$, $f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = 2\pi$.

Требуемые **необходимость** **и** **достаточность** **доказаны.**

D. $x_0 = 2\pi$, $x_1 = 0$,

$$f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = - 2\pi.$$

Докажем, что для этого необходимо и достаточно

$$f(x) = H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Имеем

$$f(x_0) = f(2\pi) = V,$$

$$f(x_1) = f(0) = V - 2\pi.$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x')\ [c \in (x', x),\ x' < x]$$

к функции f(x) на отрезке [0, x] ($0 \le x \le 2\pi$), ввиду

$$f'(c) \le 1$$

и

$$x \ge 0$$

получаем

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0) \le x$$

$$[c \in (0, x),\ 0 < x],$$

$$f(x) \le x + f(0)\ (0 \le x \le 2\pi).$$

Ввиду $f(0) = V - 2\pi$

$$f(x) \le x - 2\pi + V\ (0 \le x \le 2\pi).$$

Применяя теорему Лагранжа о среднем значении

$$f(x) - f(x') = f'(c)(x - x') \; [c \in (x', x), x' < x]$$

к функции f(x) на отрезке [x, 2π] (0 ≤ x ≤ 2π), ввиду

$$f'(c) \leq 1$$

и

$$2\pi - x \geq 0$$

получаем

$$f(2\pi) - f(x) = f'(c)(2\pi - x) \leq 2\pi - x$$

$$[c \in (x, 2\pi), x < 2\pi],$$

$$f(x) \geq x - 2\pi + f(2\pi) \; (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Ввиду f(2π) = V

$$f(x) \geq x - 2\pi + V \; (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Полученная совокупность двух нестрогих неравенств

$$f(x) \leq x - 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$f(x) \geq x - 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

влечёт требуемое тождество

$$f(x) = H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Обратно, из этого тождества следуют

$$f(0) = V - 2\pi, \ x_1 = 0,$$

$$f(2\pi) = V, \ x_0 = 2\pi,$$

$$f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = - 2\pi,$$

D. $x_0 = 2\pi, \ x_1 = 0, \ f(x_1) - f(x_0) = f(x_1) - V = - 2\pi.$

Требуемые необходимость и достаточность доказаны.

Следовательно, допущение существования такой удовлетворяющей всем условиям теоремы отличающейся от всех четырёх указанных функций g(x), G(x), h(x) и H(x) функции f(x), что существующий и принимаемый ввиду непрерывности функции f(x) - V максимум её абсолютной величины

$$M = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| \geq 2\pi,$$

привело к тому, что такая функция f(x) на отрезке [0, 2π] необходимо тождественно совпадает с одной из этих четырёх функций, то есть привело к противоречию, которое и доказывает теорему 13.

Замечание. Для непрерывной на отрезке [0, 2π] и дифференцируемой (с доединичностью абсолютной величины производной по условию 1) внутри этого отрезка функции f(x) последние три теоремы 11, 12 и 13 отказались и от условия 2 равенства значений функции f(x) на концах этого отрезка, и от условия 3 о нулевом интеграле функции f(x) на этом отрезке и ограничились весьма слабым условием 2‴ о том, что в одной из точек

отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V. Теорема 11 доказала именно нестрогую ограниченность абсолютной величины функции f(x) - V числом, равным 2π. Теорема 12 четырьмя контрпримерами доказала невозможность ни уменьшения этой верхней границы, ни даже замены нестрогой ограниченности на строгую при сохранении этой верхней границы. Теорема 13 доказала, что эти четыре контрпримера образуют

именно исчерпывающее множество всех контрпримеров, так что при условии 4′ исключения всех четырёх этих контрпримеров нестрогая ограниченность может быть заменена строгой ограниченностью при сохранении этой верхней границы. Однако остаётся последний вопрос о возможности усиления теоремы 13 именно уменьшением этой верхней границы. Этот вопрос решается отрицательно теоремой 14.

Теорема 14. Для любого действительного числа M от 0 включительно до 2π исключительно существует обладающая равным именно этому числу M максимумом на отрезке [0, 2π] абсолютной величины |f(x) - V| отклонения от заданного значения V непрерывная на этом отрезке действительная функция f(x), удовлетворяющая совокупности следующих условий:

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \quad (0 < x < 2\pi).$$

2′′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] не совпадает именно тождественно ни с одной из четырёх функций

$$g(x) = - x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$G(x) = x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

Замечание. Для тождества любых двух многочленов необходимы и достаточны попарные равенства именно всех соответствующих коэффициентов при одинаковых степенях независимой переменной. Поэтому для выполнения условия 4′ достаточно исключить равенства единице и минус единице коэффициентов при x, что и будет выполнено.

Доказательство. Дадим конструктивное доказательство этой теоремы построением даже четырёх примеров требуемых функций.

Для любого действительного числа M от 0 включительно до 2π исключительно умножим разности f(x) - V для всех четырёх контрпримеров на одно и то же строго меньшее единицы неотрицательное отношение M/(2π):

$$g_1(x) = - xM/(2\pi) + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$G_1(x) = xM/(2\pi) + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$h_1(x) = - xM/(2\pi) + M + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$H_1(x) = xM/(2\pi) - M + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

Проверка выполнения всех условий теоремы 14 функцией

$$f(x) = g_1(x) = - xM/(2\pi) + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = - M/(2\pi),\ |f'(x)| = M/(2\pi) < 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

2′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

$$f(0) = g_1(0) = V.$$

$$f(2\pi) = g_1(2\pi) = - 2\pi M/(2\pi) + V = - M + V,$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| = |f(2\pi) - V| = |- M + V - V| = M.$$

Проверка выполнения всех условий теоремы 14 функцией

$$f(x) = G_1(x) = xM/(2\pi) + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = M/(2\pi),\ |f'(x)| = M/(2\pi) < 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

2′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

$$f(0) = G_1(0) = V.$$

$$f(2\pi) = G_1(2\pi) = 2\pi M/(2\pi) + V = M + V,$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| = |f(2\pi) - V| = |M + V - V| = M.$$

Проверка выполнения всех условий теоремы 14 функцией

$$f(x) = h_1(x) = - xM/(2\pi) + M + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = - M/(2\pi),\ |f'(x)| = M/(2\pi) < 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

2′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

$$f(2\pi) = h_1(2\pi) = - 2\pi M/(2\pi) + M + V = V.$$

$$f(0) = h_1(0) = - 0M/(2\pi) + M + V = M + V,$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| = |f(0) - V| = |M + V - V| = M.$$

Проверка выполнения всех условий теоремы 14 функцией

$$f(x) = H_1(x) = xM/(2\pi) - M + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала $(0, 2\pi)$ производная $f'(x)$ функции $f(x)$ существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = M/(2\pi), \ |f'(x)| = M/(2\pi) < 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

2″. В одной из точек отрезка $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ принимает значение V.

$$f(2\pi) = h_1(2\pi) = 2\pi M/(2\pi) - M + V = V.$$

$$f(0) = h_1(0) = 0M/(2\pi) - M + V = - M + V,$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| = |f(0) - V| = |- M + V - V| = M.$$

Тем самым теорема 14 доказана.

Замечание. В теореме 12 были указаны четыре контрпримера

$$f(x) = g(x) = - x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$f(x) = G(x) = x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$f(x) = h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$f(x) = H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

не позволяющие ослабить заключение теоремы 11 даже заменой нестрогого неравенства

$$|f(x) - V| \le 2\pi \ (0 \le x \le 2\pi)$$

на строгое неравенство

$$|f(x) - V| < 2\pi \ (0 \le x \le 2\pi).$$

В теореме 13 было доказано, что четыре этих контрпримера в совокупности образуют именно исчерпывающее множество контрпримеров. В теореме 14 четыре этих контрпримера умножением разности f(x) - V на строго меньшую единицы неотрицательную постоянную M/(2π) дали четыре примера

$$g_1(x) = - xM/(2\pi) + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$G_1(x) = xM/(2\pi) + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$h_1(x) = - xM/(2\pi) + M + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$H_1(x) = xM/(2\pi) - M + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

доказавшие невозможность ослабить заключение теоремы 11 именно уменьшением постоянной, равной 2π. Однако остаётся открытым вопрос, конечно или бесконечно множество таких примеров, а если оно конечно, то из скольких элементов состоит. На этот вопрос отвечает теорема 15.

Теорема 15. Пусть для любого действительного числа M от 0 включительно до 2π исключительно обладающая равным именно этому числу M максимумом на отрезке [0, 2π] абсолютной величины |f(x) - V| отклонения от заданного значения V

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| = M$$

непрерывная на этом отрезке действительная функция f(x) удовлетворяет совокупности следующих условий:

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

2′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] не совпадает именно тождественно ни с одной из четырёх функций

$$g(x) = - x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$G(x) = x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

Тогда множество всех таких функций f(x) одноэлементно при

$$M = 0$$

и бесконечно при

$$0 < M < 2\pi.$$

Доказательство.

Если

$$M = 0,$$

то условие

$$\max_{x \in [0,2\pi]} |f(x) - V| = 0$$

влечёт тождественное равенство функции f(x) заданному значению V

$$f(x) = V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

так что при нулевом M четыре приведённых в предыдущей теореме 14 примера функций

$$g_1(x) = - xM/(2\pi) + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$G_1(x) = xM/(2\pi) + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$h_1(x) = - xM/(2\pi) + M + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$
$$H_1(x) = xM/(2\pi) - M + V \ (0 \le x \le 2\pi)$$

тождественно равны заданному значению V и совпадают между собой, что видно и непосредственно, и поэтому множество всех таких функций действительно одноэлементно.

Пусть теперь

$$0 < M < 2\pi.$$

Логична попытка изменения каждого из четырёх примеров

$$g_1(x) = - xM/(2\pi) + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$
$$G_1(x) = xM/(2\pi) + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$h_1(x) = - xM/(2\pi) + M + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$H_1(x) = xM/(2\pi) - M + V \ (0 \le x \le 2\pi)$$

путём добавления к их правым частям с некоторым достаточно малым по абсолютной величине постоянным коэффициентом <u>дифференцируемой</u> на отрезке [0, 2π] функции с <u>нулевым</u> интегралом на этом отрезке, обращающейся в <u>нуль</u> на <u>обоих концах</u> и <u>посредине</u> этого отрезка. <u>Аннулирование</u> этих <u>интеграла</u>, о чём в условиях теоремы нет и речи, и <u>значения</u> <u>посредине</u> отрезка [0, 2π] теперь <u>не является необходимостью</u>, однако весьма <u>полезно</u> и при этом вполне <u>достаточно</u> для теоремы. Эта

достаточная малость должна обеспечить, во-первых, отсутствие увеличения максимума абсолютной величины суммарной функции по сравнению с максимумом абсолютной величины одной лишь функции соответствующего примера, а во-вторых, отсутствие превышения единицы абсолютной величиной производной этой суммарной функции. Попытаемся добавить функцию asin(x) или bx(x - π)(x - 2π) (с действительными постоянными a, b).

Другой логичной, простой и весьма удобной представляется попытка замены добавки к этому значению V в каждом из этих четырёх примеров

$$g_1(x) = - xM/(2\pi) + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$
$$G_1(x) = xM/(2\pi) + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$
$$h_1(x) = - xM/(2\pi) + M + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$
$$H_1(x) = xM/(2\pi) - M + V \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

центрально симметричной относительно точки с абсциссой середины π отрезка $[0, 2\pi]$ и на нём гладкой, то есть непрерывно дифференцируемой, именно строго монотонной (или возрастающей, или убывающей) кусочно-степенной функцией с теми же значениями на концах и посредине этого отрезка.

Первый из четырёх примеров с добавлением asin(x) даёт

$$f(x) = g_1(x) + a\sin(x) = V - xM/(2\pi) + a\sin(x)\ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Непрерывность и дифференцируемость этой функции на отрезке [0, 2π] очевидны.

Имеющая постоянную производную величины (-M/(2π)) и абсолютной величины M/(2π) на отрезке [0, 2π] функция

$$g_1(x) - V = - xM/(2\pi)\ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

достигает равного именно этому числу M максимума абсолютной величины на отрезке [0, 2π]

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|g_1(x) - V| = \max_{x\in[0,2\pi]}|- xM/(2\pi)| = M$$

на правом концe 2π этого отрезка, как раз там, где, как и на левом конце 0 с аннулированием функции $g_1(x) - V$ и в середине π этого отрезка, функция $a\sin(x)$ аннулируется и имеет наибольшую абсолютную величину $|a|$ производной. Чтобы и сумма

$$f(x) - V = g_1(x) - V + a\sin(x) = - xM/(2\pi) + a\sin(x)$$

$$(0 \le x \le 2\pi)$$

этих двух функций имела именно тот же максимум M абсолютной величины на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| = \max_{x\in[0,2\pi]}|- xM/(2\pi) + a\sin(x)| = M,$$

достаточно, чтобы максимум |a| абсолютной величины |a| производной acos(x) функции asin(x) не превышал абсолютной величины M/(2π) постоянной производной (- M/(2π)) функции (- xM/(2π)), то есть достаточно выполнение неравенства

$$|a| \leq M/(2\pi).$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 15 функцией

$$f(x) = g_1(x) + a\sin(x) = V - xM/(2\pi) + a\sin(x)\ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$|f'(x)| = |-M/(2\pi) + a\cos(x)| \le M/(2\pi) + |a| \ (0 \le x \le 2\pi),$$

так что для

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi)$$

<u>достаточно</u> выполнение неравенства

$$|a| \le 1 - M/(2\pi).$$

2′′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

Функция

$$f(x) = g_1(x) + a\sin(x) = V - xM/(2\pi) + a\sin(x) \ (0 \le x \le 2\pi)$$

принимает значение V при x = 0:

$$f(0) = V.$$

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из четырёх функций

$$g(x) = - x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$G(x) = x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге достаточно условие

$$|a| \le 1 - M/(2\pi),$$

дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Первый из четырёх примеров с добавлением функции $bx(x - \pi)(x - 2\pi)$ даёт

$$f(x) = g_1(x) + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$

$$V - xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Для отсутствия даже локальных экстремумов непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ именно внутри отрезка $[0, 2\pi]$ достаточны отрицательность там производной

$$f'(x) = - M/(2\pi) + b(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) =$$

$$- M/(2\pi) + b[3(x - \pi)^2 - \pi^2]$$

и поэтому при $b \geq 0$

$$f'(x) < - M/(2\pi) + 2\pi^2 b\ (0 < x < 2\pi),$$

$$- M/(2\pi) + 2\pi^2 b \le 0,\ 0 \le b \le M/(4\pi^3),$$

а при b < 0

$$f'(x) \le - M/(2\pi) - \pi^2 b\ (0 < x < 2\pi),$$

$$- M/(2\pi) - \pi^2 b < 0,\ - M/(2\pi^3) < b < 0,$$

так что в итоге

$$- M/(2\pi^3) < b \le M/(4\pi^3).$$

На обоих концах 0 и 2π отрезка [0, 2π]

$$f(0) = V - 0 + 0 = V,$$

$$f(2\pi) = V - M + 0 = V - M.$$

На правом концe 2π отрезка [0, 2π] функция

$$f(x) - V = g_1(x) - V + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$

$$- xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\ (0 \le x \le 2\pi)$$

достигает равного именно этому числу M максимума абсолютной величины на отрезке [0, 2π]

$$|f(2\pi) - V| = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| =$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|- xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)| = M.$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 15 функцией

$$f(x) = g_1(x) + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$

$$V - xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \ (0 \le x \le 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = - M/(2\pi) + b(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) =$$
$$- M/(2\pi) + b[3(x - \pi)^2 - \pi^2]$$

и для $|f'(x)| \leq 1$ $(0 < x < 2\pi)$ при $0 \leq b \leq M/(4\pi^3)$

$$- M/(2\pi) - \pi^2 b \leq f'(x) < - M/(2\pi) + 2\pi^2 b \leq - M/(2\pi) +$$
$$2\pi^2 M/(4\pi^3) = 0,$$
$$- 1 \leq - M/(2\pi) - \pi^2 b,\ M/(2\pi) + \pi^2 b \leq 1,\ b \leq 1/\pi^2 - M/(2\pi^3),$$
$$0 \leq b \leq \min\{M/(4\pi^3),\ 1/\pi^2 - M/(2\pi^3)\},$$

а для $|f'(x)| \leq 1$ $(0 < x < 2\pi)$ при $- M/(2\pi^3) < b < 0$

$$- M/(2\pi) + 2\pi^2 b < f'(x) \leq - M/(2\pi) - \pi^2 b\ (0 < x < 2\pi),$$
$$f'(x) \leq - M/(2\pi) - \pi^2 b < - M/(2\pi) + \pi^2 M/(2\pi^3) = 0,$$
$$- 1 \leq - M/(2\pi) + 2\pi^2 b,\ 2\pi^2 b \geq - 1 + M/(2\pi),$$
$$b \geq - 1/(2\pi^2) + M/(4\pi^3),$$

$$- \min\{M/(2\pi^3),\ 1/(2\pi^2) - M/(4\pi^3)\} < b < 0,$$

так что в итоге достаточно выполнение неравенств

$$- \min\{M/(2\pi^3),\ 1/(2\pi^2) - M/(4\pi^3)\} < b \le \min\{M/(4\pi^3),\ 1/\pi^2 - M/(2\pi^3)\}.$$

2′′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

Функция

$$f(x) = g_1(x) + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$
$$V - xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\ (0 \le x \le 2\pi)$$

принимает значение V при x = 0:

$$f(0) = V.$$

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из четырёх функций

$$g(x) = - x + V\ (0 \le x \le 2\pi),$$
$$G(x) = x + V\ (0 \le x \le 2\pi),$$
$$h(x) = - x + 2\pi + V\ (0 \le x \le 2\pi),$$
$$H(x) = x - 2\pi + V\ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге достаточно объединённое условие

$$- \min\{M/(2\pi^3), 1/(2\pi^2) - M/(4\pi^3)\} < b \le \min\{M/(4\pi^3), 1/\pi^2 - M/(2\pi^3)\},$$

дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Остаётся в первом из примеров замена функции

$$f(x) - V = g_1(x) - V = - xM/(2\pi)\ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

центрально симметричной относительно точки (π, -M/2) с абсциссой середины π отрезка [0, 2π] и поэтому на нём обладающей интегралом (-πM) и гладкой, то есть непрерывно дифференцируемой, кусочно-степенной функцией

$$f(x) - V = - M(x/\pi)^d/2\ (0 \leq x \leq \pi,\ d > 1),$$

$$f(x) - V = - M + M(2 - x/\pi)^d/2\ (\pi \leq x \leq 2\pi,\ d > 1)$$

с теми же, что и у функции (- xM/(2π)), значениями

$$f(0) - V = 0,\ f(\pi) - V = - M/2,\ f(2\pi) - V = - M$$

на концах и посредине этого отрезка [0, 2π].

Функция

$$f(x) = V - M(x/\pi)^d/2 \ (0 \leq x \leq \pi, d > 1),$$

$$f(x) = V - M + M(2 - x/\pi)^d/2 \ (\pi \leq x \leq 2\pi, d > 1)$$

непрерывна на $[0, 2\pi]$, поскольку

$$f(\pi) = V - M(\pi/\pi)^d/2 = V - M + M(2 - \pi/\pi)^d/2 = V - M/2.$$

Производная функции $f(x)$

$$f'(x) = - d(x/\pi)^{d-1}M/(2\pi) \ (0 \leq x \leq \pi, d > 1),$$

$$f'(x) = - d(2 - x/\pi)^{d-1}M/(2\pi) \ (\pi \leq x \leq 2\pi, d > 1)$$

непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$, поскольку

$$f'(\pi) = - d(\pi/\pi)^{d-1}M/(2\pi) =$$

$$- d(2 - \pi/\pi)^{d-1}M/(2\pi) =$$

$$- dM/(2\pi),$$

причём на отрезке [0, π] строго монотонно убывает от 0 до этого значения (-dM/(2π)), а на отрезке [π, 2π] строго монотонно возрастает от этого значения (-dM/(2π)) до 0, так что именно это значение (-dM/(2π)) и является на отрезке [0, 2π] минимумом производной

$$\min_{x\in[0,2\pi]} f'(x) = f'(\pi) = - dM/(2\pi)$$

с максимумом dM/(2π) её абсолютной величины

$$\max_{x\in[0,2\pi]} |f'(x)| = |f'(\pi)| = dM/(2\pi).$$

Поэтому функция f(x) - V на отрезке [0, 2π] строго монотонно убывает от 0 до (-M), так что именно эти значения и являются максимумом

$$\max_{x\in[0,2\pi]}(f(x) - V) = f(0) - V = 0$$

и минимумом

$$\min_{x\in[0,2\pi]}(f(x) - V) = f(2\pi) - V = - M$$

функции $f(x) - V$ на отрезке $[0, 2\pi]$ с максимумом её абсолютной величины

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| = |f(2\pi) - V| = M.$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 15 функцией

$$f(x) = V - M(x/\pi)^d/2 \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f(x) = V - M + M(2 - x/\pi)^d/2 \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1).$$

1. В каждой точке интервала $(0, 2\pi)$ производная $f'(x)$ функции $f(x)$ существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = - d(x/\pi)^{d-1}M/(2\pi) \ (0 \leq x \leq \pi, d > 1),$$

$$f'(x) = - d(2 - x/\pi)^{d-1}M/(2\pi) \ (\pi \leq x \leq 2\pi, d > 1),$$

$$- \min_{x\in[0,2\pi]}f'(x) = - f'(\pi) = \max_{x\in[0,2\pi]}|f'(x)| = |f'(\pi)| = dM/(2\pi),$$

$$dM/(2\pi) \leq 1, \ 1 < d \leq 2\pi/M.$$

2′′. В одной из точек отрезка $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ принимает значение V.

Функция

$$f(x) = V - M(x/\pi)^d/2 \ (0 \leq x \leq \pi, d > 1),$$

$$f(x) = V - M + M(2 - x/\pi)^d/2 \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1)$$

принимает значение V при x = 0:

$$f(0) = V.$$

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из четырёх функций

$$g(x) = - x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$G(x) = x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге достаточно условие $1 < d \le 2\pi/M$, дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Второй из четырёх примеров с добавлением функции asin(x) даёт

$$f(x) = G_1(x) + a\sin(x) = V + xM/(2\pi) + a\sin(x) \quad (0 \le x \le 2\pi).$$

Непрерывность и дифференцируемость этой функции на отрезке [0, 2π] очевидны.

Имеющая постоянную производную величины и абсолютной величины M/(2π) на отрезке [0, 2π] функция

$$G_1(x) - V = xM/(2\pi) \quad (0 \le x \le 2\pi)$$

достигает равного именно этому числу M максимума абсолютной величины на отрезке [0, 2π]

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|G_1(x) - V| = \max_{x\in[0,2\pi]}|xM/(2\pi)| = M$$

на правом концe 2π этого отрезка, как раз там, где, как и на левом конце 0 с аннулированием функции $G_1(x) - V$ и в середине π этого отрезка, функция $a\sin(x)$ аннулируется и имеет наибольшую абсолютную величину $|a|$ производной. Чтобы и сумма

$$f(x) - V = G_1(x) - V + a\sin(x) = xM/(2\pi) + a\sin(x)$$

$$(0 \le x \le 2\pi)$$

этих двух функций имела именно тот же максимум M абсолютной величины на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| = \max_{x\in[0,2\pi]}|xM/(2\pi) + a\sin(x)| = M,$$

достаточно, чтобы максимум |a| абсолютной величины |a| производной acos(x) функции asin(x) не превышал абсолютной величины M/(2π) постоянной производной M/(2π) функции xM/(2π), то есть достаточно выполнение неравенства

$$|a| \le M/(2\pi).$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 15 функцией

$$f(x) = G_1(x) + a\sin(x) = V + xM/(2\pi) + a\sin(x) \quad (0 \le x \le 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$|f'(x)| = |M/(2\pi) + a\cos(x)| \le M/(2\pi) + |a| \ (0 \le x \le 2\pi),$$

так что для

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi)$$

достаточно выполнение неравенства

$$|a| \le 1 - M/(2\pi).$$

2‴. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

Функция

$$f(x) = G_1(x) + a\sin(x) = V + xM/(2\pi) + a\sin(x) \ (0 \le x \le 2\pi)$$

принимает значение V при x = 0:

$$f(0) = V.$$

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из четырёх функций

$$g(x) = - x + V\ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$G(x) = x + V\ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$h(x) = - x + 2\pi + V\ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$H(x) = x - 2\pi + V\ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

В итоге достаточно условие

$$|a| \leq 1 - M/(2\pi),$$

дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Второй из четырёх примеров с добавлением функции $bx(x - \pi)(x - 2\pi)$ даёт

$$f(x) = G_1(x) + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$

$$V + xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Для отсутствия даже локальных экстремумов непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ именно внутри отрезка $[0, 2\pi]$ достаточны положительность там производной

$$f'(x) = M/(2\pi) + b(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) =$$

$$M/(2\pi) + b[3(x - \pi)^2 - \pi^2]$$

и поэтому при $b \geq 0$

$$f'(x) \geq M/(2\pi) - \pi^2 b > 0 \ (0 < x < 2\pi),$$

$$0 \leq b < M/(2\pi^3),$$

а при b < 0

$$f'(x) > M/(2\pi) + 2\pi^2 b \geq 0 \ (0 < x < 2\pi),$$

$$- M/(4\pi^3) \leq b < 0,$$

так что в итоге

$$- M/(4\pi^3) \leq b < M/(2\pi^3).$$

На <u>обоих</u> <u>концах</u> 0 и 2π отрезка [0, 2π]

$$f(0) = V - 0 + 0 = V,$$

$$f(2\pi) = V - M + 0 = V - M.$$

На <u>правом</u> <u>конце</u> 2π отрезка [0, 2π] функция

$$f(x) - V = G_1(x) - V + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$

$$xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

достигает равного именно этому числу M максимума абсолютной величины на отрезке [0, 2π]

$$|f(2\pi) - V| = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| =$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)| = M.$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 15 функцией

$$f(x) = G_1(x) + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$

$$V + xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\ (0 \le x \le 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1\ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = M/(2\pi) + b(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) =$$

$$M/(2\pi) + b[3(x - \pi)^2 - \pi^2]$$

и для $|f'(x)| \leq 1$ $(0 < x < 2\pi)$ при $0 \leq b < M/(2\pi^3)$

$$M/(2\pi) - \pi^2 b \leq f'(x) < M/(2\pi) + 2\pi^2 b \leq 1,$$

$$M/(2\pi) + 2\pi^2 b \leq 1,$$

$$b \leq 1/(2\pi^2) - M/(4\pi^3),$$

<u>достаточно</u> $0 \leq b < \min\{M/(2\pi^3), 1/(2\pi^2) - M/(4\pi^3)\}$,

а для $|f'(x)| \leq 1$ $(0 < x < 2\pi)$ при $- M/(4\pi^3) \leq b < 0$

$$M/(2\pi) + 2\pi^2 b < f'(x) \leq M/(2\pi) - \pi^2 b \; (0 < x < 2\pi),$$

$$f'(x) \leq M/(2\pi) - \pi^2 b \leq 1,$$

$$M/(2\pi) - \pi^2 b \leq 1,$$

$$\pi^2 b \geq - 1 + M/(2\pi),$$

$$b \geq - 1/\pi^2 + M/(2\pi^3),$$

$$- \min\{M/(4\pi^3), 1/\pi^2 - M/(2\pi^3)\} \leq b < 0,$$

так что в итоге достаточно выполнение неравенств

$$- \min\{M/(4\pi^3), 1/\pi^2 - M/(2\pi^3)\} \leq b < \min\{M/(2\pi^3), 1/(2\pi^2) - M/(4\pi^3)\}.$$

2′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

Функция

$$f(x) = G_1(x) + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$
$$V + xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

принимает значение V при x = 0:

$$f(0) = V.$$

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из четырёх функций

$$g(x) = - x + V\ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$G(x) = x + V\ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$h(x) = - x + 2\pi + V\ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$H(x) = x - 2\pi + V\ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге достаточно объединённое условие

$$- \min\{M/(4\pi^3),\ 1/\pi^2 - M/(2\pi^3)\} \le b < \min\{M/(2\pi^3),\ 1/(2\pi^2) - M/(4\pi^3)\},$$

дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Остаётся во втором из примеров замена функции

$$f(x) - V = G_1(x) - V = xM/(2\pi) \ (0 \le x \le 2\pi)$$

центрально симметричной относительно точки (π, M/2) с абсциссой середины π отрезка [0, 2π] и поэтому на нём обладающей интегралом πM и гладкой, то есть непрерывно дифференцируемой, кусочно-степенной функцией

$$f(x) - V = M(x/\pi)^d/2 \ (0 \le x \le \pi, \ d > 1),$$

$$f(x) - V = M - M(2 - x/\pi)^d/2 \ (\pi \le x \le 2\pi, \ d > 1)$$

с теми же, что и у функции xM/(2π), значениями

$$f(0) - V = 0, \ f(\pi) - V = M/2, \ f(2\pi) - V = M$$

на концах и посредине этого отрезка [0, 2π].

Функция

$$f(x) = V + M(x/\pi)^d/2 \ (0 \le x \le \pi, d > 1),$$

$$f(x) = V + M - M(2 - x/\pi)^d/2 \ (\pi \le x \le 2\pi, d > 1)$$

непрерывна на [0, 2π], поскольку

$$f(\pi) = V + M(\pi/\pi)^d/2 = V + M - M(2 - \pi/\pi)^d/2 = V + M/2.$$

Производная функции f(x)

$$f'(x) = d(x/\pi)^{d-1}M/(2\pi) \ (0 \le x \le \pi, d > 1),$$

$$f'(x) = d(2 - x/\pi)^{d-1}M/(2\pi) \ (\pi \le x \le 2\pi, d > 1)$$

непрерывна на отрезке [0, 2π], поскольку

$$f'(\pi) = d(\pi/\pi)^{d-1}M/(2\pi) = d(2 - \pi/\pi)^{d-1}M/(2\pi) = dM/(2\pi),$$

причём на отрезке [0, π] строго монотонно возрастает от 0 до этого значения dM/(2π), а на

отрезке [π, 2π] строго монотонно убывает от этого значения dM/(2π) до 0, так что именно это значение dM/(2π) и является на отрезке [0, 2π] максимумом и производной

$$\max_{x\in[0,2\pi]} f'(x) = f'(\pi) = dM/(2\pi),$$

и её абсолютной величины

$$\max_{x\in[0,2\pi]} |f'(x)| = |f'(\pi)| = dM/(2\pi).$$

Поэтому функция f(x) - V на отрезке [0, 2π] строго монотонно возрастает от 0 до M, так что именно эти значения и являются минимумом

$$\min_{x\in[0,2\pi]} (f(x) - V) = f(0) - V = 0$$

и максимумом

$$\max_{x\in[0,2\pi]}(f(x) - V) = f(2\pi) - V = M$$

функции f(x) - V на отрезке [0, 2π] с максимумом её абсолютной величины

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| = |f(2\pi) - V| = M.$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 15 функцией

$$f(x) = V + M(x/\pi)^d/2 \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f(x) = V + M - M(2 - x/\pi)^d/2 \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = d(x/\pi)^{d-1}M/(2\pi)\ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f'(x) = d(2 - x/\pi)^{d-1}M/(2\pi)\ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1),$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]} f'(x) = f'(\pi) = \max_{x\in[0,2\pi]}|f'(x)| = |f'(\pi)| = dM/(2\pi),$$

$$dM/(2\pi) \le 1,$$

$$1 < d \le 2\pi/M.$$

2′′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

Функция

$$f(x) = V + M(x/\pi)^d/2\ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f(x) = V + M - M(2 - x/\pi)^d/2\ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1)$$

принимает значение V при x = 0:

$$f(0) = V.$$

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из четырёх функций

$$g(x) = - x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$G(x) = x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге достаточно условие

$$1 < d \le 2\pi/M,$$

дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Третий из четырёх примеров с добавлением asin(x) даёт

$$f(x) = h_1(x) + a\sin(x) = V + M - xM/(2\pi) + a\sin(x)$$

$$(0 \leq x \leq 2\pi).$$

Непрерывность и дифференцируемость этой функции на отрезке [0, 2π] очевидны.

Имеющая постоянную производную величины (-M/(2π)) и абсолютной величины M/(2π) на отрезке [0, 2π] функция

$$h_1(x) - V = M - xM/(2\pi) \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

достигает равного именно этому числу M максимума абсолютной величины на отрезке [0, 2π]

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|h_1(x) - V| = \max_{x\in[0,2\pi]}|M - xM/(2\pi)| = M$$

на левом конце 0 этого отрезка, как раз там, где, как и на правом конце 2π с аннулированием функции $h_1(x) - V$ и в середине π этого отрезка, функция $a\sin(x)$ аннулируется и имеет наибольшую абсолютную величину $|a|$ производной. Чтобы и сумма

$$f(x) - V = h_1(x) - V + a\sin(x) = M - xM/(2\pi) + a\sin(x)$$

$$(0 \le x \le 2\pi)$$

этих двух функций имела именно тот же максимум M абсолютной величины на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| =$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|M - xM/(2\pi) + a\sin(x)| = M,$$

достаточно, чтобы максимум |a| абсолютной величины |a| производной acos(x) функции asin(x) не превышал абсолютной величины M/(2π) постоянной производной (- M/(2π)) функции (- xM/(2π)), то есть достаточно выполнение неравенства

$$|a| \leq M/(2\pi).$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 15 функцией

$$f(x) = h_1(x) + a\sin(x) = V + M - xM/(2\pi) + a\sin(x) \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$|f'(x)| = |- M/(2\pi) + a\cos(x)| \leq M/(2\pi) + |a| \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

так что для

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi)$$

достаточно выполнение неравенства

$$|a| \leq 1 - M/(2\pi).$$

2′′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

Функция

$$f(x) = h_1(x) + a\sin(x) = V + M - xM/(2\pi) + a\sin(x) \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

принимает значение V при x = 2π:

$$f(2\pi) = V.$$

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из четырёх функций

$$g(x) = - x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$G(x) = x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге достаточно условие

$$|a| \le 1 - M/(2\pi),$$

дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Третий из четырёх примеров с добавлением функции $bx(x - \pi)(x - 2\pi)$ даёт

$$f(x) = h_1(x) + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$

$$V + M - xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\ (0 \le x \le 2\pi).$$

Для отсутствия даже локальных экстремумов непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ именно внутри отрезка $[0, 2\pi]$ достаточны отрицательность там производной

$$f'(x) = - M/(2\pi) + b(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) =$$

$$- M/(2\pi) + b[3(x - \pi)^2 - \pi^2]$$

и поэтому при $b \ge 0$

$$f'(x) < - M/(2\pi) + 2\pi^2 b\ (0 < x < 2\pi),$$

$$- M/(2\pi) + 2\pi^2 b \le 0,\ 0 \le b \le M/(4\pi^3),$$

а при b < 0

$$f'(x) \le - M/(2\pi) - \pi^2 b\ (0 < x < 2\pi),$$

$$- M/(2\pi) - \pi^2 b < 0,\ - M/(2\pi^3) < b < 0,$$

так что в итоге

$$- M/(2\pi^3) < b \le M/(4\pi^3).$$

На <u>обоих</u> <u>концах</u> 0 и 2π отрезка [0, 2π]

$$f(0) = V + M - 0 + 0 = V + M,$$

$$f(2\pi) = V + M - M + 0 = V.$$

На <u>левом</u> <u>конце</u> 0 отрезка [0, 2π] функция

$$f(x) - V = h_1(x) + M - V + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$

$$M - xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\ (0 \le x \le 2\pi)$$

достигает равного именно этому числу M максимума абсолютной величины на отрезке [0, 2π]

$$|f(0) - V| = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| =$$
$$\max_{x\in[0,2\pi]}|M - xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)| = M.$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 15 функцией

$$f(x) = h_1(x) + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$
$$V + M - xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\ (0 \le x \le 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1\ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = - M/(2\pi) + b(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) =$$
$$- M/(2\pi) + b[3(x - \pi)^2 - \pi^2]$$

и для $|f'(x)| \le 1$ $(0 < x < 2\pi)$ при $0 \le b \le M/(4\pi^3)$

$$- M/(2\pi) - \pi^2 b \le f'(x) < - M/(2\pi) + 2\pi^2 b \le - M/(2\pi) +$$
$$2\pi^2 M/(4\pi^3) = 0,$$
$$- 1 \le - M/(2\pi) - \pi^2 b,\ M/(2\pi) + \pi^2 b \le 1,\ b \le 1/\pi^2 - M/(2\pi^3),$$
$$0 \le b \le \min\{M/(4\pi^3),\ 1/\pi^2 - M/(2\pi^3)\},$$

а для $|f'(x)| \le 1$ $(0 < x < 2\pi)$ при $- M/(2\pi^3) < b < 0$

$$- M/(2\pi) + 2\pi^2 b < f'(x) \le - M/(2\pi) - \pi^2 b\ (0 < x < 2\pi),$$
$$f'(x) \le - M/(2\pi) - \pi^2 b < - M/(2\pi) + \pi^2 M/(2\pi^3) = 0,$$
$$- 1 \le - M/(2\pi) + 2\pi^2 b,\ 2\pi^2 b \ge - 1 + M/(2\pi),$$
$$b \ge - 1/(2\pi^2) + M/(4\pi^3),$$

$$- \min\{M/(2\pi^3), 1/(2\pi^2) - M/(4\pi^3)\} < b < 0,$$

так что в итоге достаточно выполнение неравенств

$$- \min\{M/(2\pi^3), 1/(2\pi^2) - M/(4\pi^3)\} < b \leq \min\{M/(4\pi^3), 1/\pi^2 - M/(2\pi^3)\}.$$

2′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

Функция

$$f(x) = h_1(x) + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$
$$V + M - xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

принимает значение V при x = 2π:

$$f(2\pi) = V.$$

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из четырёх функций

$$g(x) = - x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$G(x) = x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге достаточно объединённое условие

$$- \min\{M/(2\pi^3),\ 1/(2\pi^2) - M/(4\pi^3)\} < b \le \min\{M/(4\pi^3),\ 1/\pi^2 - M/(2\pi^3)\},$$

дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Остаётся в третьем из примеров замена функции

$$f(x) - V = h_1(x) - V = M - xM/(2\pi)\ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

центрально симметричной относительно точки (π, $M/2$) с абсциссой середины π отрезка $[0, 2\pi]$ и поэтому на нём обладающей интегралом πM и гладкой, то есть непрерывно дифференцируемой, кусочно-степенной функцией

$$f(x) - V = M - M(x/\pi)^d/2\ (0 \leq x \leq \pi,\ d > 1),$$

$$f(x) - V = M(2 - x/\pi)^d/2\ (\pi \leq x \leq 2\pi,\ d > 1)$$

с теми же, что и у функции $M - xM/(2\pi)$, значениями

$$f(0) - V = M,\ f(\pi) - V = M/2,\ f(2\pi) - V = 0$$

на концах и посредине этого отрезка $[0, 2\pi]$.

Функция

$$f(x) = V + M - M(x/\pi)^d/2\ (0 \leq x \leq \pi,\ d > 1),$$

$$f(x) = V + M(2 - x/\pi)^d/2\ (\pi \leq x \leq 2\pi,\ d > 1)$$

<u>непрерывна</u> на $[0, 2\pi]$, поскольку

$$f(\pi) = V + M - M(\pi/\pi)^d/2 = V + M(2 - \pi/\pi)^d/2 = V + M/2.$$

<u>Производная</u> функции $f(x)$

$$f'(x) = - d(x/\pi)^{d-1}M/(2\pi)\ (0 \leq x \leq \pi,\ d > 1),$$

$$f'(x) = - d(2 - x/\pi)^{d-1}M/(2\pi)\ (\pi \leq x \leq 2\pi,\ d > 1)$$

<u>непрерывна</u> на отрезке $[0, 2\pi]$, поскольку

$$f'(\pi) = - d(\pi/\pi)^{d-1}M/(2\pi) = - d(2 - \pi/\pi)^{d-1}M/(2\pi) =$$

$$- dM/(2\pi),$$

причём на отрезке [0, π] строго монотонно убывает от 0 до этого значения (-dM/(2π)), а на отрезке [π, 2π] строго монотонно возрастает от этого значения (-dM/(2π)) до 0, так что именно это значение (-dM/(2π)) и является на отрезке [0, 2π] минимумом производной

$$\min_{x\in[0,2\pi]} f'(x) = f'(\pi) = - dM/(2\pi)$$

с максимумом dM/(2π) её абсолютной величины

$$\max_{x\in[0,2\pi]} |f'(x)| = |f'(\pi)| = dM/(2\pi).$$

Поэтому функция f(x) - V на отрезке [0, 2π] строго монотонно убывает от M до 0, так что именно эти значения и являются максимумом

$$\max_{x\in[0,2\pi]}(f(x) - V) = f(0) - V = M$$

и минимумом

$$\min_{x\in[0,2\pi]}(f(x) - V) = f(2\pi) - V = 0$$

функции $f(x) - V$ на отрезке $[0, 2\pi]$ с максимумом её абсолютной величины

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| = |f(0) - V| = M.$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 15 функцией

$$f(x) = V + M - M(x/\pi)^d/2 \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f(x) = V + M(2 - x/\pi)^d/2 \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = - d(x/\pi)^{d-1}M/(2\pi) \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f'(x) = - d(2 - x/\pi)^{d-1}M/(2\pi) \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1),$$

$$- \min_{x\in[0,2\pi]} f'(x) = - f'(\pi) = \max_{x\in[0,2\pi]}|f'(x)| = |f'(\pi)| = dM/(2\pi),$$

$$dM/(2\pi) \le 1,\ 1 < d \le 2\pi/M.$$

2′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

Функция

$$f(x) = V + M - M(x/\pi)^d/2 \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f(x) = V + M(2 - x/\pi)^d/2 \ (\pi \leq x \leq 2\pi,\ d > 1)$$

принимает значение V при $x = 2\pi$:

$$f(2\pi) = V.$$

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из четырёх функций

$$g(x) = - x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$G(x) = x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

В итоге достаточно условие $1 < d \leq 2\pi/M$, дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Четвёртый из четырёх примеров с добавлением функции asin(x) даёт

$$f(x) = H_1(x) + a\sin(x) = V - M + xM/(2\pi) + a\sin(x)\ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Непрерывность и дифференцируемость этой функции на отрезке $[0, 2\pi]$ очевидны.

Имеющая постоянную производную величины и абсолютной величины $M/(2\pi)$ на отрезке $[0, 2\pi]$ функция

$$H_1(x) - V = xM/(2\pi) - M\ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

достигает равного именно этому числу M максимума абсолютной величины на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|H_1(x) - V| = \max_{x\in[0,2\pi]}|xM/(2\pi) - M| = M$$

на левом конце 0 этого отрезка, как раз там, где, как и на правом конце 2π с аннулированием функции $H_1(x) - V$ и в середине π этого отрезка, функция $a\sin(x)$ аннулируется и имеет наибольшую абсолютную величину $|a|$ производной. Чтобы и сумма

$$f(x) - V = H_1(x) - V + a\sin(x) = - M + xM/(2\pi) + a\sin(x)$$

$$(0 \leq x \leq 2\pi)$$

этих двух функций имела именно тот же максимум M абсолютной величины на отрезке $[0, 2\pi]$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| =$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|- M + xM/(2\pi) + a\sin(x)| = M,$$

достаточно, чтобы максимум |a| абсолютной величины |a| производной acos(x) функции asin(x) не превышал абсолютной величины M/(2π) постоянной производной M/(2π) функции xM/(2π) - M, то есть достаточно выполнение неравенства

$$|a| \leq M/(2\pi).$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 15 функцией

$$f(x) = H_1(x) + a\sin(x) = V - M + xM/(2\pi) + a\sin(x) \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$|f'(x)| = |M/(2\pi) + a\cos(x)| \leq M/(2\pi) + |a| \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

так что для

$$|f'(x)| \leq 1 \ (0 < x < 2\pi)$$

достаточно выполнение неравенства

$$|a| \leq 1 - M/(2\pi).$$

2′′′. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

Функция

$$f(x) = H_1(x) + a\sin(x) = V - M + xM/(2\pi) + a\sin(x) \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

принимает значение V при x = 2π:

$$f(2\pi) = V.$$

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из четырёх функций

$$g(x) = - x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$G(x) = x + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi),$$

$$H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

В итоге достаточно условие

$$|a| \leq 1 - M/(2\pi),$$

дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Четвёртый из четырёх примеров с добавлением функции $bx(x - \pi)(x - 2\pi)$ даёт

$$f(x) = H_1(x) + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$
$$V - M + xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\ (0 \leq x \leq 2\pi).$$

Для отсутствия даже локальных экстремумов непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$ именно внутри отрезка $[0, 2\pi]$ достаточны положительность там производной

$$f'(x) = M/(2\pi) + b(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) =$$
$$M/(2\pi) + b[3(x - \pi)^2 - \pi^2]$$

и поэтому при $b \geq 0$

$$f'(x) \geq M/(2\pi) - \pi^2 b > 0\ (0 < x < 2\pi),$$

$$0 \le b < M/(2\pi^3),$$

а при b < 0

$$f'(x) > M/(2\pi) + 2\pi^2 b \ge 0 \ (0 < x < 2\pi),$$

$$- M/(4\pi^3) \le b < 0,$$

так что в итоге

$$- M/(4\pi^3) \le b < M/(2\pi^3).$$

На <u>обоих</u> <u>концах</u> 0 и 2π отрезка [0, 2π]

$$f(0) = V - M - 0 + 0 = V - M,$$

$$f(2\pi) = V - M + M + 0 = V.$$

На <u>левом</u> конце 0 отрезка [0, 2π] функция

$$f(x) - V = H_1(x) - V + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$

$$- M + xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x) \ (0 \le x \le 2\pi)$$

достигает равного именно этому числу M максимума абсолютной величины на отрезке [0, 2π]

$$|f(0) - V| = \max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| =$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|- M + xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)| = M.$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 15 функцией

$$f(x) = H_1(x) + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$

$$V - M + xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\ (0 \le x \le 2\pi).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1\ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = M/(2\pi) + b(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) =$$

$$M/(2\pi) + b[3(x - \pi)^2 - \pi^2]$$

и для $|f'(x)| \le 1$ $(0 < x < 2\pi)$ **при** $0 \le b < M/(2\pi^3)$

$$M/(2\pi) - \pi^2 b \le f'(x) < M/(2\pi) + 2\pi^2 b \le 1,$$

$$M/(2\pi) + 2\pi^2 b \le 1,$$

$$b \le 1/(2\pi^2) - M/(4\pi^3),$$

<u>достаточно</u> $0 \le b < \min\{M/(2\pi^3), 1/(2\pi^2) - M/(4\pi^3)\},$

а для $|f'(x)| \le 1$ $(0 < x < 2\pi)$ **при** $- M/(4\pi^3) \le b < 0$

$$M/(2\pi) + 2\pi^2 b < f'(x) \le M/(2\pi) - \pi^2 b \ (0 < x < 2\pi),$$

$$f'(x) \le M/(2\pi) - \pi^2 b \le 1,$$

$$M/(2\pi) - \pi^2 b \le 1,$$

$$\pi^2 b \ge - 1 + M/(2\pi),$$

$$b \geq - 1/\pi^2 + M/(2\pi^3),$$

$$- \min\{M/(4\pi^3),\ 1/\pi^2 - M/(2\pi^3)\} \leq b < 0,$$

так что в итоге достаточно выполнение неравенств

$$- \min\{M/(4\pi^3),\ 1/\pi^2 - M/(2\pi^3)\} \leq b < \min\{M/(2\pi^3),\ 1/(2\pi^2) - M/(4\pi^3)\}.$$

2′′′. В одной из точек отрезка $[0, 2\pi]$ функция $f(x)$ принимает значение V.

Функция

$$f(x) = H_1(x) + bx(x - \pi)(x - 2\pi) =$$

$$V - M + xM/(2\pi) + b(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)\ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

принимает значение V при $x = 2\pi$:

$$f(2\pi) = V.$$

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из четырёх функций

$$g(x) = -x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$G(x) = x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$h(x) = -x + 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге достаточно объединённое условие

$$-\min\{M/(4\pi^3),\ 1/\pi^2 - M/(2\pi^3)\} \le b < \min\{M/(2\pi^3),\ 1/(2\pi^2) - M/(4\pi^3)\},$$

дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Остаётся в четвёртом из примеров замена функции

$$f(x) - V = H_1(x) - V = xM/(2\pi) - M \ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

центрально симметричной относительно точки (π, - M/2) с абсциссой середины π отрезка [0, 2π] и поэтому на нём обладающей интегралом (- πM) и гладкой, то есть непрерывно дифференцируемой, кусочно-степенной функцией

$$f(x) - V = - M + M(x/\pi)^d/2 \ (0 \leq x \leq \pi, \ d > 1),$$

$$f(x) - V = - M(2 - x/\pi)^d/2 \ (\pi \leq x \leq 2\pi, \ d > 1)$$

с теми же, что и у функции xM/(2π) - M, значениями

$$f(0) - V = - M, \ f(\pi) - V = - M/2, \ f(2\pi) - V = 0$$

на концах и посредине этого отрезка [0, 2π].

Функция

$$f(x) = V - M + M(x/\pi)^d/2 \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$
$$f(x) = V - M(2 - x/\pi)^d/2 \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1)$$

непрерывна на $[0, 2\pi]$, поскольку

$$f(\pi) = V - M + M(\pi/\pi)^d/2 = V - M(2 - \pi/\pi)^d/2 = V - M/2.$$

Производная функции $f(x)$

$$f'(x) = d(x/\pi)^{d-1}M/(2\pi) \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$
$$f'(x) = d(2 - x/\pi)^{d-1}M/(2\pi) \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1)$$

непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$, поскольку

$$f'(\pi) = d(\pi/\pi)^{d-1}M/(2\pi) = d(2 - \pi/\pi)^{d-1}M/(2\pi) = dM/(2\pi),$$

причём на отрезке $[0, \pi]$ строго монотонно возрастает от 0 до этого значения $dM/(2\pi)$, а на

отрезке [π, 2π] строго монотонно убывает от значения dM/(2π) до 0, так что именно это значение dM/(2π) и является на отрезке [0, 2π] максимумом и производной

$$\max_{x\in[0,2\pi]} f'(x) = f'(\pi) = dM/(2\pi),$$

и её абсолютной величины

$$\max_{x\in[0,2\pi]} |f'(x)| = |f'(\pi)| = dM/(2\pi).$$

Поэтому функция f(x) - V на отрезке [0, 2π] строго монотонно возрастает от (-M) до 0, так что именно эти значения и являются минимумом

$$\min_{x\in[0,2\pi]} (f(x) - V) = f(0) - V = - M$$

и максимумом

$$\max_{x\in[0,2\pi]}(f(x) - V) = f(2\pi) - V = 0$$

функции $f(x) - V$ на отрезке $[0, 2\pi]$ с максимумом её абсолютной величины

$$\max_{x\in[0,2\pi]}|f(x) - V| = |f(0) - V| = M.$$

Продолжим исследование выполнения совокупности условий теоремы 15 функцией

$$f(x) = V - M + M(x/\pi)^d/2 \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f(x) = V - M(2 - x/\pi)^d/2 \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1).$$

1. В каждой точке интервала (0, 2π) производная f′(x) функции f(x) существует и по абсолютной величине не превышает единицы:

$$|f'(x)| \le 1 \ (0 < x < 2\pi).$$

$$f'(x) = d(x/\pi)^{d-1}M/(2\pi) \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f'(x) = d(2 - x/\pi)^{d-1}M/(2\pi) \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1),$$

$$\max_{x\in[0,2\pi]} f'(x) = f'(\pi) = \max_{x\in[0,2\pi]}|f'(x)| = |f'(\pi)| = dM/(2\pi),$$

$$dM/(2\pi) \le 1,$$

$$1 < d \le 2\pi/M.$$

2‴. В одной из точек отрезка [0, 2π] функция f(x) принимает значение V.

Функция

$$f(x) = V - M + M(x/\pi)^d/2 \ (0 \le x \le \pi,\ d > 1),$$

$$f(x) = V - M(2 - x/\pi)^d/2 \ (\pi \le x \le 2\pi,\ d > 1)$$

принимает значение V при x = 2π:

$$f(2\pi) = V.$$

4′. Функция f(x) на отрезке [0, 2π] явно не совпадает именно тождественно ни с одной из четырёх функций

$$g(x) = - x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$G(x) = x + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$h(x) = - x + 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi),$$

$$H(x) = x - 2\pi + V \ (0 \le x \le 2\pi).$$

В итоге достаточно условие

$$1 < d \le 2\pi/M,$$

дающее множество различных функций f(x) мощности континуума. Такова и мощность множества всех непрерывных функций.

Тем самым теорема 15 доказана полностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, впервые дано именно элементарное доказательство весьма частной теоремы Харальда Бора об ограниченности функции, непрерывной и имеющей нулевое интегральное среднее на отрезке, равные значения на его концах и ограниченную производную всюду внутри него. Всесторонне исследованы и использованы все разнообразные возможности уточнения, углубления, обобщения и развития этой теоремы, её условий и заключения 14 дальнейшими теоремами.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Советское радио, 1970. 152 с.**
2. **Акилов Г. П., Макаров Б. М., Хавин В. П. Элементарное введение в теорию интеграла. Л.: изд-во Ленинградского университета, 1969. 349 с.**
3. **Александров А. Д., Колмогоров А. Н., Лаврентьев М. А. (ред.) Математика, её содержание, методы и значение. Том 1. М.: Изд. АН СССР, 1956. 296 с.**

4. Александров А. Д., Колмогоров А. Н., Лаврентьев М. А. (ред.) Математика, её содержание, методы и значение. Том 2. М.: Изд. АН СССР, 1956. 397 с.

5. Александров А. Д., Колмогоров А. Н., Лаврентьев М. А. (ред.) Математика, её содержание, методы и значение. Том 3. М.: Изд. АН СССР, 1956. 336 с.

6. Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 411 с.

7. Александров П. С. Комбинаторная топология. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 660 с.

8. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми знаниями из алгебры. М.: Наука, 1968. 912 с.

9. Александров П. С. Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969. 240 с.

10. Александров П. С. Что такое неэвклидова геометрия. М.: Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1950. 72 с.

11. Александров П. С., Ефремович В. А. О простейших понятиях современной топологии. М.; Л.: Гл. ред. общетехн. лит и номографии, 1935. 32 с.

12. Александров П. С., Ефремович В. А. Очерк основных понятий топологии. М.; Л.: Гл. ред. общетехн. лит и номографии, 1936. 95 с.
13. Александров П. С., Колмогоров А. Н. Введение в теорию функций действительного переменного. М.; Л.: Государственное объединённое научно-техническое издательство, Ред. технико-теоретической литературы, 1933. 275 с.
14. Александров П. С., Колмогоров А. Н. Введение в теорию функций действительного переменного. Изд. 3-е, перераб. М.; Л.: Государственное объединённое научно-техническое издательство,

Ред. технико-теоретической литературы, 1938. 268 с.

15. Александров П. С., Маркушевич А. И., Хинчин А. Я. Энциклопедия элементарной математики в 5 книгах. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951–1966.
16. Альтшуллер Г. С. Алгоритм изобретения. М.: Московский рабочий, 1969. 272 с.
17. Альтшуллер Г. С. Как научиться изобретать. Тамбов: Тамбовское книжное изд-во, 1961. 128 с.

18. Альтшуллер Г. С. Основы изобретательства. Воронеж: Центрально-черноземное книжное издательство, 1964. 238 с.
19. Амосов Н. М. Искусственный разум. Киев: Наукова думка, 1969. 153 с.
20. Амосов Н. М. (ред.) Кибернетика и живой организм. Киев: Наукова думка, 1964. 117 с.
21. Амосов Н. М. Моделирование сложных систем. Киев: Наукова думка, 1968. 81 с.
22. Андреев И. Д. Познаваемость мира и его закономерностей. М.: Знание, 1953. 64 с.

23. Арбиб М. Мозг, машина и математика / пер. с англ. М.: Наука, 1968. 224 с.
24. Аристотель. Аналитики первая и вторая / пер. с греч. Б. А. Фохта. Л.: Государственное издательство политической литературы, 1952. 440 с.
25. Арнольд И. В. Теоретическая арифметика. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1938. 480 с.
26. Арсеньев А. С., Библер В. С., Кедров Б. М. Анализ развивающегося понятия. М.: Наука, 1967. 440 с.

27. Артин Э. Геометрическая алгебра / пер. с англ. В. М. Котлова под ред. Л. А. Калужнина. М., Наука, 1969. 283 с.
28. Архангельский Н. А., Зайцев Б. И. Автоматические цифровые машины. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 128 с.
29. Архимед. Сочинения / перевод, вступительная статья и комментарии Ю. Н. Веселовского; перевод арабских текстов Б. А. Розенфельда. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 640 с.

30. **Асмус В. Ф. Логика. М.: Государственное издательство политической литературы (ОГИЗ), 1947. 387 с.**
31. **Асмус В. Ф. Проблема интуиции в философии и математике (Очерк истории: XVII – начало XX в.). М.: Мысль, 1965. 312 с.**
32. **Асмус В. Ф. Учение логики о доказательстве и опровержении. М.: Государственное издательство политической литературы, 1954. 88 с.**
33. **Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. 2-ое изд. М.: Наука, 1965. 408 с.**

34. Бакрадзе К. С. Логика. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та им. Сталина, 1951. 456 с.

35. Банах С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1966. 436 с.

36. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 936 с.

37. Бартлетт М. С. Введение в теорию случайных процессов. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1958. 384 с.

38. Бахман Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии. М.: Наука, 1969. 380 с.

39. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 326 с.
40. Беккенбах Э. (ред.). Прикладная комбинаторная математика: сб. статей / пер. с англ. М.: Мир, 1968. 364 с.
41. Беккенбах Э. Ф. (ред.) Современная математика для инженеров / пер. с англ. И. Н. Векуа. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1958. 498 с.
42. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства / пер. с англ. М.: Мир, 1965. 168 с.

43. **Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.**
44. **Беллман Р. Э. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.**
45. **Беллман Р. (ред.) Математические проблемы в биологии. Сборник переводов. М.: Мир, 1966. 278 с.**
46. **Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 464 с.**
47. **Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Государственное**

издательство физико-математической литературы, 1959. 620 с.

48. **Берман Г. Н. Приёмы счёта. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 88 с.**
49. **Берман Г. Н. Счёт и число. Как люди учились считать. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 36 с.**
50. **Берман Г. Н. Число и наука о нём. Общедоступные очерки по арифметике натуральных чисел. М.: Государственное**

издательство технико-теоретической литературы, 1954. 164 с.

51. Бернал Дж. Наука в истории общества. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1956. 736 с.
52. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: в 4 т. Том I. Конструктивная теория функций (1905–1930 гг.). М.: Издательство Академии Наук СССР, 1952. 582 с.
53. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: в 4 т. Том II. Конструктивная теория функций (1931–1950

гг.). М.: Издательство Академии Наук СССР, 1954. 628 с.

54. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: в 4 т. Том III. Дифференциальные уравнения, вариационное исчисление и геометрия (1903–1947 гг.). М.: Издательство Академии Наук СССР, 1960. 441 с.

55. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: в 4 т. Том IV. Теория вероятностей и математическая статистика (1917–1946 гг.). М.: Издательство Академии Наук СССР, 1964. 579 с.

56. Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. Изд. 2-е, доп. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934. 412 с.
57. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. Часть 1. М.; Л.: Главная редакция общетехнической литературы, 1937. 200 с.
58. Бесконечность и Вселенная: сбор. статей. М.: Мысль, 1969. 325 с.

59. Биркгоф Г. Теория структур. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1952. 407 с.
60. Блекуэлл Д., Гиршик М. А. Теория игр и статистических решений. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1958. 376 с.
61. Богданов А. А. Тектология. Всеобщая организационная наука: в 2-х кн. Берлин; Москва; Санкт-Петербург: Издательство З. И. Гржебина, 1922.
62. Боголюбов Н. Н. Мергелян С. Н. Советская математическая школа. М.: Знание, 1967. 65 с.

63. Богомолов С. А. Актуальная бесконечность. Зенон Элейский, Ис. Ньютон, Г. Кантор. Л.; М.: ОНТИ Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934. 78 с.

64. Богуславский В. М. Задачи по логике. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1952. 112 с.

65. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.

66. Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1965. 108 с.

67. Больцано Б. Парадоксы бесконечного. Одесса: Mathesis, 1911. 111 с.
68. Боревич З. И. Определители и матрицы. М.: Наука, 1970. 200 с.
69. Борель Э. Вероятность и достоверность. М.: Наука, 1969. 110 с.
70. Борель Э. Случай / пер. с французского Ю. И. Костицыной под редакцией В. А. Костицына. М.; Пг.: Госиздат, 1923. 227 с.
71. Ботвинник М. М. Алгоритм игры в шахматы. М.: Наука, 1968. 94 с.

72. Ботвинник М. М. О кибернетической цели игры. М.: Советская радио, 1955. 120 с.

73. Боумен У. Графическое представление информации / пер. с англ. М.: Мир, 1971. 228 с.

74. Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1959. 178 с.

75. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 392 с.

76. Бродский И. Н. Элементарное введение в символическую логику. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1964. 66 с.
77. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 11-е изд., стер. М.: Наука, 1967. 608 с.
78. Брудно А. Л. Теория функций действительного переменного. М.: Наука, 1971. 119 с.
79. Бугулов Е. А., Толасов Б. А. Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам. Орджоникидзе: Северо-Осетинское книжное изд-во, 1962. 226 с.

80. **Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер / пер. с франц. Д. А. Райкова. М.: Наука, 1967. 400 с.**
81. **Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры / пер. с франц. С. Н. Крачковского; под ред. Д. А. Райкова. М.: Наука, 1968. 275 с.**
82. **Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства / пер. с франц. С. Н. Крачковского; под ред. Д. А. Райкова. М.: Наука, 1969. 392 с.**

83. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 292 с.
84. Бурбаки Н. Теория множеств. Книга 1. Основные структуры анализа / пер. с франц. Г. Н. Поварова, Ю. А. Шихановича; под ред. В. А. Успенского. М.: Мир, 1965. 456 с.
85. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. Элементарная теория / пер. с франц. Е. И. Стечкиной. М.: Наука, 1965. 424 с.
86. Бут Э. Д. Численные методы / пер. с англ. Т. М. Тер-Микаэляна под ред. В. М. Курочкина. М.:

Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 237 с.

87. Бухштаб А. А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966. 384 с.

88. Бэкон Р. Большое сочинение. Часть первая, в которой устраняются четыре общие причины человеческого невежества // Антология мировой философии. Т. 1, ч. 2. М., 1969. С. 862–877.

89. Бэкон Ф. Новый органон. Л.: ОГИЗ СОЦЭКГИЗ, 1935. 384 с.

90. Бэр Р. Теория разрывных функций / пер. с фр. и редакция А. Я. Хинчина. М.; Л.: Государственное

издательство технико-теоретической литературы, 1932. 134 с.

91. Вайскопф В. Наука и удивительное. Как человек понимает природу / пер. А. С. Компанеец. М.: Наука, 1965. 234 с.

92. Вальд А. Последовательный анализ. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 328 с.

93. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1960. 435 с.

94. Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции / пер. с голландского Н. Веселовского. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 456 с.
95. Варпаховский Ф. Л. Элементы теории алгоритмов. М.: Просвещение, 1970. 25 с.
96. Васильев А. В. Целое число. М.: Научное книгоиздательство, 1919. 272 с.
97. Васильев Н. А. Логика и металогика // Логос. 1912–1913. Кн. 1–2. С. 53–81.

98. Васильев Н. А. Воображаемая (неаристотелева) логика // Журнал мин-ва нар. просвещения. Нов. Сер. 1912. Август. С. 207–246.
99. Введенский А. И. Лекции по логике. СПб.: Типография В. Безобразова и К°, 1896. 446 с.
100. Введенский А. И. Лекции по психологии 1890–91 акад. г. СПб.: Издательство студентов Императорского историко-филологического института, 1891. 204 с.
101. Введенский А. И. Лекции психологии. СПб.: Типография В. Безобразова и К°, 1908. 523 с.

102. Введенский А. И. Логика для гимназий. Пг.: Типография М. М. Стасюлевича, 1915. 181 с.

103. Введенский А. И. Логика как часть теории познания. Пг.: Типография М. М. Стасюлевича, 1917. 430 с.

104. Введенский А. И. О видах веры в ее отношениях к знанию. СПб.: Типография лит. т-ва И. Н. Кушнерев и К°, 1894. 76 с.

105. Введенский А. И. О пределах и признаках одушевления. СПб.: Типография В. С. Балашева, 1892. 119 с.

106. Введенский А. И. Психология без всякой метафизики. Пг.: Типография М. М. Стасюлевича, 1917. 359 с.
107. Вейль Г. О философии математики. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934. 128 с.
108. Вейль Г. Полвека математики / перевод с английского З. А. Кузичевой. М.: Знание, 1969. 48 с.
109. Вейль Г. Симметрия / перевод с английского Б. В. Бирюкова и Ю. А. Данилова под редакцией Б. А. Розенфельда. М.: Наука, 1968. 192 с.

110. Великанов М. А. Ошибки измерения и эмпирические зависимости. Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1962. 302 с.
111. Венков Б. А. Элементарная теория чисел. М.; Л.: Гл. ред. общетехн. и техно-теорет. лит., 1937. 220 с.
112. Вентцель Е. С. Введение в исследование операций. М.: Советское радио, 1964. 388 с.
113. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.

114. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 68 с.
115. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. Задачи и упражнения. М.: Наука, 1969. 368 с.
116. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 468 с.
117. Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 320 с.

118. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 328 с.
119. Виленкин Н. Я. Метод последовательных приближений. М.: Наука, 1968. 108 с.
120. Виленкин Н. Я., Горин Е. А., Костюченко А. Г. и др. Функциональный анализ (Справочная математическая библиотека). М.: Наука, 1964. 424 с.
121. Винер Н. Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине. 2-е изд. М.: Советское радио, 1968. 201 с.

122. Винер Н. Моё отношение к кибернетике. Её прошлое и будущее. М.: Советское радио, 1969. 24 с.
123. Винер Н. Я – математик. М.: Наука, 1964. 354 с.
124. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. 180 с.
125. Виноградов С. Н., Кузьмин А. Ф. Логика. 8-е изд. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1954. 176 с.
126. Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы. М.: Наука, 1966. 248 с.

127. **Воробьёв Н. Н. Признаки делимости. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 72 с.**
128. **Воробьёв Н. Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1969. 112 с.**
129. **Воробьёв Н. Н., Врублевская И. Н. (ред.) Позиционные игры. Сборник статей. М.: Наука, 1967. 524 с.**
130. **Время и современная физика / под ред. Дж. Ригала. М.: Мир, 1970. 152 с.**

131. Вудсон У., Коновер Д. Справочник по инженерной психологии для инженеров и художников-конструкторов. М.: Мир, 1968. 260 с.
132. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967. 415 с.
133. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в Древнем мире. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Наука, 1967. 320 с.
134. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1964. 872 с.
135. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. М.: Наука, 1966. 424 с.

136. Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений. М.: Наука, 1971. 248 с.

137. Гагарин Ю. А., Лебедев В. И. Психология и космос. М.: Молодая гвардия, 1968. 208 с.

138. Галилей Г. Избранные труды: в 2 т. М.: Наука, 1964.

139. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 2-е изд., доп. М.: Наука, 1966. 576 с.

140. Гарднер М. Этот правый, левый мир. М.: Мир, 1967. 267 с.

141. Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел / перевод Б. Б. Демьянова, общая редакция И. М. Виноградова,

комментарии Б. Н. Делоне. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1959. 979 с.

142. Гегель Г. В. Ф. Наука логики: в 3-х томах. Т. 1. М.: Мысль, 1970. 501 с.

143. Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. М.: Мир, 1965. 201 с.

144. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе / пер. с англ. Б. И. Голубова. М.: Мир, 1967. 252 с.

145. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщённые функции и действия над ними (Обобщённые функции, выпуск 1) (2-е изд.). М.: Государственное

издательство физико-математической литературы, 1959. 472 с.

146. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 400 с.
147. Гельфонд А. О., Линник Ю. В. Элементарные методы в аналитической теории чисел. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 272 с.
148. Генкин Л. О математической индукции. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 36 с.

149. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 384 с.
150. Гершель Д. Философия естествознания. Об общем характере, пользе и принципах исследования природы. СПб.: Русская книжная торговля, 1868. 355 с.
151. Гильберт Д. Основания геометрии / перевод с седьмого немецкого издания И. С. Градштейна; под редакцией и со вступительной статьёй П. К. Рашевского. М.; Л.: ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 491 с.

152. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1947. 306 с.
153. Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков. М.: Мир, 1970. 326 с.
154. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969. 476 с.
155. Гливенко В. И. Интеграл Стильтьеса. Л.: ОНТИ, 1936. 217 с.
156. Глушков В. М. Введение в кибернетику. Киев: Изд-во АН УССР, 1964. 324 с.

157. **Глушков В. М. Введение в теорию самосовершенствующихся систем. Киев: Изд-во КВИРТУ, 1962. 109 с.**
158. **Глушков В. М. Гносеологические основы математизации науки. Киев.: Наук, думка, 1965. 25 с.**
159. **Глушков В. М. Кибернетика и умственный труд. М.: Знание, 1965. 46 с.**
160. **Глушков В. М. Мышление и кибернетика. М.: Знание, библиотечка философских проблем техники, 1966. 32 с.**

161. Гнеденко Б. В. Беседы о математической статистике. М.: Знание, 1968. 48 с.
162. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Изд. 5-е. М.: Наука, 1969. 400 с.
163. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1946. 246 с.
164. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьёв А. Д. Математические методы в теории надёжности. М.: Наука, 1965. 524 с.

165. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1970. 168 с.
166. Гоббс Т. Избранные произведения в двух томах. Т. 1–2. М.: Мысль, 1964.
167. Голдман С. Теория информации / пер. с англ. Б. Г. Белкина, под ред. В. В. Фурдуева. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1957. 446 с.
168. Головина Л. И., Яглом И. М. Индукция в геометрии. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 100 с.

169. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. Изд. 2-е, перераб. М.: Гостехтеориздат, 1954. 328 с.
170. Горский Д. П. Вопросы абстракции и образование понятий. М.: Издательство Академии наук СССР, 1961. 352 с.
171. Горский Д. П. Логика. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1958. 292 с.
172. Горский Д. П., Таванец П. В. (ред.) Логика. М.: Государственное издательство политической литературы, 1956. 279 с.

173. Градштейн И. С. Прямая и обратная теоремы. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 80 с.
174. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, перераб. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 1100 с.
175. Гребенча М. К. Теория чисел. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1949. 128 с.
176. Грузенберг С. О. Гений и творчество: Основы теории и психологии творчества: с прил. неизд.

материалов по вопросам психологии творчества и указ. лит. Л.: Изд-во П. П. Сойкина, 1924. 254 с.

177. Гудстейн Р. Л. Рекурсивный математический анализ. М.: Наука, 1970. 472 с.

178. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций / пер. М. А. Евграфова. М.: Наука, 1968. 648 с.

179. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 232 с.

180. Гутер Р. С., Овчинский Б. В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М.: Наука, 1970. 432 с.

181. Гутер Р. С., Овчинский Б. В., Резниковский П. Т. Программирование и вычислительная математика. М.: Наука, 1965. 448 с.
182. Гутчин И. Б. Кибернетические модели творчества. М.: Знание, 1969. 64 с.
183. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. Том 1. Изд. 12-е, испр. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 224 с.
184. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. Том 2. Изд. 3-е, перераб. М.;

Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1945. 223 с.

185. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. Том 3. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 264 с.
186. Дайменд С. Мир вероятностей. Статистика в науке. М.: Статистика, 1970. 155 с.
187. Данскин Дж. М. Теория максимина и её приложение к задачам распределения вооружения. М.: Советское радио, 1970. 200 с.

188. Де Брёйн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М.: Мир, 1966. 248 с.
189. Дедекиндъ Р. Непрерывность и ирраціональныя числа. Одесса: Mathesis, 1906. 40 с.
190. Декарт Р. Избранные произведения = Oeuvres choisies. М.: Государственное издательство политической литературы, 1950. 712 с.
191. Декарт Р. Рассуждение о методе. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1953. 655 с. (Серия: Классики науки).

192. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 7-е изд., стер. М.: Наука, 1969. 544 с.

193. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Изд. 2-е. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 660 с.

194. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Наука, 1967. 368 с.

195. Депман И. Я. История арифметики. Пособие для учителей. 2-е изд., испр. М.: Просвещение, 1965. 416 с.
196. Депман И. Я. Первое знакомство с математической логикой. Л.: Знание, 1965. 59 с.
197. Депман И. Я. Рассказы о математике. Л.: Детгиз, 1957. 142 с.
198. Депман И. Я. Рассказы о решении задач. Л.: Детская литература, 1957. 127 с.
199. Джевонс У. С. Основы науки. Трактат о логике и научном методе = The Principles of Science: A Treatise on Logic and Scientific Method / пер. со 2-го

англ. изд. М. Антоновича. СПб.: Издательство Л. Ф. Пантелеева, 1881. 713 с.

200. Диалектика и логика. Законы мышления / под общей редакцией члена-корреспондента АН СССР Б. М. Кедрова. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1962. 336 с.

201. Диалектика и логика. Формы мышления / под общей редакцией члена-корреспондента АН СССР Б. М. Кедрова. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1962. 312 с.

202. Доморяд А. П. Математические игры и развлечения. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 267 с.

203. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Краткое пособие по математике для поступающих в Московский университет. М.: изд-во МГУ, 1964. 209 с.

204. Дрешер М. Стратегические игры. Теория и приложения / пер. с англ. И. В. Соловьева. М.: Советское радио, 1964. 352 с.

205. Дринфельд Г. И. Дополнения к общему курсу математического анализа. Харьков: Изд-во

Харьковского государственного университета им. А. М. Горького, 1958. 115 с.

206. Дринфельд Г. И. Трансцендентность чисел пи и е. Харьков: Изд-во Харьковского государственного университета им. А. М. Горького, 1952. 76 с.

207. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1956. 609 с.

208. Дубнов Я. С. Измерение отрезков. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 100 с.

209. Дубнов Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 72 с.

210. Дьедонне Ж. Основы современного анализа / пер. с англ. М. А. Вайнштейна. М.: Мир, 1964. 430 с.

211. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел / пер. с англ. Б. З. Мороза; под ред. Ю. В. Линника. М.: Наука, 1965. 175 с.

212. Жуков Н. И. Информация. Философский анализ центрального понятия кибернетики. Минск: Наука и техника, 1971. 280 с.
213. Журдэн Ф. Природа математики / пер. с английского А. А. Мочульский; под редакцией профессора И. Ю. Тимченко. Одесса: Матезис, 1923. 178 с.
214. Зайдель А. Н. Элементарные оценки ошибок измерений. Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1967. 88 с.
215. Збірник задач республіканських математичних олімпіад / В. І. Михайловський, М. Й. Ядренко, Г.

Й. Призва, В. А. Вишенський; за заг. ред. доц. В. І. Михайловського. К.: Вища школа, 1969. 120 с.

216. Зедгенидзе Г. П., Гогсадзе Р. Ш. Математические методы в измерительной технике. М: Изд-во Комитета стандартов, 1970. 616 с.

217. Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих и её приложения к физике. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 560 с.

218. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1967. 648 с.

219. Зиновьев А. А. Комплексная логика. М.: Наука, 1970. 206 с.
220. Зиновьев А. А. Логика науки. М.: Мысль, 1971. 279 с.
221. Ивин А. А. Основания логики оценок. М.: Изд-во Московского ун-та, 1970. 230 с.
222. Ивс Г., Ньюсом К. В. О математической логике и философии математики / пер. с англ. М.: Знание, 1968. 48 с.
223. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех: опыт математической хрестоматии: книга для семьи и школы. Кн. 1. 4-е

изд., перераб. СПб.: Тип. Т-ва А. С. Суворина «Новое Время», 1914. 275 с.

224. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех: опыт математической хрестоматии: книга для семьи и школы. Кн. 2. СПб.: Тип. А. С. Суворина «Новое Время», 1909. 282 с.

225. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех: опыт математической хрестоматии: книга для семьи и школы. Кн. 3. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Тип. Т-ва А. С. Суворина «Новое Время», 1915. 322 с.

226. Идельсон А. В., Минц Г. Е. (ред.) Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967. 351 с.

227. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

228. История математики: в 3 томах / под редакцией А. П. Юшкевича. Том 1. С древнейших времен до начала нового времени. М.: Наука, 1970. 352 с.

229. История математики: в 3 томах / под редакцией А. П. Юшкевича. Том 2. Математика XVII столетия. М.: Наука, 1970. 301 с.

230. Кавальери Б. Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. Том 1. Основы учения о неделимых / перевод со вступительной статьёй и примечаниями С. Я. Лурье. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1940. 416 с.
231. Каган В. Ф. Лобачевский (2-е изд.). М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 506 с.
232. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. Общедоступные очерки. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 305 с.

233. Калитин Н. И. Искусство быть читателем. М.: Молодая гвардия, 1962. 160 с.

234. Калужнин Л. А. Основная теорема арифметики. М.: Наука, 1969. 32 с.

235. Камке Э. Интеграл Лебега–Стилтьеса. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 328 с.

236. Кантор Г. Основы общего учения о многообразиях. О различных точках зрения на актуально-бесконечное. К учению о трансфинитном / перевод П. С. Юшкевича // А. В. Васильев (ред.). Новые идеи в математике.

Сборник 6-ой. Теория ассамблей 1. СПб.: Образование, 1914. 184 с.

237. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Математическое оптимальное программирование в экономике. М.: Знание, 1968. 66 с.
238. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближённые методы высшего анализа. 5-е изд. М.; Л.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 708 с.
239. Каринский М. И. Классификация выводов. СПб.: тип. Ф. Г. Елеонского и К°, 1880. 271 с.

240. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964. 835 с.
241. Карлин С. Основы теории случайных процессов / пер. с англ. М.: Мир, 1971. 537 с.
242. Карнап Р. Значение и необходимость. Исследование по семантике и модальной логике. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1959. 384 с.
243. Кассандрова О. Н., Лебедев В. В. Обработка результатов наблюдений. М.: Наука, 1970. 104 с.

244. **Катлер Э., Мак-Шейн Р. Система быстрого счёта по Трахтенбергу. М.: Просвещение, 1967. 134 с.**
245. **Кац М., Улам С. Математика и логика. Ретроспектива и перспективы / пер. с английского Н. И. Плужниковой под редакцией И. М. Яглома. М.: Мир, 1971. 253 с.**
246. **Келли Дж. Общая топология. М.: Наука, 1968. 384 с.**
247. **Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. М.: Мир, 1965. 484 с.**

248. Кеплер И. (Ioanne Kepplero). Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки. С присоединением дополнения к архимедовой стереометрии / перевод и предисловие Г. Н. Свешникова, вступительная статья М. Я. Выгодского. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1935. 360 с.

249. Кибернетика, мышление, жизнь / под ред. А. И. Берга, Б. В. Бирюкова, И. Б. Новика, И. В. Кузнецова, А. Г. Спиркина. М.: Мысль, 1964. 510 с.

250. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть 1. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 432 с.

251. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2 томах. Том 1. М.: ОНТИ, 1933. 472 с.

252. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2 томах. Том 2. М.: ОНТИ, 1934. 444 с.

253. Клини С. Введение в метаматематику. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1957. 526 с.

254. Кобринский Н. Е., Пекелис В. Д. Быстрее мысли. М.: Молодая гвардия, 1963. 475 с.

255. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / пер. с нем. М.: Мир, 1969. 448 с.

256. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. М.: Мир, 1971. 312 с.

257. Колмогоров А. Н. О профессии математика. М.: МГУ, 1959. 30 с.

258. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 80 с.

259. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.

260. Кольман Э. Я. История математики в древности. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 235 с.

261. Кольман Э., Зих О. Занимательная логика. М.: Наука, 1966. 128 с.

262. Кондаков Н. И. Введение в логику. М.: Наука, 1967. 467 с.

263. Кондаков Н. И. Логический словарь. М.: Наука, 1971. 656 с.
264. Кондратюк Ю. В. Завоевание межпланетных пространств / под ред. В. П. Ветчинкина. Новосибирск: Изд. авт., 1929. 72 с.
265. Коперник Н. О вращениях небесных сфер. М: Наука, 1964. 653 с.
266. Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966. 160 с.
267. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 576 с.

268. Кордемский Б. А., Русалев Н. В. Удивительный квадрат. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. 160 с.
269. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.
270. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 224 с.
271. Косса П. Кибернетика. От человеческого мозга к мозгу искусственному / перевод со второго

французского издания под общей редакцией и предисловием действительного члена АМН СССР доктора медицинских наук П. К. Анохина. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1958. 123 с.
272. Коши Г. А. Л. Дифференциальное и интегральное исчисление / пер. с фр. В. Я. Буняковского. СПб.: Императорская Академия Наук, 1831. 243 с.
273. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир, 1969. 348 с.

274. Коэн П. Дж., Херш Р. Некантороская теория множеств // Математика в современном мире: сб. статей / сост. А. В. Шилейко. М.: Знание, 1969. 32 с. С. 20–32.

275. Коялович Б. М. Исследование о бесконечных системах линейных уравнений // Известия физико-математического ин-та им. В. А. Стеклова. 1930. 3. С. 41–167.

276. Крайзмер Л. П. Техническая кибернетика. М.; Л. Государственное энергетическое издательство, 1958. 82 с.

277. **Крамер Г. Математические методы статистики / пер. с англ.; под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 632 с.**
278. **Кречмар В. А. Задачник по алгебре. М.: Наука, 1964. 388 с.**
279. **Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, 1968. 432 с.**
280. **Крылов А. Н. Избранные труды. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1958. 806 с.**

281. Крылов А. Н. Лекции о приближённых вычислениях. Изд. 2-е, перераб. и знач. доп. Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1933. 541 с.
282. Крылов В. И. Приближённое вычисление интегралов. Изд. 2-е. М.: Наука, 1967. 500 с.
283. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1966. 370 с.
284. Кузичев А. С. Диаграммы Венна. М.: Наука, 1968. 253 с.

285. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 472 с.
286. Кульбак С. Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967. 408 с.
287. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. 4-е изд., перераб., доп. М.: Наука, 1967. 704 с.
288. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. 2-е изд., перераб., доп. М.: Наука, 1970. 671 с.

289. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов / перевод с английского под редакцией А. Н. Колмогорова. М.: Государственное издание технико-теоретической литературы, 1947. 664 с.
290. Куратовский К. Топология. Том 1. М.: Мир, 1966. 594 с.
291. Куратовский К. Топология. Том 2. М.: Мир, 1969. 624 с.
292. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

293. Курош А. Г. Алгебраические уравнения произвольных степеней. М.; Л.: Государственное издание технико-теоретической литературы, 1961. 32 с.
294. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. 9-е изд. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1968. 431 с.
295. Кутюра Л. Алгебра логики / переводъ съ французскаго съ прибавленіями профессора И. Слешинскаго. Одесса: Матезисъ, 1909. 134 с.
296. Кымпан Ф. История числа пи. М.: Наука, 1971. 216 с.

297. Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы / пер. с англ. И. Н. Веселовского. М.: Наука, 1967. 152 с.

298. Ланге В. Н. Физические парадоксы, софизмы и занимательные задачи. М.: Просвещение, 1967. 168 с.

299. Ланге О. Оптимальные решения. Основы программирования. М.: Изд-во МГУ, 1967. 284 с.

300. Ландау Э. Основы анализа. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1947. 182 с.

301. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1962. 208 с.

302. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 524 с.

303. Лаплас П. Опыт философии теории вероятностей / пер. с фр. М.: Тип. Т-ва И. Н. Кушнерев и Ко, 1908. 210 с.

304. Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций / пер. и ред. проф. Н. К. Бари; доп. статьи акад. Н. Н. Лузина. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934. 325 с.

305. Лебег А. Об измерении величин. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1960. 204 с.

306. Лейбниц Г. В. Избранные философские сочинения / ред. и вступ. ст. В. П. Преображенского // Труды Московского психологического общества. 1890. Вып. 4 (переиздано в 1908 г.).

307. Лейкфельд П. Э. Логическое учение об индукции в главнейшие исторические моменты его разработки. СПб.: Типография В. С. Балашева и К°, 1896. 248 с.
308. Лейкфельд П. Э. Психология: краткое извлечение из курса, читанного в Императорском Харьковском университете. Харьков: Издание студента Дав. Килосанидзе, 1906. 146 с.
309. Лейкфельд П. Э. Психология: краткое извлечение из курса, читанного в Императорском Харьковском университете. Харьков: Типо-литография С. Иванченко, 1913. 176 с.

310. Лейкфельд П. Э. Различные направления в логике и основные задачи этой науки. Харьков: Типография Губернского Правления, 1890. 387 с.
311. Лейтес Н. С. Об умственной одарённости. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1960. 216 с.
312. Линдон Р. Заметки по логике. М.: Мир, 1968. 128 с.
313. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Изд. 2-е, доп. и испр. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 352 с.

314. Литлвуд Дж. Математическая смесь / пер. с англ. Изд. 2, стереот. М.: Наука, 1965. 150 с.

315. Литцман В. Весёлое и занимательное о числах и фигурах. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 264 с.

316. Литцман В. Где ошибка? М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 192 с.

317. Литцман В. Старое и новое о круге. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 60 с.

318. Литцман В. Теорема Пифагора. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 116 с.

319. Литцманн В., Триер В. В чём ошибка? Ложные умозаключения и ученические ошибки / перевод с немецкого Л. С. Левиной-Бри. Одесса: Mathesis 1923. 78 с.

320. Лобачевский Н. И. Геометрические исследования по теории параллельных линий / перевод, комментарии, вступительные статьи и примечания профессора В. Ф. Кагана. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1945. 176 с.

321. Лобачевский Н. И. Три сочинения по геометрии. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 416 с.
322. Логика, автоматы, алгоритмы / М. А. Айзерман, Л. А. Гусев, Л. И. Розоноэр, И. М. Смирнова, А. А. Таль. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 556 с.
323. Локк Дж. Избранные философские произведения: в 2 т. М.: Соцэкгиз [Гос. социально-экономическое издательство], 1960.

324. Ломов Б. Ф., Васильев А. А., Офицеров В. В., Рубахин В. Ф. Военная инженерная психология. М.: Воениздат, 1970. 400 с.

325. Ломоносов М. В. Полное собрание сочинений. Том 04. Труды по физике, астрономии и приборостроению 1744-1765 гг. М.; Л.: Издательство Академии наук СССР, 1955. 832 с.

326. Ломоносов М. В. Полное собрание сочинений. В 11 т. Т. 6. Труды по русской истории, общественно-экономическим вопросам и географии, 1747-1765 гг. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1952. 689 с.

327. Ломоносов М. В. Полное собрание сочинений. В 11 т. Т. 7. Труды по филологии, 1739-1758 гг. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1952. 993 с.

328. Ломоносов М. В. Полное собрание сочинений. В 11 т. Т. 8. Поэзия. Ораторская проза. Надписи 1732-1764 гг. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1959. 1289 с.

329. Лоэв М. Теория вероятностей. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1962. 720 с.

330. Лузин Н. Н. Дифференциальное исчисление. 7-е изд. М.: Высш. шк., 1961. 479 с.

331. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. 544 с.

332. Лузин Н. Н. Интегральное исчисление. 7-е изд. М.: Высш. шк., 1961. 479 с.

333. Лузин Н. Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 360 с.

334. Лузин Н. Н. О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1935. 400 с.
335. Лузин Н. Н. Современное состояние теории функций действительного переменного. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1933. 58 с.
336. Лузин Н. Н. Теория функций действительного переменного. Общая часть. Изд. 2. Уч. пособие для педвузов. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1948. 320 с.

337. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1959. 311 с.
338. Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1961. 642 с.
339. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1965. 520 с.

340. Ляминъ А. А. Математическiе парадоксы и интересныя задачи для любителей математики. М.: типография Г. Лисснера и Д. Собко, 1911. 334 с.
341. Маделунг Э. Математический аппарат физики. Справочное руководство. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 620 с.
342. Мазмишвили А. И. Способ наименьших квадратов. М.: Недра, 1968. 440 с.
343. Майстров Л. Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. М.: Наука, 1967. 321 с.

344. Макаров И. П. Дополнительные главы математического анализа. Учебное пособие. М.: Просвещение, 1968. 308 с.
345. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. М.: Мир, 1969. 582 с.
346. Маковельский А. О. История логики. М.: Наука, 1967. 504 с.
347. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 393 с.
348. Марков А. А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее

уклоняющихся от нуля / биографический очерк и примечания Н. И. Ахиезера. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 411 с. (Классики естествознания. Математика. Механика. Физика. Астрономия).

349. Марков А. А. Избранные труды. Теория чисел, теория вероятностей. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1951. 720 с.

350. Марков А. А. Теория алгорифмов. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1954. 377 с.

351. Маркс К. Математические рукописи. М.: Наука, 1968. 640 с.

352. Марон И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. М.: Наука, 1970. 400 с.

353. Матвеев И. В. Функции и их графики. М.: МГУ, 1970. 104 с.

354. Математический анализ. Вычисление элементарных функций / под ред. Л. А. Люстерника, О. А. Червоненкиса, А. Р. Янпольского. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 239 с. (Справочная математическая библиотека).

355. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные др<u>о</u>би / под ред. Л. А. Люстерника и А. Р. Янпольского. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 266 с.

356. Медведев Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке. М.: Наука, 1965. 231 с.

357. Мейер Цур Капеллен В. Математические инструменты. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1950. 318 с.

358. Мелентьев П. В. Приближённые вычисления. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 388 с.
359. Мельников Г. П. Азбука математической логики. М.: Знание, 1967. 104 с.
360. Мендельсон Э. Введение в математическую логику / пер. с англ. Ф. А. Кабакова; под ред. С. И. Адяна. М.: Наука; Физматлит, 1971. 322 с.
361. Метельский Н. В. Очерки истории методики математики. Минск: Вышэйшая школа, 1968. 340 с.

362. Мизес Р. Э. фон. Вероятность и статистика. М.; Л.: Госиздат., 1930. 250 с.
363. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 527 с.
364. Милль Д. С. Система логики силлогистической и индуктивной: изложение принципов доказательства в связи с методами научного исследования / перевод с английского под редакцией приват-доцента Императорского

Московского университета В. Н. Ивановского. М.: Издание магазина «Книжное дело», 1900. 119 с.

365. Милн В. Э. Численный анализ / перевод с англ. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1951. 292 с.

366. Милсум Дж. Анализ биологических систем управления. М.: Мир, 1968. 502 с.

367. Минто В. Дедуктивная и индуктивная логика / пер. с англ. С. А. Котляревского; под ред. В. Н. Ивановского; примеры для упражнений подобраны В. Н. Ивановским и А. С. Белкиным. 2-

е испр. и доп. изд. М.: Тип. т-ва И. Д. Сытина, 1896. 540 с.

368. Митропольский А. К. Теория моментов. Л.: Государственное издательство колхозной и совхозной литературы, 1933. 223 с.

369. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. М.: Наука, 1971. 576 с.

370. Михеева А. В. и др. Словарь-минимум для чтения научной литературы на английском языке. М.: Наука, 1969. 138 с.

371. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближённые методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 384 с.
372. Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII веке. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1953. 180 с.
373. Молодший В. Н. Очерки по вопросам обоснования математики. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1958. 232 с.

374. Мордухай-Болтовской Д. Д. Психология математического мышления // Вопросы философии и психологии. 1908. Год 19. Вып. 94. Кн. 4. С. 491–534.
375. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. М.: Мир, 1969. 432 с.
376. Мысовских И. П. Лекции по методам вычислений. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 342 с.
377. Нагибин Ф. Ф. Математическая шкатулка. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1958. 168 с.

378. Налимов В. В., Мульченко З. М. Наукометрия. М.: Наука, 1969. 192 с.
379. Налимов В. В., Чернова Н. А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М.: Наука, 1965. 340 с.
380. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 688 с.
381. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. 2-е изд. М.: Наука, 1968. 727 с.
382. Натансон И. П. Простейшие задачи на максимум и минимум. М.: Государственное

издательство технико-теоретической литературы, 1950. 32 с.

383. Натансон И. П. Суммирование бесконечно малых величин. 3-е изд. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 58 с.

384. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. 2-е изд., перераб. М.: Гостехиздат, 1957. 552 с.

385. Научное наследие П. Л. Чебышева. Выпуск 1. Математика. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР. 1945. 174 с.

386. Начала Евклида. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949–1951.
387. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 431 с.
388. Нивен А. Числа рациональные и иррациональные / пер. с англ. В. В. Сазонова; под ред. И. М. Яглома. М.: Мир, 1966. 199 с.

389. Никитин В. В. Сборник логических упражнений. Пособие для учителей математики. М.: Просвещение, 1970. 96 с.
390. Носиро К. Предельные множества. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 253 с.
391. Ньютон И. Всеобщая арифметика, или Книга об арифметических синтезе и анализе. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1948. 444 с. (Классики науки).
392. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / пер. с латин. с

примечаниями и пояснениями А. Н. Крылова // А. Н. Крылов. Собрание трудов. Т. VII. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1936. 696 с.

393. Ньютон И. Математические работы / пер. с лат., вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 478 с. (Классики естествознания).

394. Оре О. Графы и их применение. М.: Мир, 1965. 175 с.

395. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений / пер. с англ. Л. З. Румынского, Б. Л.

Румынского. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 383 с.

396. Оуэн Г. Теория игр / пер. с англ. под ред. А. А. Корбута; вступ. статья Н. Н. Воробьёва. М.: Мир, 1971. 230 с.

397. Пархоменко А. С. Что такое линия. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 140 с.

398. Паскаль Б. Трактат об арифметическом треугольнике (Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traités sur la même matière, 1654, издан в 1665).

399. Перельман Я. И. Быстрый счёт. Тридцать простых приёмов устного счёта. Л.: Дом занимательной науки, 1941. 12 с.

400. Перельман Я. И. Живая математика. М.: Наука, 1967. 160 с.

401. Перельман Я. И. Живой учебник геометрии. Л.: Время, 1930. 127 с.

402. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. М.: Наука, 1970. 198 с.

403. Перельман Я. И. Занимательная арифметика: загадки и диковинки в мире чисел. Изд. 9-е. М.:

Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 190 с.

404. Перельман Я. И. Занимательная геометрия. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 206 с.
405. Перельман Я. И. Занимательная математика. Л.: Время, 1927. 98 с.
406. Перельман Я. И. Фокусы и развлечения. 3-е изд. М.: Детгиз, 1935. 171 с.
407. Петер Р. Игра с бесконечностью / перевод с венгерского В. М. Боцу, А. Я. Маргулиса, А. Ш. Мейлихзона. М.: Просвещение, 1967. 272 с.

408. Платон. Собрание сочинений в 3 т. (в 4 кн.) (Серия «Философское наследие»). Т. 1. М.: Мысль, 1968. 624 с.
409. Платон. Собрание сочинений: в 3 т. (в 4 кн.) (Серия «Философское наследие»). Т. 2. М.: Мысль, 1970. 611 с.
410. Поварнин С. И. Введение в логику. Пг.: Наука и школа, 1921. 70 с.
411. Поварнин С. И. Искусство спора. О теории и практике спора. Пг.: Культурно-просветительное кооперативное товарищество «Начатки знаний», 1923. 128 с.

412. Поварнин С. И. Как читать книги. Л.: Изд-во Ленинградского государственного университета, 1960. 88 с.
413. Поварнин С. И. Логика: общее учение о доказательстве. Пг.: Тип. Акц. Общ. Типографского Дела, 1916. 210 с.
414. Пойа Д. Как решать задачу: пособие для учителя / пер. с англ. В. Г. Звонаревой и Д. Н. Белла; под ред. Ю. М. Гайдука. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1959. 208 с.

415. Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения / пер. с англ.; под ред. С. А. Яновской. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1957. 536 с.
416. Пойа Дж. Математическое открытие / пер. с англ. В. Бермана. М.: Наука, 1970. 456 с.
417. Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа (в 2-х частях). М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.
418. Попов П. С. История логики Нового времени. М.: Издательство Московского университета, 1960. 254 с.

419. Постников М. М. Магические квадраты. М.: Наука, 1964. 84 с.

420. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. 512 с.

421. Преподавание математики: пособие для учителей / Ж. Пиаже, Э. Бет, Ж. Дьедонне, А. Лихнерович, Г. Шоке, К. Гаттеньо; перевод с французского А. И. Фетисова. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1960. 161 с.

422. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные

теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1967. 496 с.
423. Психологические измерения: сборник / пер. с англ. под ред. Л. Д. Мешалкина. М.: Мир, 1967. 196 с.
424. Пуанкаре А. Избранные труды. Том 1. М.: Наука, 1971. 772 с.
425. Пуанкаре А. Наука и гипотеза / перевод с французского А. Г. Бачинского, Н. М. Соловьёва, Р. М. Соловьёва; предисловие Н. А. Умова. М.: Т-во тип. А. И. Мамонтова, 1904. 273 с.

426. Пуанкаре А. Наука и методъ / переводъ съ французскаго И. К. Брусиловскаго; подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана. Одесса: Mathesis, 1910. 384 с.
427. Пуанкаре А. Последние мысли / пер. с франц. А. И. Стожарова; под ред. [и с предисл.] А. П. Афанасьева. Пг.: Научное книгоизд-во, 1923. 134 с.
428. Пуанкаре А. Ценность науки / пер. с франц. под ред. А. Г. Бачинского, Н. М. Соловьёва. М.: Творческая мысль, 1906. 195 с.

429. Пустыльник Е. И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М.: Наука, 1968. 288 с.

430. Радемахер Г., Тёплиц О. Числа и фигуры. Опыты математического мышления / пер. с нем. В. И. Контова; под редакцией И. М. Яглома. 2-ое издание. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 264 с. (Серия «Библиотека математического кружка»).

431. Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика. М.: Мир, 1965. 154 с.

432. Ракитов А. И. Курс лекций по логике науки. М.: Высшая школа, 1971. 176 с.

433. Рачинский С. А. (сост.) 1001 задача для умственного счёта: пособие для учителей сельских школ. СПб.: Синодальная типография, 1899. 88 с.

434. Рвачёв Л. А. Математика и семантика. Киев: Наукова думка, 1966. 81 с.

435. Реньи А. Диалоги о математике. М.: Мир, 1969. 98 с.

436. Реньи А. Письма о вероятности / пер. с венг. Д. Сааса и А. Крамли; под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Мир, 1970. 93 с.

437. Риман Б. Сочинения. М.: Гостехиздат, 1948. 543 с.

438. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 288 с.

439. Розенберг В. Я., Прохоров А. И. Что такое теория массового обслуживания. М.: Советское радио, 1962. 254 с.

440. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Омар Хайям. М.: Наука, 1965. 192 с.

441. Романовский В. И. Избранные труды. Том 2. Теория вероятностей, статистика и анализ. Ташкент: Наука, 1964. 392 с.

442. Романовский В. И. Основные задачи теории ошибок. 1947. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 116 с.

443. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1966. 320 с.

444. Румшиский Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента. М.: Наука,

Государственное издательство физико-математической литературы, 1971. 192 с.

445. Рыбников К. А. История математики. Т. 1. М.: Изд-во МГУ, 1960. 190 с.

446. Рыбников К. А. История математики. Т. 2. М.: Изд-во МГУ, 1963. 336 с.

447. Сакс С. Теория интеграла / пер. И. С. Березина, Б. М. Будака, Л. А. Гусарова. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1949. 494 с.

448. Сборник задач московских математических олимпиад / сост. А. А. Леман; ред. В. Г. Болтянский. М.: Просвещение, 1965. 384 с.

449. Серебрянников О. Ф. Эвристические принципы и логические исчисления. М.: Наука, 1970. 283 с.
450. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. М.: Просвещение, 1968. 168 с.
451. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах / перевод с польского И. Г. Мельникова. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 88 с.
452. Серпинский В. О теории множеств / перевод с польского З. З. Рачинского. М.: Просвещение, 1966. 62 с.

453. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1959. 112 с.
454. Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. М.; Л.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 92 с.
455. Сикорский Р. Булевы алгебры. М.: Мир, 1969. 376 с.
456. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. М.: Наука, 1970. 148 с.

457. Смирнов В. И. Курс высшей математики: в 5 т. М.: Наука, 1961–1969.
458. Смолянский М. Л. Таблицы неопределённых интегралов. 2-е изд., испр. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 112 с.
459. Соболев В. И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. М.: Наука, 1968. 288 с.
460. Соминский И. С. Метод математической индукции. М.: Наука, 1965. 58 с. Серия: Популярные лекции по математике.

461. Соминский И. С., Головина Л. И., Яглом И. М. О математической индукции. М.: Наука, 1967. 144 с.
462. Стеклов В. А. Математика и её значение для человечества. Берлин: ГИ РСФСР, 1923. 137 с.
463. Стилтьес Т. И. Исследования о непрерывных дробях. Харьков: Научно-техническое издательство Украины, 1936. 160 с.
464. Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. Геометрия отображений отрезков, кривых, окружностей и кругов. М.: Мир, 1967. 224 с.

465. Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968. 231 с.

466. Столяр А. А. Как мы рассуждаем? Минск: Нар. асвета, 1968. 112 с.

467. Столяр А. А. Логические проблемы преподавания математики. Минск: Вышэйшая школа, 1965. 254 с.

468. Столяр А. А. Логическое введение в математику. Минск: Вышэйшая школа, 1971. 224 с.

469. Стяжкин Н. И. Формирование математической логики. М.: Наука, 1967. 508 с.
470. Таванец П. В. (ред.). Проблемы логики. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1963. 152 с.
471. Таванец П. В. (ред.). Философские вопросы современной формальной логики. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1962. 365 с.
472. Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 327 с.
473. Тейл Г. Эконометрические прогнозы и принятие решений. М.: Статистика, 1971. 488 с.

474. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 624 с.

475. Торндайк Э. Л. Вопросы преподавания алгебры (Психология алгебры) / пер. с англ. А. С. Долговой; под ред. И. К. Андронова, Д. Л. Волковского. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1934. 192 с.

476. Торндайк Э. Л. Новые методы преподавания арифметики / пер. с англ. А. С. Долговой; под ред.

и с предисл. Д. Л. Волковского. М.: Работник просвещения, 1930. 296 с.

477. Торндайк Э. Л. Принципы обучения, основанные на психологии / пер. с англ. Е. А. Герье; вступит. ст. Л. С. Выготского. Изд. 3-е. М.: Работник просвещения, 1930. 230 с.

478. Торндайк Э. Л. Психология арифметики / пер. с англ. А. С. Долговой; под ред. Д. Л. Волковского. М.; Л.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1932. 302 с.

479. **Трахтенброт Б. А. Алгоритмы и машинное решение задач. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. 96 с.**

480. **Троицкий М. М. Учебник логики с подробными указаниями на историю и современное состояние этой науки в России и в других странах. Кн. 1. Изд. 2-е. М.: тип. Э. Лисснера и Ю. Романа, 1886. 247 с.**

481. **Троицкий М. М. Учебник логики с подробными указаниями на историю и современное состояние этой науки в России и в других странах. Кн. 2. Логика начал. М.: тип. А. А. Гатцука, 1886. 253 с.**

482. Троицкий М. М. Учебник логики с подробными указаниями на историю и современное состояние этой науки в России и в других странах. Кн. 3, вып. 1. Логика геометрии и наук о духе. М.: тип. А. А. Гатцука, 1888. 148 с.
483. Троицкий М. М. Элементы логики: руководство к логике, составленное для средних учебных заведений. М.: Издание книжного магазина В. Думнова, 1887. 152 с.
484. Тромгольтъ С. Игры со спичками. Задачи и развлеченія / переводъ съ нѣмецкаго. 2-е изданіе. Одесса: Mathesis, 1912. 146 с.

485. Трост Э. Простые числа. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 135 с.

486. Тростников В. Н. Человек и информация. М.: Наука, 1970. 187 с.

487. Тьюринг А. М. Может ли машина мыслить / перевод с англ. Ю. А. Данилова. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 67 с.

488. Уёмов А. И. Аналогия в практике научного исследования. М.: Наука, 1970. 266 с.

489. Уёмов А. И. Задачи и упражнения по логике. М.: Высшая школа, 1961. 355 с.

490. Уёмов А. И. Логические основы метода моделирования. М.: Мысль, 1971. 311 с.

491. Уёмов А. И. Логические ошибки: как они мешают правильно мыслить. М.: Государственное издательство политической литературы, 1958. 120 с.

492. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967. 632 с.

493. Уитни Х. Геометрическая теория интегрирования / перевод с английского И. А.

Вайнштейна; под редакцией В. Г. Болтянского. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1960. 534 с.

494. Уиттекер Э., Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений / перевод под редакцией члена-корреспондента Академии Наук СССР проф. Н. М. Гюнтера. 2-е изд. М.: ОНТИ, 1935. 368 с.

495. Уиттекер Э. Т. Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Часть 1. Основные операции анализа. 2-е изд. / пер. с англ. под ред. Ф.

В. Широкова. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 344 с.

496. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Часть 2. Трансцендентные функции / пер. с англ. под ред. Ф. В. Широкова. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 516 с.
497. Улам С. Нерешённые математические задачи. М.: Наука, 1964. 168 с.
498. Урсул А. Д. Информация и мышление. М.: Знание, 1970. 50 с.

499. Урсул А. Д. Информация. Методологические аспекты. М.: Наука, 1971. 293 с.
500. Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. Том 1 / редакция, примечания и вступительная статья П. С. Александрова. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. 512 с.
501. Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. Том 2 / редакция, примечания и вступительная статья П. С. Александрова. М.; Л.: Государственное

издательство технико-теоретической литературы. 1951. 481 с.
502. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. М.: Наука, 1966. 36 с.
503. Уэвелл У. История индуктивных наук от древнейшего и до настоящего времени: в 3 т. СПб.: Русская книжная торговля, 1867–1869.
504. Файнстейн А. Основы теории информации. М.: Мир, 1960. 138 с.
505. Феликс Л. Элементарная математика в современном изложении. М.: Просвещение, 1967. 488 с.

506. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1. М.: Мир, 1964. 500 с.

507. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. М.: Мир, 1967. 752 с.

508. Феферман С. Числовые системы. Основания алгебры и анализа: пер. с англ. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. 440 с.

509. Философская энциклопедия: в 5 т. / глав. ред. академик Ф. В. Константинов. М.: Советская энциклопедия, 1960–1970.

510. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 томах. 7-е изд. Т. 1. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. 607 с.

511. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 томах. 3-е изд. Т. 2. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. 664 с.

512. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 томах. 5-е изд. Т. 3. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. 656 с.

513. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 1. М.: Наука, 1968. 440 с.

514. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 2. М.: Наука, 1968. 463 с.
515. Фишер Р. А. Статистические методы для исследователей. М.: Госстатиздат, 1958. 267 с.
516. Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика: пер. с фр. М.: Мир, 1966. 271 с.
517. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений / пер. с англ. В. П. Ильина и Ю. И. Кузнецова. М.: Мир, 1969. 167 с.

518. Фрейденталь Х. Язык логики. М.: Наука, 1969. 136 с.
519. Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М.: Мир, 1966. 555 с.
520. Фридман А. А. Мир как пространство и время. М.: Наука, 1965. 112 с.
521. Халмош П. Теория меры / перевод с английского Д. А. Василькова; под ред. С. В. Фомина. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1953. 282 с.
522. Хао В., Мак-Нотон Р. Аксиоматические системы теории множеств / пер. с франц. И. Б.

Погребысского; под ред. Л. А. Калужнина. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 55 с. (Б-ка сборника «Математика»).

523. Харди Г. Курс чистой математики / пер. с англ. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1949. 512 с.

524. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1951. 504 с.

525. Харди Г. Г., Литлвуд Дж. И., Пойа Д. Неравенства. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 456 с.

526. Хаусдорф Ф. Теория множеств / перевод с немецкого Н. Б. Веденисова; под редакцией и с дополнениями проф. П. С. Александрова и проф. А. Н. Колмогорова. М.; Л.: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, 1937. 306 с.

527. Хемминг Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 400 с.

528. Хинчин А. Я. Восемь лекций по математическому анализу. 3-е изд. М.; Л.:

Государственное издательство технико-технической литературы, 1948. 260 с.

529. Хинчин А. Я. Краткий курс математического анализа. 3-е изд. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. 628 с.

530. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1955. 124 с.

531. Хинчин А. Я. Основные законы теории вероятностей. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1932. 84 с.

532. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 236 с.
533. Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 72 с.
534. Хинчин А. Я. Учение Мизеса о вероятностях и принципы физической статистики // Успехи физических наук. 1929. 9, вып. 2. С. 141–166.

535. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 112 с.

536. Хованский А. Н. Приложения цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого анализа. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 204 с.

537. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970. 424 с.

538. Холл М. Комбинаторный анализ. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 99 с.

539. Хургин Я. И. Ну и что? М.: Молодая гвардия, 1970. 320 с.

540. Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1932. 232 с.

541. Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках. М.; Л.: ОНТИ. Редакция технико-теоретической литературы, 1938. 470 с.

542. Цетлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука, 1969. 316 с.

543. Циолковский К. Э. Избранные труды / ред.-сост. Б. Н. Воробьёв, В. Н. Сокольский; общая ред. акад. А. А. Благонравова. М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1962. 535 с. (Классики науки / Акад. наук СССР).

544. Цянь-Сюэ-Сэнь. Техническая кибернетика. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1956. 462 с.

545. Чеботарёв А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. М.: Геодезиздат, 1958. 606 с.

546. Чебышёв П. Л. Избранные труды / ред. И. М. Виноградов. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1955. 929 с.

547. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Часть 1. Одесса: Mathesis, 1913. 646 с.

548. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Часть 2. Одесса: Mathesis, 1914. 486 с.

549. Челпанов Г. И. Учебник логики (для гимназий и самообразования). Изд. 9-е. М.; Пг.: Т-во В. В. Думнов – насл. бр. Салаевых, 1917. 204 с.

550. Ченцов Н. Н., Шклярский Д. О., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М.: Наука, 1970. 336 с.

551. Чефранов Г. В. Бесконечность и интеллект. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 1971. 176 с.

552. Чёрч А. Введение в математическую логику / пер. с английского В. С. Черняевского; под редакцией В. А. Успенского. Том 1. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1960. 484 с.

553. Чистяков В. Д. Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами и подробными решениями. Минск: Изд-во Мин. высшего, средн. спец. и проф. обр. БССР, 1962. 204 с.

554. Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1963. 95 с.

555. Шамбадаль П. Развитие и приложения понятия энтропии / перевод с французского. М.: Наука, 1967. 280 с.

556. Шаскольская М. П., Эльцин И. А. Сборник избранных задач по физике. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959. 208 с.

557. Швец М. Н. О приближённых числах. Киев: Радянська школа, 1968. 127 с.

558. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 832 с.

559. Шеннон К. Э., Маккарти Дж. (ред.) Автоматы. Сборник статей. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1956. 402 с.

560. Шеръ М. О безконечности въ геометріи. Теорема о параллельныхъ. М.: Типографія А. А. Стрельцова, 1915. 24 с.

561. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.

562. Шилов Г. Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М.: Наука, 1969. 429 с.

563. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. 2-е изд. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 436 с.

564. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Части 1–2. М.: Наука, 1970. 528 с.

565. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Часть 3. М.: Наука, 1970. 352 с.

566. Шилов Г. Е. Простая гамма. Устройство музыкальной шкалы. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 20 с.

567. Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная (общая теория). М.: Наука, Главная

редакция физико-математической литературы, 1967. 220 с. Дарственная надпись: «Гелимсону Льву за успехи на IX Республиканской Олимпиаде юных математиков. Председатель Жюри профессор Николай Алексеевич Давыдов. Ужгород, 30 марта 1969 года.» Занято третье место.

568. Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. М.: Наука, 1967. 192 с.

569. Шиханович Ю. А. Введение в современную математику. Начальные понятия. М.: Наука, 1965. 376 с.

570. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 1. Арифметика и алгебра. М.: Наука, 1965. 455 с.

571. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 2. Геометрия (планиметрия). М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. 380 с.

572. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 3. Геометрия (стереометрия).

М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 267 с.

573. Шмальгаузен И. И. Кибернетические вопросы биологии. Новосибирск: Наука, 1968. 224 с.

574. Шнирельман Л. Г. Простые числа. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1940. 60 с.

575. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971. 254 с.

576. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 150 с.

577. Шубертъ Г. Математическія развлеченія и игры. Одесса: Mathesis, 1911. 388 с.

578. Шустеф Ф. М., Фельдман А. М., Гуревич В. Ю. Сборник олимпиадных задач по математике. Минск, Учпедгиз БССР, 1962. 84 с.

579. Щиголев Б. М. Математическая обработка наблюдений. М.: Наука, 1969. 344 с.

580. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. 1. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 315 с.

581. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. 2. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 391 с.

582. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М.; Л.: Геодезиздат, 1949.. 580 с.

583. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1956. 415 с.

584. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1957. 368 с.

585. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 3. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 447 с.

586. Эйлер Л. Письма к учёным. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1963. 400 с.

587. Эмпахер А. Сила аналогий / пер. с польск. Ф. Г. Хацянова; под ред. А. В. Шилейко. М.: Мир, 1965. 155 с.

588. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 128 с.

589. Эшби У. Р. Введение в кибернетику. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1959. 432 с.

590. Эшби У. Р. Конструкция мозга. Происхождение адаптивного поведения. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1962. 399 с.
591. Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 315 с.
592. Яглом И. М. Необыкновенная алгебра. М.: Наука, 1968. 72 с.
593. Яглом И. М., Яглом А. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. Задачи по комбинаторике и теории вероятностей. Задачи из разных областей математики. М.: Государственное

издательство технико-теоретической литературы, 1954. 544 с.

594. Яновская С. А. К теории египетских дробей // Труды Института истории естествознания. 1947. 1. С. 269–282.

595. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений / пер. с англ. М.: Мир, 1968. 458 с.

596. Arnauld A., Nicole P. La Logique Ou L′art De Penser: Contenant Outre Les Regles Communes, Plusieurs Observations Nouvelles, Propres À Former Le Jugement / Edition critique par P. Clair et F.

Girbal. Paris: Presses Universitaires de France, 1965. 429 pp.

597. Cantor G. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Berlin: Springer-Verlag, 1932. 489 S.

598. Cotes R. Aestimatio errorum in mixta mathesi, per variationes partim trianguli plani et sphaerici. Lemgoviae: Meyer, 1768. 224 pp.

599. Gauß C. F. Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium. Hamburgi: Sumtibus F. Perthes et I. H. Besser, 1809. 247 pp.

600. Hadamard J. S. An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field. Princeton: Princeton University Press, 1945. 145 pp.

601. Legendre A.-M. Appendice sur la méthode des moindres quarrés // Annexe à l′ouvrage Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris: Firmin-Didot, 1805. P. 72–80.

602. Leonardo da Pisa alias Fibonacci. Liber Abaci. 1202, 1228.

603. Pascal B. Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la mesme matière (Treatise on the arithmetic triangle). Paris: Guillaume

Desprez, 1665. 113 pp. (Reprinted in: Pascal B. Oeuvres / edited by L. Brunschvicg and P. Boutroux. Vol. III. Paris: Hachette, 1908. P. 433–598).
604. Poincaré H. L′invention mathématique // Enseignement mathématique. 1908. Vol. 10. P. 357–371.
605. Robinson A. Non-standard analysis. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1966. 293 pp.
606. Vasiliev N. A. Imaginary (non-aristotelian) logic // Estratto dagli Atti dei V Congresso internationale di Filosofia, 5–9 maggio, 1924, Napoli (Naples), 1925. P. 107–109.

607. Wittgenstein L. Logisch-philosophische Abhandlung / W. Ostwald (Hrsg.) // Annalen der Naturphilosophie. 1921. Band 14. S. 185–262.

608. Wittgenstein L. Remarks on the foundations of mathematics / edited by G. H. Von Wright, R. Rhees and G. E. M. Anscombe; translated by G. E. M. Anscombe. Oxford: Basil Blackwell, 1956. 400 pp.

609. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. T. 8, № 3. P. 338–353.

Ph. D. & Dr. Sc. LEV GRIGOREVIC GELIMSON: ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, УТОЧНЕНИЕ, УГЛУБЛЕНИЕ, ОБОБЩЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАРАЛЬДА БОРА 510/511

CONTRIBUTOR'S PROFILE & ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Name	**Gelimson Lev Grigorevic, literary and artistic pseudonym Leo Himmelsohn**
Ф.И.О. (полностью)	**Гелимсон Лев Григорьевич, литературно-художественный псевдоним Лео Гимельзон**
Degree Current position	**Ph. D. & Dr. Sc. in Engineering in the section "Physical and Mathematical Sciences" by the Highest Attestation Commission Classifier Director Director, Producer, Literary and Artistic Manager**
Учёная степень Должность	**доктор технических наук в разделе «Физико-математические науки» по Классификатору Высшей Аттестационной Комиссии директор директор, продюсер и литературно-художественный руководитель**

Ph. D. & Dr. Sc. LEV GRIGOREVIC GELIMSON: ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО, УТОЧНЕНИЕ, УГЛУБЛЕНИЕ, ОБОБЩЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХАРАЛЬДА БОРА 511/511

Institutional affiliation	Academic Institute for Creating Universal Sciences, Munich, Germany Multilingual Literary and Musical Theater, Munich, Germany
Место работы	Академический институт создания всеобщих наук, Многоязычный литературно-музыкальный театр, Мюнхен, Германия
e-mail, эл. почта	Leohi@mail.ru
Postal address Почтовый адрес	Ph. D. & Dr. Sc. Lev Gelimson, Westendstrasse 68, D-80339 Munich, Germany
Science Index (SPIN)	8046-6818
Scopus ID	6505889792
Researcher ID	R-5007-2016
ORCID ID	0000-0003-0627-84