СИНЕРГИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ВСЕОБЩИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ, МЕТОДОВ И (МЕТА)МЕТОДОЛОГИЙ (ЛОГИЧЕСКОГО) ВЗВЕШИВАНИЯ И О(БЕС)КОНЕЧИВАНИЯ, МНОГОПОРЯДКОВЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДЕЛОВ И ВЫСОКОТОЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Gelimson

Академический институт создания всеобщих наук (Мюнхен)

Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум», 1970, 2020

СИНЕРГИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ВСЕОБЩИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ, МЕТОДОВ И (МЕТА)МЕТОДОЛОГИЙ (ЛОГИЧЕСКОГО) ВЗВЕШИВАНИЯ И О(БЕС)КОНЕЧИВАНИЯ, МНОГОПОРЯДКОВЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДЕЛОВ И ВЫСОКОТОЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Гелимсон Лев Григорьевич,
литературно-художественный псевдоним Лео Гимельзон,
доктор технических наук в разделе «Физико-математические науки»
по Классификатору Высшей Аттестационной Комиссии,
директор,

Академический институт создания всеобщих наук, Мюнхен, Германия,
русский, украинский, английский и немецкий поэт, директор, продюсер и литературно-художественный руководитель,
Многоязычный литературно-музыкальный театр, Мюнхен, Германия,
E-mail: Leohi@mail.ru
Web: http://kekmir.ru/members/person_6149.html
Академический институт создания всеобщих наук (Мюнхен)

Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум», 1970, 2020

Аннотация. Основополагающая, продвинутая, прикладная и вычислительная части классической математики имеют целые системы взаимосвязанных принципиальных изъянов. Всеобщие математические теории и (мета)методологии синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий открывают, развивают и эффективно используют функциональные природу и сущность методов и методологий, а также изобретают принципиально новые методы и методологии. Всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего взвешивания также логических доводов и противодоводов и последовательного выделения, оконечивания (финитации, финитизации, финитирования,

финитизирования) и обесконечивания (инфинитации, инфинитизации, инфинитирования, инфинитизирования) дополняют, обобщают, уточняют и развивают известные подходы и методы, включая дедукцию, индукцию и метод наименьших квадратов, в том числе применительно к бесконечно переопределённым совокупностям как бесструктурным системам уравнений с использованием суммирования расходящихся рядов, а также изобретают принципиально новые методы и методологии. Всеобщие математические теории и методологии конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов создают синергию анализа и синтеза конечных и бесконечных пределов и асимптотических формул для

бесконечно больших и бесконечно малых величин различных порядков. Всеобщие математические теории и методологии конечных и бесконечных систем и систематических изменений и закономерностей анализируют изменения зависимых переменных изменениями значений зависимых переменных, изменениями систем значений систем независимых переменных и совместными обоими типами этих изменений. Всеобщие систематические закономерности открываются посредством всеобщих методологий именно систематических вычислительных экспериментов с синергией анализа и синтеза итогов этих экспериментов. Всеобщие математические теории и методологии

высокоскоростных высокоточных приближений применительно именно ко всему бесконечному множеству гармонических чисел более чем существенно уточняют, обобщают и развивают теорию Эйлера. Создана общая теория рациональных разложения и приближения действительных чисел с четырьмя парами общих методологий, общей метаметодологией их различения и наиболее высокоточными и высокоскоростными общими методами по сравнению с методами дробей в позиционных системах счисления, непрерывных (цепных) дробей и даже рядов с обратными факториалами. Используются знакопеременные бесконечные гармонические ряды, тогда как теория египетских дробей как сумм непременно

различных только положительных единичных (аликвотных) дробей с методом Фибоначчи ограничивается лишь конечными разложениями рациональных чисел. Теория целочисленных начальных приближений обобщена теорией остаточно-модульной целой части и теорией остаточно-модульного потолка и различает общие методы с однозначными алгоритмами. Эти общие методологии различаются как методически и аналитически выделением целых частей в первой паре общих методологий и потолков во второй паре общих методологий и выделением ближайших целых чисел целыми частями после увеличения на 1/2 в третьей паре общих методологий и потолками после уменьшения на 1/2 в четвёртой паре

общих методологий из обращённых последовательных остатков или их абсолютных величин в первых и во вторых общих методологиях их пар соответственно, так и численно различающими системами задач в общей метаметодологии различения. В частности, самой высокоточной и самой высокоскоростной является вторая общая методология третьей пары общих методологий, выделяющая ближайшие целые числа целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков. Такое начальное приближение может использоваться общими методами этой и других общих методологий для ускорения сходимости последовательных приближений и для удобства сопоставлений и сравнений.

Ключевые слова: всеобщая математическая теория, функциональные анализ и синтез методов и методологий, уравновешивание, уточняющее взвешивание, логический противодовод, дедукция, индукция, последовательное выделение, оконечивание, обесконечивание, инфинитация, инфинитизация, инфинитирование, инфинитизирование, метод наименьших квадратов, бесконечно переопределённая совокупность как бесструктурная система уравнений, суммирование расходящихся рядов, бесконечное систематическое изменение, закономерность, синергия анализа и синтеза итогов систематических вычислительных экспериментов, многопорядковый асимптотический предел, асимптотическая формула,

высокоскоростное высокоточное приближение, множество гармонических чисел, теория Эйлера, общая теория рациональных разложения и приближения действительных чисел, рациональное число, обыкновенная дробь, позиционная система счисления, десятичная дробь, двоичная дробь, непрерывная дробь, цепная дробь, функциональная единичная дробь, аликвотная дробь, египетская дробь, метод Фибоначчи, знакопеременный бесконечный гармонический ряд, дробная часть, теория целочисленных начальных приближений, теория остаточно-модульной целой части, теория остаточно-модульного потолка, общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных

чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков, общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков, общая метаметодология различения, ускорение сходимости последовательных приближений, число Эйлера, основание натуральных логарифмов, отношение длины окружности к её диаметру, золотое сечение, алгоритм, программирование на ЭВМ. УДК 51

**Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум»,
1970, 2020**

THE SYNERGY OF THE SYSTEMATIC FUNCTIONAL ANALYSIS AND SYNTHESIS OF UNIVERSAL MATHEMATICAL THEORIES, METHODS AND (META)METHODOLOGIES OF (LOGICAL) WEIGHING AND (IN)FINITING, OF MULTI-ORDER ASYMPTOTIC LIMITS AND HIGH-PRECISION APPROXIMATIONS

Gelimson Lev Grigorevic,
literary and artistic pseudonym Leo Himmelsohn,
Ph. D. & Dr. Sc. in Engineering
in the section “Physical and Mathematical Sciences”
by the Highest Attestation Commission Classifier,
Director,
Academic Institute for Creating Universal Sciences,

Munich, Germany,
Russian, Ukrainian, English and German poet,
Director, Producer, Literary and Artistic Manager,
Multilingual Literary and Musical Theater, Munich, Germany
E-mail: Leohi@mail.ru
Web: http://kekmir.ru/members/person_6149.html
Academic Institute for Creating Universal Sciences (Munich)

Publishing House of the All-World Academy of Sciences “Collegium”, Munich, 1970, 2020

Abstract. The fundamental, advanced, applied and computational parts of classical mathematics have whole systems of interconnected defects of principle. The universal mathematical theories and (meta)methodologies of the synergy of the functional analysis and synthesis of methods and methodologies discover, develop and efficiently use the functional nature and essence of methods and methodologies, as well as invent fundamentally new methods and methodologies. The universal mathematical theories and methodologies of balancing and refining weighing also logical arguments and counter-arguments and of sequentially extracting, of finiting (finitation, finitizing, finitization) and infiniting (infinitation, infinitizing, infinitization) complement, generalize, refine and develop well-known approaches and methods, including deduction, induction and the least square method also with respect

to the infinitely overdetermined sets as structureless systems of equations by using divergent series summation, as well as invent fundamentally new methods and methodologies. The universal mathematical theories and methodologies of finite and infinite multi-order asymptotic limits create the synergy of the analysis and synthesis of finite and infinite limits and asymptotic formulas for infinitely large and infinitesimal quantities of various orders. The universal mathematical theories and methodologies of finite and infinite systems and systematic changes and regularities with laws analyze changes in dependent variables by changes in the values of dependent variables, by changes in the value systems of the systems of independent variables and by the both of these types of changes together. Universal systematic laws are discovered via the universal methodologies of namely systematic

computational experiments with the synergy of the analysis and synthesis of the experimental results. The universal mathematical theories and methodologies of high-speed high-precision approximations as applied to the entire infinite set of the harmonic numbers more than substantially refine, generalize and develop Euler′s theory. The general theory of rational decomposition and approximation of real numbers with four pairs of general methodologies, a general metamethodology for distinguishing them and the most high-precision and high-speed general methods in comparison with the methods of fractions in positional number systems, of continued (chain) fractions and even of series with inverse factorials is created. Alternating infinite harmonic series are used, while the theory of Egyptian fractions as sums of necessarily distinct positive unit (aliquot)

fractions only with the Fibonacci method is limited to finite expansions of rational numbers only. The theory of integer initial approximations is generalized by the theory of a residual-modular integer part and by the theory of a residual-modular ceiling and distinguishes between general methods with unique algorithms. These general methodologies differ from each other both methodically and analytically by extracting the integer parts in the first pair of these general methodologies, by extracting the ceilings in the second pair of these general methodologies and by extracting the nearest integers via integer parts after increasing by 1/2 in the third pair of these general methodologies and via ceilings after decreasing by 1/2 in the fourth pair of these general methodologies from inverted

sequential residues or their absolute values in the first and second general methodologies of their pairs, respectively, and numerically via distinguishing problem systems in the general metamethodology of distinguishing. In particular, the most accurate and the most high-speed general methodology is the second general methodology of the third pair of these general methodologies, which extracts the nearest integers via integer parts from the inverted and then preliminarily increased by 1/2 absolute values of consecutive residues. Such an initial approximation can be used by the general methods of this and other general methodologies to accelerate the convergence of successive approximations and for the convenience of comparisons.

Keywords: universal mathematical theory, metamethodology, functional analysis and synthesis of methods and methodologies, balancing, refining weighing, logical counter-argument, deduction, induction, sequentially extracting, infiniting, infinitation, infinitizing, infinitization, least square method, infinitely overdetermined set as structureless system of equations, divergent series summation, infinite systematic change, regularity, law, synergy of the analysis and synthesis of the results of systematic computational experiments, multi-order asymptotic limit, asymptotic formula, high-speed high-precision

approximation, set of all the harmonic numbers, Euler's theory, general theory of rational decomposition and approximation of real numbers, rational number, ordinary fraction, decimal fraction, continued fraction, chain fraction, functional unit fraction, aliquot fraction, Egyptian fraction, harmonic series, Fibonacci method, alternating infinite harmonic series, fractional part, theory of integer initial approximations, theory of residual-modular integer part, theory of residual-modular ceiling, general methodology of alternating harmonic decomposition and approximation of real numbers by extracting the nearest integers via integer parts from the

inverted and then preliminarily increased by 1/2 absolute values of consecutive residues, general methodology of alternating harmonic decomposition and approximation of real numbers by extracting the nearest integers via ceilings from the inverted and then preliminarily decreased by 1/2 absolute values of consecutive residues, general metamethodology of distinguishing, acceleration of convergence of successive approximations, Euler's number, the base of natural logarithms, the ratio of the circumference of a circle to its diameter, golden ratio, algorithm, computer programming.

UDC 51

Publishing House of the All-World Academy of Sciences
“Collegium”, Munich, 1970, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

1.2. ВСЕОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И (МЕТА)МЕТОДОЛОГИИ СИНЕРГИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА МЕТОДОВ И МЕТОДОЛОГИЙ

1.3. ВСЕОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДОЛОГИИ УРАВНОВЕШИВАНИЯ И УТОЧНЯЮЩЕГО ТАКЖЕ ЛОГИЧЕСКОГО ВЗВЕШИВАНИЯ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ВЫДЕЛЕНИЯ

1.4. ВСЕОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДОЛОГИИ ОКОНЕЧИВАНИЯ И ОБЕСКОНЕЧИВАНИЯ

1.5. ВСЕОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДОЛОГИИ КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ МНОГОПОРЯДКОВЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДЕЛОВ

ЧАСТЬ 2. ВСЕОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДОЛОГИИ КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ И СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ И ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ И СОЗДАНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, ЕЁ ОБЩИХ МЕТОДОЛОГИЙ И ВЫСОКОТОЧНЫХ И ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ОБЩИХ МЕТОДОВ

2.1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ И ЗАДАЧ

2.2. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ИЗВЕСТНЫЕ МЕТОДЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ЯВНЫМ ВЫДЕЛЕНИЕМ ИХ ЦЕЛЫХ И ДРОБНЫХ ЧАСТЕЙ

2.2.1. Метод представления действительных чисел обыкновенными дробями

2.2.2. Метод представления действительных чисел m-ичными дробями в m-ичной позиционной системе счисления

2.2.3. Метод представления действительных чисел непрерывными (цепными) дробями

2.2.4. Метод Фибоначчи гармонического представления рациональных чисел египетскими дробями

2.2.5. Методы свободных гармонических представлений рациональных чисел египетскими дробями

2.3. МЕТОДЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ НЕПРЕМЕННО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЕДИНИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

2.3.1. Метод сплошного гармонического разложения действительного числа с последовательно выбираемыми наименьшими возможными знаменателями единичных, или аликвотных, дробей

2.3.2. Метод выборочного гармонического разложения действительного числа с последовательно выбираемыми

единичных, или аликвотных, дробей гармонического разложения действительного числа

2.3.6. Метод проверки достоверности рационального разложения действительного числа со всеми промежуточными расчётами в обыкновенных дробях

2.3.7. Метод проверки достоверности рационального разложения действительного числа с промежуточными расчётами в десятичных дробях

2.4. ДАЛЬНЕЙШИЕ РАЗВИТИЕ И ОБОБЩЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

2.4.1. Разнослагаемая всюду частота (плотность)

2.4.2. Подытог и надытог

2.4.3. ОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИБЛИЖЕНИЯ

2.4.3.1. Постановка общей однопараметрической задачи приближения

2.4.3.2. Сущность общей методологии решения однопараметрических задач приближения

2.4.4. ОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИБЛИЖЕНИЯ

2.4.4.1. Постановка общей многопараметрической задачи приближения

2.4.4.2. Сущность общей методологии решения многопараметрических задач приближения

2.4.5. Теория измерения различий одинаково индексированных систематических разбиений множества

2.4.6. Теория абсолютных и относительных мер правильности и неправильности разбиения

2.4.7. СИСТЕМА МЕТОДОЛОГИЙ ВЫСОКОТОЧНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ИМЕННО ВСЕХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ КАК ЧАСТИЧНЫХ СУММ ГАРМОНИЧЕСКОГО РЯДА

2.4.7.1. Точная и приближённая формулы Эйлера для гармонических чисел как частичных сумм гармонического ряда

2.4.7.2. Абсолютные погрешности приближений Эйлера для избранных первых гармонических чисел

2.4.7.3. Относительные погрешности приближений Эйлера для избранных первых гармонических чисел

2.4.7.4. Общий метод оценки приближений измерением совокупностей областей правильности и ошибочности разбиения

2.4.7.5. Общий метод оценки приближений измерением смежных областей правильности и ошибочности разбиения

2.4.8. ПОЛНАЯ СИСТЕМА ВСЕОБЩИХ МЕТОДОЛОГИЙ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УТОЧНЕНИЮ ПРИБЛИЖЁННОЙ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

2.4.8.1. Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой

переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера

2.4.8.2. Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера

2.4.8.3. Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера

2.4.8.4. Взятие приближения первого порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной и достраивание этого приближения до приближения второго порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной

2.4.8.5. Взятие приближения первого порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной и достраивание этого приближения до приближения второго порядка по всеобщей методологии

изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной

2.4.8.6. Сравнение итогов использования обоих представленных подходов всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера

2.4.8.7. Сравнение итогов использования полной системы всеобщих методологий изменения зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера

2.5. ОБЩИЕ МЕТАМЕТОДОЛОГИИ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

2.5.1. Общая метаметодология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел без целочисленных выделений

2.5.2. ТЕОРИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ НАЧАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

2.5.2.1. Начальное разложение действительного числа на его целую и дробную части

2.5.2.2. Начальное разложение действительного числа на его потолок и допотолочность, или потолочное дополнение

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМИ РЯДАМИ ЕДИНИЧНЫХ, ИЛИ АЛИКВОТНЫХ, ДРОБЕЙ

2.10. СИСТЕМА ОБЩИХ МЕТОДОЛОГИЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И МЕТАМЕТОДОЛОГИЯ РАЗЛИЧЕНИЯ ЭТИХ ОБЩИХ МЕТОДОЛОГИЙ

2.10.1. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков

2.10.2. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных

чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.10.3. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков

2.10.4. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.10.5. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми

частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков

2.10.6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.10.7. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков

2.10.8. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11. ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ И СКОРОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПО ОБЩИМ МЕТОДАМ И МЕТОДОЛОГИЯМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, ВКЛЮЧАЯ СРАВНЕНИЯ С ИЗВЕСТНЫМИ МЕТОДАМИ

2.11.1. СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА e С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ МЕТОДАМИ РЯДОВ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА, МЕТОДОМ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ, МЕТОДОМ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ И ОБЩИМИ МЕТОДАМИ И МЕТОДОЛОГИЯМИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ,

РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

2.11.1.1. Сравнение основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений e_k к этому числу Эйлера e с остатками r_k, даваемых методами рядов Тейлора и Маклорена

2.11.1.2. Сравнение основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений e_k к этому числу Эйлера e с остатками r_k, даваемых методом десятичных дробей

2.11.1.3. Сравнение основания натуральных логарифмов (числ<u>а</u> Эйлера) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений e_k к этому числу Эйлера e с остатками r_k, даваемых методом <u>непрерывных (цепных) дробей</u>

2.11.1.4. Сравнение основания натуральных логарифмов (числ<u>а</u> Эйлера) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений e_k к этому числу Эйлера e с остатками r_k, даваемых общим методом гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях

2.11.1.5. Сравнение основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений e_k к этому числу Эйлера e с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков

2.11.1.6. Сравнение основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений e_k к этому числу Эйлера e с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных

гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.1.7. Сравнение основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений e_k к этому числу Эйлера e с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков

2.11.1.8. Сравнение основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) с указанными индексом порядками и

подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений e_k к этому числу Эйлера e с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.1.9. Сравнение основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений e_k к этому числу Эйлера e с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми

частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков

2.11.1.10. Сравнение основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений e_k к этому числу Эйлера e с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.1.11. Сравнение основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) с указанными индексом порядками и

подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений e_k к этому числу Эйлера e с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков

2.11.1.12. Сравнение основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений e_k к этому числу Эйлера e с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных

чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.1.13. Сравнение скоростей сходимости первых последовательных приближений e_k к основанию натуральных логарифмов (числу Эйлера) e с остатками r_k по методам рядов Тейлора и Маклорена, методу десятичных дробей, методу непрерывных (цепных) дробей и общим методам и методологиям общей теории рациональных, в том числе знакопеременных гармонических, разложения и приближения действительных чисел

2.11.1.14. Анализ итогов сравнения скоростей сходимости первых последовательных приближений e_k к основанию

натуральных логарифмов (числу Эйлера) e с остатками r_k по методам рядов Тейлора и Маклорена, методу десятичных дробей, методу непрерывных (цепных) дробей и общим методам и методологиям общей теории рациональных, в том числе знакопеременных гармонических, разложения и приближения действительных чисел

2.11.2. СРАВНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ π С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ МЕТОДОМ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ, МЕТОДОМ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ И

ОБЩИМИ МЕТОДАМИ И МЕТОДОЛОГИЯМИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

2.11.2.1. Сравнение отношения длины окружности к её диаметру с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений π_k к этому числу π с остатками r_k, даваемых методом десятичных дробей

2.11.2.2. Сравнение отношения длины окружности к её диаметру с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых

приближений π_k к этому числу π с остатками r_k, даваемых методом непрерывных (цепных) дробей

2.11.2.3. Сравнение отношения длины окружности к её диаметру с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений π_k к этому числу π с остатками r_k, даваемых общим методом гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях

2.11.2.4. Сравнение отношения длины окружности к её диаметру с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений π_k к этому числу π с остатками r_k, даваемых

общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением <u>целых частей</u> из обращений последовательных остатков

2.11.2.5. Сравнение отношения длин<u>ы</u> окружности к её диаметру с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений π_k к этому числу π с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением <u>целых частей</u> из обращений <u>абсолютных величин</u> последовательных остатков

2.11.2.6. Сравнение отношения длины окружности к её диаметру с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений π_k к этому числу π с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков

2.11.2.7. Сравнение отношения длины окружности к её диаметру с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений π_k к этому числу π с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических

разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.2.8. Сравнение отношения длины окружности к её диаметру с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений π_k к этому числу π с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков

2.11.2.9. Сравнение отношения длины окружности к её диаметру с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений π_k к этому числу π с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.2.10. Сравнение отношения длины окружности к её диаметру с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений π_k к этому числу π с остатками r_k, даваемых

общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков

2.11.2.11. Сравнение отношения длины окружности к её диаметру с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений π_k к этому числу π с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из

предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.2.12. Сравнение скоростей сходимости первых последовательных приближений π_k к числу π (отношению длины окружности к её диаметру) с остатками r_k по методу десятичных дробей, методу непрерывных (цепных) дробей и общим методам и методологиям общей теории рациональных, в том числе знакопеременных гармонических, разложения и приближения действительных чисел

2.11.2.13. Анализ итогов сравнения скоростей сходимости первых последовательных приближений π_k к числу π (отношению длины окружности к её диаметру) с остатками

r_k по методу десятичных дробей, методу непрерывных (цепных) дробей и общим методам и методологиям общей теории рациональных, в том числе знакопеременных гармонических, разложения и приближения действительных чисел

2.11.3. СРАВНЕНИЕ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (ЧИСЛ<u>А</u> Ф) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ $Ф_k$ К ЭТОМУ ОТНОШЕНИЮ (ЧИСЛУ) Ф С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ МЕТОДОМ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ, МЕТОДОМ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ И ОБЩИМИ МЕТОДАМИ И МЕТОДОЛОГИЯМИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

2.11.3.1. Сравнение золотого сечения (числа Ф) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений $Ф_k$ к этому отношению (числу) Ф с остатками r_k, даваемых методом десятичных дробей

2.11.3.2. Сравнение золотого сечения (числа Ф) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений $Ф_k$ к

этому отношению (числу) Ф с остатками r_k, даваемых методом непрерывных (цепных) дробей

2.11.3.3. Сравнение золотого сечения (числа Ф) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений $Ф_k$ к этому отношению (числу) Ф с остатками r_k, даваемых общим методом гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях

2.11.3.4. Сравнение золотого сечения (числа Ф) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений $Ф_k$ к этому отношению (числу) Ф с остатками r_k, даваемых общей

методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением <u>целых частей</u> из обращений последовательных остатков

2.11.3.5. Сравнение золотого сечения (числ<u>а</u> Ф) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений $Ф_k$ к этому отношению (числу) Ф с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением <u>целых частей</u> из обращений <u>абсолютных величин</u> последовательных остатков

2.11.3.6. Сравнение золотого сечения (числ<u>а</u> Ф) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми

первыми верными цифрами первых приближений $Ф_k$ к этому отношению (числу) Ф с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков

2.11.3.7. Сравнение золотого сечения (числа Ф) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений $Ф_k$ к этому отношению (числу) Ф с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.3.8. Сравнение золотого сечения (числа Ф) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений $Ф_k$ к этому отношению (числу) Ф с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков

2.11.3.9. Сравнение золотого сечения (числа Ф) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений $Ф_k$ к этому отношению (числу) Ф с остатками r_k, даваемых общей

методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.3.10. Сравнение золотого сечения (числа Ф) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений $Ф_k$ к этому отношению (числу) Ф с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков

2.11.3.11. Сравнение золотого сечения (числа Ф) с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений $Ф_k$ к этому отношению (числу) Ф с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.3.12. Сравнение скоростей сходимости первых последовательных приближений $Ф_k$ к золотому сечению (отношению, числу) Ф с остатками r_k по методу десятичных дробей, методу непрерывных (цепных) дробей и общим

методам и методологиям общей теории рациональных, в том числе знакопеременных гармонических, разложения и приближения действительных чисел

2.11.3.13. Анализ итогов сравнения скоростей сходимости первых последовательных приближений $Φ_k$ к золотому сечению (отношению, числу) Φ с остатками r_k по методу десятичных дробей, методу непрерывных (цепных) дробей и общим методам и методологиям общей теории рациональных, в том числе знакопеременных гармонических, разложения и приближения действительных чисел

2.11.4. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.499 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И

ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К ЭТОМУ ЧИСЛУ ПО МЕТОДАМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

2.11.4.1. Сравнение испытательного числа 0.499 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений 0.499_k к этому числу 0.499 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков

2.11.4.2. Сравнение испытательного числа 0.499 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений 0.499_k к этому числу 0.499 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.4.3. Сравнение испытательного числа 0.499 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений 0.499_k к этому числу 0.499 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения

и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков

2.11.4.4. Сравнение испытательного числа 0.499 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений 0.499_k к этому числу 0.499 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.4.5. Сравнение испытательного числа 0.499 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений 0.499_k к

этому числу 0.499 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков

2.11.4.6. Сравнение испытательного числа 0.499 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений 0.499_k к этому числу 0.499 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из

предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.4.7. Сравнение испытательного числа 0.499 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений 0.499_k к этому числу 0.499 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков

2.11.4.8. Сравнение испытательного числа 0.499 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений 0.499_k к

этому числу 0.499 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.4.9. Сравнение скоростей сходимости последовательных приближений 0.499_k к числу 0.499 по общим методам и методологиям общей теории рациональных, в том числе знакопеременных гармонических, разложения и приближения действительных чисел

2.11.4.10. Анализ итогов сравнения скоростей сходимости первых последовательных приближений 0.499_k к числу

0.499 по общим методам и методологиям общей теории рациональных, в том числе знакопеременных гармонических, разложения и приближения действительных чисел

2.11.5. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛ<u>А</u> 0.599 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К ЭТОМУ ЧИСЛУ ПО МЕТОДАМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

2.11.5.1. Сравнение испытательного числ<u>а</u> 0.599 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми

первыми верными цифрами первых приближений 0.599_k к этому числу 0.599 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков

2.11.5.2. Сравнение испытательного числа 0.599 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений 0.599_k к этому числу 0.599 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.5.3. Сравнение испытательного числа 0.599 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений 0.599_k к этому числу 0.599 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков

2.11.5.4. Сравнение испытательного числа 0.599 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений 0.599_k к этому числу 0.599 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением

потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.5.5. Сравнение испытательного числа 0.599 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений 0.599_k к этому числу 0.599 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков

2.11.5.6. Сравнение испытательного числа 0.599 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми

первыми верными цифрами первых приближений 0.599_k к этому числу 0.599 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.5.7. Сравнение испытательного числа 0.599 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений 0.599_k к этому числу 0.599 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением

ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков

2.11.5.8. Сравнение испытательного числа 0.599 с указанными индексом порядками и подчёркнутыми первыми верными цифрами первых приближений 0.599_k к этому числу 0.599 с остатками r_k, даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков

2.11.5.9. Сравнение скоростей сходимости последовательных приближений 0.599_k к числу 0.599 по общим методам и

0. ПРЕДИСЛОВИЕ

Это полностью самостоятельно задуманная студенческая научная работа в 18-летнем возрасте в 1970 году после выигрыша областных олимпиад по всем предметам и третьих мест на Всеукраинской и Всесоюзной олимпиадах по математике и окончания физико-математического специального класса будущих гимназии и лицея с золотой медалью, одной из двух в областном центре, в 1969 году.

Единство исторического и логического в развитии математики смещает главное в её сущности с постоянных величин в древности и в Средние века на переменные величины в Новое время и на функции в девятнадцатом и XX веках. Настала пора перехода от второго тысячелетия к

третьему тысячелетию с дальнейшим смещением главного в сущности математики на синергию функциональных анализа и синтеза методов, методологий и метаметодологий. Именно этому и посвящена настоящая монография.

Второе издание настоящей монографии ровно через 50 лет после её первого издания расширено и дополнено приведением весьма объёмных именно систематических и нацеленных на бесконечное монотонно уточняющихся высокоточных вычислений в целях их проверяемости и во имя убедительной индуктивной логики в духе Эйлера и Лапласа.

В настоящей научной монографии вводится разграничение двух видов отношений приближённых равенств и соответствующих обозначений.

Определение. **Принципиально точным приближённым равенством** называется приближённое равенство с **чисто численными** погрешностями округления, обусловленными необходимостью конечного представления бесконечных разложений, в том числе действительных чисел, но без принципиально неустранимых и не уменьшаемых **функциональных**, например **аналитических**, различий частей равенства. При этом части принципиально точного приближённого равенства различаются на погрешности округления. Эти погрешности принципиально могут быть сделаны сколь угодно малыми путём достаточного продолжения бесконечных разложений. Кроме того, такое равенство принципиально можно сделать именно точным

посредством добавления многоточий, выражающих бесконечности таких разложений. Однако в целях машинной вычислимости, для экономии м<u>е</u>ста и во избежание загромождения, затрудняющего восприятие, допускаются явное опускание и неявное подразумевание таких многоточий с очевидным местоположением.

<u>Обозначение</u>. Отношение принципиально точного приближённого равенства обозначается парой знаков =≈ точного = и приближённого ≈ равенств без пробела. При очевидности принципиально точного приближённого равенства допускается его обозначение одним лишь зн<u>а</u>ком = точного равенства, что и принято в настоящей научной монографии.

Определение. Принципиально неточным приближённым равенством называется приближённое равенство с принципиально неустранимыми и не уменьшаемыми функциональными, например аналитическими, различиями частей равенства .

Обозначение. Отношение принципиально неточного приближённого равенства обозначается классическим знаком ≈ приближённого равенства.

Обозначение. Как разделитель целой и дробной частей абсолютной величины действительного числа в позиционной системе счисления применяется в настоящей научной монографии точка, допускаемая нормативной и научной литературой. Это представляется однозначным и

потому более удобным, чем использование запятой, поскольку роли запятой в качестве такого разделителя и при перечислениях могут внести неясность и путаницу.

Обозначение. Для функции знака дополнительно вводится и в целях краткости может использоваться обозначение знаком градуса справа: $x° = \mathrm{sign}\ x = \mathrm{sign}(x)$; $(a - b)° = \mathrm{sign}(a - b)$.

Обозначение. Сокращение записи (возможно, отчасти) повторения цифры или группы цифр подряд указанием кратности повторения правым нижним индексом, например:

$$e = 2.7(1828)_2459045...;\ 1/3 = 0.(3) = 0.3_\infty;\ 1/7 = 0.(142857) = 0.(142857)_\infty;\ 0.9_{25}97;\ 1.0_{14}00243.$$

ЧАСТЬ 1. СОЗДАНИЕ СИСТЕМЫ ВСЕОБЩИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ И (МЕТА)МЕТОДОЛОГИЙ

1.1. ВВЕДЕНИЕ. СИСТЕМЫ ОСНОВОПОЛАГАЮЩИХ ПРИНЦИПИАЛЬНЫХ ИЗЪЯНОВ КЛАССИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

Величественное здание классической математики с открытием парадоксов бесконечного Галилеем и Больцано зиждется на теории множеств Кантора и на теории действительных чисел с изобретением и осмыслением положительных целых, дробных, иррациональных, отрицательных чисел и нуля и действий над ними с открытием их главных свойств.

Среди других основополагающих изобретений – системы координат, начиная с декартовых, мнимые чисела, векторы, матрицы, тензоры, исчисление бесконечно малых Лейбница и Ньютона, мультимножества, нечёткие множества и нестандартный анализ с естественным доказательством известных теорем, но без точного измерения бесконечно большого и бесконечно малого.

Классическая математика, начиная со своих основ, явно недостаточна для миропонимания и решения многих видов насущных задач жизни, науки и техники.

Теория множеств Кантора лишена учёта количеств наличных элементов с поглощением при разбиении и составлении и без законов сохранения.

Действительные числа не измеряют разных бесконечностей, лишь грубо различаемых мощностями и кардинальными числами Кантора. Множества точек единичного отрезка и трёхмерного пространства имеют одну и ту же мощность непрерывного (континуума). Мощность строится на взаимно однозначном соответствии, в которое Галилей поставил как парадокс множество целых положительных чисел и собственное подмножество этого множества – куда более редкое множество квадратов этих чисел. Вне конечного нет законов сохранения ввиду поглощения – даже бесконечно большого при возведении любого бесконечного кардинального числа в любую целую положительную степень. Действия рассматриваются для не более чем счётного множества чисел.

Классические меры, скажем, меры длины, площади и объёма, чувствительны лишь к своим размерностям, но не к меньшим, например не к границам предмета и его составных частей при его разбиении и составлении, и тем самым нарушают законы сохранения. Для смешанного целого из частей разных размерностей нет известной общей (и тем более всеобщей) меры.

Нет слагаемости по сечениям вопреки методу неделимых Архимеда с доказательством методом исчерпывания, «Стереометрии винных бочек» Кеплера и принципу Кавальери. Скажем, определённый интеграл рассматривается как предел интегральных сумм с лишь соразмерной слагаемостью, а не как прямая сумма по сечениям.

Классическая наука неспособна выражать действием смешанные (именованные) величины (с наименованием). Скажем, 5 литров воды ≠ 5 литров × вода, 5 литров воды ≠ вода × 5 литров.

Степенные и показательные функции определены только для неотрицательных оснований. Возведение в степень и последующие гипероперации не перестановочны.

Деление на нуль рассматривается без необходимости и ведёт к неразрешимым проблемам.

Не всегда существующими вероятностями нельзя различить невозможные и в разной мере и степени возможные события нулевой меры. А плотность вероятности (производная интегральной функции распределения) вообще не имеет смысла вероятности, при непрерывности считающейся равной нулю.

Абсолютная погрешность формального (условного, независимого от истинности) приравнивания не однозначна, так как при равносильном умножении на ненулевое число умножается на его абсолютную величину.

Относительная погрешность определена лишь для двухэлементного формального (условного, независимого от истинности) приравнивания, для него двузначна, вопреки замыслу может превышать единицу и быть бесконечной.

Метод наименьших квадратов с опорой именно на худшие данные не однозначен и обычно ведёт к предсказуемым неприемлемым изъянам, извращениям и парадоксам. Последовательное приближение из одного начала с жёстким предписанием (алгоритмом) требует явного выражения последующего приближения через предыдущие приближения с

обеспечением сжимаемости отображения, весьма затруднительно и обычно очень медленно сходится.

Машинное вычисление вносит собственные погрешности и часто выходит за пределы счёта, обрывая его вообще.

Классическая наука считает непрерывное (континуум) положительных размерности и меры, например бесконечные пространство и время с вечностью, полностью составленным лишь из элементов-точек и мгновений нулевых размерности и меры. Однако сложение любого множества нулей неизбежно даёт только нуль и ничего более.

Понимание природы, сущности, строения и соотношений непрерывного, пространства, времени, действия, покоя и движения, постоянства (сохранения) и изменения и не только для этого необходимое точное измерение потенциальных

(возможных, способных, стремящихся, становящихся, развёртывающихся) и актуальных (достигнутых, осуществлённых, завершённых, действительных, настоящих, подлинных, истинных) бесконечно больших и бесконечно малых непосильны для классических философии и науки около 2500 лет.

Таким образом, автору с 12 лет начали проясняться и уже задолго до замысла настоящего научного труда были вполне ясны целые системы основополагающих принципиальных изъянов классической математики по её основным общепринятым разделам чистой, прикладной и вычислительной математики при дополнительном полезном делении чистой математики на основополагающую и продвинутую математику.

1.1.1. ИЗЪЯНЫ ОСНОВОПОЛАГАЮЩЕЙ МАТЕМАТИКИ

Недостаточность действительных чисел. Не существует вероятность

$$p_a = p_A$$

равновероятного выбора одного из элементов счётного множества A, например

$$n \in N = \{1, 2, 3, ...\}.$$

Если

$$p_a = p_n = p_N > 0,$$

то

$$\Sigma_N\, p_n = +\infty;$$

если $p_N = 0$, то $\Sigma_N\, p_n = 0$,
а не 1 как вероятность достоверного события.

Для несчётного непрерывного множества X, скажем

$$X = \,]0, 1[,$$

классическая математика считает, что вероятность

$$p_x = p_X = (p_{]0,\,1[} =)0,$$

как и для невозможного события.

Неколичественность множеств Кантора.

$$\{1_1\ \text{€}, 1_2\ \text{€}, \dots , 1_{1000000000}\ \text{€}\} = \{1\ \text{€}\}.$$

То есть множество, состоящее из миллиарда монет в 1 Euro, классической математикой считается в точности равным множеству, состоящему из одной такой монеты, при условии неразличимости всех этих монет, которое вполне можно принять ввиду равенства их покупательной способности как их важнейшего атрибута.

Нет действия для именованных смешанных величин. 5 л воды ≠ 5 л × вода, 5 л воды ≠ вода × 5 л.

Парадоксы бесконечного. Галилей: взаимно однозначное соответствие n и n^2.

Нет количественного различения счётных множеств. Общие счётная мощность (кардинальное число) $\aleph_0$ и мера (+∞ для меры счёта и 0 для линейной и других мер) любых счётных множеств: всюду частых (плотных) рациональных чисел,

$$N = \{1, 2, 3, \ldots\}, \{2, 4, 6, \ldots\},$$

миллиардных тетраций, состоящего из

$$1000000000, 1000000000^{1000000000}, 1000000000 \text{ в степени } 1000000000^{1000000000} \text{ и т. д.}$$

Крайне грубое различение видов бесконечного мощностью (кардинальным числом). Канторово множество нулевой меры, отрезок [0, 1] и всё бесконечное пространство R^n конечной размерности: одна и та же мощность C непрерывного, или континуума.

Самопоглощение бесконечных кардинальных чисел Кантора при сложении и умножении:

$$\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = 2\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = 3\aleph_0 = \dots,$$

$$\aleph_0 = (\aleph_0)^2 = (\aleph_0)^3 = \dots .$$

Нет общей меры для множества смешанной размерности: measure($\{0\} \cup [1, 2]$).

Меры не чувствительны к меньшим размерностям: m[1, 2] = m]1, 2] = m]1, 2[.

Нет законов сохранения ввиду поглощения при разбиении и составлении:

$$m_1([1, 3] \cup [2, 4]) = m_1[1, 4] = 3 \neq 4 = m_1[1, 3] + m_1[2, 4].$$

Нет вообще законов сохранения за пределами конечного.

Нет составленности (слагаемости) непрерывного (континуума), пространства и времени с вечностью из точек и мгновений нулевых меры и размерности.

Нет слагаемости фигур и тел из сечений по Архимеду, Кеплеру и Кавальери.

Различение ±∞ лишь знаками: $\ln(n) \sim \Sigma_{j=1}^{n} 1/j$, $\Sigma_N 1/n = +\infty = \Sigma_N {}^{n}1000000000$.

Неизмеримость потенциально и актуально бесконечно большого и бесконечно малого.

Неопределённость деления на сам достигнутый нуль 0 вообще.

Нечувствительность деления ненулевого на становящийся, но не достигаемый нуль $0_{\approx}$ со знаком (±):

$$a/(+0_{\approx}) = -a/(-0_{\approx}) = +\infty \ (a > 0),$$

$$a/(+0_{\approx}) = -a/(-0_{\approx}) = -\infty \ (a < 0).$$

Нет законов сохранения для нулей со знаками в информатике:

$$-0/|x| = -0 \ (x \neq 0),$$

$$(-0)(-0) = +0,$$

$$|x|(-0) = -0,$$

$$x + (-0) = x + (+0) = x,$$

$$(-0) + (-0) = (-0) - (+0) = -0,$$

$$(+0) + (+0) = (+0) - (-0) = +0,$$

$$x - x = x + (-x) = +0.$$

Бессмысленность деления на нуль в ряде видов насущных задач: 20 яблок, 5 приглашённых, деление поровну между пришедшими с остатком себе, не пришёл никто. 20/0 = +∞? Всего 20 яблок. Нелепо, не нужно делить. Все 20 яблок себе. Это было ясно понято автором в 12 лет.

Нет всеобщности пустоты: пустая сумма считается нулём, а пустое произведение – единицей.

Вывод: около 2500 лет нет понимания природы ∞, 0, пустоты и непрерывного.

1.1.2. ИЗЪЯНЫ ПРОДВИНУТОЙ МАТЕМАТИКИ

Бесколичественность (неколичественность) соединений (систем).

Действия над не более чем счётными множествами чисел без законов сохранения.

Ограничение степенных x^a и показательных a^x функций неотрицательными основаниями, поскольку не перестановочное ($a^b \neq b^a$) возведение в степень безупречно определено только для неотрицательных оснований (возведение в степень и извлечение корня первичны, умножение и деление вторичны):

$$(-1)^3 = -1 \neq 1 = [(-1)^6]^{1/2} = (-1)^{6/2},$$

$$(-1)^{1/3} = -1 \neq 1 = [(-1)^2]^{1/6} = (-1)^{2/6}.$$

Это было ясно понято автором в 12–14 лет.

Ограничение области полезности сверхдействий (после сложения, умножения и возведения в степень): только при x $\geq$ 1 полезны тетрации

$$^{2}x = x^{x},\ ^{3}x,\ ^{4}x,\ \dots\ .$$

Невозможность уподобления (моделирования) многих простых видов насущных предметов, например итогов и тем более хода поездки за покупками.

Неизмеримость насущных предметов с бесконечно большим и бесконечно малым.

Нет составленности (слагаемости) интегралов по сечениям и тем более точкам.

Несуществование и обнуление вероятностей насущных возможных событий.

Отсутствие вероятностного смысла плотности вероятности как лишь производной интегральной функции распределения: так, при нормальном распределении плотность вероятности каждого значения положительна при нулевой вероятности.

Ограничение целыми степенями (на случай отрицательных оснований) с первой по четвёртую в статистике (метод Пирсона) при сверхвлиянии выбросов.

В классической математике сущность решений задач и доказательств теорем основана на линейной двоичной классической формальной логике. Однако изложение даже классических решений задач и доказательств теорем требует принятия решений, явно или неявно основанного на именно разветвлённых всеобщей логике и всеобщих математических теориях и методологиях уточняющего взвешивания логических доводов и противодоводов.

1.1.3. ИЗЪЯНЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Плохое оценивание неточности; нет никакого оценивателя уверенности в точности.

Абсолютная погрешность формального (условного, независимого от истинности) приравнивания недостаточна и не однозначна при его равносильном умножении на ненулевое число:

$$\Delta_{1000 =? 999} = \Delta_{1 =? 0} = 1,$$

$$\Delta_{10=?0} = 10.$$

Относительная погрешность определена лишь для двухэлементного формального (независимого от истинности, условного) приравнивания, двусмысленна и может быть бесконечной:

$$\delta_{a =? b} = |a - b|/|a| \neq |a - b|/|b|,$$

$$\delta_{1 =? 0} = 1/0 = \infty,$$

$$\delta_{1 =? -1} = 2,$$

$$\delta_{100 - 99 =? 0}\ ?,\ \delta_{1 - 2 + 3 - 4 =? -1}\ ?$$

Неразличима уверенность в точности:

$$x > 1:$$

$$x_1 = 1 + 10^{-10},$$

$$x_2 = 1 + 10^{10}.$$

Метод наименьших квадратов Лежандра и «короля математики» Гаусса имеет много взаимосвязанных основополагающих изъянов и крайне узкие области применимости и тем более приемлемости и пригодности:

не пригоден при не совпадающих физических размерностях (единицах) задачи;

меняет не проверяемый итог при её равносильных преобразованиях:

$$x = 1 \wedge x = 2 \rightarrow x = 3/2;$$

$$10x = 10 \wedge x = 2 \rightarrow x = 102/101;$$

$$x = 1 \wedge 10x = 20 \rightarrow x = 201/101;$$

необоснованно полагается, как и математическая статистика, на абсолютную погрешность и аналитически простейшую вторую степень усреднения;

неустойчив к наклону (изображения на координатной плоскости к оси абсцисс) системы данных (с разбросом) и их уподоблений, его переменности и вращению, способен почти игнорировать часть решаемой задачи, опирается именно на наихудшие данные и часто ведёт к предсказуемым неприемлемости, извращениям и парадоксам:

приближение $y = kx$ точек (1, 1), (10, 15) на координатной плоскости даёт

$$k = 151/101,$$

$$\Delta_{(1,\ 1)} = 51/101,$$

$$\Delta_{(10,\ 15)} = 5/101.$$

1.1.4. ИЗЪЯНЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Основополагающие ограничения машинной вычислимости, в том числе методами наименьших квадратов и конечных элементов:

конечные якобы бесконечности и нули;

разрывность исчисления;

извращающий суммы обрыв бесконечных рядов;

незримость и непроверяемость промежуточных действий;

неулучшаемость итогов;

повышение возможностей заблуждений, самообмана и скрытого непонимания;

слепота наивной веры во всемогущество техники с нечувствительностью заложенных негибких предписаний (алгоритмов) и преобразований.

Впечатляющая игра в поддавки с самоубеждающей красотой представления.

Заманчивая лёгкость перекладывания полномочий думать на безотказную технику.

Уклонение от углублённой замысловатости исканий истины.

Подрывающее здоровье, здравомыслие и предвидение отвыкание от устного и ручного письменного счёта, забывание и даже незнание таблицы умножения.

Обесчеловечивание исследований попыткой замещения чутья объёмом работ.

Поверхностность и непредусмотрительность бесхитростной «грубой силы».

Медленная сходимость и невычислимость одноначального последовательного приближения с требованием явного выражения последующего приближения через предыдущие при часто затруднительной сжимаемости отображения.

Неоправданное осложнение искусственным введением случайных распределений.

Частая извращаемость обработки данных с разбросом опорой на наихудшие данные.

Непосильность требуемого отсутствия погрешностей в делопроизводстве.

Таким образом, ко времени замысла настоящего научного труда в 18 лет автору были вполне ясны целые системы основополагающих принципиальных изъянов классической математики. Его собственная всеобщая математика, преодолевшая все эти изъяны, начала зарождаться с 12 лет. Тем не менее, ко времени замысла настоящего научного труда время для систематического изложения всеобщей математики ещё не наступило.

Поэтому значительная часть объёма настоящей научной монографии во многом ограничивается пределами именно классической математики.

1.2. ВСЕОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И (МЕТА)МЕТОДОЛОГИИ СИНЕРГИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА МЕТОДОВ И МЕТОДОЛОГИЙ

Замечание. Функциональный анализ в классической математике сложился так, что его следовало бы назвать бесконечномерным функциональным анализом. В настоящей монографии имеется в виду точный и поэтому правильный наиболее общий смысл понятия функционального анализа как анализа с функциональной точки зрения без неоправданных априорных ограничений, в частности именно бесконечномерностью, хотя в приложениях она часто осуществляется апостериорно.

Поэтому из сложившегося в классической математике ближе к методу настоящего рассмотрения скорее теория функций, чем функциональный анализ. Кроме того, здесь рассматривается именно синергия функциональных анализа и синтеза методов и методологий. Главное, целевым предметом настоящего рассмотрения являются именно методы и методологии, а отнюдь не функции и не их разновидности наподобие функционалов, операторов и мер в классической математике, используемые здесь именно и только методически, а не предметно.

Всеобщие математические теории и (мета)методологии синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий рассматривают произвольные метод или методологию как функцию, или отображение, задач, решаемых этими методом или методологией. Задачей является частично неизвестный предмет, в частности система, то есть предмет, некоторые части и связи которого не полностью известны, тогда как остальные части и связи могут быть полностью известными. Областью определения, или множеством определения, этой функции (одного переменного в простейшем случае) является класс решаемых задач. Множеством значений этой функции является множество решений этих задач.

Одним из значений независимой переменной, а именно аргумента этой функции, является одна задача из класса решаемых задач. Этому значению независимой переменной соответствует одно из значений зависимой переменной, а именно самой этой функции, являющееся множеством всех решений именно этой задачи, то есть полным решением этой задачи.

Такая функция одного переменного соответствует простейшему случаю дважды изолированного решения каждой из задач решаемого класса ровно по одной одним методом или одной методологией.

Если сразу решается одним методом или одной методологией целая система задач решаемых классов, то всеобщие математические теории и (мета)методологии синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий рассматривают такой метод или такую методологию как функцию системы переменных, часто недопустимо упрощённо называемую функцией многих переменных. Эти переменные могут оказаться зависимыми, то есть не вполне свободными, однако и тогда могут рассматриваться как свободные при условии дополнительного наложения их взаимосвязей.

Если для решения задачи или системы задач используется целая система методов и методологий, то эта система

рассматривается как система функций всеобщими математическими теориями и (мета)методологиями синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий.

Таким образом, всеобщие математические теории и (мета)методологии синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий рассматривают методы и методологии и их системы как функции и системы функций соответственно. Именно этот определённый изоморфизм систем функций и систем методов и методологий и позволяет строить названную синергию функциональных анализа и синтеза методов и методологий.

В частности, хорошо известно понятие сужения функции.

Определение. Сужением функции называется эта же функция на подмножестве множества её определения.

Пользуясь этим известным определением, введём обратное, или противоположное, общее понятие расширения функции, в частных случаях встречающееся в классической математике как аналитическое продолжение функции.

Определение. Расширением функции называется функция, для которой расширяемая функция является сужением.

Следствие. Множество определения расширения функции является надмножеством множества определения расширяемой функции.

Следствие. Отношения сужения и расширения функций соответствуют отношениям включения множеств определения этих функций при условии сохранения всех общих пар прообразов и соответствующих образов.

Всеобщие математические теории и (мета)методологии синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий рассматривают методы и методологии и их системы как функции и системы функций соответственно и используют этот определённый изоморфизм систем функций и систем методов и методологий для построения соответствующих понятий и отношений систем методов и методологий следующим образом.

Определение. Участием (специализацией) системы методов и методологий называется эта же система методов и методологий на подмножестве множества её определения.

Пользуясь этим определением, введём обратное, или противоположное, известное общее понятие обобщения системы методов и методологий.

Определение. Обобщением системы методов и методологий называется система методов и методологий, для которой обобщаемая система методов и методологий является участием (специализацией).

Следствие. Множество определения обобщения системы методов и методологий является надмножеством множества определения обобщаемой системы методов и методологий.

Следствие. Отношения участия (специализации) и обобщения систем методов и методологий соответствуют отношениям включения множеств определения этих систем методов и методологий при условии сохранения всех общих пар прообразов и соответствующих образов.

В частности, хорошо известно и понятие сложной функции, или композиции функций, или функции от функции.

Определение. Сложной функцией, или композицией функций, называется внешняя функция от внутренней функции.

Следствие. Множество значений внутренней функции сложной функции определения расширения функции является подмножеством множества определения внешней функции сложной функции.

Определение. Сложной надсистемой методов и методологий называется система систем методов и методологий.

Дальнейшие построения во многом подобны предыдущим.

Начнём с аналогов арифметических, теоретико-множественных и логических действий.

Определение. Суммой, объединением и дизъюнкцией методов и методологий называется система их возможно совместного приложения к решению системы задач.

По аналогии с элементарными, или стандартными, функциями, уравнениями и их совокупностями как бесструктурными системами (алгебраическими, тригонометрическими, экспоненциальными, рядообразующими, теоретико-числовыми и другими)

строятся элементарные, или стандартные, методы и методологии (алгебраические, тригонометрические, экспоненциальные, рядообразующие, теоретико-числовые и другие) решения таких задач, в том числе таких уравнений и их систем. То же относится к таким преобразованиям, которым соответствуют методы и методологии таких преобразований.

Системам координат для графиков функций соответствуют для методов и методологий системы испытательных, или тестовых, задач как единичных векторов, или ортов, методической и методологической системы координат. В пределах допустимости непременно наиболее простые системы испытательных, или тестовых, задач своими решениями достаточно наглядно вскрывают общие закономерности сущности и действенности методов и методологий.

Предельным переходам, в том числе в дескриптивной теории функций, дифференцированию и интегрированию функций соответствуют методы и методологии предельных переходов любых предметов, в том числе оконечивания, обесконечивания и многопорядковых асимптотических пределов, а также непрерывность методов и методологий, методы и методологии определения, выражения и ускорения (увеличения скорости) сходимости к пределу, дифференцирования и интегрирования.

Метрической теории функций соответствуют метаметодологии измерения и количественного и качественного оценивания методов и методологий по мере их адекватности, глубины и сложности, по широте класса

решаемых задач, по скорости сходимости и качеству решений, по преодолённым затруднениям, по сложности и объёмам описаний алгоритмов.

Теории приближения функций соответствуют метаметодологии измерения и количественного и качественного оценивания методов и методологий приближения и количественного и качественного оценивания погрешностей, включая абсолютную и относительную погрешности и метод наименьших квадратов, по мере их адекватности, а также метаметодологии создания принципиально новых методов и методологий высокоскоростного высокоточного приближения и количественного и качественного оценивания погрешностей.

Однозначности функций соответствует инвариантность итогов применения методов и методологий при равносильных преобразованиях решаемой задачи.

Всеобщие математические теории и (мета)методологии синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий естественно делят методы и методологии на инвариантные и на неинвариантные.

Определение. Система методов и методологий называется инвариантной, если и только если для любой задачи, решаемой этой системой, и для любых равносильных преобразований этой задачи итог решения этой задачи этой системой один и тот же (инвариантен).

Определение. Система методов и методологий называется неинвариантной, если и только если существуют такая задача, решаемая этой системой, и такое равносильное преобразование этой задачи, которое изменяет итог решения этой задачи этой системой.

Замечание. Неинвариантность является грубейшим изъяном метода и методологии. Однако отсюда ещё не следуют их полная бесполезность и даже вредоносность как непременно вводящих в заблуждение. Их можно и даже нужно именно эффективно использовать как условно применимые и иногда пригодные при непременных дополнительных условиях. Таковыми являются должное сужение области применения, исключение возможностей

проявления неинвариантности путём адекватного ограничения допускаемых равносильных преобразований, а также непременное сравнение получаемых итогов с итогами, которые даются именно инвариантными методами и методологиями.

Именно всеобщие математические теории и (мета)методологии синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий открыли названные во введении целые системы вопиющих принципиальных изъянов основополагающих в классической математике абсолютной и относительной погрешностей и метода наименьших квадратов. Ввиду особой важности и для удобства рассмотрим и здесь несколько более подробно эти системы принципиальных изъянов.

Абсолютная погрешность формального (условного, независимого от истинности) приравнивания сама по себе недостаточна для выражения и оценивания качества приближения и к тому же не однозначна (не является инвариантом), так как при равносильном умножении формального (условного, независимого от истинности) приравнивания на ненулевое число умножается на его абсолютную величину:

$$\Delta_{1000 =? 999} = \Delta_{1 =? 0} = 1,$$

$$\Delta_{10=?0} = 10.$$

Относительная погрешность определена лишь для двухэлементного формального (условного, независимого от истинности) приравнивания, для него двузначна (двусмысленна), вопреки замыслу может превышать единицу и быть бесконечной:

$$\delta_{a =? b} = |a - b|/|a| \neq |a - b|/|b|,$$

$$\delta_{1 =? 0} = 1/0 = \infty,$$

$$\delta_{1 =? -1} = 2,$$

$$\delta_{100 - 99 =? 0}\ ?,\ \delta_{1 - 2 + 3 - 4 =? -1}\ ?$$

Метод наименьших квадратов Лежандра и «короля математики» Гаусса имеет целую систему взаимосвязанных основополагающих принципиальных изъянов и крайне узкие области применимости и тем более приемлемости и пригодности:

не пригоден при не совпадающих физических размерностях (единицах) решаемой задачи. Например, если одно из уравнений решаемой их совокупности как бесструктурной системы составлено на основе закона сохранения энергии, а другое уравнение той же совокупности составлено на основе закона сохранения импульса, или количества движения, то предусмотренная методом наименьших квадратов сумма квадратов разностей частей всех уравнений совокупности лишена всякого смысла. Разумеется, можно предварительно привести все уравнения решаемой их совокупности к одной физической размерности, общей для всех этих уравнений. Однако такое приведение может быть выполнено разными способами. Например, уравнение на

основе закона сохранения энергии можно разделить на скорость или на её половину, можно разделить на одну скорость, а можно и на другую скорость. Но итог по методу наименьших квадратов более чем существенно зависит от способа такого приведения решаемой совокупности уравнений к физической размерности, общей для всех этих уравнений;

меняет не проверяемый итог при равносильных преобразованиях решаемой задачи:

$$x = 1 \wedge x = 2 \rightarrow x = 3/2;$$

$$10x = 10 \wedge x = 2 \rightarrow x = 102/101;$$

$$x = 1 \wedge 10x = 20 \rightarrow x = 201/101;$$

необоснованно полагается, как и математическая статистика, на абсолютную погрешность и аналитически простейшую вторую степень усреднения;

неустойчив к наклону (изображения на координатной плоскости к оси абсцисс) системы данных (с разбросом) и их уподоблений, его переменности и вращению, способен почти игнорировать часть решаемой задачи, опирается именно на наихудшие данные и часто ведёт к предсказуемым неприемлемости, извращениям и парадоксам:

приближение $y = kx$ точек (1, 1), (10, 15) на координатной плоскости даёт

$$k = 151/101,$$

$$\Delta_{(1,\ 1)} = 51/101,$$

$$\Delta_{(10,\ 15)} = 5/101.$$

Следствие. Метод наименьших квадратов неинвариантен.

Особенные полезность и даже ценность всеобщих математических теорий и (мета)методологий синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий заключаются именно в этой синергии. Причём имеют место естественные разделение и соединение действенности. Например, в данном случае функциональный анализ методов и методологий открыл целую систему взаимосвязанных основополагающих принципиальных изъянов и крайне узкие области применимости и тем более приемлемости и пригодности метода наименьших квадратов. А функциональный синтез методов и

методологий изобрёл отчасти приведённые ниже методы и методологии, свободные от этих изъянов. В частности, всеобщие математические теории и методологии уравновешивания устраняют потерю смысла при не совпадающих физических размерностях (единицах) решаемой задачи и обеспечивают действенный учёт всех её частей и инвариантность итога при её равносильных преобразованиях. А всеобщие математические теории и методологии уточняющего взвешивания обеспечивают опору именно на наилучшие данные.

1.3. ВСЕОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДОЛОГИИ УРАВНОВЕШИВАНИЯ И УТОЧНЯЮЩЕГО ТАКЖЕ ЛОГИЧЕСКОГО ВЗВЕШИВАНИЯ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ВЫДЕЛЕНИЯ

Неинвариантная система методов и методологий не может обойтись без предварительной подготовки по меньшей мере тех задач, решаемых этой системой, при решении которых возможны потеря смысла при не совпадающих физических размерностях (единицах) решаемой задачи и неинвариантность системы методов и методологий.

Всеобщие математические теории и методологии уравновешивания устраняют возможность потери смысла при не совпадающих физических размерностях (единицах) решаемой задачи и обеспечивают действенный учёт всех её частей и инвариантность итога при её равносильных преобразованиях. Это позволяет именно эффективно использовать даже неинвариантные системы методов и методологий как условно применимые и иногда пригодные при непременных дополнительных условиях. Таковыми являются должное сужение области применения, исключение возможностей как потери смысла при не совпадающих физических размерностях (единицах) решаемой задачи, так и проявления неинвариантности

путём адекватного ограничения допускаемых равносильных преобразований, а также непременное сравнение получаемых итогов с итогами, которые даются именно инвариантными методами и методологиями.

Устранение возможности потери смысла при не совпадающих физических размерностях (единицах) решаемой задачи достигается полным её обезразмериванием, то есть приведением всех известных и неизвестных постоянных и переменных решаемой задачи к именно безразмерному виду.

Особенно целесообразно показать сущность и действенность всеобщих математических теорий и

методологий уравновешивания на красноречивом примере классического метода наименьших квадратов.

Рассмотрим подробнее приведённое выше доказательство неинвариантности метода наименьших квадратов контрпримером – изменением итога решения испытательной, или тестовой, задачи – переопределённой совокупности двух уравнений с одним неизвестным при равносильных преобразованиях решаемой задачи – умножениях на 10 то ли отдельно первого, то ли отдельно второго уравнения:

$$x = 1 \wedge x = 2 \to x = 3/2;$$

$$10x = 10 \wedge x = 2 \to x = 102/101;$$

$$x = 1 \wedge 10x = 20 \to x = 201/101.$$

Рассматривается переопределённая совокупность двух уравнений с одним неизвестным в разрешённом относительно неизвестных виде:

$$x = 1;$$

$$x = 2.$$

Разумеется, множество решений этой совокупности уравнений пусто, поскольку ничто не может одновременно равняться и единице, и двойке.

Несравненно более сложные совокупности большего числа уравнений, чем число неизвестных, также несовместные и не имеющие именно точных решений, например переопределённые, типичны в теории приближения, а именно математической обработки данных и их аналитических приближений.

Хотя известны редкие отдельные случаи применения других методов, например метода наименьших абсолютных величин и метода усреднения, классическая математика предлагает как стандартный и по существу даже безальтернативный действительно аналитически наиболее простой и удобный метод наименьших квадратов.

Как отмечено выше, в пределах допустимости непременно наиболее простые системы испытательных, или тестовых, задач своими решениями достаточно наглядно вскрывают общие закономерности сущности и действенности методов и методологий.

Приложение метода наименьших квадратов к решению указанной переопределённой совокупности двух уравнений с одним неизвестным в разрешённом относительно неизвестных виде

$$x = 1;$$

$$x = 2$$

даёт решение

$$x = 3/2,$$

которое как закономерное для метода наименьших квадратов среднее арифметическое, в данном случае чисел 1 и 2, вполне естественно и приемлемо.

Теперь равносильно преобразуем эту первоначальную переопределённую совокупность двух уравнений с одним неизвестным в разрешённом относительно неизвестных виде вполне допустимым умножением одного лишь первого уравнения на ненулевое число 10, оставив второе из этих первоначальных уравнений без изменений. В итоге равносильная первоначальной совокупность уравнений принимает вид:

$$10x = 10;$$

$$x = 2.$$

Приложение метода наименьших квадратов к решению этой переопределённой совокупности двух уравнений с одним неизвестным даёт решение

$$x = 102/101,$$

неестественное и неприемлемое.

А теперь равносильно преобразуем ту же самую именно первоначальную переопределённую совокупность двух уравнений с одним неизвестным в разрешённом относительно неизвестных виде вполне допустимым умножением одного лишь второго уравнения на ненулевое число 10, оставив первое из этих первоначальных уравнений без изменений. В итоге равносильная первоначальной совокупность уравнений принимает вид:

$$x = 1;$$

$$10x = 20.$$

Приложение метода наименьших квадратов к решению этой переопределённой совокупности двух уравнений с одним неизвестным даёт решение

$$x = 201/101,$$

неестественное и неприемлемое.

Всеобщие математические теории и (мета)методологии синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий, в данном случае функционального анализа метода наименьших квадратов применительно к равносильным преобразованиям произвольной переопределённой совокупности как бесструктурной системы линейных уравнений, в частности к указанной триаде равносильных испытательных, или тестовых, задач в качестве единичных векторов, или ортов, методической и методологической системы координат, определяют вес каждого из уравнений совокупности как квадратный корень из суммы квадратов коэффициентов при всех неизвестных этого уравнения после приведения подобных и

открывают следующие именно общие закономерности сохранения решения переопределённой совокупности линейных уравнений по методу наименьших квадратов при её изменениях именно умножениями уравнений такой совокупности:

1. Для сохранения решения переопределённой совокупности линейных уравнений по методу наименьших квадратов при её изменениях необходимо и достаточно, чтобы эти изменения сводились к умножению непременно всех уравнений совокупности именно на одно и то же для всех уравнений совокупности любое ненулевое число с возможностью дополнительного умножения любых отдельных уравнений на отрицательную единицу. То есть абсолютные величины ненулевых множителей всех

уравнений совокупности совпадают, а положительный или отрицательный знак этого множителя совершенно произволен для каждого из уравнений совокупности независимо от других её уравнений. Это необходимое и достаточное именно общее условие сохранения решения переопределённой совокупности линейных уравнений по методу наименьших квадратов является несравненно более сильным, чем известное условие равносильности преобразований совокупности линейных уравнений умножением любых уравнений совокупности на свои произвольные ненулевые числа, сколь угодно различные для разных уравнений совокупности.

2. Равновесность переопределённой совокупности линейных уравнений применительно к её решению методом наименьших квадратов, а именно единичный вес каждого из её уравнений, достигается делением каждого из её уравнений после приведения подобных на квадратный корень из суммы квадратов коэффициентов при всех неизвестных этого уравнения. Допускается дополнительное умножение любого из уравнений совокупности на отрицательную единицу, не меняющее вклада этого уравнения в сумму квадратов разностей обеих частей всех уравнений совокупности по методу наименьших квадратов.

3. Если все уравнения решаемой переопределённой совокупности линейных уравнений равновесны, то метод наименьших квадратов способен давать естественное и приемлемое решение.

4. По сравнению с указанным выше случаем всех уравнений решаемой совокупности, равновесных по коэффициентам при неизвестных, умножение одного из уравнений решаемой совокупности на ненулевое число умножает вес этого уравнения на абсолютную величину этого числа. Если эта абсолютная величина равна единице, то вес этого уравнения сохраняется, и метод наименьших квадратов даёт прежнее решение совокупности уравнений. Если эта абсолютная

величина отличается от единицы, то вес этого уравнения изменяется, и метод наименьших квадратов даёт изменённое по сравнению с предыдущим решение совокупности уравнений. Если эта абсолютная величина меньше единицы, то вес этого уравнения и его влияние на решение совокупности уравнений методом наименьших квадратов уменьшаются и становятся сколь угодно малыми при бесконечном уменьшении этой абсолютной величины. Если эта абсолютная величина больше единицы, то вес этого уравнения и его влияние на решение совокупности уравнений методом наименьших квадратов увеличиваются и становятся сколь угодно большими при бесконечном увеличении этой абсолютной величины.

5. Умножение одного из уравнений решаемой переопределённой совокупности линейных уравнений на ненулевое число умножает вес самого этого уравнения на абсолютную величину этого числа. При этом вес влияния этого уравнения на решение совокупности уравнений методом наименьших квадратов как вес вклада этого уравнения в сумму квадратов разностей обеих частей всех уравнений совокупности, минимизируемую по методу наименьших квадратов, равный квадрату веса самого этого уравнения, умножается на квадрат этого числа.

Поясним действие этих общих закономерностей применительно к методу наименьших квадратов и нашей системе трёх испытательных, или тестовых, задач как единичных векторов, или ортов, методической и методологической системы координат.

1. Для сохранения решения переопределённой совокупности линейных уравнений

$$x = 1;$$
$$x = 2$$

по методу наименьших квадратов при её изменениях необходимо и достаточно, чтобы эти изменения сводились к умножению непременно обоих уравнений совокупности именно на одно и то же для обоих уравнений совокупности любое ненулевое число с возможностью дополнительного умножения любых отдельных уравнений на отрицательную единицу. То есть абсолютные величины ненулевых множителей обоих уравнений совокупности совпадают, а положительный или отрицательный знак этого множителя совершенно произволен для каждого из уравнений совокупности независимо от другого её уравнения.

Это необходимое и достаточное именно общее условие сохранения решения переопределённой совокупности линейных уравнений по методу наименьших квадратов именно при умножениях уравнений такой совокупности является несравненно более сильным, чем известное условие равносильности преобразований совокупности линейных уравнений умножением любых уравнений совокупности на свои произвольные ненулевые числа, сколь угодно различные для разных уравнений совокупности. Поэтому, в частности, умножение именно одного из этих двух уравнений на ненулевое число 10 при сохранении оставшегося уравнения (можно считать, при умножении оставшегося уравнения на ненулевое число 1) сохраняет равносильность совокупности уравнений, однако изменяет её решение по методу наименьших квадратов.

2. Равновесность переопределённой совокупности линейных уравнений

$$x = 1;$$
$$x = 2$$

применительно к её решению методом наименьших квадратов, а именно единичный вес каждого из её уравнений, достигается уж<u>е</u> в её исходном состоянии, поскольку в каждом из двух уравнений отсутствуют подобные, имеется лишь одно неизвестное, коэффициент при нём равен единице, квадратный корень из суммы квадратов коэффициентов при всех неизвестных этого уравнения равен единице, деление на которую является тождественным преобразованием. Допускается дополнительное умножение любого из уравнений совокупности на отрицательную

единицу, не меняющее вклада этого уравнения в сумму квадратов разностей обеих частей всех уравнений совокупности по методу наименьших квадратов.

3. Оба уравнения решаемой переопределённой совокупности линейных уравнений

$$x = 1;$$

$$x = 2$$

равновесны, поскольку вес каждого из этих двух уравнений равен единице. Поэтому метод наименьших квадратов способен давать и в данном случае даёт естественное и приемлемое решение

$$x = 3/2.$$

4. По сравнению с указанным выше случаем всех уравнений решаемой совокупности, равновесных по коэффициентам при неизвестных, умножение одного из уравнений решаемой совокупности на ненулевое число умножает вес этого уравнения на абсолютную величину этого числа. Если эта абсолютная величина равна единице, то вес этого уравнения сохраняется, и метод наименьших квадратов даёт прежнее решение совокупности уравнений. Если эта абсолютная величина отличается от единицы, то вес этого уравнения изменяется, и метод наименьших квадратов даёт изменённое по сравнению с предыдущим решение совокупности уравнений. Если эта абсолютная величина меньше единицы, то вес этого уравнения и его

влияние на решение совокупности уравнений методом наименьших квадратов уменьшаются и становятся сколь угодно малыми при бесконечном уменьшении этой абсолютной величины. Если эта абсолютная величина больше единицы, то вес этого уравнения и его влияние на решение совокупности уравнений методом наименьших квадратов увеличиваются и становятся сколь угодно большими при бесконечном увеличении этой абсолютной величины.

5. Умножение одного из уравнений решаемой переопределённой совокупности линейных уравнений на ненулевое число умножает вес самого этого уравнения на абсолютную величину этого числа. При этом вес влияния

этого уравнения на решение совокупности уравнений методом наименьших квадратов как вес вклада этого уравнения в сумму квадратов разностей обеих частей всех уравнений совокупности, минимизируемую по методу наименьших квадратов, равный, следовательно, квадрату веса самого этого уравнения, умножается на квадрат этого числа.

Например, рассмотрим общую первоначальную переопределённую совокупность двух линейных уравнений с одним неизвестным в разрешённом относительно неизвестных виде

$$x = a;$$

$$x = b.$$

Вес самого первого уравнения равен единице. Вес влияния этого уравнения на решение совокупности уравнений методом наименьших квадратов как вес вклада этого уравнения в сумму квадратов разностей обеих частей всех уравнений совокупности, минимизируемую по методу наименьших квадратов, равный, следовательно, квадрату веса самого этого уравнения, равен единице.

Вес самого второго уравнения равен единице. Вес влияния этого уравнения на решение совокупности уравнений методом наименьших квадратов как вес вклада этого уравнения в сумму квадратов разностей обеих частей всех уравнений совокупности, минимизируемую по методу

наименьших квадратов, равный, следовательно, квадрату веса самого этого уравнения, равен единице.

Применим равносильное преобразование этой совокупности умножением первого уравнения на ненулевое число A и второго уравнения на ненулевое число B. В итоге равносильная первоначальной совокупность уравнений принимает вид:

$$Ax = Aa;$$
$$Bx = Bb.$$

Первое уравнение умножено на ненулевое число A. Вес самого первого уравнения был равен единице, а стал |A|. Вес влияния этого уравнения на решение совокупности уравнений методом наименьших квадратов как вес вклада

этого уравнения в сумму квадратов разностей обеих частей всех уравнений совокупности, минимизируемую по методу наименьших квадратов, равный, следовательно, квадрату веса самого этого уравнения, был равен единице, а стал A^2.

Второе уравнение умножено на ненулевое число B. Вес самого второго уравнения был равен единице, а стал |B|. Вес влияния этого уравнения на решение совокупности уравнений методом наименьших квадратов как вес вклада этого уравнения в сумму квадратов разностей обеих частей всех уравнений совокупности, минимизируемую по методу наименьших квадратов, равный, следовательно, квадрату веса самого этого уравнения, был равен единице, а стал B^2.

Приложение метода наименьших квадратов к решению переопределённой совокупности двух уравнений с одним неизвестным

$$Ax = Aa;$$
$$Bx = Bb$$

даёт естественное среднее взвешенное решение

$$x = (A^2a + B^2b)/(A^2 + B^2),$$

с учётом весов A^2 и B^2 вкладов и влияний первого и второго уравнений соответственно по методу наименьших квадратов, делящее отрезок между решениями a и b первого и второго уравнений в отдельности соответственно в отношении B^2/A^2 обратно пропорционально весам A^2 и B^2 вкладов и влияний первого и второго уравнений соответственно по методу наименьших квадратов.

Теперь вернёмся к первоначальной переопределённой совокупности двух линейных уравнений с одним неизвестным в разрешённом относительно неизвестных виде

$$x = 1;$$
$$x = 2$$

и двум её равносильным преобразованиям.

Первым было равносильное преобразование этой первоначальной переопределённой совокупности двух линейных уравнений с одним неизвестным в разрешённом относительно неизвестных виде

$$x = 1;$$
$$x = 2$$

вполне допустимым умножением одного лишь первого уравнения на ненулевое число 10, а второе из этих первоначальных уравнений осталось без изменений. В итоге равносильная первоначальной совокупность уравнений приняла вид:

$$10x = 10;$$

$$x = 2.$$

Первое уравнение умножено на 10. Его вес был равен единице, а стал 10. Вес влияния этого уравнения на решение совокупности уравнений методом наименьших квадратов как вес вклада этого уравнения в сумму квадратов разностей обеих частей всех уравнений совокупности, минимизируемую по методу наименьших квадратов, равный, следовательно, квадрату веса самого этого уравнения, был равен единице, а стал 100.

Второе уравнение умножено на 1. Его вес был и остался равен единице. Вес влияния этого уравнения на решение совокупности уравнений методом наименьших квадратов как вес вклада этого уравнения в сумму квадратов разностей обеих частей всех уравнений совокупности, минимизируемую по методу наименьших квадратов, равный, следовательно, квадрату веса самого этого уравнения, был и остался равен единице.

Приложение метода наименьших квадратов к решению этой переопределённой совокупности двух уравнений с одним неизвестным дало решение

$$x = 102/101,$$

неестественное и неприемлемое для первоначальной переопределённой совокупности двух линейных уравнений

с одним неизвестным в разрешённом относительно неизвестных виде

$$x = 1;$$

$$x = 2,$$

однако для преобразованной переопределённой совокупности двух линейных уравнений с одним неизвестным

$$10x = 10;$$

$$x = 2$$

естественное.

Действительно, вес самог<u>о</u> уравнения

$$x = 1$$

стал 10, а вес его вклада и влияния по методу наименьших квадратов стал 100.

Поскольку эта совокупность уравнений решается по методу наименьших квадратов, то при вычислении этого решения следует учитывать не вес самого уравнения, а вес его вклада и влияния по методу наименьших квадратов.

Следовательно, метод наименьших квадратов даёт для совокупности уравнений

$$10x = 10;$$

$$x = 2$$

то же самое решение, что и для совокупности уравнений

$$(x = 1)_{100};$$

$$x = 2,$$

в которой кратностью (правым индексом) 100 показано, что первое уравнение

$$x = 1$$

первоначальной переопределённой совокупности двух линейных уравнений с одним неизвестным в разрешённом относительно неизвестных виде

$$x = 1;$$
$$x = 2$$

повторяется 100 раз и только затем под номером 101 оказывается второе уравнение

$$x = 2$$

первоначальной переопределённой совокупности.

Для первоначальной переопределённой совокупности двух линейных уравнений с одним неизвестным в разрешённом относительно неизвестных виде

$$x = 1;$$
$$x = 2$$

естественно среднее арифметическое решение

$$x = (1*1 + 1*2)/(1 + 1) = 3/2,$$

делящее отрезок [1, 2] между решениями первого и второго уравнений в отдельности соответственно в отношении один к одному обратно пропорционально единичным весам вкладов и влияний первого и второго уравнений по методу наименьших квадратов.

Для совокупности уравнений

$$(x = 1)_{100};$$
$$x = 2$$

естественно среднее арифметическое решение с учётом кратности 100 первого уравнения в этой совокупности, оно же среднее взвешенное решение

$$x = (100*1 + 1*2)/(100 + 1) = 102/101,$$

деляще отрезок [1, 2] между решениями первого и второго уравнений в отдельности соответственно в отношении 1/100 обратно пропорционально весам 100 и 1 вкладов и влияний первого и второго уравнений соответственно по методу наименьших квадратов.

Вторым было равносильное преобразование этой первоначальной переопределённой совокупности двух линейных уравнений с одним неизвестным в разрешённом относительно неизвестных виде

$$x = 1;$$
$$x = 2$$

умножением одного лишь <u>второго</u> уравнения на ненулевое число 10, <u>первое</u> из этих первоначальных уравнений

оставлено без изменений. В итоге равносильная первоначальной совокупность уравнений принимает вид:

$$x = 1;$$
$$10x = 20.$$

Приложение метода наименьших квадратов к решению этой переопределённой совокупности двух уравнений с одним неизвестным даёт решение

$$x = 201/101,$$

неестественное и неприемлемое для первоначальной переопределённой совокупности двух линейных уравнений с одним неизвестным в разрешённом относительно неизвестных виде

$$x = 1;$$
$$x = 2,$$

однако для преобразованной переопределённой совокупности двух линейных уравнений с одним неизвестным

$$x = 1;$$
$$10x = 20$$

естественное.

Действительно, вес самого уравнения

$$x = 2$$

стал 10, а вес его вклада и влияния по методу наименьших квадратов стал 100.

Поскольку совокупность уравнений решается по методу наименьших квадратов, то при вычислении этого решения следует учитывать не вес самого уравнения, а вес его вклада и влияния по методу наименьших квадратов.

Следовательно, метод наименьших квадратов даёт для совокупности уравнений

$$x = 1;$$
$$10x = 20$$

то же самое решение, что и для совокупности уравнений

$$x = 1;$$
$$(x = 2)_{100},$$

в которой кратностью (правым индексом) 100 показано, что вслед за первым уравнением

$$x = 1$$

первоначальной переопределённой совокупности двух линейных уравнений с одним неизвестным в разрешённом относительно неизвестных виде

$$x = 1;$$

$$x = 2$$

второе уравнение

$$x = 2$$

первоначальной переопределённой совокупности уравнений повторяется 100 раз.

Для совокупности уравнений

$$x = 1;$$

$$x = 2$$

естественно среднее арифметическое решение

$$x = (1*1 + 1*2)/(1 + 1) = 3/2,$$

делящее отрезок [1, 2] между решениями первого и второго уравнений в отдельности соответственно в отношении один

к одному обратно пропорционально единичным весам вкладов и влияний первого и второго уравнений по методу наименьших квадратов.

Для совокупности уравнений

$$x = 1;$$

$$(x = 2)_{100}$$

естественно среднее арифметическое решение с учётом кратности 100 второго уравнения в этой совокупности уравнений, оно же среднее взвешенное решение

$$x = (1*1 + 100*2)/(100 + 1) = 201/101,$$

деля́щее отрезок [1, 2] между решениями первого и второго уравнений в отдельности соответственно в отношении 100/1 обратно пропорционально весам 1 и 100 вкладов и влияний первого и второго уравнений соответственно по методу наименьших квадратов.

Интересно и поучительно сопоставить объём этого развернутого рассмотрения с приведённым выше кратким его изложением

$$x = 1 \wedge x = 2 \rightarrow x = 3/2;$$

$$10x = 10 \wedge x = 2 \rightarrow x = 102/101;$$

$$x = 1 \wedge 10x = 20 \rightarrow x = 201/101.$$

Таким образом, всеобщие математические теории и методологии уравновешивания устраняют возможность потери смысла при не совпадающих физических размерностях (единицах) решаемой задачи и обеспечивают действенный учёт всех её частей и инвариантность итога при её равносильных преобразованиях. Это позволяет именно эффективно использовать даже неинвариантные системы методов и методологий как условно применимые и иногда пригодные при непременных дополнительных условиях.

Всеобщие математические теории и (мета)методологии синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий, в данном случае функционального анализа метода наименьших квадратов применительно к равносильным преобразованиям произвольной переопределённой совокупности линейных уравнений именно <u>умножениями</u> уравнений такой совокупности, в частности к указанной триаде равносильных испытательных, или тестовых, задач в качестве единичных векторов, или ортов, методической и методологической системы координат, определяют вес каждого из уравнений совокупности как квадратный корень из суммы квадратов коэффициентов при всех неизвестных этого уравнения

после приведения подобных и открывают именно общие закономерности сохранения решения переопределённой совокупности линейных уравнений по методу наименьших квадратов при её изменениях именно умножениями уравнений такой совокупности уравнений.

Замечание. Если решаемая задача требует именно разных весов её частей, то непременно после её уравновешивания могут и должны быть установлены требуемые веса соответствующих её частей по всеобщим математическим теориям и методологиям уточняющего взвешивания.

Всеобщие математические теории и методологии уточняющего взвешивания и последовательного выделения предназначены для наиболее глубокого рассмотрения и для

наилучшего возможного решения задач с заведомо различно весомыми частями, для искусственного введения различной весомости с целью резкого повышения качества решения задач, а также для численно-аналитического индуктивного нахождения искомых функций с возможными последующими дедуктивными доказательствами, для многопорядковых пределов и для последовательных приближений.

Для наилучшего возможного решения задач с заведомо различно весомыми частями вначале осуществляется их уравновешивание по всеобщим математическим теориям и методологиям уравновешивания. Затем могут и должны быть установлены требуемые веса соответствующих частей задач с заведомо различно весомыми частями.

Отнюдь не менее типичны задачи, у которых отсутствуют заведомо различные весомости частей. Однако искусственное введение различной весомости частей задач может обеспечить резкое повышение качества решения некоторых классов задач всеобщими математическими теориями и методологиями уточняющего взвешивания.

Всеобщие математические теории и (мета)методологии синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий посредством функционального анализа методов и методологий открыли целую систему взаимосвязанных основополагающих принципиальных изъянов и крайне узкие области применимости и тем более приемлемости и пригодности метода наименьших

квадратов. Среди этих принципиальных изъянов есть опора не на самые лучшие, а на самые худшие данные. А всеобщие математические теории и методологии уточняющего взвешивания обеспечивают опору именно на самые лучшие данные.

В задачах обработки данных, в частности построений аналитических приближений к данным, огромной трудностью, резко снижающей качество приближения, является существенно различная качественность самих данных. Наилучшие данные оказываются достаточно близкими к искомому приближению. Наихудшие данные, называемые выбросами, чрезвычайно далеки от искомого приближения. Это общая трудность обработки данных

любым методом, а не только методом наименьших квадратов. Тем не менее, для определённости рассмотрим обработку данных именно методом наименьших квадратов. Во-первых, в переопределённых задачах метод наименьших квадратов предлагается классической математикой и широчайшим образом используется в задачах приближения во всех областях науки и практики как аналитически самый простой и удобный и поэтому стандартный и по существу безальтернативный. Во-вторых, именно на методе наименьших квадратов во многом основаны теория вероятностей и статистика в целом, а не только математическая статистика.

Метод наименьших квадратов минимизирует сумму квадратов отклонений данных от их соответствующих приближений. Наилучшие данные наиболее бл<u>и</u>зк<u>и</u> к их соответствующим приближениям. Наихудшие данные, особенно выбросы, наиболее далеки от их соответствующих приближений. Метод наименьших квадратов возводит разности отклонений данных от их соответствующих приближений именно в квадрат. Тем самым взаимные отношения отклонений данных от их соответствующих приближений возводятся в квадрат. Например, если отклонение одного из выбросов от его соответствующего приближения в 10 раз больше отклонения одного из наилучших данных от его соответствующего приближения,

то вес влияния этого выброса как его вклада в сумму квадратов отклонений данных от их соответствующих приближений, минимизируемую методом наименьших квадратов, в 100 раз больше веса влияния этого хорошего данного как его вклада в эту сумму. В итоге оказывается, что влияние всей совокупности хороших данных на сумму квадратов отклонений данных от их соответствующих приближений, минимизируемую методом наименьших квадратов, ничтожно по сравнению с влиянием даже немногочисленных выбросов на эту же сумму. Следовательно, метод наименьших квадратов противоестественным и притом чрезвычайно ярко выраженным именно парадоксальным и даже

извращающим образом способен почти игнорировать хорошие данные и одновременно опираться на самые худшие данные. При этом чем лучше данные, тем больше они игнорируются методом наименьших квадратов, а чем хуже данные, тем больше метод наименьших квадратов опирается именно на них. То, что метод наименьших квадратов именно минимизирует сумму квадратов отклонений данных от их соответствующих приближений, является совершенно правильным и естественным. Однако ввиду указанной выше парадоксальности оказывается, что метод наименьших квадратов, действительно осуществляющий некоторое приближение данных, на деле выстраивает приближение не к наилучшим, а к наихудшим данным.

Классическая математика во имя частичного уменьшения такого извращения предлагает отбросить относительно небольшое количество выбросов, наиболее удалённых от их соответствующих приближений. Но это чистый произвол, да ещё и ведущий к потере далеко не лишней информации, несомой отбрасываемыми выбросами, хотя бы о том, больше или меньше эти выбросы, чем их соответствующие приближения. Кроме того, непреодолимой грани между отбрасываемыми выбросами и наихудшими из оставляемых данных часто нет. А главное, сама по себе извращённость полностью остаётся, поскольку и после такого отбрасывания метод наименьших квадратов продолжает почти игнорировать наилучшие данные

и по существу опираться на самые худшие из оставленных данных. Такой совершенно неприемлемый изъян в сущности и действенности метода наименьших квадратов усугубляется тем, что этот по применяемости почти безальтернативный именно классический метод, принадлежащий Лежандру и «королю математики» Гауссу, вообще не предусматривает ни уточнения получаемого итога, ни даже оценивания его точности, качества и приемлемости, а вместо этого по существу объявляет получаемый итог истиной в последней инстанции. Выявление столь вопиющего принципиального изъяна в сущности и действенности метода наименьших квадратов является одним из многочисленных открытий, сделанных

всеобщими математическими теориями и (мета)методологиями синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий, а именно функциональным анализом методов и методологий.

Рассмотрим типичную задачу обработки данных, а именно итогов кратных измерений искомого отдельного действительного числового значения x произвольной величины X. Расположим итоги этих измерений в порядке неубывания и обозначим число выполненных измерений через n, а итог j-го измерения, где

$$j = 1, 2, 3, 4, \dots , n,$$

через a_j:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \dots \leq a_j \leq \dots \leq a_n.$$

Математической моделью задачи обработки итогов кратных измерений искомого отдельного действительного числового значения x произвольной величины X является разрешённая относительно единственного неизвестного x совокупность линейных уравнений

$$x = a_1;$$

$$x = a_2;$$

$$x = a_3;$$

$$x = a_4;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = a_j;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = a_n,$$

переопределённая, если

$$n > 1,$$

и несовместная (самопротиворечивая) и поэтому не имеющая точных решений, если

$$a_n > a_1.$$

Нетрудно видеть, что случай

$$n = 2$$

с точностью до обозначений рассмотрен выше применительно к разрешённой относительно единственного неизвестного x совокупности двух линейных уравнений

$$x = a;$$

$$x = b.$$

Для рассматриваемого общего случая разрешённой относительно единственного неизвестного x совокупности n линейных уравнений метод наименьших квадратов, минимизирующий сумму $S_2(x)$ квадратов отклонений приближения x от соответствующих данных

$$S_2(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^2 + (x - a_4)^2 + ... + (x - a_j)^2 + ... + (x - a_n)^2 = \Sigma_{j=1}^n(x - a_j)^2,$$

даёт вполне естественное среднее арифметическое решение

$$x = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_j + ... + a_n)/n = \Sigma_{j=1}^n a_j/n.$$

Метод наименьших квадратов с отбрасыванием выбросов, а именно m первых и M последних итогов измерений, даёт вполне естественное среднее арифметическое решение

$$x = (a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + a_{m+4} + ... + a_j + ... + a_{n-M})/(n - m - M) = \Sigma_{j=m+1}^{n-M} a_j/(n - m - M).$$

Всеобщие математические теории и (мета)методологии синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий посредством функционального синтеза методов и методологий развивают и эффективно используют функциональные природу и сущность методов и методологий, а также изобретают принципиально новые методы и методологии.

Всеобщие математические теории и методологии уточняющего взвешивания обобщают, уточняют и развивают известные подходы и методы, а также изобретают принципиально новые методы и методологии.

В частности, создана и развита итерационная взвешенная методология наименьших квадратов, в i-ом приближении, где

$$i = 1, 2, 3, 4, \dots ,$$

минимизирующая сумму ${}_{i}W_2(x)$ квадратов отклонений приближения x от соответствующих данных

$${}_{(i)}W_2(x) = {}_{(i)}w_1(x - a_1)^2 + {}_{(i)}w_2(x - a_2)^2 + {}_{(i)}w_3(x - a_3)^2 + {}_{(i)}w_4(x - a_4)^2$$

$$+ \dots + {}_{(i)}w_j(x - a_j)^2 + \dots + {}_{(i)}w_n(x - a_n)^2 = \Sigma_{j=1}{}^{n}{}_{(i)}w_j(x - a_j)^2,$$

где положительное число ${}_{(i)}w_j$ является i-ым приближением к j-ому весу данного a_j.

Итерационная взвешенная методология наименьших квадратов является системой итерационных взвешенных методов наименьших квадратов.

Общими для всех итерационных взвешенных методов наименьших квадратов являются единичное первое приближение к весам

$$_{(1)}w_1 = {}_{(1)}w_2 = {}_{(1)}w_3 = {}_{(1)}w_4 = \ldots = {}_{(1)}w_j = \ldots = {}_{(1)}w_n = 1$$

и даваемое классическим методом наименьших квадратов вполне естественное среднее арифметическое решение, рассматриваемое всеми итерационными взвешенными методами наименьших квадратов всего лишь как первое приближение к решению как искомому математическому ожиданию:

$$_{(1)}x = ({}_{(1)}w_1a_1 + {}_{(1)}w_2a_2 + {}_{(1)}w_3a_3 + {}_{(1)}w_4a_4 + \ldots + {}_{(1)}w_ja_j + \ldots + {}_{(1)}w_na_n)/$$
$$\Sigma_{i=1}{}^n{}_{(1)}w_j = \Sigma_{j=1}{}^n{}_{(1)}w_ja_j/\Sigma_{i=1}{}^n{}_{(1)}w_j = \Sigma_{j=1}{}^na_j/n.$$

Итерационные взвешенные методы наименьших квадратов различаются между собой по системам дальнейших приближений весов, в частности по методологиям составления этих систем, в том числе принятием того или иного априорного распределения.

Сущность и действенность итерационной взвешенной методологии наименьших квадратов покажем на примере итерационного нормально взвешенного метода наименьших квадратов по методологии составления систем дальнейших приближений весов принятием априорного нормального распределения применительно к рассматриваемому общему случаю разрешённой относительно единственного неизвестного x совокупности n линейных уравнений.

Первое приближение к несмещённой оценке дисперсии составляет

$$ {}_{(1)}\sigma^2 = \Sigma_{i=1}{}^{n}{}_{(1)}w_i(a_j - {}_{(1)}x)^2\Sigma_{i=1}{}^{n}{}_{(1)}w_i/[(\Sigma_{i=1}{}^{n}{}_{(1)}w_i)^2 - \Sigma_{i=1}{}^{n}{}_{(1)}w_i{}^2] = \Sigma_{i=1}{}^{n}(a_j - {}_{(1)}x)^2/(n - 1). $$

Проще, естественнее и понятнее несколько менее точное первое приближение к смещённой оценке дисперсии

$$ {}_{(1)}\sigma'^2 = \Sigma_{i=1}{}^{n}{}_{(1)}w_i(a_j - {}_{(1)}x)^2/\Sigma_{i=1}{}^{n}{}_{(1)}w_i = \Sigma_{i=1}{}^{n}(a_j - {}_{(1)}x)^2/n. $$

Второе приближение к весам составляет

$$ {}_{(2)}w_j = \exp[- (a_j - {}_{(1)}x)^2/(2{}_{(1)}\sigma^2)]. $$

Второе приближение к решению как искомому математическому ожиданию составляет

$$ {}_{(2)}x = ({}_{(2)}w_1a_1 + {}_{(2)}w_2a_2 + {}_{(2)}w_3a_3 + {}_{(2)}w_4a_4 + ... + {}_{(2)}w_ja_j + ... + {}_{(2)}w_na_n)/\Sigma_{i=1}{}^{n}{}_{(2)}w_j = \Sigma_{i=1}{}^{n}{}_{(2)}w_ja_j/\Sigma_{i=1}{}^{n}{}_{(2)}w_j. $$

Второе приближение к несмещённой оценке дисперсии составляет

$${}_{(2)}\sigma^2 = \Sigma_{i=1}^{n}\,{}_{(2)}w_i(a_j - {}_{(2)}x)^2\Sigma_{i=1}^{n}\,{}_{(2)}w_i/[(\Sigma_{i=1}^{n}\,{}_{(2)}w_i)^2 - \Sigma_{i=1}^{n}\,{}_{(2)}w_i^2].$$

Проще, естественнее и понятнее несколько менее точное второе приближение к смещённой оценке дисперсии

$${}_{(2)}\sigma'^2 = \Sigma_{i=1}^{n}\,{}_{(2)}w_i(a_j - {}_{(1)}x)^2/\Sigma_{i=1}^{n}\,{}_{(2)}w_i.$$

Остаётся представить формулы для итерационного перехода от i-го приближения к (i + 1)-ому приближению.

Пусть для i-го приближения известны i-ое приближение ${}_{(i)}w_j$ к весам, i-ое приближение ${}_{(i)}x$ к искомому математическому ожиданию и i-ое приближение ${}_{(i)}\sigma^2$ к несмещённой оценке дисперсии.

Тогда для (i + 1)-го приближения имеют место следующие формулы.

(i + 1)-ое приближение к весам составляет

$$_{(i+1)}w_j = \exp[-(a_j - {}_{(i)}x)^2/(2{}_{(i)}\sigma^2)].$$

(i + 1)-ое приближение к решению как искомому математическому ожиданию составляет

$$_{(i+1)}x = ({}_{(i+1)}w_1a_1 + {}_{(i+1)}w_2a_2 + {}_{(i+1)}w_3a_3 + {}_{(i+1)}w_4a_4 + \ldots + {}_{(i+1)}w_ja_j + \ldots + {}_{(i+1)}w_na_n)/\Sigma_{i=1}^{n}{}_{(i+1)}w_j = \Sigma_{i=1}^{n}{}_{(i+1)}w_ja_j/\Sigma_{i=1}^{n}{}_{(i+1)}w_j.$$

(i + 1)-ое приближение к несмещённой оценке дисперсии составляет

$$_{(i+1)}\sigma^2 = \Sigma_{i=1}^{n}{}_{(i+1)}w_j(a_j - {}_{(i+1)}x)^2/\Sigma_{i=1}^{n}{}_{(i+1)}w_j.\Sigma_{i=1}^{n}{}_{(i+1)}w_i(a_j - {}_{(i+1)}x)^2\Sigma_{i=1}^{n}{}_{(i+1)}w_i/[(\Sigma_{i=1}^{n}{}_{(i+1)}w_i)^2 - \Sigma_{i=1}^{n}{}_{(i+1)}w_i^2].$$

Проще, естественнее и понятнее несколько менее точное (i + 1)-ое приближение к смещённой оценке дисперсии

$$_{(i+1)}\sigma'^2 = \Sigma_{i=1}{}^{n}{}_{(i+1)}w_i(a_j - {}_{(i+1)}x)^2/\Sigma_{i=1}{}^{n}{}_{(i+1)}w_i.$$

Всеобщие математические теории и (мета)методологии синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий позволяют сделать следующие выводы:

1. Нормальное взвешивание по всеобщим математическим теориям и методологиям уточняющего взвешивания благодаря обратной экспоненциальности весов делает вклад данного в минимизируемую итерационным нормально взвешенным методом наименьших квадратов сумму нормально взвешенных квадратов разностей данных и их приближений тем меньше, чем больше данное удалено от соответствующего приближения.

2. Нормальное взвешивание по всеобщим математическим теориям и методологиям уточняющего взвешивания полностью устраняет какие бы то ни было потребность и целесообразность отбрасывания даже выбросов, сколь угодно далёких от соответствующих приближений, и тем самым полностью сохраняет и полезно учитывает именно всю информацию, несомую всеми без исключения данными решаемой задачи обработки данных.

3. Нормальное взвешивание по всеобщим математическим теориям и методологиям уточняющего взвешивания полностью устраняет извращения и парадоксальность метода наименьших квадратов, опирающегося не на самые лучшие, а на самые худшие данные.

4. Итерационный нормально взвешенный метод наименьших квадратов опирается именно на самые лучшие данные решаемой задачи обработки данных.

5. Последовательность систем приближений к весам, к решению как искомому математическому ожиданию и к несмещённой оценке дисперсии

$$({}_{(i)}w_1,\ {}_{(i)}w_2,\ {}_{(i)}w_3,\ {}_{(i)}w_4,\ \dots,\ {}_{(i)}w_j,\ \dots,\ {}_{(i)}w_n;\ {}_{(i)}x;\ {}_{(i)}\sigma^2)$$

весьма быстро приближается к своему искомому систематическому пределу

$$(w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4,\ \dots,\ w_j,\ \dots,\ w_n;\ x;\ \sigma^2).$$

Всеобщие математические теории и методологии уточняющего взвешивания и последовательного выделения предназначены также для численно-аналитического

индуктивного нахождения искомых функций с возможными последующими дедуктивными доказательствами, многопорядковых пределов и последовательных приближений.

В настоящей монографии в дальнейшем будут очень часто использоваться всеобщие математические теории и методологии уточняющего взвешивания и последовательного выделения для численно-аналитического индуктивного нахождения искомых функций. Поэтому здесь целесообразно ограничиться всего лишь одним простейшим примером испытательной, или тестовой, именно классической задачи, решения которой другими методами давно и хорошо известны.

Используем естественное общепринятое обозначение двойной последовательности сумм одинаковых степеней первых положительных целых чисел,

$$S_k(n) = \Sigma_{j=1}{}^n j^k = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k,$$

где

$$k = 0, 1, 2, 3, ...;$$

$$n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Очевидно,

$$S_k(0) = 0$$

как пустая сумма;

$$S_k(1) = 1^k = 1;$$

$$S_0(n) = \Sigma_{j=1}{}^n j^0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + ... + n^0 = n;$$

$$S_1(n) = \Sigma_{j=1}{}^n j^1 = 1^1 + 2^1 + 3^1 + ... + n^1 = 1 + 2 + 3 + ... + n =$$

$$\Sigma_{j=1}{}^n j = n(n + 1)/2$$

как сумма последовательных элементов арифметической прогрессии.

Для забывших давно известную формулу суммы квадратов первых положительных целых чисел

$$S_2(n) = \Sigma_{j=1}^n j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$$

явно недостаточно их воспоминание о том, что эта формула доказуема методом математической индукции как выведению, неспособной, в противоположность простой индукции как наведению, именно находить искомое. Не удаётся применить угадывание желанной искомой закономерности на частных примерах численным методом:

$$S_2(n) = 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, ...$$

Это один очень частный случай общей задачи с именно методическими, или методологическими, ограничениями, или условиями, или условными ограничениями, часто встречающимися в педагогике, когда и где приходится ограничиваться уже изученными методами и методологиями. Но и в науке возможны соответствующие субъективные желания и пожелания, например именно элементарности нахождения неизвестного или доказательства теоремы.

В данном случае такими именно методическими, или методологическими, ограничениями, или условиями, или условными ограничениями, являются:

1. Временная личная неизвестность формулы

$$S_2(n) = n(n + 1)(2n + 1)/6.$$

2. Желание использовать метод математической индукции как выведения.

Зато известными или легко выводимыми считаются формулы

$$S_0(n) = n;$$

$$S_1(n) = n(n + 1)/2.$$

Быстрее всего ведёт к цели метод простой индукции как наведения, но всегда нестандартный.

Можно заметить, что

$$S_1(n) = n(n + 1)/2 = S_0(n)(n + 1)/2.$$

То есть при переходе от

$$k = 0$$

к

$$k = 1$$

правая часть формулы дополнительно умножается на (n + 1)/2.

Возникает естественная идея проверить, не имеет ли места столь же закономерное дополнительное умножение правой части формулы при переходе от

$$k = 1$$

к

$$k = 2.$$

Однако правая часть формулы

$$S_2(n) = n(n + 1)(2n + 1)/6$$

в рассматриваемой задаче с именно методическими, или методологическими, ограничениями, или условиями, или

условными ограничениями, считается лично неизвестной, или недоступной, или временно не подлежащей использованию. Поэтому дедуктивная проверка выдвинутого предположения именно в общем виде в данном случае недоступна. Остаётся применить угадывание желанной искомой закономерности на частных примерах численным методом. Для этого составим и рассмотрим по нескольку начальных элементов обеих этих последовательностей:

$$S_1(n) = 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, ...;$$

$$S_2(n) = \Sigma_{j=1}{}^{n}j^2 = 1\hat{}2 + 2\hat{}2 + 3\hat{}2 + 4\hat{}2 + 5\hat{}2 + 6\hat{}2 + 7\hat{}2 + 8\hat{}2 + 9\hat{}2 + 10\hat{}2 + 11\hat{}2 + ... + n^2;$$

$$S_2(n) = 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, 204, 285, 385, 506, ...;$$

$$S_2(n)/S_1(n) = 1/1, 5/3, 14/6, 30/10, 55/15, 91/21, 140/28, 204/36, 285/45, 385/55, 506/66, ...;$$

соответствующая последовательность несократимых дробей

$$S_2(n)/S_1(n) = 1, 5/3, 7/3, 3, 11/3, 13/3, 5, 17/3, 19/3, 7, 23/3, ...;$$

становится очевидной целесообразность приведения всех этих обыкновенных дробей к общему знаменателю 3:

$$S_2(n)/S_1(n) = 3/3, 5/3, 7/3, 9/3, 11/3, 13/3, 15/3, 17/3, 19/3, 21/3, 23/3, ...$$

Теперь очевидным образом угадываются умножение $S_1(n)$ на $(2n + 1)/3$ для получения $S_2(n)$ и формула

$$S_2(n) = \Sigma_{j=1}{}^n j^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6.$$

И только теперь эта предположительная формула, полученная неполной индукцией как наведением, строго доказывается методом математической индукции как выведения:

1. Непосредственно проверяется справедливость утверждения при начальном значении n = 1:

$$S_2(n) = \Sigma_{j=1}{}^n j^2 = 1^2 = 1 = n(n + 1)(2n + 1)/6|_{n=1} =$$
$$1(1 + 1)(2*1 + 1)/6.$$

2. Допускается справедливость утверждения при любом положительном целом значении n:

$$S_2(n) = \Sigma_{j=1}{}^n j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6.$$

3. При условии справедливости этого допущения строго доказывается справедливость утверждения при любом

именно следующем положительном целом значении n + 1, то есть возможность всегда сделать индукционный шаг:

$$S_2(n + 1) = \Sigma_{j=1}^{n+1} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n + 1)^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6 + (n + 1)^2 = (2n^2 + n + 6n + 6)(n + 1)/6 = (n + 1)((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)/6.$$

Это известное решение данной испытательной, или тестовой, задачи среднего олимпиадного уровня приведено здесь достаточно полно именно для того, чтобы показать, что даже в столь специально удобной задаче для получения весьма частной формулы

$$S_2(n) = \Sigma_{j=1}^{n} j^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$$

использование столь специализированного метода потребовало не только довольно значительного объёма

работы, но и незаурядных смекалки, догадливости, наблюдательности и вообще нестандартного мышления, далёких от методологичности.

Несколько более общими являются рекурсивные методы последовательного нахождения искомых сумм

$$S_k(n) = \Sigma_{j=1}^{n} j^k = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k$$

одинаковых степеней первых положительных целых чисел. Для этого Паскаль предложил ведущее к сохранению лишь крайних элементов сложение всех последовательных разностей, выраженных с помощью биномиальных коэффициентов в треугольнике Паскаля, известном задолго до него индийским и китайским учёным и Омару Хайяму:

$$(n + 1)^k - 1^k = \Sigma_{j=1}{}^n((j + 1)^k - j^k) = \Sigma_{j=1}{}^n(C_k{}^1 j^{k-1} + C_k{}^2 j^{k-2} + ... + C_k{}^k j^{k-k}) = C_k{}^1 \Sigma_{j=1}{}^n j^{k-1} + C_k{}^2 \Sigma_{j=1}{}^n j^{k-2} + ... + C_k{}^k \Sigma_{j=1}{}^n j^{k-k} = C_k{}^1 S_{k-1}(n) + C_k{}^2 S_{k-2}(n) + C_k{}^3 S_{k-3}(n) + ... + C_k{}^{k-3} S_3(n) + C_k{}^{k-2} S_2(n) + C_k{}^{k-1} S_1(n) + C_k{}^k S_0(n).$$

Этот рекурсивный метод Паскаля именно однозначно выражает $S_{k-1}(n)$ через

$$S_{k-2}(n), S_{k-3}(n), ... , S_3(n), S_2(n), S_1(n), S_0(n),$$

полностью дедуктивен и обеспечивает синергию наведения на формулы и их выведения. Поэтому такие формулы не нуждаются в дополнительном доказательстве, например методом математической индукции.

В качестве примера применения этого метода выведем с его помощью формулу для $S_2(n)$ путём выражения через

известные $S_1(n)$ и $S_0(n)$. Для этого в рекурсивном соотношении Паскаля полагаем

$$k - 1 = 2$$

и получаем

$$k = 3;$$

$$(n + 1)^3 - 1^3 = C_3{}^1S_{3-1}(n) + C_3{}^2S_{3-2}(n) + C_3{}^3S_{3-3}(n);$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S_2(n) + 3S_1(n) + S_0(n);$$

$$S_2(n) = n^3/3 + n^2 + n - S_1(n) - S_0(n)/3;$$

$$S_2(n) = n^3/3 + n^2 + n - n(n + 1)/2 - n/3;$$

$$S_2(n) = (2n^3 + 6n^2 + 6n - 3n^2 - 3n - 2n)/6;$$

$$S_2(n) = (2n^3 + 3n^2 + n)/6;$$

$$S_2(n) = \Sigma_{j=1}{}^n j^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6.$$

На этом завершаем представление решений известными сугубо специальными методами нашей испытательной, или тестовой, задачи нахождения формулы для

$$S_2(n) = \Sigma_{j=1}^{n} j^2.$$

А теперь прил<u>о</u>жим к той же задаче именно всеобщие математические теории и методологии уточняющего взвешивания и последовательного выделения для численно-аналитического индуктивного нахождения искомых функций без каких бы то ни было априорных знаний о $S_2(n)$, $S_1(n)$ и $S_0(n)$.

Во-первых, для получения предположительного общего асимптотического представления рассматриваемой функции $S_2(n)$ исследуем её реакцию на удвоение

не слишком малого, но для простоты и не слишком большого аргумента n, например:

$$S_2(5) = \Sigma_{j=1}{}^{5}j^2 = 1\hat{}2 + 2\hat{}2 + 3\hat{}2 + 4\hat{}2 + 5\hat{}2 = 55;$$

$$S_2(10) = \Sigma_{j=1}{}^{10}j^2 = 1\hat{}2 + 2\hat{}2 + 3\hat{}2 + 4\hat{}2 + 5\hat{}2 + 6\hat{}2 + 7\hat{}2 + 8\hat{}2 + 9\hat{}2 + 10\hat{}2 = 385;$$

$$S_2(20) = \Sigma_{j=1}{}^{20}j^2 = 1\hat{}2 + 2\hat{}2 + 3\hat{}2 + 4\hat{}2 + 5\hat{}2 + 6\hat{}2 + 7\hat{}2 + 8\hat{}2 + 9\hat{}2 + 10\hat{}2 + 11\hat{}2 + 12\hat{}2 + 13\hat{}2 + 14\hat{}2 + 15\hat{}2 + 16\hat{}2 + 17\hat{}2 + 18\hat{}2 + 19\hat{}2 + 20\hat{}2 = 2870;$$

$$S_2(40) = \Sigma_{j=1}{}^{40}j^2 = 1\hat{}2 + 2\hat{}2 + 3\hat{}2 + 4\hat{}2 + 5\hat{}2 + 6\hat{}2 + 7\hat{}2 + 8\hat{}2 + 9\hat{}2 + 10\hat{}2 + 11\hat{}2 + 12\hat{}2 + 13\hat{}2 + 14\hat{}2 + 15\hat{}2 + 16\hat{}2 + 17\hat{}2 + 18\hat{}2 + 19\hat{}2 + 20\hat{}2 + 21\hat{}2 + 22\hat{}2 + 23\hat{}2 + 24\hat{}2 + 25\hat{}2 + 26\hat{}2 + 27\hat{}2 + 28\hat{}2 + 29\hat{}2 + 30\hat{}2 + 31\hat{}2 + 32\hat{}2 + 33\hat{}2 + 34\hat{}2 + 35\hat{}2 + 36\hat{}2 + 37\hat{}2 + 38\hat{}2 + 39\hat{}2 + 40\hat{}2 = 22140;$$

$$S_2(10)/S_2(5) = 385/55 = 7;$$

$$S_2(20)/S_2(10) = 2870/385 = 7.(45);$$

$$S_2(40)/S_2(20) = 22140/2870 = 7.(714285).$$

Это позволяет обоснованно предположить, что при стремлении аргумента n к плюс бесконечности его удвоение в пределе ведёт к умножению значения функции на

$$8 = 2^3,$$

и поэтому испытать представление $S_2(n)$ в виде многочлена третьей степени от аргумента n

$$S_2(n) = x_0 + x_1 n + x_2 n^2 + x_3 n^3$$

с искомыми действительными коэффициентами

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3.$$

В нашей испытательной, или тестовой, задаче нахождения формулы для

$$S_2(n) = \Sigma_{j=1}{}^{n}j^2$$

имеет место тождество

$$S_2(n) + (n + 1)^2 = S_2(n + 1)$$

по n, открывающее возможность не только резко упрощённого именно аналитического поиска решения и даже не только наведения на решение, но и именно выведения решения:

$$S_2(n) + (n + 1)^2 = S_2(n + 1);$$

$$x_0 + x_1n + x_2n^2 + x_3n^3 + (n + 1)^2 = x_0 + x_1(n + 1) + x_2(n + 1)^2 + x_3(n + 1)^3;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 - 1 + (2x_2 + 3x_3 - 2)n + (3x_3 - 1)n^2 = 0.$$

Последнее тождество по n даёт совокупность уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0;$$

$$2x_2 + 3x_3 - 2 = 0;$$

$$3x_3 - 1 = 0.$$

Последовательно решаем её от последнего уравнения к первому:

$$x_3 = 1/3;$$

$$x_2 = 1/2;$$

$$x_1 = 1/6.$$

Заметим, что x_0 не влияет на тождество

$$S_2(n) + (n + 1)^2 = S_2(n + 1)$$

по n, однако однозначно определяется не по разности

$$S_2(n + 1) - S_2(n),$$

в которой взаимно уничтожается, а по любому значению $S_2(n)$ именно как

$$x_0 = 0.$$

Например, это следует и из

$$S_2(0) = x_0 = 0,$$

и из

$$S_2(1) = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Следовательно,

$$S_2(n) = n/6 + n^2/2 + n^3/3;$$

$$S_2(n) = (2n^3 + 3n^2 + n)/6;$$

$$S_2(n) = \Sigma_{j=1}{}^n j^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6.$$

Ещё раз отметим, что достигнуты не только резко упрощённый именно аналитический поиск решения и даже

не только наведение на решение, но и именно выведение решения. Поэтому такая формула не нуждается в дополнительном доказательстве, например методом математической индукции.

Именно всеобщие математические теории и методологии уточняющего взвешивания и последовательного выделения для численно-аналитического индуктивного нахождения искомых функций без каких бы то ни было априорных знаний показывают свои действенность и мощь также численно применительно к более широкому кругу решаемых задач без возможности воспользоваться аналитическими тождествами.

Полезно показать также численное решение нашей же испытательной, или тестовой, задачи нахождения формулы для

$$S_2(n) = \Sigma_{j=1}{}^n j^2.$$

Как и выше, испытываем представление $S_2(n)$ в виде многочлена третьей степени от аргумента n

$$S_2(n) = x_0 + x_1 n + x_2 n^2 + x_3 n^3$$

с искомыми действительными коэффициентами

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,$$

но теперь не аналитически, а численно. Более того, во имя показа действий в общем случае умышленно откажемся от трёх очевидных априорных упрощений, а именно от

$$x_0 = 0$$

ввиду

$$S_2(0) = x_0 = 0,$$

от

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

ввиду

$$S_2(1) = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

и от

$$x_3 = 1/3$$

ввиду

$$S_2(n) + (n + 1)^2 = S_2(n + 1).$$

Четвёрка искомых неизвестных коэффициентов

$$x_0, x_1, x_2, x_3$$

требует совокупности четырёх уравнений, например для

$$S_2(40) = x_0 + 40x_1 + 1600x_2 + 64000x_3 = 22140;$$
$$S_2(39) = x_0 + 39x_1 + 1521x_2 + 59319x_3 = 20540;$$
$$S_2(38) = x_0 + 38x_1 + 1444x_2 + 54872x_3 = 19019;$$
$$S_2(37) = x_0 + 37x_1 + 1369x_2 + 50653x_3 = 17575.$$

Решение этой совокупности уравнений даёт следующие значения четвёрки искомых коэффициентов:

$$x_0 = 0;$$
$$x_1 = 1/6;$$
$$x_2 = 1/2;$$
$$x_3 = 1/3.$$

Следовательно,

$$S_2(n) = n/6 + n^2/2 + n^3/3;$$
$$S_2(n) = (2n^3 + 3n^2 + n)/6;$$

$$S_2(n) = \Sigma_{j=1}{}^n j^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6.$$

Таким образом, мы вновь получили всё то же самое именно точное решение нашей испытательной, или тестовой, задачи нахождения формулы для

$$S_2(n) = \Sigma_{j=1}{}^n j^2.$$

Теперь рассмотрим следующую несравненно более сложную испытательную, или тестовую, задачу, однако имеющую именно точное замкнутое аналитическое решение, выраженное стандартными функциями.

Именно игровая постановка этой испытательной, или тестовой, задачи такова. Преподаватель задумал искомую для исследователя функцию

$$y = f(x) = 0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x),$$

сообщил исследователю лишь то, что задуманная тайная действительная функция

$$y = f(x)$$

одного действительного переменного x непрерывна при всех положительных значениях x, то есть на полубесконечном интервале

$$(0, +\infty),$$

и выразил готовность указать значения задуманной функции

$$y = f(x)$$

при любых значениях аргумента x по требованиям исследователя. Перед исследователем ставится задача выработать и осуществить достаточно целесообразную

и достаточно общую стратегию допустимо простейшего и поэтому наиболее естественного и наиболее вероятного или совершенно точного, или по меньшей мере достаточно точного приближённого определения задаваемой таблично, однако аналитически неизвестной функции. О ней известно лишь то, что эта функция вместе с её преобразованиями с помощью непрерывных стандартных функций при исключении делений на 0 непрерывна на заданном интервале (0, +∞).

Стратегически и методологически первичен функциональный анализ поставленной задачи с целью её диагностики.

На каждом конечном отрезке указанной области определения (0, +∞) искомой функции эта функция и её названные допустимые преобразования с помощью непрерывных стандартных функций непрерывны и могут быть сколь угодно точно приближены многочленами, однако зависящими от этого конечного отрезка. Поскольку это относится и к допустимо преобразованной искомой функции, то сама искомая функция может быть сколь угодно точно приближена бесконечным множеством способов не только многочленами, но и допустимыми их преобразованиями с помощью других стандартных функций, например степенных с отличными от положительных целых чисел показателями, показательных,

логарифмических, тригонометрических, гиперболических и любых других допустимых функций, непрерывных на рассматриваемом конечном отрезке и не приводящих к делению на 0. Ввиду зависимости каждого из таких приближений от рассматриваемого конечного отрезка не приходится ожидать, что такое рассмотрение приведёт к единому выражению искомой функции для всего заданного полубесконечного интервала (0, +∞) положительных чисел. Поэтому представляется наиболее целесообразным начать именно с исследования поведения искомой функции при стремлениях аргумента x, во-первых, к нулю справа и, во-вторых, к плюс бесконечности. Исследование влияния стремления аргумента x к плюс бесконечности тем более

целесообразно, что за пределами рассмотрения оказывается имеющая лишь конечную линейную меру часть области определения (0, +∞) искомой функции, тогда как рассматривается имеющая именно бесконечную линейную меру часть области определения (0, +∞) искомой функции. Однако столь же целесообразно и исследование влияния стремления аргумента x к нулю справа. Чтобы убедиться в этом, достаточна замена аргумента

$$x = 1/z,$$

при которой уже z стремится к плюс бесконечности. Если бы искомая функция имела разрывы внутри области её определения, то представлялось бы целесообразным разбиение этой области на промежутки непрерывности

искомой функции, а каждая из точек разрыва могла бы быть приведена к плюс бесконечности соответствующим дробно-линейным преобразованием. Поэтому вновь представляется целесообразной всеобщая численно-аналитическая эврико-логическая индуктивно-дедуктивная методология последовательного выделения асимптотически наибольших частей текущих остатков.

Замечание. По требованиям исследователя преподаватель вычисляет значения задуманной функции при требуемых значениях аргумента x, причём сообщает исследователю только итоги вычислений, то есть пары значений (x, y) как соответствующие точки графика заданной задуманной функции, лишь таблично задаваемой исследователю

без каких бы то ни было промежуточных выкладок, неминуемо дающих исследователю представление о тайном именно аналитическом задании задуманной функции. Для сокращения объёма настоящей монографии вычисления преподавателя далее приводятся с промежуточными выкладками, а выбрасывающие эти промежуточные выкладки соответствующие сообщения преподавателя исследователю опускаются ввиду очевидности этих выбрасываний.

Применительно к решаемой задаче соответствующий алгоритм указанных целесообразных всеобщей стратегии и всеобщей методологии оказывается следующим.

I. Исследуется поведение задуманной функции при стремлении аргумента x к нулю справа по значениям задуманной функции при значениях аргумента x, имеющих отклонения от соответствующей предельной точки, образующие целесообразную геометрическую прогрессию, например в данном случае

x = 1, 1/10, 1/100, 1/1000, 1/10000, 1/10000, 1/100000, 1/1000000, 1/10000000.

$$f(x) = 0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x).$$

f(1) = 0.04*(1/1)^(4/3) + 0.01*1*ln(1 + 3*1) =

0.0538629436111989061883446424291635313615100026872051050824136;

f(1/10) = 0.04*(1/(1/10))^(4/3) + 0.01*(1/10)*ln(1 + 3*(1/10)) =

0.86203624027722097975575292259462115250094214333297486713607992;

f(1/100) = 0.04*(1/(1/100))^(4/3) + 0.01*(1/100)*ln(1 + 3*(1/100)) = 18.566358290331339724080578665618354777445939105858085876323825889;

f(1/1000) = 0.04*(1/(1/1000))^(4/3) + 0.01*(1/1000)*ln(1 + 3*(1/1000)) = 400.00000002995508979798478811610627539731536848245336029880388 7001;

f(1/10000)) = 0.04*(1/(1/10000))^(4/3) + 0.01*(1/10000)*ln(1 + 3*(1/10000)) = 8617.7387601278348420461722415632805122720378480352481855525825 00497;

f(1/100000) = 0.04*(1/(1/100000))^(4/3) + 0.01*(1/100000)*ln(1 + 3*(1/100000)) = 185663.55334451115869635805493675761354804181531287011590329323 8108467;

f(1/1000000) = 0.04*(1/(1/1000000))^(4/3) + 0.01*(1/1000000)*ln(1 + 3*(1/1000000)) = 4000000.000000000000029999955000089999797500485998785003124277 5112155842;

f(1/10000000) = 0.04*(1/(1/10000000))^(4/3) + 0.01*(1/10000000)*ln(1 + 3*(1/10000000)) = 86177387.601275348870372042660729019819373795662684829299447920 2388028489.

Исследователь вычисляет

f(1/10)/f(1) = 0.86203624027722097975575292259462115250094214333297486713607992/

0.0538629436111989061883446424291635313615100026872051050824136 =
16.0042541770403880899790765956450099761256019711777020209745930574;
ln(f(1/10)/f(1))/ln(10) =
ln(16.0042541770403880899790765956450099761256019711777020209745930574)/
ln(10) =
1.2042354401581894093850830090796210470248660660486047755631065878;
f(1/100)/f(1/10) =
18.566358290331339724080578665618354777445939105858085876323825889/
0.86203624027722097975575292259462115250094214333297486713607992 =
21.5377932189493699083307945577069383415388994224031911671472420335;
ln(f(1/100)/f(1/10))/ln(10) =
ln(21.5377932189493699083307945577069383415388994224031911671472420335)/
ln(10) =
1.3332012030506228237961084199882730336262545471730183780046984973;
f(1/1000)/f(1/100) =
400.00000029955089797984788116106275397315368482453360298803887001/18.

5663582903313397240805786656183547774459391058580858763238258 89 =

21.544343471937629669458229425756790539401910658553230909013 0749538;

ln(f(1/1000)/f(1/100))/ln(10) =

ln(21.5443434719376296694582294257567905394019106585532309090130749538)/ln(10) =

1.333333264223456591401011562864448776490062867492157925570 6474658;

f(1/10000)/f(1/1000) =

8617.7387601278348420461722415632805122720378480352481855525825004 97/400.00000002995508979798478811610627539731536848245336029880 3887001 =

21.544346898706179990141233850111595854307401863599076914017 6452874;

ln(f(1/10000)/f(1/1000))/ln(10) =

ln(21.5443468987061799901412338501115958543074018635990769140176452874)/ln(10) =

1.333333333300825124179890912078752293702204643321750016987 2891589;

f(1/100000)/f(1/10000) =

185663.55334451115869635805493675761354804181531287011590329323810 8467/

8617.738760127834842046172241563280512272037848035248185552582500497 =
21.544346900318087678184381590521800152716143535690393106537054218 3;

ln(f(1/100000)/f(1/10000))/ln(10) =
ln(21.5443469003180876781843815905218001527161435356903931065370542183)
/ln(10) =
1.3333333333333182239948785552075807254079802125145063030836639111;

f(1/1000000)/f(1/100000) =
4000000.0000000000000299999550000899997975004859987850031242775112155842/
185663.553344511158696358054936757613548041815312870115903293238108467 =
21.5443469003188368696405771866184824092372908966011965033029028683;

ln(f(1/1000000)/f(1/100000))/ln(10) =
ln(21.5443469003188368696405771866184824092372908966011965033029028683)/
ln(10) =
1.3333333333333333263192525653416638346135451272071996725218660704;

f(1/10000000)/f(1/1000000) =
86177387.601275348870372042660729019819373795662684829944792023880 28489/

4000000.0000000000000299999550000899997975004859987850031242775112155842 =
21.544346900318837217431428305803281557585054669840895770267215456 9;
ln(f(1/10000000)/f(1/1000000))/ln(10) =
ln(21.5443469003188372174314283058032815575850546698408957702672154569)
/ln(10) =
1.3333333333333333333300776414669485914676237426832647218136619753.

Если бы при стремлении аргумента x к нулю справа задуманная функция асимптотически равнялась многочлену n-ой степени от 1/x, то при избранной геометрической прогрессии

x = 1, 1/10, 1/100, 1/1000, 1/10000, 1/100000, 1/1000000, 1/10000000

со знаменателем 1/10 значений аргумента x задуманная функция имела бы последовательность значений, асимптотически равную геометрической прогрессии со

знаменателем 10^n. В нашем случае десятичный логарифм соответствующего отношения последовательных значений задуманной функции стремится к 4/3, а сам знаменатель соответствующей геометрической прогрессии равен $10^{4/3}$. Поэтому естественно предположить, что при стремлении аргумента x к нулю справа задуманная функция ведёт себя как кубический корень из многочлена четвёртой степени от 1/x, то есть как функция

$$g(x) = (x_0 + x_1(1/x) + x_2(1/x)^2 + x_3(1/x)^3 + x_4(1/x)^4)^{1/3}$$

с пятью искомыми действительными неизвестными

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4.$$

Пятёрка искомых неизвестных требует совокупности пяти уравнений, например для

x = 1/10000000, 1/1000000, 1/100000, 1/10000, 1/1000.

Исследователь избавляется от радикалов путём возведения уравнений в куб:

$$(f(1/10000000))^3 = x_0 + 10000000*x_1 + 10000000\hat{}2*x_2 + 10000000\hat{}3*x_3 + 10000000\hat{}4*x_4 =$$

86177387.601275348870372042660729019819373795662684829299447920238802 8489^3;

$$(f(1/1000000))^3 = x_0 + 1000000*x_1 + 1000000\hat{}2*x_2 + 1000000\hat{}3*x_3 + 1000000\hat{}4*x_4 =$$

4000000.00000000000000299999550000899997975004859987850031242775112155842^3;

$$(f(1/100000))^3 = x_0 + 100000*x_1 + 100000\hat{}2*x_2 + 100000\hat{}3*x_3 + 100000\hat{}4*x_4 =$$

185663.553344511158696358054936757613548041815312870115903293238108467^3;

$$(f(1/10000))^3 = x_0 + 10000^*x_1 + 10000\text{^}2^*x_2 + 10000\text{^}3^*x_3 + 10000\text{^}4^*x_4 =$$

8617.738760127834842046172241563280512272037848035248185552582500497^3;

$$(f(1/1000))^3 = x_0 + 1000^*x_1 + 1000\text{^}2^*x_2 + 1000\text{^}3^*x_3 + 1000\text{^}4^*x_4 =$$

400.00000002995508979798478811610627539731536848245336029880388700 1^3.

Совокупность уравнений с явно вычисленными коэффициентами принимает вид:

$$x_0 + 10000000^*x_1 + 100000000000000^*x_2 + 1000000000000000000000^*x_3 + 10000000000000000000000000000^*x_4 =$$

64000000000000000000006.683886917819414061302788292048514878042655914076716377187308 5699;

$$x_0 + 1000000^*x_1 + 1000000000000^*x_2 + 1000000000000000000^*x_3 + 1000000000000000000000000^*x_4 =$$

64000000000000000001.439997840004319990290823295541769249722348204044704950352139 5767;

$$x_0 + 100000*x_1 + 10000000000*x_2 + 1000000000000000*x_3 + 100000000000000000000*x_4 = 640000000000000.31023394187873027662638089226790260404855048828000956454435114 99;$$

$$x_0 + 10000*x_1 + 100000000*x_2 + 1000000000000*x_3 + 10000000000000000*x_4 = 640000000000.066828855376861060477932639191073443326400348279589878162190 1166;$$

$$x_0 + 1000*x_1 + 1000000*x_2 + 1000000000*x_3 + 1000000000000*x_4 = 64000000.014378443104109467181524289915528237717431644051128456663356 1769.$$

Эта пятёрка уравнений даёт такие значения искомых пяти коэффициентов:

$$x_0 = 670767817350422000000/6036437988281 = 111119805.861111305191 3005;$$

$$x_1 = 32754142153801730/4144478539277 = 7903.079203666393 2791;$$

$$x_2 = - 483051750555648/5038134379007723 = - 0.0958790921830844;$$

$$x_3 = 289814528/2998078298437907 = 0.0000000966667642;$$

$$x_4 = 8900199891372217/139065623321629430000 = 0.0000639999999913.$$

Достаточно точно и надёжно определены значения лишь двух последних неизвестных:

$$x_3 = 0;$$

$$x_4 = 0.000064.$$

Причина ненадёжного определения остальных трёх неизвестных

$$x_0, x_1, x_2$$

даже при высокоточных вычислениях заключается в куда меньших коэффициентах при этих неизвестных по

сравнению с коэффициентами при двух неизвестных x_3, x_4, значения которых определены достаточно точно и надёжно. Исследователь рассматривает совокупность трёх уравнений для

$$x = 1/10000000, 1/1000000, 1/100000.$$

Исследователь подставляет достаточно точно и надёжно найденные значения двух неизвестных x_3, x_4, переносит соответствующие произведения с противоположными знаками в правые части уравнений и производит вычисления. Тройка уравнений с тремя неизвестными

$$x_0, x_1, x_2$$

принимает вид:

$$x_0 + 10000000*x_1 + 100000000000000*x_2 =$$

$$6400000000000000000000006.6838869178194140613027882920485148780426559140767163771873085699 -$$

1000000000000000000000*0 -
10000000000000000000000000000*0.000064 =
6.6838869178194140613027882920485148780426559140767163771873085699;

x_0 + 1000000*x_1 + 1000000000000*x_2 =

64000000000000000001.4399978400043199902908232955417692497223482040447049503521395767
- 1000000000000000000*0 -
1000000000000000000000000*0.000064 =
1.4399978400043199902908232955417692497223482040447049503521395767;

x_0 + 100000*x_1 + 10000000000*x_2 =

6400000000000000.31023394187873027662638089226790260404855048828000956454435114 99 -
1000000000000000*0 - 100000000000000000000*0.000064 =
0.3102339418787302766263808922679026040485504882800095645443511499.

Эта тройка уравнений даёт такие значения искомых трёх неизвестных:

$$x_0 = 2035789335431539/11442785917772390 = 0.1779102877621479;$$

$$x_1 = 6528497420458591/4908530735392132000000 = 0.0000013300308733;$$

$$x_2 = - 562648870334033/828115055071378500000000000000 = - 0.000000000000006794.$$

Следовательно, дополнительно достаточно точно и надёжно определены

$$x_1 = 0;$$

$$x_2 = 0.$$

Остаётся неизвестное x_0, в отличие от остальных неизвестных с огромными коэффициентами в последней совокупности пяти уравнений имеющее единичные

коэффициенты. Эта совокупность уравнений с огромными свободными членами дала для этого неизвестного значение

$$x_0 = 111119805.8611113051913005.$$

После подстановки достаточно точно и надёжно определённых неизвестных

$$x_3 = 0;$$

$$x_4 = 0.000064$$

свободные члены уравнений стали порядка единицы, а последняя совокупность трёх уравнений с тремя неизвестными x_0, x_1, x_2 дала для оставшегося неизвестного на несколько порядков меньшее, чем раньше, значение

$$x_0 = 0.177910287762147\,9.$$

Поэтому представляется целесообразным принять

$$x_0 = 0.$$

Следовательно, при стремлении аргумента x к нулю справа искомая функция f(x) асимптотически равна функции

$$g(x) = (x_0 + x_1(1/x) + x_2(1/x)^2 + x_3(1/x)^3 + x_4(1/x)^4)^{1/3};$$

$$g(x) = (0 + 0(1/x) + 0(1/x)^2 + 0(1/x)^3 + 0.000064(1/x)^4)^{1/3};$$

$$g(x) = 0.04(1/x)^{4/3}.$$

Для совершенно точного или достаточно точного приближённого определения искомой задуманной функции f(x) теперь необходимо и достаточно совершенно точно или достаточно точно приближённо определить разность

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - 0.04(1/x)^{4/3}.$$

II. Исследуется поведение разности

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - 0.04(1/x)^{4/3}$$

при стремлении аргумента x к плюс бесконечности по значениям функции h(x) при значениях аргумента x, образующих целесообразную геометрическую прогрессию, например в данном случае

x = 1, 10, 100, 1000, 10000, 10000, 100000, 1000000, 10000000.

Как и ранее, по соответствующим запросам исследователя преподаватель тайно выполняет требуемые вычисления с промежуточными выкладками и сообщает исследователю лишь итоги вычислений значений задуманной функции f(x) при указанных значениях аргумента x.

$$f(x) = 0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x).$$

f(1) = 0.04*(1/1)^(4/3) + 0.01*1*ln(1 + 3*1) =

0.0538629436111989061883446424291635313615100026872051050824136;

f(10) = 0.04*(1/10)^(4/3) + 0.01*10*ln(1 + 3*10) =
0.345255355981959736149880462994603499675614432698063694630732084;
f(100) = 0.04*(1/100)^(4/3) + 0.01*100*ln(1 + 3*100) =
5.70719644213647700392706562853168753921603128826110428799437498 4;
f(1000) = 0.04*(1/1000)^(4/3) + 0.01*1000*ln(1 + 3*1000) =
80.0670124544036711464240668045229346803269768022091587613456316 44;
f(10000) = 0.04*(1/10000)^(4/3) + 0.01*10000*ln(1 + 3*10000) =
1030.89859952787180840604789909962189671881394287049291619575023 5196;
f(100000) = 0.04*(1/100000)^(4/3) + 0.01*100000*ln(1 + 3*100000) =
12611.5410869747336403687559712396141409709403171049069048784869 6673;
f(1000000) = 0.04*(1/1000000)^(4/3) + 0.01*1000000*ln(1 + 3*1000000) =
149141.231799657015732933174187324154770028420593909323930697730 957;
f(10000000) = 0.04*(1/10000000)^(4/3) + 0.01*10000000*ln(1 + 3*10000000) =
1721670.79729597624429625288876807123357479669489297782679632961 4474974.

Исследователь вначале вычисляет соответствующие значения функции h(x) как разности

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - 0.04(1/x)^{4/3}.$$

$$h(1) = f(1) - g(1) =$$

$$0.0538629436111989061883446424291635313615100026872051050824136 -$$

$$0.04*(1/1)\hat{}(4/3) =$$

$$0.0138629436111989061883446424291635313615100026872051050824136;$$

$$h(10) = f(10) - g(10) =$$

$$0.3452553559819597361498804629946034996756144326980636946307320 84 -$$

$$0.04*(1/10)\hat{}(4/3) =$$

$$0.3433987204485146245929164324542357210449938930480591971756718069;$$

$$h(100) = f(100) - g(100) =$$

$$5.7071964421364770039270656285316875392160312882611042879943749 84 -$$

0.04*(1/100)^(4/3) =
5.7071102647488757285781952567890267651962209144634166036510754146;
h(1000) = f(1000) - g(1000) =
80.067012454403671146424066804522934680326976802209158761345631644 -
0.04*(1/1000)^(4/3) =
80.067008454403671146424066804522934680326976802209158761345631644;
h(10000) = f(10000) - g(10000) =
1030.8985995278718084060478990996218967188139428704929161957502351 96 -
0.04*(1/10000)^(4/3) =
1030.8985993422082550615367434032188426820360798084389511953004896 9;
h(100000) = f(100000) - g(100000) =
12611.541086974733640368755971239614140970940317104906904878486966 73 -
0.04*(1/100000)^(4/3) =
12611.541086966115901608628436352576966704862915123869525109718532 4001;

h(1000000) = f(1000000) - g(1000000) =
149141.231799657015732933174187324154770028420593909323930697730957 -
0.04*(1/1000000)^(4/3) =
149141.231799656615732933174187324154770028420593909323930697730957;
h(10000000) = f(10000000) - g(10000000) =
1721670.797295976244296252888768071233574796694892977826796329614474974 -
0.04*(1/10000000)^(4/3) =
1721670.7972959762257298975543169556639344912912151915205909331144299995.
h(10)/h(1) =
0.3433987204485146245929164324542357210449938930480591971756718069/
0.0138629436111989061883446424291635313615100026872051050824136 =
24.7709815519343760440306179958777721177451116079819033443364939246;
ln(h(10)/h(1))/ln(10) =
ln(24.7709815519343760440306179958777721177451116079819033443364939246)

/ln(10) =

1.3939432158770340061363714546375448299225986541193218382213791003;

h(100)/h(10) =

5.7071102647488757285781952567890267651962209144634166036510754146/

0.3433987204485146245929164324542357210449938930480591971756718069 =

16.6194861101835008439811697349204019051656628798691160104699885436;

ln(h(100)/h(10))/ln(10) =

ln(16.6194861101835008439811697349204019051656628798691160104699885436)

/ln(10) =

1.220617590870352456159355824300518697043538738298683525754322589;

h(1000)/h(100) =

80.067008454403671146424066804522934680326976802209158761345631644/

5.7071102647488757285781952567890267651962209144634166036510754146 =

14.029343177221192121181174686484159797724373894559302647620214108;

ln(h(1000)/h(100))/ln(10) =
ln(14.029343177221192121181174686484159797724373894559302647620214108)/
ln(10) =
1.147037338798437417940549627592393803527869450201940780322235048 6;

h(10000)/h(1000) =
1030.898599342208255061536743403218842682036079808438951195300489 69/
80.067008454403671146424066804522934680326976802209158761345631644 =
12.875447943447036785794810567375889973350833232055693447488307638 9;

ln(h(10000)/h(1000))/ln(10) =
ln(12.875447943447036785794810567375889973350833232055693447488307638 9
)/ln(10) =
1.109762347304152992307764102490854953184972946973793301736332135 5;

h(100000)/h(10000) =
12611.541086966115901608628436352576966704862915123869525109718532 4001/

1030.898599342208255061536743403218842682036079808438951195300489 69 =

12.23354178094066545096790720573261618518385187420952464295400500 71;

ln(h(100000)/h(10000))/ln(10) =

ln(12.23354178094066545096790720573261618518385187420952464295400500 71

)/ln(10) =

1.08755220954940574658148739335464290176590504248537395804402989 72;

h(1000000)/h(100000) =

149141.2317996566157329331741873241547700284205939093239306977309 57/

12611.54108696611590160862843635257696670486291512386952510971853240 01

= 11.82577377112083315809189764248823663081154382125382519041030228 95;

ln(h(1000000)/h(100000))/ln(10) =

ln(11.82577377112083315809189764248823663081154382125382519041030228 95)

/ln(10) =

1.07282956662202209641493223669453679047301295760981559833286591 55;

$$h(10000000)/h(1000000) =$$

$$1721670.797295976225729897554316955663934491291215191520590933114429995/$$

$$149141.231799656615732933174187324154770028420593909323930697730957 =$$

$$11.543895517831844928019323614143874915839067096654958257622675 3953;$$

$$\ln(h(10000000)/h(1000000))/\ln(10) =$$

$$\ln(11.5438955178318449280193236141438749158390670966549582576226753953$$

$$)/\ln(10) =$$

$$1.0623523873651993593219028557170325454319433831505273397596430669.$$

Следовательно, при стремлении аргумента x к плюс бесконечности функция

$$h(x) = f(x) - g(x) = f(x) - 0.04(1/x)^{4/3}$$

тоже стремится к плюс бесконечности, причём не медленнее, чем линейно. Если бы при стремлении аргумента x к плюс бесконечности функция h(x)

асимптотически равнялась многочлену n-ой степени от x, то при избранной геометрической прогрессии

$x = 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000$

со знаменателем 10 значений аргумента x функция h(x) имела бы последовательность значений, асимптотически равную геометрической прогрессии со знаменателем 10^n. В нашем случае десятичный логарифм соответствующего отношения последовательных значений задуманной функции стремится к 1 справа, монотонно убывая, причём весьма медленно. Поэтому представляется целесообразным попытаться при стремлении аргумента x к плюс бесконечности асимптотически выделить из функции или многочлен первой степени от x (тогда знаменатель

соответствующей геометрической прогрессии равен $10^1 = 10$), или произведение такого многочлена на логарифм, например натуральный, от функции от x, при стремлении аргумента x к плюс бесконечности растущей медленнее, чем показательная функция от x. Исследователь пришёл к точке разветвления целесообразных стратегии и алгоритма приложения настоящей всеобщей методологии к решению рассматриваемой задачи. Поскольку их следующий шаг требует правильного выбора одной из указанных альтернатив искомого асимптотического выделения, то целесообразно исследовать поведение функции

$$H(x) = \exp(h(x)/x)$$

при стремлении аргумента x к плюс бесконечности. Для этого исследователь вычисляет последовательность значений функции H(x) при избранной геометрической прогрессии

x = 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000

со знаменателем 10 значений аргумента x функции H(x).

H(1) = exp(h(1)/1) =

exp(0.0138629436111989061883446424291635313615100026872051050824136/1) =

1.0139594797900291386901659996282304258363540227494761596921047907;

H(10) = exp(h(10)/10) =

exp(0.3433987204485146245929164324542357210449938930480591971756718069/10) =

1.0349362928747379641459479851213739991989362793836769813542785907;

$$H(100) = \exp(h(100)/100) =$$

$$\exp(5.7071102647488757285781952567890267651962209144634166036510754146/100) =$$

$$1.0587310863025249902752412114605564753249033518153246782293294673;$$

$$H(1000) = \exp(h(1000)/1000) =$$

$$\exp(80.067008454403671146424066804522934680326976802209158761345631644/1000) =$$

$$1.0833596594991447468004331241720930905393390127506524488883462326;$$

$$H(10000) = \exp(h(10000)/10000) =$$

$$\exp(1030.89859934220825506153674340321884268203607980843895119530048969/10000) =$$

$$1.1085910225166727334744542756016953959674159804560995105886738019;$$

$$H(100000) = \exp(h(100000)/100000) =$$

$$\exp(12611.5410869661159016086284363525769667048629151238695251097185324001/100000) =$$

$$1.1344130843289297071008495458120027608252069179715835969824383079;$$

H(1000000) = exp(h(1000000)/1000000) =

exp(149141.231799656615732933174187324154770028420593909323930697730957/1000000) =

1.160836924720345533687070578840214533944360136948406638010869806;

H(10000000) = exp(h(10000000)/10000000) =

exp(1721670.7972959762257298975543169556639344912912151915205909331144299995/10000000) =

1.1878762866834426943699450029703985947991067635513620097401398419.

Представляется целесообразным рассмотреть последовательность соответствующих отношений значений функции H(x) при избранной геометрической прогрессии

x = 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000

со знаменателем 10 значений аргумента x функции H(x), стремящегося к плюс бесконечности.

H(10)/H(1) =

1.0349362928747379641459479851213739991989362793836769813542785907/

1.0139594797900291386901659996282304258363540227494761596921047907 =
1.0206880191001840691356245630896530456769312256084856345599644183;

H(100)/H(10) =

1.0587310863025249902752412114605564753249033518153246782293294673/
1.0349362928747379641459479851213739991989362793836769813542785907 =
1.0229915537715778945653121292145615069230880433653679627438553337;

H(1000)/H(100) =

1.0833596594991447468004331241720930905393390127506524488883462326/
1.0587310863025249902752412114605564753249033518153246782293294673 =
1.0232623501050032588595368261915444743696014792541698149079003076;

H(10000)/H(1000) =

1.1085910225166727334744542756016953959674159804560995105886738019/
1.0833596594991447468004331241720930905393390127506524488883462326 =
1.0232899229690653858568915180040092293491469747720509953773219823;

H(100000)/H(10000) =

1.1344130843289297071008495458120027608252069179715835969824383079/

1.1085910225166727334744542756016953959674159804560995105886738019 =
1.0232926852985304784862701989993888836715409443220807419553035774;

H(1000000)/H(100000) =
1.160836924720345533687070578840214533944360136948406638010869806/
1.1344130843289297071008495458120027608252069179715835969824383079 =
1.023292961582021104012174360835834187667116090757529593487929833;

H(10000000)/H(1000000) =
1.1878762866834426943699450029703985947991067635513620097401398419/
1.160836924720345533687070578840214533944360136948406638010869806 =
1.0232929892108757215398491024573634465533139939015816119280816499.

Соответствующие отношения значений функции H(x) при указанной геометрической прогрессии

x = 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000

значений аргумента x растут ненамного быстрее, чем геометрическая прогрессия, причём это превышение

замедляется. Поэтому при стремлении аргумента x к плюс бесконечности представляется целесообразным для функции $h_\infty(x)$, которой асимптотически равна функция h(x), предположить следующее:

1. Натуральный логарифм берётся от функции, которая равна единице при нулевом значении аргумента x, обеспечивает именно арифметическую прогрессию своих значений при арифметической прогрессии значений аргумента x и поэтому имеет вид $1 + x_1x$, где x_1 является искомой положительной постоянной. Действительно, при избранной геометрической прогрессии

$$x = 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000$$

со знаменателем 10 значений аргумента x, стремящегося к плюс бесконечности, геометрическую прогрессию со знаменателем 10 образуют и разности последовательных значений аргумента x

10 - 1, 100 - 10, 1000 - 100, 10000 - 1000, 100000 - 10000, 1000000 - 100000, 10000000 - 1000000.

2. Поскольку деление на x без искомого неизвестного положительного числового множителя x_0, влияющего на отклонения последовательности значений функции h(x), обеспечило ярко выраженную закономерность в последовательности значений функции H(x), то при выделении функции $h_\infty(x)$ можно, во-первых, ограничиться частным случаем пропорциональной зависимости

линейной функции, умножаемой на натуральный логарифм в функции h(x), и, во-вторых, вообще опустить линейную функцию, не умножаемую на натуральный логарифм (обе эти возможности также обеспечивают установленное стремление

$$\ln(h(10^{n+1})/h(10^n))/\ln(10)$$

к единице справа).

Поэтому исследователь ищет искомую функцию в виде

$$h_\infty(x) = x_0 x\ln(1 + x_1 x).$$

Для нахождения двух неизвестных x_0, x_1 исследователь составляет совокупность двух уравнений, например для

$$x = 1000000, 10000000,$$

стремясь обеспечить при стремлении аргумента x к плюс бесконечности совершенно точное или достаточно точное приближённое равенство

$$h(x) = h_\infty(x) = x_0 x\ln(1 + x_1 x).$$

$$h(1000000) = h_\infty(1000000) = 1000000x_0\ln(1 + 1000000x_1) =$$

$$149141.231799656615732933174187324154770028420593909323930697730957;$$

$$h(10000000) = h_\infty(10000000) = 10000000x_0\ln(1 + 10000000x_1) =$$

$$1721670.7972959762257298975543169556639344912912151915205909331144299995.$$

После делений этих уравнений на соответствующее значение аргумента x эта совокупность уравнений принимает вид:

$$x_0\ln(1 + 1000000x_1) =$$

$$0.149141231799656615732933174187324154770028420593909323930697730957;$$

$$x_0\ln(1 + 10000000x_1) =$$
$$0.17216707972959762257298975543169556639344912912151915205909331144299995.$$

Поскольку неизвестное x_0 положительно и, следовательно, отлично от нуля, то второе уравнение можно разделить на первое уравнение и получить уравнение с одним неизвестным x_1:

$$\ln(1 + 10000000x_1)/\ln(1 + 1000000x_1) =$$
$$0.17216707972959762257298975543169556639344912912151915205909331144299995/$$
$$0.14914123179965661573293317418732415477002842059390932393069773095 7 =$$
$$1.1543895517831844928019323614143874915839067096654958257622675397.$$

Для простоты и удобства вводится обозначение

$$z = x_1.$$

Тогда получается уравнение с одним неизвестным z:

$$\ln(1 + 10000000z)/\ln(1 + 1000000z) =$$
$$1.1543895517831844928019323614143874915839067096654958257622675397.$$

Исследователь рассматривает функцию разности левой и правой частей этого уравнения:

$$Z(z) = \ln(1 + 10000000z)/\ln(1 + 1000000z) - 1.1543895517831844928019323614143874915839067096654958257622675397.$$

Функция $Z(z)$ непрерывна на положительной полуоси аргумента z. При стремлении аргумента z к нулю справа имеют место асимптотические равенства

$$\ln(1 + 10000000z) \sim 10000000z$$

и

$$\ln(1 + 1000000z) \sim 1000000z,$$

так что функция $Z(z)$ стремится к

$$10 - 1.1543895517831844928019323614143874915839067096654958257622675397 = 8.8456104482168155071980676385856125084160932903345041742377324603 > 0.$$

При стремлении аргумента z к плюс бесконечности имеют место асимптотические равенства

$$\ln(1 + 10000000z) \sim \ln(10000000z) =$$
$$\ln(10000000) + \ln(z) = 7\ln(10) + \ln(z)$$

и

$$\ln(1 + 1000000z) \sim \ln(1000000z) =$$
$$\ln(1000000) + \ln(z) = 6\ln(10) + \ln(z),$$

так что функция Z(z) стремится к

$$1 - 1.1543895517831844928019323614143874915839067096654958257622675397 =$$
$$-0.1543895517831844928019323614143874915839067096654958257622675397 < 0.$$

Поэтому существуют достаточно малое положительное значение аргумента z, при котором функция Z(z) положительна, и достаточно большое положительное значение аргумента z, при котором функция Z(z)

отрицательна. По теореме Больцано–Коши о принятии всех промежуточных значений непрерывной функцией существует такое положительное значение аргумента z в интервале между указанными двумя значениями аргумента z, что функция Z(z) принимает нулевое значение. Поэтому существует положительное решение рассматриваемого уравнения

$$\ln(1 + 10000000z)/\ln(1 + 1000000z) =$$
$$1.154389551783184492801932361414387491583906709665495825762267539 7,$$

или

$$Z(z) = 0.$$

Доказывается отрицательность производной dZ(z)/dz:

$$dZ(z)/dz = d(\ln(1 + 10000000z)/\ln(1 + 1000000z) -$$
$$1.1543895517831844928019323614143874915839067096654958257622675397)/dz$$

$$= d(\ln(1 + 10000000z)/\ln(1 + 1000000z))/dz = (10000000\ln(1 + 1000000z)/(1 + 10000000z) - 1000000\ln(1 + 10000000z)/(1 + 1000000z))/(\ln(1 + 1000000z))^2 < 0.$$

Ввиду положительности знаменателя и положительности z получается цепочка равносильных неравенств:

$$10000000\ln(1 + 1000000z)/(1 + 10000000z) < 1000000\ln(1 + 10000000z)/(1 + 1000000z);$$

$$10(1 + 1000000z)\ln(1 + 1000000z) < (1 + 10000000z)\ln(1 + 10000000z).$$

Вводится положительное

$$t = 1000000z:$$

$$10(1 + t)\ln(1 + t) < (1 + 10t)\ln(1 + 10t);$$

$$(1 + t)\ln(1 + t) < (1/10 + t)\ln(1 + 10t).$$

Исследователь вводит положительную переменную u вместо постоянной 10 и, считая t постоянным положительным параметром, рассматривает функцию U(u) одной переменной u:

$$U(u) = (1/u + t)\ln(1 + ut),$$

так что последнее неравенство применительно к этой функции принимает вид:

$$U(1) < U(10).$$

Для доказательства этого неравенства достаточно доказать строго монотонное возрастание функции U(u), а для этого достаточно доказать положительность производной dU(u)/du:

$$dU(u)/du = d((1/u + t)\ln(1 + ut))/du = - \ln(1 + ut)/u^2 + (1/u + t)t/(1 + ut) = - \ln(1 + ut)/u^2 + t/u > 0.$$

Ввиду положительности параметра t и положительности переменной исследователь получает цепочку равносильных неравенств:

$$dU(u)/du > 0;$$

$$- \ln(1 + ut)/u^2 + t/u > 0;$$

$$tu > \ln(1 + tu);$$

$$\exp(tu) > 1 + tu.$$

Последнее неравенство верно ввиду известного разложения функции exp(x) в ряд Тейлора–Маклорена по степеням переменной x, вместо которой можно подставить в данном случае положительное произведение tu.

Тем самым доказана цепочка неравенств:

$$dU(u)/du > 0;$$

$$U(1) < U(10);$$

$$(1 + t)\ln(1 + t) < (1/10 + t)\ln(1 + 10t);$$

$$10(1 + 1000000z)\ln(1 + 1000000z) < (1 + 10000000z)\ln(1 + 10000000z);$$

$$dZ(z)/dz < 0.$$

Отсюда следуют строго монотонное убывание функции Z(z) на положительной полуоси значений переменной z и поэтому именно единственность существующего решения рассматриваемого уравнения

$$\ln(1 + 10000000z)/\ln(1 + 1000000z) =$$

$$1.1543895517831844928019323614143874915839067096654958257622675397,$$

или

$$Z(z) = 0.$$

Остаётся найти это единственное решение. Наиболее целесообразными представляются итерационные методы, или методы последовательных приближений. Однако предварительно необходимо и достаточно на полубесконечной положительной полуоси значений переменной z найти конечный отрезок, в начале и в конце которого функция Z(z) принимает значения противоположных знаков, так что произведение этих значений отрицательно. Представляется целесообразным последовательно рассмотреть и для переменной z прежнюю последовательность значений

$z = 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, 10000000$, являющуюся геометрической прогрессией со знаменателем 10:

$$Z(z) = \ln(1 + 10000000z)/\ln(1 + 1000000z) - 1.1543895517831844928019323614143874915839067096654958257622675397;$$

$$Z(1) = \ln(1 + 10000000*1)/\ln(1 + 1000000*1) - 1.1543895517831844928019323614143874915839067096654958257622675397 = 0.0122770376756217295762324486774261614950184660396073267409878283;$$

$$Z(10) = \ln(1 + 10000000*10)/\ln(1 + 1000000*10) - 1.1543895517831844928019323614143874915839067096654958257622675397 = -0.011532415396142709182512905553321120749804033363975473289463496.$$

Тем самым найден как первый один из искомых конечных отрезков [1, 10], в начале 1 и в конце 10 которого функция

$Z(z)$ принимает значения противоположных знаков, так что произведение этих значений отрицательно:

$$Z(1)Z(10) < 0.$$

Используется, например, методология последовательности таких вложенных друг в друга отрезков, в начале и в конце каждого из которых функция $Z(z)$ принимает значения противоположных знаков, так что произведение этих значений отрицательно, причём последовательность длин этих отрезков стремится к нулю. При этом целесообразно в общем и целом ориентироваться на метод половинного деления как один из методов согласно этой методологии, однако допускать некоторые отклонения от деления ровно пополам во имя простоты и удобства. Например, в данном случае вместо середины отрезка

$z = 5.5$

принимается более простое и удобное значение

$z = 5.$

$Z(5) = \ln(1 + 10000000*5)/\ln(1 + 1000000*5) - 1.154389551783184492801932361414387491583906709665495825762267539 7 = -0.0051128856369366002642862729961749357208669426482024620614270479.$

Поэтому в строящейся последовательности вложенных друг в друга отрезков, в начале и в конце каждого из которых функция Z(z) принимает значения противоположных знаков, так что произведение этих значений отрицательно, причём последовательность длин этих отрезков стремится к нулю, вторым выбирается отрезок [1, 5]. Для его середины

$z = 3$

находится:

$$Z(3) = \ln(1 + 10000000*3)/\ln(1 + 1000000*3) - 1.1543895517831844928019323614143874915839067096654958257622675397 = -0.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000002.$$

Ничтожным отклонением этого числа от 0 пренебрегается и 3 считается искомым решением для x_1:

$$x_1 = z = 3.$$

Теперь из уравнения

$$x_0\ln(1 + 10000000x_1) = 0.17216707972959762257298975543169556639344912912151915205909331144299995$$

следует

$$x_0 = 0.17216707972959762257298975543169556639344912912151915205909331144299995/\ln(1 + 10000000*3) = 0.01.$$

Следовательно,

$$h_\infty(x) = x_0 x\ln(1 + x_1 x);$$

$$h_\infty(x) = 0.01x\ln(1 + 3x);$$

$$f(x) = 0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x).$$

III. Исследуется поведение разности

$$d(x) = h(x) - h_\infty(x) = f(x) - g(x) - h_\infty(x) = f(x) - 0.04(1/x)^{4/3} - 0.01x\ln(1 + 3x)$$

при стремлении аргумента x к нулю справа по значениям задуманной функции f(x) при значениях аргумента x, имеющих отклонения от соответствующей предельной точки, образующие целесообразную геометрическую прогрессию, например в данном случае

$$x = 1, 1/10, 1/100, 1/1000, 1/10000, 1/10000, 1/100000, 1/1000000, 1/10000000:$$

$$d(x) = f(x) - 0.04(1/x)^{4/3} - 0.01x\ln(1 + 3x).$$

d(1) = f(1) - 0.04*(1/1)^(4/3) - 0.01*1*ln(1 + 3*1) = 0.0538629436111989061883446424291635313615100026872051050824136 - 0.04*(1/1)^(4/3) - 0.01*1*ln(1 + 3*1) = -0.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001;

d(1/10) = f(1/10) - 0.04*(1/(1/10))^(4/3) - 0.01*(1/10)*ln(1 + 3*(1/10)) = 0.86203624027722097975575292259462115250094214333297486713607992 - 0.04*(1/(1/10))^(4/3) - 0.01*(1/10)*ln(1 + 3*(1/10)) = 0;

d(1/100) = f(1/100) - 0.04*(1/(1/100))^(4/3) - 0.01*(1/100)*ln(1 + 3*(1/100)) = 18.566358290331339724080578665618354777445939105858085876323825889 - 0.04*(1/(1/100))^(4/3) - 0.01*(1/100)*ln(1 + 3*(1/100)) = -0.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000003;

d(1/1000) = f(1/1000) - 0.04*(1/(1/1000))^(4/3) - 0.01*(1/1000)*ln(1 + 3*(1/1000)) =

400.000000029955089797984788116106275397315368482453360298803887001 - 0.04*(1/(1/1000))^(4/3) - 0.01*(1/1000)*ln(1 + 3*(1/1000)) =

0.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000003;

d(1/10000) = f(1/10000)) - 0.04*(1/(1/10000))^(4/3) - 0.01*(1/10000)*ln(1 + 3*(1/10000)) =

8617.738760127834842046172241563280512272037848035248185552582500497 - 0.04*(1/(1/10000))^(4/3) - 0.01*(1/10000)*ln(1 + 3*(1/10000)) =

0.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000004;

d(1/100000) = f(1/100000) - 0.04*(1/(1/100000))^(4/3) - 0.01*(1/100000)*ln(1 + 3*(1/100000)) =

185663.553344511158696358054936757613548041815312870115903293238108467 - 0.04*(1/(1/100000))^(4/3) - 0.01*(1/100000)*ln(1 +

3*(1/100000)) = -0.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001598;

d(1/1000000) = f(1/1000000) - 0.04*(1/(1/1000000))^(4/3) - 0.01*(1/1000000)*ln(1 + 3*(1/1000000)) = 4000000.0000000000000299999550000899997975004859987850031242775112155842 - 0.04*(1/(1/1000000))^(4/3) - 0.01*(1/1000000)*ln(1 + 3*(1/1000000)) = 0;

d(1/10000000) = f(1/10000000) - 0.04*(1/(1/10000000))^(4/3) - 0.01*(1/10000000)*ln(1 + 3*(1/10000000)) = 86177387.60127534887037204266072901981937379566268482994479202388028489 - 0.04*(1/(1/10000000))^(4/3) - 0.01*(1/10000000)*ln(1 + 3*(1/10000000)) = 0.

Следовательно, ввиду крайней незначительности чисто вычислительных отклонений от нуля можно считать, что при

$$x = 1, 1/10, 1/100, 1/1000, 1/10000, 1/10000, 1/100000, 1/1000000, 1/10000000$$

разность

$$d(x) = h(x) - h_\infty(x) = f(x) - g(x) - h_\infty(x) = f(x) - 0.04(1/x)^{4/3} - 0.01x\ln(1 + 3x) = 0$$

и задуманная функция

$$f(x) = 0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x).$$

IV. Исследуется поведение разности

$$d(x) = h(x) - h_\infty(x) = f(x) - g(x) - h_\infty(x) = f(x) - 0.04(1/x)^{4/3} - 0.01x\ln(1 + 3x)$$

при стремлении аргумента x к плюс бесконечности по значениям задуманной функции f(x) при значениях аргумента x, образующих целесообразную геометрическую прогрессию, например в данном случае

x = 1, 10, 100, 1000, 10000, 10000, 100000, 1000000, 10000000.

$$d(x) = f(x) - 0.04(1/x)^{4/3} - 0.01x\ln(1 + 3x).$$

d(1) = f(1) - 0.04*(1/1)^(4/3) - 0.01*1*ln(1 + 3*1) =

0.0538629436111989061883446424291635313615100026872051050824136 -

0.04*(1/1)^(4/3) - 0.01*1*ln(1 + 3*1) = -

0.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001;

d(10) = f(10) - 0.04*(1/10)^(4/3) - 0.01*10*ln(1 + 3*10) =

0.345255355981959736149880462994603499675614432698063694630732084 -

0.04*(1/10)^(4/3) - 0.01*10*ln(1 + 3*10) = -0.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000003;

d(100) = f(100) - 0.04*(1/100)^(4/3) - 0.01*100*ln(1 + 3*100) = 5.707196442136477003927065628531687539216031288261104287994374984 - 0.04*(1/100)^(4/3) - 0.01*100*ln(1 + 3*100) = -0.0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000002;

d(1000) = f(1000) - 0.04*(1/1000)^(4/3) - 0.01*1000*ln(1 + 3*1000) = 80.06701245440367114642406680452293468032697680220915876134563164 4 - 0.04*(1/1000)^(4/3) - 0.01*1000*ln(1 + 3*1000) = 0;

d(10000) = f(10000) - 0.04*(1/10000)^(4/3) - 0.01*10000*ln(1 + 3*10000) =

1030.898599527871808406047899099621896718813942870492916195750235196 - 0.04*(1/10000)^(4/3) - 0.01*10000*ln(1 + 3*10000) = 0;

d(100000) = f(100000) - 0.04*(1/100000)^(4/3) - 0.01*100000*ln(1 + 3*100000) =

12611.54108697473364036875597123961414097094031710490690487848696673 - 0.04*(1/100000)^(4/3) - 0.01*100000*ln(1 + 3*100000) =

0.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000001;

d(1000000) = f(1000000) - 0.04*(1/1000000)^(4/3) - 0.01*1000000*ln(1 + 3*1000000) =

149141.231799657015732933174187324154770028420593909323930697730957 - 0.04*(1/1000000)^(4/3) - 0.01*1000000*ln(1 + 3*1000000) = 0;

d(1000000) = f(10000000) - 0.04*(1/10000000)^(4/3) - 0.01*10000000*ln(1 + 3*10000000) =

1721670.797295976244296252888768071233574796694892977826796329614474974 - 0.04*(1/10000000)^(4/3) - 0.01*10000000*ln(1 + 3*10000000) = -0.000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000005.

Следовательно, ввиду крайней незначительности чисто вычислительных отклонений от нуля можно считать, что при

$$x = 1, 10, 100, 1000, 10000, 10000, 100000, 1000000, 10000000$$

разность

$$d(x) = h(x) - h_\infty(x) = f(x) - g(x) - h_\infty(x) = f(x) - 0.04(1/x)^{4/3} - 0.01x\ln(1 + 3x) = 0$$

и задуманная функция

$$f(x) = 0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x).$$

V. Исследователь выполняет промежуточный анализ процесса и текущего состояния решения рассматриваемой задачи и приходит к следующим промежуточным выводам:

1. Естественным и обоснованным представляется предположить, что на всей положительной полуоси значений аргумента x искомая задуманная функция f(x) выражается весьма простой формулой

$$f(x) = 0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x).$$

2. Существует бесконечное множество более сложных, чем f(x), функций, также определённых на всей положительной полуоси значений аргумента x и также стремящихся к плюс бесконечности и при стремлении значений аргумента x к нулю справа, и при стремлении значений аргумента x к

плюс бесконечности, да ещё и принимающих в точности те же значения, что и функция f(x), при каждом из значений аргумента x, составляющих рассмотренную геометрическую прогрессию

$x = 1/10000000, 1/1000000, 1/100000, 1/10000, 1/10000, 1/1000, 1/100, 1/10, 1, 10, 100, 1000, 10000, 10000, 100000, 1000000, 10000000.$

Примерами таких функций являются функции вида

$$F(x) = f(x) + \varphi(x)\sin(\pi\max\{x, 1/x\}) = 0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x) + \varphi(x)\sin(\pi\max\{x, 1/x\})$$

при любой функции φ(x), непрерывной на всей положительной полуоси значений аргумента x, да и функции вида

$$F(x) = f(x) + \varphi(x)|\sin(\pi\max\{x, 1/x\})|^{\psi(x)} = 0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x) + \varphi(x)|\sin(\pi\max\{x, 1/x\})|^{\psi(x)}$$

при любых функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, непрерывных на всей положительной полуоси значений аргумента x, причём функция $\psi(x)$ принимает только положительные значения на всей положительной полуоси значений аргумента x. Простейшим из таких примеров является функция

$$F(x) = f(x) + \sin(\pi\max\{x, 1/x\}) = 0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x) + \sin(\pi\max\{x, 1/x\}).$$

Кроме того, можно делать период синусоиды таким переменным, чтобы синусоида пересекала ось абсцисс во всех точках, соответствующих указанной геометрической

прогрессии значений аргумента x. А можно и заменить синусоиду пилообразный функцией

$$\min(\{x\}, 1 - \{x\}),$$

где {x} есть дробная часть действительного числ<u>а</u> x. Но можно брать и алгебраические суммы любых таких функций.

3. Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L(x) = \Sigma_{i=1}^{n} y_i \Pi_{j=1, j\neq i}^{n} (x - x_j)/(x_i - x_j)$$

степени не выше n - 1 принимает указанные значения y_i в заданных n различных точках

$$x = x_1, x_2, \dots , x_n.$$

По существу это типичная в науке и жизни точка разветвления с необходимостью обоснованного выбора наилучшей из нескольких наличных альтернатив, то есть с необходимостью обоснованного выбора и последующего

принятия наилучшего из нескольких возможных и допустимых в принципе приемлемых решений. Классическая логика дедуктивна (прежде всего силлогистична) и поэтому структурно линейна и принципиально неприемлема для принятия наилучшего решения в точке разветвления, как и индуктивная логика наведения от частного к общему. Поэтому необходимы логики обоснованного принятия априорно наилучшего из совокупности заведомо целесообразных, возможных, допустимых и приемлемых принципиальных решений о выборе, планировании, осуществлении и оценивании программы действий в проблемной ситуации наличного разветвления предстоящего этапа деятельности,

основанные на критериях взвешивания убедительности систем существенных доводов и соответствующих противодоводов. Для краткости речи можно назвать эти логики логиками принятия решений взвешиванием доводов. В целом можно и нужно хотя бы условно выделить четыре фазы этапа предстоящей деятельности и четыре соответствующие логики, осуществляемые наиболее целесообразно, например последовательно или параллельно, раздельно или совместно, безвозвратно или возвратно, с неограниченными возможностями априорных, текущих и апостериорных улучшающих изменений:

1. Априорная фаза <u>выбора направления</u> предстоящего этапа деятельности. Априорная логика выбора направления

предстоящего этапа деятельности посредством взвешивания доводов.

2. Априорная фаза <u>планирования</u> предстоящего этапа деятельности. Априорная логика планирования предстоящего этапа деятельности посредством составления априорно наилучшего плана предстоящего этапа деятельности на основании взвешивания доводов.

3. Синхронная (в режиме реального времени) фаза <u>осуществления</u> текущего этапа деятельности. Синхронная (в режиме реального времени) логика осуществляющего управления текущим этапом деятельности посредством синхронно (в режиме реального времени) наилучшего

проведения текущего этапа деятельности на основании взвешивания доводов.

4. Апостериорная фаза оценивания завершённого этапа деятельности. Апостериорная логика оценивания завершённого этапа деятельности посредством взвешивания доводов.

Всеобщие математические теории и методологии уточняющего взвешивания логических доводов и противодоводов дополняют, обобщают, уточняют и развивают известные подходы и методы, включая дедукцию (выведение решения или доказательства), индукцию (наведение на решение или на доказательство) и вообще рассуждения, включая правдоподобные.

Дедукция (выведение решения или доказательства), несомненно, наиболее предпочтительна, если посильна (достижима) и целесообразна по соотношению меры достигаемой полезности и меры требуемых затрат на преодоление встречаемых затруднений.

В качестве примера рассмотрим давно и хорошо известные теорему и её доказательство.

Теорема. Делимость нацело транзитивна, то есть из делимости целого числа как делимого нацело на целое число как на делитель следует делимость того же делимого нацело на произвольный целый делитель прежнего делителя.

Очевидное доказательство следует из определения делимости нацело как представимости делимого в виде произведения целого делителя и целого частного. Достаточно представить исходный целый делитель в виде его целого делителя, умноженного на соответствующее целое частное, и затем умножить это произведение на первоначальное целое частное. В итоге исходное делимое окажется равным этому целому делителю прежнего целого делителя, умноженному на очевидным образом целочисленное произведение обоих целых частных, что и требовалось доказать.

Замечание. Это вполне строгое чисто дедуктивное доказательство является чрезвычайно лёгким и очевидным, полностью и окончательно решает рассматриваемый вопрос и

по степени убедительности неизмеримо превосходит сколь угодно обширное множество целочисленных испытаний.

Замечание. Однако далеко не всё можно дедуктивно строго доказать или опровергнуть, что следует и из соответствующей теоремы Гёделя, и даже из самой сущности аксиоматического метода, основанного на первоначальной принципиально недоказуемой системе аксиом. Кроме того, классическая математика в целом чрезвычайно неравномерна по требуемой и действительно достигаемой строгости. Например, чрезвычайно строгими являются аксиоматические теории геометрии и теоретической арифметики. А в теории вероятностей и математической статистике требуется лишь достаточно малая вероятность нарушений делаемых утверждений. В

теории приближений, включая обработку данных, чрезвычайно велика роль произвола, например применительно к отбрасыванию нежелательных выбросов. Теория принятия решений рассматривает именно произвол. Кроме того, чисто дедуктивное выведение куда более способно к обоснованию ранее найденного индуктивно или вообще правдоподобно, чем к соответствующему поиску. Далее, история математики убедительно показывает, что в некоторых случаях чрезвычайно интересные и полезные предположения столетиями ждут своих именно строгих доказательств или опровержений. Любая попытка изгнания не вполне строго доказанных в разной степени

убедительных предположений из математики чрезвычайно обеднила бы математику, науку и жизнь, лишив их,

в частности, многих замечательных именно индуктивных результатов Эйлера, Лапласа и многих других замечательных учёных.

В качестве примера можно приложить всеобщие математические теории и методологии уточняющего взвешивания логических доводов и противодоводов к определению и обоснованию предпочтительности выбора, в данном случае из двух альтернатив, не противоречащих рассмотренным данным. Этими альтернативами являются следующие:

1. Методология поиска простейшей функции, основанной именно на общих закономерностях совокупности рассмотренных данных в целом.

2. Методология взятия многочлена наименьшей степени, в точности принимающего заданные значения в именно всех заданных точках.

Можно ограничиться лишь существенными доводами. Против каждого из них могут быть несколько противодоводов. Можно условиться в таблице располагать альтернативы справа налево по мере убывания априорной предпочтительности, в данном случае опорности на закономерности,

причём под каждой из альтернатив доводы за неё справа, а слева от них соответствующие противодоводы.

При этом каждый довод и каждый противодовод располагаются в отдельных стр<u>о</u>к<u>а</u>х, а переход к следующему доводу осуществляется после приведения всех противодоводов против предыдущего довода. Применяется общая методология последовательных приближений к сущностно точным и достаточно полным словесным выражениям альтернатив, систем доводов и соответствующих противодоводов.

В качестве примера в данном случае получается таблица из двух вертикальных частей с двумя столбцами каждая.

Таблица доводов и противодоводов для обоснованного выбора наилучшей из двух названных методологий

Методология взятия многочлена наименьшей степени, в точности принимающего заданные значения в именно всех заданных точках		Методология поиска простейшей функции, основанной именно на общих закономерностях совокупности рассмотренных данных в целом	
Противодоводы	**Доводы**	**Противодоводы**	**Доводы**
Отдельные данные могут быть	**Наличие единственного многочлена**	**Откладывание рассмотрения искусственных**	**Опора именно на общие закономерности**

неточными (приближёнными и даже ошибочными), а зависимость итога от них может быть непомерно большой. Слепое следование таким данным резко снижает качество	**наименьшей степени, в точности принимающего заданные значения в непременно попарно различных заданных точках**	**контрпримеров с намеренными ухищрениями игровой математической психологичности**	**и также специальные особенности асимптотического предельного поведения не в отдельных точках, а на подмножествах значений аргумента**

Вместо ясности простых естественных общих закономерностей получается их сокрытие случайными отклонениями отдельных данных		**Откладывание рассмотрения искусственных беспредельных усложнений**	**Опора именно на простейшее возможное, допустимое и приемлемое сущностно точное и достаточно полное**
Заведомая многочленность резко			**Опора именно на ближайшие к закономерным**

ограничивает классы решаемых задач ввиду пренебрежения другими простыми стандартными функциями (тригонометрическими, показательными, логарифмическими,			**и поэтому наилучшие данные при полезно взвешенном учёте непременно всех имеющихся данных без произвольного отбрасывания выбросов, извращающих**

гиперболическими и так далее), уравнения для которых неразрешимы в многочленах			**итоги исследования при одинаковом учёте всех данных**
Отсутствует устойчивая преемственность решения при добавлении и/или малом изменении данных			**Устойчивая преемственность решения при добавлении и/или малом изменении данных**

Принципиальная неприменимость методологии при наличии двух точек с одинаковыми абсциссами и различными ординатами, типичном для повторения эксперимента при прежних условиях			**Возможность уточняющего выявления искусственных отклонений от простейших естественных закономерностей**

Следовательно, всеобщие математические теории и методологии уточняющего взвешивания логических доводов и противодоводов к определению и обоснованию предпочтительности выбора, в данном случае из двух альтернатив, не противоречащих рассмотренным данным, достаточно убедительно показывают, что предпочтительность методологии поиска простейшей функции, основанной именно на общих закономерностях совокупности рассмотренных данных в целом, является не только априорной, но и апостериорной.

Замечание. Исключение возможности (тем менее вероятной, что преподаватель изначально сообщил исследователю о непрерывности задуманной функции на положительной

полуоси значений аргумента x, а не на всей действительной оси значений аргумента x) того, что задуманной функцией является любой многочлен, принимающий рассмотренные значения в рассмотренных точках, достигается единственным запросом исследователя преподавателю о значении задуманной функции при нулевом значении аргумента x. Если задуманная функция является одним из таких многочленов, то она определена, непрерывна и даже бесконечно дифференцируема на всей действительной оси аргумента x и поэтому при нулевом значении аргумента x принимает некоторое непременно конечное действительное значение. Его и сообщает преподаватель исследователю. В случае функций, основанных именно на закономерностях,

которым подчиняются рассмотренные данные, преподаватель сообщает исследователю, что задуманная функция не определена при нулевом значении аргумента x, и может дополнить свой ответ тем, что при стремлении аргумента x к нулю справа задуманная функция стремится к плюс бесконечности.

Однако исследователь справедливо считает наиболее вероятным именно простейшее закономерное выражение искомой задуманной функции

$$f(x) = 0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x)$$

и поэтому первоначально воздерживается от вопроса о значении искомой задуманной функции при нулевом значении аргумента x. А именно, исследователь просит

преподавателя указать любое существенно отличающиеся от нулевого значение разности

$$f(x) - (0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x))$$

и соответствующее значение аргумента x. В ответ преподаватель вынужден заявить об отсутствии такого значения указанной разности. Поэтому исследователь справедливо указывает, что преподаватель задумал функцию

$$f(x) = 0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x).$$

Тем самым поставленная задача полностью решена.

Замечание. Если бы преподаватель указал существенно отличающееся от нулевого значение разности

$$f(x) - (0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x))$$

и соответствующее значение аргумента x, то исследователь запросил бы, как указано выше, значение задуманной функции при нулевом значении аргумента x и тем самым решил бы вопрос о представимости искомой функции многочленом. При такой представимости исследователь искал бы подходящий многочлен, начиная с интерполяционного многочлена Лагранжа и далее последовательно повышая степени многочленов. При отсутствии такой представимости исследователь далее рассматривал бы именно эту разность на предмет её периодичности, волнообразности, пилообразности и так далее. В общем случае непериодичности разности

$$f(x) - (0.04(1/x)^{4/3} + 0.01x\ln(1 + 3x))$$

исследователь просил бы преподавателя указать существенно отличающееся от нулевого значение разности и соответствующее значение аргумента x последовательно на полуинтервалах (0, 1], (1, 2], (2, 3], ...

Далее неограниченно использовался бы метод половинного деления указанных полуинтервалов. В целом мера трудоёмкости поиска задуманной функции исследователем соответствует мере изощрённости преподавателя при задумываться функции.

Среди всеобщих математических теорий и методологий последовательного выделения есть всеобщая математическая теория и методология деления приближения к отклонению на ненулевое отклонение.

Сущность её такова.

В общей задаче приближения имеются точный предмет, его приближение и отклонение приближения от точного предмета, при достаточно качественном приближении достаточно малое по сравнению с точным предметом и его приближением.

Поэтому достигнутое приближение принимается за основу, за основное приближение, например за приближение нулевого порядка, и задача приближения первоначального предмета сводится к задаче приближения отклонения основного приближения от первоначального предмета, в которой точным считается и приближается уже это отклонение.

Далее приближение к этому отклонению естественно делится на это отклонение, коль скоро оно является ненулевым, и рассматривается отклонение этого отношения от единицы.

Тем самым исходная задача приближения по существу берётся под математический микроскоп, который можно считать двойным. Во-первых, заменяется задача приближения на несравненно более чувствительную. Во-вторых, в заменённой задаче приближения разность заменяется отношением путём деления на относительно малую величину. В итоге может достигаться исключительно высокая точность решения задачи приближения, особенно последовательного.

1.4. ВСЕОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДОЛОГИИ ОКОНЕЧИВАНИЯ И ОБЕСКОНЕЧИВАНИЯ

Всеобщие математические теории и методологии оконечивания (финитации, финитизации, финитирования, финитизирования) и обесконечивания (инфинитации, инфинитизации, инфинитирования, инфинитизирования) дополняют, обобщают, уточняют и развивают соответствующие известные подходы и методы, включая дедукцию, индукцию, континуализацию и предельные переходы, в том числе ряды как бесконечные суммы, бесконечные произведения, и метод наименьших квадратов, например применительно к бесконечно переопределённым

совокупностям уравнений с использованием суммирования расходящихся рядов, а также изобретают принципиально новые методы и методологии.

Бесконечность мироздания и многих научных моделей, включая даже бесконечную периодическую или непериодическую десятичную дробь и тем более потенциальные и актуальные бесконечности, например бесконечные множества с якобы непреодолимыми антиномиями классической теории множеств Кантора, основополагающей для классической математики, может быть понята ввиду ограниченности человеческих ресурсов только через конечное, причём не слишком большое. При этом конечный и к тому же весьма ограниченный опыт

обесконечивается, а наличное или созданное воображением бесконечное оконечивается. Обесконечивание способно парадоксальным образом упрощать многие очень сложные задачи благодаря отказу от рассмотрения граничных и/или краевых условий. Обесконечивание чрезвычайно полезно и часто необходимо для познания именно объективных закономерностей ввиду принципиального отказа от неустойчивых подгонок для итогов субъективного оконечивания. Это тем более важно потому, что во многих случаях рассмотрение именно бесконечного есть рассмотрение почти всего, то есть подавляющей части, а отнюдь не бесконечно малой части именно бесконечного целого.

Замечание. В классической математике принципиально различаются и по-разному обозначаются:

отношение принадлежности элемента множеству и отношение включения подмножества в множество;

произвольный элемент и состоящее лишь из этого элемента одноэлементное множество.

Два этих различения могут быть полезными и в соответствующих случаях целесообразными. Однако именно совокупность этих двух различений ведёт ко многим известным антиномиям теории множеств Кантора, основополагающей в классической математике. Поэтому в таких случаях целесообразна и принята в настоящей монографии дополнительная возможность принципиального отказа от этих двух различений.

Определение. Произвольный элемент и состоящее лишь из этого элемента одноэлементное множество сохраняют свои общепринятые обозначения, соответствующие выбору точки зрения на них, в том числе соответствующей рассмотрению и других отношений, однако на деле выражают один и тот же предмет и поэтому при необходимости, целесообразности и/или полезности могут считаться принципиально не различимыми, или тождественными.

Определение. Отношение вхождения объединяет считающиеся при этом не различимыми отношение принадлежности элемента множеству и отношение включения подмножества в множество и при необходимости, целесообразности и/или полезности обозначается знаком включения подмножества в множество.

Если таких необходимости, целесообразности и/или полезности нет, то рассматриваются и применяются общепринятые понятия и обозначения элемента, одноэлементного множества и отношений принадлежности и включения. В частности, элемент принадлежит множеству, а состоящее из этого единственного элемента одноэлементное множество включается в множество.

Дедукция есть выведение и является переходом, как правило, от более общего к менее общему, например от общего к частному (отдельному) и/или единичному, в том числе от множества к его подмножествам и элементам.

Однако дедукция как выведение может быть и переходом от менее общего к более общему, в частности от единичного

к общему, например от отдельных элементов множества к целому множеству в именно дедуктивном методе математической индукции при выполнении совокупности следующих условий:

1. Это множество элементов является не только счётным, но и вполне упорядоченным. Таково, например, множество всех положительных целых чисел. А вот множество всех рациональных чисел является счётным и упорядоченным, но не вполне упорядоченным.

2. Доказываемое утверждение верно для некоторого элемента множества.

3. Для этого элемента и всех элементов, следующих за ним, доказано, что из справедливости доказываемого

утверждения для любого из этих элементов и, возможно, для всех предыдущих из этих элементов следует справедливость доказываемого утверждения для элемента, непосредственно следующего за тем любым из этих элементов.

Замечание. Классическая математика называет эту индукцию полной математической индукцией. Однако классическая формальная логика называет полной индукцией переход к общему утверждению на основании справедливости доказываемого утверждения или для всех (без исключения) частных случаев, или для всех (без исключения) видов частных случаев. Поэтому применительно к названию математической индукции слово «полная» целесообразно исключить, что и предлагается настоящей монографией.

Индукция есть наведение и является переходом от менее общего к более общему, например от частного (отдельного) и/или единичного к общему, в том числе от подмножеств и элементов множества к этому множеству. Если индукция не является полной, то она называется неполной.

Континуализация противоположна дискретизации (переходу от непрерывного множества значений к разрывному множеству значений, например от функции к последовательности), есть переход от разрывного множества значений к непрерывному множеству значений, например от последовательности к функции, и является именно интенсивным обесконечиванием.

В качестве примера обобщим рассмотренный выше рекурсивный метод Паскаля именно посредством континуализации применительно к последовательному нахождению искомых сумм

$$S_k(q, n) = \Sigma_{j=0}^{n}(q + j)^k =$$
$$q^k + (q + 1)^k + (q + 2)^k + (q + 3)^k + ... + (q + n)^k$$

одинаковых неотрицательных целых степеней первых неотрицательных целых чисел, увеличенных на неотрицательное действительное число q. Применительно к конечным или бесконечным степенн<u>ы</u>м рядам реже явно оговаривается и чаще неявно подразумевается, что нуль в нулевой степени считается равным единице, поскольку нулевой показатель фиксирован, а нулевое основание здесь

рассматривается как предел ненулевой бесконечно малой независимой переменной. Рассмотренный выше частный случай относится к нулевому значению q при $k \neq 0$:

$$S_k(0, n) = \Sigma_{j=0}^n(0 + j)^k = \Sigma_{j=0}^n j^k = 0^k + 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k = S_k(n).$$

Если $k \neq 0$, то

$$S_k(0, n) = \Sigma_{j=0}^n(0 + j)^k = \Sigma_{j=0}^n j^k = 0^k + 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k = S_k(n) = \Sigma_{j=1}^n j^k = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k.$$

Рассмотрим частный случай $k = 0$:

$$S_0(q, n) = \Sigma_{j=0}^n(q + j)^0 = q^0 + (q + 1)^0 + (q + 2)^0 + (q + 3)^0 + ... + (q + n)^0 = n + 1.$$

Вновь используем ведущее к сохранению лишь крайних сложение всех соответствующим образом обобщённых

последовательных разностей, выраженных с помощью биномиальных коэффициентов:

$$(q + n + 1)^k - q^k = \Sigma_{j=0}^n((q + j + 1)^k - (q + j)^k) = \Sigma_{j=0}^n(C_k^1(q + j)^{k-1} + C_k^2(q + j)^{k-2} + ... + C_k^k(q + j)^{k-k}) = C_k^1\Sigma_{j=0}^n(q + j)^{k-1} + C_k^2\Sigma_{j=0}^n (q + j)^{k-2} + ... + C_k^k\Sigma_{j=0}^n(q + j)^{k-k} = C_k^1S_{k-1}(q, n) + C_k^2S_{k-2}(q, n) + C_k^3S_{k-3}(q, n) + ... + C_k^{k-3}S_3(q, n) + C_k^{k-2}S_2(q, n) + C_k^{k-1}S_1(q, n) + C_k^kS_0(q, n).$$

Это обобщение рекурсивного метода Паскаля именно однозначно выражает $S_{k-1}(q, n)$ через

$$S_{k-2}(q, n), S_{k-3}(q, n), ... , S_3(q, n), S_2(q, n), S_1(q, n), S_0(q, n),$$

полностью дедуктивно и обеспечивает синергию наведения на формулы и их выведения. Поэтому такие формулы не нуждаются в дополнительном доказательстве, например методом математической индукции.

В качестве примера применения этого обобщения рекурсивного метода Паскаля с его помощью выведем формулы для $S_1(q, n)$ и $S_2(q, n)$ путём выражения через $S_0(q, n)$.

Начнём с формулы для $S_1(q, n)$. Для этого в рекурсивном соотношении Паскаля полагаем

$$k - 1 = 1$$

и получаем

$$k = 2;$$

$$(q + n + 1)^2 - q^2 = C_2^1 S_{2-1}(q, n) + C_2^2 S_{2-2}(q, n);$$

$$n^2 + 2n + 1 + 2qn + 2q = 2S_1(q, n) + S_0(q, n);$$

$$2S_1(q, n) = n^2 + 2n + 1 + 2qn + 2q - S_0(q, n);$$

$$S_1(q, n) = n^2/2 + n + 1/2 + qn + q - (n + 1)/2;$$

$$S_1(q, n) = n^2/2 + n + 1/2 + qn + q - n/2 - 1/2;$$

$$S_1(q, n) = n^2/2 + n/2 + qn + q;$$

$$S_1(q, n) = (n + 1)(n/2 + q);$$

$$S_1(q, n) = \Sigma_{j=0}{}^n(q + j)^1 = q^1 + (q + 1)^1 + (q + 2)^1 + (q + 3)^1 + ... + (q + n)^1 = (n + 1)(n/2 + q).$$

Проверим эту формулу непосредственно суммированием арифметической прогрессии:

$$S_1(q, n) = \Sigma_{j=0}{}^n(q + j)^1 =$$

$$q^1 + (q + 1)^1 + (q + 2)^1 + (q + 3)^1 + ... + (q + n)^1 =$$

$$\Sigma_{j=0}{}^n(q + j) = q + (q + 1) + (q + 2) + (q + 3) + ... + (q + n) =$$

$$(n + 1)q + 1 + 2 + 3 + ... + n =$$

$$(n + 1)q + n(n + 1)/2 = (n + 1)(n/2 + q).$$

Проверим, даёт ли эта формула при $q = 0$ известную формулу для $S_1(n)$ как свой частный случай, тем самым обеспечивая её обобщение:

$S_1(0, n) = \Sigma_{j=0}^{n}(0 + j)^1 = 0^1 + (0 + 1)^1 + (0 + 2)^1 + (0 + 3)^1 + ... + (0 + n)^1 = \Sigma_{j=0}^{n}(0 + j) = 0^1 + 1^1 + 2^1 + 3^1 + ... + n^1 = \Sigma_{j=1}^{n}(0 + j) = 1^1 + 2^1 + 3^1 + ... + n^1 = S_1(n) = n(n + 1)/2 = (n + 1)(n/2 + 0) = n(n + 1)/2.$

Теперь в качестве примера применения этого обобщения рекурсивного метода Паскаля выведем с его помощью формулу для $S_2(q, n)$ путём выражения через $S_1(q, n)$ и $S_0(q, n)$. Для этого в рекурсивном соотношении Паскаля полагаем

$$k - 1 = 2$$

и получаем

$$k = 3;$$

$$(q + n + 1)^3 - q^3 = C_3{}^1 S_{3-1}(q, n) + C_3{}^2 S_{3-2}(q, n) + C_3{}^3 S_{3-3}(q, n);$$

$$(n + 1)^3 + 3q(n + 1)^2 + 3q^2(n + 1) = 3S_2(q, n) + 3S_1(q, n) + S_0(q, n);$$

$$(n + 1)^3 + 3q(n + 1)^2 + 3q^2(n + 1) =$$

$$3S_2(q, n) + 3(n + 1)(n/2 + q) + (n + 1);$$

$$3S_2(q, n) =$$

$$(n + 1)^3 + 3q(n + 1)^2 + 3q^2(n + 1) - 3(n + 1)(n/2 + q) - (n + 1);$$

$$3S_2(q, n)/(n + 1) = (n + 1)^2 + 3q(n + 1) + 3q^2 - 3(n/2 + q) - 1;$$

$$3S_2(q, n)/(n + 1) = n^2 + 2n + 1 + 3qn + 3q + 3q^2 - 3n/2 - 3q - 1;$$

$$3S_2(q, n)/(n + 1) = n^2 + n(1/2 + 3q) + 3q^2;$$

$$S_2(q, n) = \Sigma_{j=0}{}^n(q + j)^2 =$$

$$q^2 + (q + 1)^2 + (q + 2)^2 + (q + 3)^2 + ... + (q + n)^2 =$$

$$n^2(n + 1)/3 + n(n + 1)(1/6 + q) + (n + 1)q^2.$$

Проверим, даёт ли эта формула при $q = 0$ известную формулу для $S_2(n)$ как свой частный случай, тем самым обеспечивая её обобщение:

$$S_2(0, n) = \Sigma_{j=0}^{n}(0 + j)^2 = 0^2 + (0 + 1)^2 + (0 + 2)^2 + (0 + 3)^2 + ... + (0 + n)^2 = \Sigma_{j=0}^{n}j^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \Sigma_{j=1}^{n}(0 + j)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = S_2(n) = n(n + 1)(2n + 1)/6 = n^2(n + 1)/3 + n(n + 1)(1/6 + 0) + (n + 1)0^2 = n^2(n + 1)/3 + n(n + 1)/6 = n(n + 1)(2n + 1)/6.$$

Теперь рассмотрим важный частный случай, обеспечивающий именно континуализацию формул для

$$S_k(n) = S_k(0, n) = \Sigma_{j=0}^{n}(0 + j)^k = \Sigma_{j=0}^{n}j^k = 0^k + 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k.$$

Если $k \neq 0$, то

$$S_k(n) = S_k(0, n) = \Sigma_{j=0}^{n}(0 + j)^k = \Sigma_{j=0}^{n}j^k = 0^k + 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k = \Sigma_{j=1}^{n}j^k = 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k.$$

Для любого неотрицательного действительного числа x в общей формуле

$$S_k(q, n) = \Sigma_{j=0}^{n}(q + j)^k =$$

$$q^k + (q + 1)^k + (q + 2)^k + (q + 3)^k + ... + (q + n)^k$$

будем считать неотрицательное целое число n целой частью числа x, а неотрицательное действительное число q дробной частью числа x:

$$n = [x];$$

$$q = \{x\}.$$

Тогда получается функция одного теперь уже непрерывного неотрицательного действительного аргумента x:

$$T_k(x) = S_k(\{x\}, [x]) = \Sigma_{j=0}^{[x]}(\{x\} + j)^k = \{x\}^k + (\{x\} + 1)^k + (\{x\} + 2)^k + (\{x\} + 3)^k + ... + (\{x\} + [x])^k = (\{x\} + [x])^k + (\{x\} + [x] - 1)^k + (\{x\}$$

$$+ [x] - 2)^k + (\{x\} + [x] - 3)^k + \ldots + \{x\}^k = x^k + (x - 1)^k + (x - 2)^k + (x - 3)^k + \ldots + (x - [x])^k = \Sigma_{j=0}{}^{[x]}(x - j)^k.$$

Проверим, обеспечивает ли эта формула континуализацию формулы

$$S_k(n) = S_k(0, n) = \Sigma_{j=0}{}^{n}(0 + j)^k = \Sigma_{j=0}{}^{n}j^k = 0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = \Sigma_{j=1}{}^{n}j^k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

Пусть, в частности, любое неотрицательное действительное число x в общей формуле

$$T_k(x) = S_k(\{x\}, [x]) = \Sigma_{j=0}{}^{[x]}(\{x\} + j)^k = \{x\}^k + (\{x\} + 1)^k + (\{x\} + 2)^k + (\{x\} + 3)^k + \ldots + (\{x\} + [x])^k = (\{x\} + [x])^k + (\{x\} + [x] - 1)^k + (\{x\} + [x] - 2)^k + (\{x\} + [x] - 3)^k + \ldots + \{x\}^k = x^k + (x - 1)^k + (x - 2)^k + (x - 3)^k + \ldots + (x - [x])^k = \Sigma_{j=0}{}^{[x]}(x - j)^k$$

является именно целым, разумеется, неотрицательным, следовательно, равным своей целой части:

$$x = [x].$$

Тогда

$$n = [x] = x;$$

$$q = \{x\} = 0;$$

$$T_k(x) = T_k([x]) = T_k(n) = S_k(0, [x]) = S_k(0, n) = \Sigma_{j=0}^{[x]}(\{x\} + j)^k = \Sigma_{j=0}^{n}(0 + j)^k = \Sigma_{j=0}^{n}j^k = 0^k + (0 + 1)^k + (0 + 2)^k + (0 + 3)^k + ... + (0 + [x])^k = 0^k + 1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k = n^k + (n - 1)^k + (n - 2)^k + (n - 3)^k + ... + 0^k = x^k + (x - 1)^k + (x - 2)^k + (x - 3)^k + ... + 0^k = \Sigma_{j=0}^{n}(n - j)^k = \Sigma_{j=0}^{n}([x] - j)^k = \Sigma_{j=0}^{n}(x - j)^k = S_k(n).$$

Следовательно, во-первых, действительно посредством $T_k(x)$ достигается континуализация $S_k(n)$, а во-вторых, нет

необходимости вводить новую зависимую переменную T_k и можно вместо неё использовать прежнюю зависимую переменную S_k.

Для любого неотрицательного числа x при тех же

$$n = [x];$$
$$q = \{x\}$$

вновь используем ведущее к сохранению лишь крайних элементов сложение всех соответствующим образом обобщённых последовательных разностей, выраженных с помощью биномиальных коэффициентов:

$$(x + 1)^k - \{x\}^k = \Sigma_{j=0}^{[x]}((\{x\} + j + 1)^k - (\{x\} + j)^k) = \Sigma_{j=0}^{[x]}(C_k^1(\{x\} + j)^{k-1} + C_k^2(\{x\} + j)^{k-2} + ... + C_k^k(\{x\} + j)^{k-k}) = C_k^1\Sigma_{j=0}^{[x]}(\{x\} + j)^{k-1} +$$

$$C_k^2\Sigma_{j=0}^{[x]}(\{x\} + j)^{k-2} + \ldots + C_k^k\Sigma_{j=0}^{[x]}(\{x\} + j)^{k-k} = C_k^1S_{k-1}(\{x\}, [x]) + C_k^2S_{k-2}(\{x\}, [x]) + C_k^3S_{k-3}(\{x\}, [x]) + \ldots + C_k^{k-3}S_3(\{x\}, [x]) + C_k^{k-2}S_2(\{x\}, [x]) + C_k^{k-1}S_1(\{x\}, [x]) + C_k^kS_0(\{x\}, [x]) = C_k^1S_{k-1}(x) + C_k^2S_{k-2}(x) + C_k^3S_{k-3}(x) + \ldots + C_k^{k-3}S_3(x) + C_k^{k-2}S_2(x) + C_k^{k-1}S_1(x) + C_k^kS_0(x).$$

Это обобщение рекурсивного метода Паскаля именно однозначно выражает $S_{k-1}(x)$ через

$$S_{k-2}(x), S_{k-3}(x), \ldots , S_3(x), S_2(x), S_1(x), S_0(x),$$

полностью дедуктивно и обеспечивает синергию наведения на формулы и их выведения.

Рассмотрим частный случай k = 0:

$$S_0(x) = \Sigma_{j=0}^{[x]}(\{x\} + j)^0 = \{x\}^0 + (\{x\} + 1)^0 + (\{x\} + 2)^0 + (\{x\} + 3)^0 + \ldots + (x)^0 = [x] + 1.$$

В качестве примера применения этого обобщения рекурсивного метода Паскаля с его помощью выведем формулы для $S_1(x)$ и $S_2(x)$ путём выражения через $S_0(x)$.

Начнём с формулы для $S_1(x)$. Для этого в рекурсивном соотношении Паскаля полагаем

$$k - 1 = 1$$

и получаем

$$k = 2;$$

$$(x + 1)^2 - \{x\}^2 = C_2^{\,1}S_{2-1}(x) + C_2^{\,2}S_{2-2}(x);$$

$$[x]^2 + 2[x] + 1 + 2\{x\}[x] + 2\{x\} = 2S_1(x) + S_0(x);$$

$$2S_1(x) = [x]^2 + 2[x] + 1 + 2\{x\}[x] + 2\{x\} - S_0(x);$$

$$S_1(x) = [x]^2/2 + [x] + 1/2 + \{x\}[x] + \{x\} - ([x] + 1)/2;$$

$$S_1(x) = [x]^2/2 + [x] + 1/2 + \{x\}[x] + \{x\} - [x]/2 - 1/2;$$

$$S_1(x) = [x]^2/2 + [x]/2 + \{x\}[x] + x\};$$

$$S_1(x) = ([x] + 1)([x]/2 + \{x\});$$

$$S_1(x) = \Sigma_{j=0}{}^{[x]}(\{x\} + j)^1 = \{x\}^1 + (\{x\} + 1)^1 + (\{x\} + 2)^1 + (\{x\} + 3)^1 + ... + x^1 = ([x] + 1)([x]/2 + \{x\}).$$

Проверим эту формулу непосредственно суммированием арифметической прогрессии:

$$S_1(x) = \Sigma_{j=0}{}^{[x]}(\{x\} + j)^1 = \{x\}^1 + (\{x\} + 1)^1 + (\{x\} + 2)^1 + (\{x\} + 3)^1 + ... + x^1 = \Sigma_{j=0}{}^{[x]}(\{x\} + j) = \{x\} + (\{x\} + 1) + (\{x\} + 2) + (\{x\} + 3) + ... + (\{x\} + [x]) = ([x] + 1)\{x\} + 1 + 2 + 3 + ... + [x] = ([x] + 1)\{x\} + [x]([x] + 1)/2 = ([x] + 1)([x]/2 + \{x\}).$$

Проверим, даёт ли эта формула при $\{x\} = 0$ известную формулу для $S_1(n)$ для как свой частный случай, тем самым обеспечивая её обобщение:

$$S_1([x]) = \Sigma_{j=0}{}^{[x]}(0 + j)^1 = 0^1 + (0 + 1)^1 + (0 + 2)^1 + (0 + 3)^1 + ... + (0 + n)^1$$
$$= \Sigma_{j=0}{}^{n}(0 + j) = 0^1 + 1^1 + 2^1 + 3^1 + ... + n^1 = \Sigma_{j=1}{}^{n}(0 + j) =$$
$$1^1 + 2^1 + 3^1 + ... + n^1 = S_1(n) = n(n + 1)/2 =$$
$$(n + 1)(n/2 + 0) = n(n + 1)/2.$$

Теперь в качестве примера применения этого обобщения рекурсивного метода Паскаля выведем с его помощью формулу для $S_2(x)$ путём выражения через $S_1(x)$ и $S_0(x)$. Для этого в рекурсивном соотношении Паскаля полагаем

$$k - 1 = 2$$

и получаем

$$k = 3;$$
$$(x + 1)^3 - \{x\}^3 = C_3{}^1S_{3-1}(x) + C_3{}^2S_{3-2}(x) + C_3{}^3S_{3-3}(x);$$
$$([x] + 1)^3 + 3\{x\}([x] + 1)^2 + 3\{x\}^2([x] + 1) = 3S_2(x) + 3S_1(x) + S_0(x);$$

$$([x] + 1)^3 + 3\{x\}([x] + 1)^2 + 3\{x\}^2([x] + 1) = 3S_2(x) + 3([x] + 1)([x]/2 + \{x\}) + ([x] + 1);$$

$$3S_2(x) = ([x] + 1)^3 + 3\{x\}([x] + 1)^2 + 3\{x\}^2([x] + 1) - 3([x] + 1)([x]/2 + \{x\}) - ([x] + 1);$$

$$3S_2(x)/([x] + 1) = ([x] + 1)^2 + 3\{x\}([x] + 1) + 3\{x\}^2 - 3([x]/2 + \{x\}) - 1;$$

$$3S_2(x)/([x] + 1) = [x]^2 + 2[x] + 1 + 3\{x\}[x] + 3\{x\} + 3\{x\}^2 - 3[x]/2 - 3\{x\} - 1;$$

$$3S_2(x)/([x] + 1) = [x]^2 + [x](1/2 + 3\{x\}) + 3\{x\}^2;$$

$$S_2(x) = \Sigma_{j=0}{}^{n}(\{x\} + j)^2 = \{x\}^2 + (\{x\} + 1)^2 + (\{x\} + 2)^2 + (\{x\} + 3)^2 + \ldots + x^2 = [x]^2([x] + 1)/3 + [x]([x] + 1)(1/6 + \{x\}) + ([x] + 1)\{x\}^2.$$

Проверим, даёт ли эта формула при $\{x\} = 0$ известную формулу для $S_2(n)$ как свой частный случай, тем самым обеспечивая её обобщение:

$$S_2([x]) = \Sigma_{j=0}{}^{[x]}(0 + j)^2 =$$

$$0^2 + (0 + 1)^2 + (0 + 2)^2 + (0 + 3)^2 + ... + (0 + [x])^2 = \Sigma_{j=0}{}^{n}j^2 =$$

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \Sigma_{j=1}{}^{n}(0 + j)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 =$$

$$S_2(n) =$$

$$n(n + 1)(2n + 1)/6 = n^2(n + 1)/3 + n(n + 1)(1/6 + 0) + (n + 1)0^2 =$$

$$n^2(n + 1)/3 + n(n + 1)/6 =$$

$$n(n + 1)(2n + 1)/6.$$

Этим завершается рассмотрение настоящего примера континуализации как именно интенсивного обесконечивания.

Переход от конечного множества значений к счётному вполне упорядоченному множеству значений, например переход от конечной последовательности к бесконечной последовательности, переход от конечной алгебраической суммы к бесконечному знакопеременному ряду или переход от конечного произведения к бесконечному произведению, является именно экстенсивным обесконечиванием.

В качестве примера обесконечим рассмотренную выше типичную задачу обработки данных, а именно итогов кратных измерений искомого отдельного действительного числового значения x произвольной величины X. Обозначим число выполненных измерений через n, а итог j-го измерения, где

$$j = 1, 2, 3, 4, \dots , n,$$

через a_j. Однако ввиду лишь в дальнейшем воображаемой бесконечности количества измерений откажемся от предварительного не убывающего упорядочения

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \dots \le a_j \le \dots \le a_n$$

и расположим итоги этих измерений в порядке выполнения измерений:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots , a_j, \dots , a_n.$$

Математической моделью задачи обработки итогов кратных измерений искомого отдельного действительного числового значения x произвольной величины X является разрешённая относительно единственного неизвестного x конечная совокупность линейных уравнений

$$x = a_1;$$

$$x = a_2;$$

$$x = a_3;$$

$$x = a_4;$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x = a_j;$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x = a_n,$$

переопределённая, если

$$n > 1,$$

и несовместная (самопротиворечивая) и поэтому не имеющая точных решений,

если не все a_j равны между собой, или, другими словами, если не существует такого действительного числа a, которому равны непременно все

$$a_j,\ j = 1, 2, 3, 4, \dots, n.$$

Для рассматриваемого общего случая разрешённой относительно единственного неизвестного x совокупности n линейных уравнений метод наименьших квадратов, минимизирующий сумму $S_2(x)$ квадратов отклонений приближения x от соответствующих данных

$$S_2(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^2 + (x - a_4)^2 + \dots + (x - a_j)^2 + \dots + (x - a_n)^2 = \Sigma_{j=1}{}^n(x - a_j)^2,$$

даёт вполне естественное среднее арифметическое решение

$$x = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_j + \dots + a_n)/n = \Sigma_{j=1}{}^n a_j/n.$$

Обозначим эту именно конечную задачу через P_n.

А теперь естественно обесконечим эту типичную задачу обработки данных.

Откажемся от ограничения общего количества измерений целым положительным числом n и рассмотрим теперь уже бесконечную последовательность итогов измерений. Обозначим итог j-го измерения, где

$$j = 1, 2, 3, 4, \dots , n, \dots ,$$

через a_j. Расположим итоги этих измерений в порядке выполнения измерений:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots , a_j, \dots , a_n, \dots .$$

Математической моделью задачи обработки итогов кратных измерений искомого отдельного действительного

числового значения x произвольной величины X является разрешённая относительно единственного неизвестного x теперь уже бесконечная, а именно счётно бесконечная, совокупность линейных уравнений

$$x = a_1;$$
$$x = a_2;$$
$$x = a_3;$$
$$x = a_4;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x = a_j;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x = a_n;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

переопределённая всегда и несовместная (самопротиворечивая) и поэтому не имеющая точных решений, если не все a_j равны между собой, или, другими словами, если не существует такого действительного числа a, которому равны непременно все

$$a_j,\ j = 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots .$$

Таким образом, мы получаем счётно бесконечную последовательность задач:

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots, P_j, \ldots, P_n, \ldots .$$

Каждая из этих задач P_n решается, как и выше, методом наименьших квадратов.

Для рассматриваемого общего случая разрешённой относительно единственного неизвестного x конечной

совокупности n линейных уравнений метод наименьших квадратов, минимизирующий сумму $S_2(x)$ квадратов отклонений приближения x от соответствующих данных

$$S_2(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^2 + (x - a_4)^2 + ... + (x - a_j)^2 + ... + (x - a_n)^2 = \Sigma_{j=1}{}^n(x - a_j)^2,$$

даёт вполне естественное среднее арифметическое решение

$$x = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_j + ... + a_n)/n = \Sigma_{j=1}{}^n a_j/n.$$

Таким образом, решение бесконечной последовательности задач

$$P_1, P_2, P_3, P_4, ... , P_j, ... , P_n, ...$$

приводит к бесконечной последовательности естественных средних арифметических решений:

$$a_1, (a_1 + a_2)/2, (a_1 + a_2 + a_3)/3, (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4, ... , \Sigma_{j=1}{}^n a_j/n, ...$$

В теории суммирования расходящихся рядов известен линейный регулярный метод средних арифметических, идею которого предложил Фробениус и развитие которого обеспечил Чезаро. В данном случае этот метод приложен к ряду, последовательность частичных сумм которого является нашей последовательностью

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots , a_n, \ldots .$$

Этим рядом является ряд

$$a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots , a_n - a_{n-1}, \ldots .$$

Ввиду определения регулярности метода суммирования расходящихся рядов вообще и вследствие известного доказательства регулярности метода средних арифметических справедлив следующий вывод.

Если последовательность действительных чисел

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots , a_n, \dots$$

сходится к действительному числу a, то к этому же числу a сходится и бесконечная последовательность естественных средних арифметических решений:

$$a_1, (a_1 + a_2)/2, (a_1 + a_2 + a_3)/3, (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4, \dots , \Sigma_{j=1}{}^n a_j/n, \dots .$$

Однако обратное утверждение неверно.

То есть последовательность средних арифметических

$$a_1, (a_1 + a_2)/2, (a_1 + a_2 + a_3)/3, (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4, \dots , \Sigma_{j=1}{}^n a_j/n, \dots$$

может сходиться и в некоторых случаях расхождения самой последовательности

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots , a_n, \dots .$$

В частности, это доказывается общим примером заведомо расходящейся последовательности, периодической после a_n, причём длина m периода

$$b_1, b_2, b_3, b_4, \dots , b_m$$

является произвольным положительным целым числом и не все числа этого периода равны между собой, поэтому длина m периода необходимо превышает единицу:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots , a_n, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots , b_m, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots , b_m, \dots , b_1, b_2, b_3, b_4, \dots , b_m, \dots .$$

Действительно, в таком случае последовательность средних арифметических

$$a_1, (a_1 + a_2)/2, (a_1 + a_2 + a_3)/3, (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4, \dots , \Sigma_{j=1}^{n} a_j/n, \dots$$

всегда стремится к среднему арифметическому периода

$$(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ... + b_m)/m = \Sigma_{j=1}{}^m b_j/m.$$

Пример. Рассмотрим колеблющийся ряд Гранди

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... + 1 - 1 + ...$$

Его последовательность частичных сумм

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, ... , 1, 0, ...$$

колеблется с начинающимся сразу ($n = 0$) периодом

$$1, 0$$

длиной $m = 2$. Последовательность средних арифметических

$$a_1, (a_1 + a_2)/2, (a_1 + a_2 + a_3)/3, (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)/4, ... ,$$

$$\Sigma_{j=1}{}^n a_j/n, ...$$

частичных сумм

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ... , a_n, ... ,$$

как всегда, в данном случае стремится к среднему арифметическому периода

$$(b_1 + b_2)/2 = (1 + 0)/2 = 1/2.$$

Именно так это и рассматривалось ещё со времен Лейбница и Гвидо Гранди и позже подтверждалось Эйлером задолго до появления достаточно строгой теории суммирования расходящихся рядов.

В целом всеобщие математические теории и (мета)методологии синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий посредством функционального синтеза методов и методологий развивают и эффективно используют

функциональные природу и сущность методов и методологий, а также изобретают принципиально новые методы и методологии.

В данном случае это относится к обесконечиванию метода наименьших квадратов, например применительно к математической модели задачи обработки итогов кратных измерений искомого отдельного действительного числового значения x произвольной величины X с бесконечно переопределёнными совокупностями уравнений с использованием суммирования расходящихся рядов.

1.5. ВСЕОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДОЛОГИИ КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ МНОГОПОРЯДКОВЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДЕЛОВ

Всеобщие математические теории и методологии конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов создают синергию анализа и синтеза конечных и бесконечных пределов и асимптотических формул, включающих асимптотические равенства (эквивалентности), асимптотические разложения и асимптотические ряды, для бесконечно больших и бесконечно малых величин различных порядков.

В классической математике применительно к пределам символы бесконечностей ∞, +∞ и -∞ по существу обозначают кучи, в которые свалены пределы любых бесконечно больших (соответствующего знака в случае указания знака бесконечности) независимо от скорости бесконечного возрастания абсолютной величины.

Примеры для положительной целочисленной переменной n и положительной действительной переменной x:

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty;$$

$$\lim_{n\to+\infty} n!^{n!} = +\infty.$$

В классической математике применительно к пределам символы нулей 0, +0 и -0 по существу обозначают кучи, в которые свалены пределы любых бесконечно малых

(соответствующего знака в случае указания знака нуля) независимо от скорости бесконечного убывания абсолютной величины.

Примеры для положительной целочисленной переменной n и положительной действительной переменной x:

$$\lim_{n\to+\infty} 1/\ln(n) = \lim_{x\to+\infty} 1/\ln(x) = +0;$$

$$\lim_{n\to+\infty} 1/n!^{n!} = +0.$$

Следствие. В классической математике, а именно применительно к конечным пределам переменных, разности этих переменных и их конечных пределов являются бесконечно малыми, так что скорости приближения к этим пределам тоже никак не выражаются и не учитываются.

Всеобщие математические теории и методологии конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов, или общих пределов glim, вводят измерение, выражение и учёт скоростей бесконечно большого возрастания, бесконечно малого убывания и бесконечного приближения к конечному пределу. Введение общих пределов осуществляется только в случае их целесообразности и полезности, причём именно как дополнительное к известному использованию классических пределов и собирательных символов ∞, +∞, -∞, 0, +0 и -0 при их целесообразности и полезности.

Для измерения этих скоростей необходимо выбрать единицу их измерения.

Замечание. Последующая стандартизация скоростей независимых переменных вообще не распространяется напрямую на скорости зависимых переменных. Однако и применительно к независимым переменным стандартизация их скоростей является лишь кажущимся ограничением общности. Действительно, если по условиям решаемой задачи скорость независимой переменной величины отличается от стандартной скорости, то достаточно рассмотреть эту независимую переменную величину как зависимую переменную величину, а именно как переменную величину, зависящую от подходящей независимой переменной величины со стандартной скоростью приближения к соответствующему пределу.

При этом исходная зависимая переменная величина окажется сложной функцией применительно к этой введённой независимой переменной величине со стандартной скоростью стремления к пределу этой величины.

Пример. Вместо стандартной строго монотонно возрастающей последовательности всех без исключения положительных целых чисел рассматривается некоторая подпоследовательность этой последовательности. Тогда эта подпоследовательность рассматривается как соответствующая дискретная функция этой последовательности, а именно функция начинающегося непременно с единицы порядкового номера элемента этой подпоследовательности.

Определение. Стандартной скоростью ω_d стремления дискретной положительной бесконечно большой переменной величины к плюс бесконечности считается скорость стремления строго монотонно возрастающей последовательности всех положительных целых чисел к плюс бесконечности:

$$n \in \{1, 2, 3, 4, 5, ...\},\ n \to +\infty;$$

$$\mathrm{glim}_{n\in\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}\to+\infty}\ n = \mathrm{glim}_{n\in\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}\to+\infty}(n) = \omega_d = \omega(d).$$

Определение. Стандартной скоростью ω_c стремления непрерывной положительной бесконечно большой переменной величины к плюс бесконечности считается скорость строго монотонно возрастающего стремления всех не меньших единицы положительных действительных

чисел как континуализации строго монотонно возрастающей последовательности всех положительных целых чисел к плюс бесконечности:

$$x \in [1, +\infty), x \to +\infty;$$

$$\mathrm{glim}_{x\in[1, +\infty)\to+\infty}\ x = \mathrm{glim}_{x\in[1, +\infty)\to+\infty}(x) = \omega_c = \omega(c).$$

Определение. При определении общего предела зависимой переменной величины как функции независимых переменных скорость стремления каждой независимой положительной бесконечно большой переменной величины к плюс бесконечности считается стандартной:

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty}\ f(n) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)}\ f(n);$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty}\ f(x) = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)}\ f(x).$$

Определение. Общим пределом зависимой переменной величины, зависящей только от положительных бесконечно больших переменных величин, считается соответствующая этой величине как функции функция стандартной скорости ω_d стремления дискретной положительной бесконечно большой переменной величины и/или стандартной скорости ω_c стремления непрерывной положительной бесконечно большой переменной величины соответственно, подставляемых вместо соответствующих независимых переменных как аргументов функции, выражающей зависимую переменную:

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} f(n) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} f(n) = f(\omega_d);$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} f(x) = f(\omega_c).$$

Примеры для положительной целочисленной переменной n, положительной действительной переменной x и положительных действительных постоянных a и b:

$$\operatorname{glim}_{n\to+\infty} n = \operatorname{glim}_{n\to+\omega(d)} n = \omega_d;$$

$$\operatorname{glim}_{x\to+\infty} x = \operatorname{glim}_{x\to+\omega(c)} x = \omega_c;$$

$$\operatorname{glim}_{n\to+\infty} an + b = \operatorname{glim}_{n\to+\omega(d)} an + b = a\omega_d + b;$$

$$\operatorname{glim}_{x\to+\infty} ax + b = \operatorname{glim}_{x\to+\omega(c)} ax + b = a\omega_c + b;$$

$$\operatorname{glim}_{n\to+\infty} \ln(n) = \operatorname{glim}_{n\to+\omega(d)} \ln(n) = \ln(\omega_d);$$

$$\operatorname{glim}_{x\to+\infty} \ln(x) = \operatorname{glim}_{x\to+\omega(c)} \ln(x) = \ln(\omega_c);$$

$$\operatorname{glim}_{n\to+\infty} \exp(n) = \operatorname{glim}_{n\to+\omega(d)} \exp(n) = \exp(\omega_d);$$

$$\operatorname{glim}_{x\to+\infty} \exp(x) = \operatorname{glim}_{x\to+\omega(c)} \exp(x) = \exp(\omega_c);$$

$$\operatorname{glim}_{n\to+\infty} \exp(an + b) = \operatorname{glim}_{n\to+\omega(d)} \exp(an + b) = \exp(a\omega_d + b);$$

$$\operatorname{glim}_{x\to+\infty} \exp(ax + b) = \operatorname{glim}_{x\to+\omega(c)} \exp(ax + b) = \exp(a\omega_c + b);$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} n!^{n!} = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} n!^{n!} = \omega_d!^{\omega(d)!}.$$

Определение. Стандартной скоростью $-\omega_d$ стремления дискретной отрицательной бесконечно большой по модулю переменной величины к минус бесконечности считается скорость стремления строго монотонно убывающей последовательности всех отрицательных целых чисел к минус бесконечности:

$$z \in \{-1, -2, -3, -4, -5, ...\}, z \to -\infty;$$

$$\mathrm{glim}_{z\in\{-1, -2, -3, -4, -5, ...\}\to-\infty} z = \mathrm{glim}_{z\in\{-1, -2, -3, -4, -5, ...\}\to-\infty}(z) = -\omega_d = -\omega(d);$$

$$\mathrm{glim}_{n\in\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}\to+\infty} -n = \mathrm{glim}_{n\in\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}\to+\infty}(-n) = -\omega_d = -\omega(d).$$

Определение. Стандартной скоростью $-\omega_c$ стремления непрерывной отрицательной бесконечно большой по модулю переменной величины к минус бесконечности

считается скорость строго монотонно убывающего стремления всех не б<u>о</u>льших минус единицы отрицательных <u>действительных</u> чисел как <u>континуализации</u> строго монотонно убывающей последовательности всех не б<u>о</u>льших минус единицы отрицательных <u>целых</u> чисел к минус бесконечности:

$$y \in (-\infty, -1], y \to -\infty;$$

$$\mathrm{glim}_{y\in(-\infty, -1]\to-\infty}\ y = \mathrm{glim}_{y\in(-\infty, -1]\to-\infty}(y) = -\omega_c = -\omega(c);$$

$$\mathrm{glim}_{x\in[1, +\infty)\to+\infty}\ -x = \mathrm{glim}_{x\in[1, +\infty)\to+\infty}(-x) = -\omega_c = -\omega(c).$$

<u>Определение</u>. При определении общего предела <u>зависимой</u> переменной величин<u>ы</u> скорость стремления каждой <u>независимой</u> отрицательной бесконечно большой по модулю

переменной величины к минус бесконечности считается стандартной:

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} f(z) = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} f(z);$$

$$\mathrm{glim}_{y\to-\infty} f(y) = \mathrm{glim}_{y\to-\omega(c)} f(y).$$

Определение. Общим пределом зависимой переменной величины, зависящей только от положительных бесконечно больших переменных величин и/или отрицательных бесконечно больших по модулю переменных величин, считается соответствующая этой величине как функции функция стандартной скорости ω_d стремления дискретной положительной бесконечно большой переменной величины, и/или стандартной скорости $-\omega_d$ стремления дискретной отрицательной бесконечно большой по модулю переменной

величины, и/или стандартной скорости ω_c стремления непрерывной положительной бесконечно большой переменной величины, и/или стандартной скорости $-\omega_c$ стремления непрерывной отрицательной бесконечно большой по модулю переменной величины соответственно, подставляемых вместо соответствующих независимых переменных:

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} f(z) = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} f(z) = f(-\omega_d);$$

$$\mathrm{glim}_{y\to-\infty} f(y) = \mathrm{glim}_{y\to-\omega(c)} f(y) = f(-\omega_c).$$

Примеры для положительной целочисленной переменной n, отрицательной целочисленной переменной z, положительной действительной переменной x, отрицательной действительной переменной y и любых

действительных (положительных, отрицательных или нулевых) постоянных a и b:

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} -n = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} -n = -\omega_d;$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty} -x = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} -x = -\omega_c;$$

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} z = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} z = -\omega_d;$$

$$\mathrm{glim}_{y\to-\infty} y = \mathrm{glim}_{y\to-\omega(c)} y = -\omega_c;$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} an + b = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} an + b = a\omega_d + b;$$

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} az + b = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} az + b = -a\omega_d + b;$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty} ax + b = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} ax + b = a\omega_c + b;$$

$$\mathrm{glim}_{y\to-\infty} ay + b = \mathrm{glim}_{y\to-\omega(c)} ay + b = -a\omega_c + b;$$

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} \ln(-z) = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} \ln(-z) = \ln(\omega_d);$$

$$\mathrm{glim}_{y\to-\infty} \ln(-y) = \mathrm{glim}_{y\to-\omega(c)} \ln(-y) = \ln(\omega_c);$$

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} \exp(z) = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} \exp(z) = \exp(-\omega_d) = 1/\exp(\omega_d);$$

$$\mathrm{glim}_{y\to-\infty} \exp(y) = \mathrm{glim}_{y\to-\omega(c)} \exp(y) = \exp(-\omega_c) = 1/\exp(\omega_c);$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} \exp(an + b) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} \exp(an + b) = \exp(a\omega_d + b);$$

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} \exp(az + b) = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} \exp(az + b) = \exp(-a\omega_c + b);$$

$$\mathrm{glim}_{x\to+\infty} \exp(ax + b) = \mathrm{glim}_{x\to+\omega(c)} \exp(ax + b) = \exp(a\omega_c + b);$$

$$\mathrm{glim}_{y\to-\infty} \exp(ay + b) = \mathrm{glim}_{y\to-\omega(c)} \exp(ay + b) = \exp(-a\omega_c + b);$$

$$\mathrm{glim}_{z\to-\infty} (-z)!^{(-z)!} = \mathrm{glim}_{z\to-\omega(d)} (-z)!^{(-z)!} = \omega_d!^{\omega(d)!}.$$

Определение. Стандартной скоростью $+1/\omega_d$ стремления дискретной положительной бесконечно малой переменной величины к плюс нулю считается скорость стремления строго монотонно убывающей последовательности обращений всех положительных целых чисел к плюс нулю:

$$t = 1/n \in \{1/1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...\},\ t \to +0;$$

$$\mathrm{glim}_{n\in\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}\to+\infty} 1/n = \mathrm{glim}_{n\in\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}\to+\infty}(1/n) = 1/\omega_d = 1/\omega(d).$$

Определение. Стандартной скоростью $-1/\omega_d$ стремления дискретной отрицательной бесконечно малой переменной величины к минус нулю считается скорость стремления строго монотонно возрастающей последовательности обращений всех отрицательных целых чисел к минус нулю:

$$u = 1/z = -1/n \in \{-1/1, -1/2, -1/3, -1/4, -1/5, ...\}, u \to -0;$$

$$\text{glim}_{z\in\{-1, -2, -3, -4, -5, ...\}\to-\infty} 1/z = \text{glim}_{z\in\{-1, -2, -3, -4, -5, ...\}\to-\infty}(1/z) = -1/\omega_d = -1/\omega(d);$$

$$\text{glim}_{n\in\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}\to+\infty} -1/n = \text{glim}_{n\in\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}\to+\infty}(-1/n) = -1/\omega_d = -1/\omega(d).$$

Определение. Стандартной скоростью $+1/\omega_c$ стремления непрерывной положительной бесконечно малой переменной величины к плюс нулю считается скорость строго

монотонно убывающего стремления обращений всех не меньших единицы положительных действительных чисел как континуализации строго монотонно убывающей последовательности обращений всех положительных целых чисел к плюс нулю:

$$v = 1/x,\ x \in [1, +\infty),\ x \to +\infty,\ v \to +0;$$

$$\mathrm{glim}_{x\in[1,\ +\infty)\to+\infty}\ 1/x = \mathrm{glim}_{x\in[1,\ +\infty)\to+\infty}(1/x) = 1/\omega_c = 1/\omega(c).$$

Определение. Стандартной скоростью $-1/\omega_c$ стремления непрерывной отрицательной бесконечно малой переменной величины к минус нулю считается скорость строго монотонно возрастающего стремления обращений всех не больших минус единицы отрицательных действительных чисел как континуализации строго монотонно

возрастающей последовательности обращений всех отрицательных целых чисел к минус нулю:

$$w = 1/y,\ y \in (-\infty, -1],\ y \to -\infty,\ w \to -0;$$

$$\mathrm{glim}_{y\in(-\infty,\ -1]\to-\infty}\ 1/y = \mathrm{glim}_{y\in(-\infty,\ -1]\to-\infty}(1/y) = -1/\omega_c = -1/\omega(c);$$

$$\mathrm{glim}_{x\in[1,\ +\infty)\to+\infty}\ -1/x = \mathrm{glim}_{x\in[1,\ +\infty)\to+\infty}(-1/x) = -1/\omega_c = -1/\omega(c).$$

Определение. При определении общего предела зависимой переменной величины скорость стремления каждой независимой положительной бесконечно малой переменной величины к плюс нулю и каждой независимой отрицательной бесконечно малой переменной величины к минус нулю считается стандартной:

$$\mathrm{glim}_{t\to+0}\ f(t) = \mathrm{glim}_{t\to+1/\omega(d)}\ f(t);$$

$$\mathrm{glim}_{u\to-0}\ f(u) = \mathrm{glim}_{t\to-1/\omega(d)}\ f(u);$$

$$\mathrm{glim}_{v\to+0}\, f(v) = \mathrm{glim}_{v\to+1/\omega(c)}\, f(v);$$

$$\mathrm{glim}_{w\to-0}\, f(w) = \mathrm{glim}_{w\to-1/\omega(c)}\, f(w).$$

Определение. При определении общего предела независимой переменной величины скорость её стремления к её пределу считается стандартной.

Определение. При определении общего предела зависимой переменной величины скорость стремления каждой независимой переменной величины к её пределу считается стандартной.

Определение. Общим пределом зависимой переменной величины как функции независимых переменных величин при считающемся стандартным их стремлении к их общим пределам считается соответствующая этой зависимой

переменной величине функция, в качестве аргументов которой все эти независимые переменные величины заменяются соответствующими стандартными скоростями стремления к общим пределам соответствующих независимых переменных величин.

Пример для положительной целочисленной переменной n, отрицательной целочисленной переменной z, положительной действительной переменной x, отрицательной действительной переменной y, дискретной положительной бесконечно малой переменной величины t, дискретной отрицательной бесконечно малой переменной величины u, непрерывной положительной бесконечно

малой переменной величины v и непрерывной отрицательной бесконечно малой переменной величины w:

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty,\ z\to-\infty,\ x\to+\infty,\ y\to-\infty,\ t\to+0,\ u\to-0,\ v\to+0,\ w\to-0} f(n, z, x, y, t, u, v, w) =$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\omega(d),\ z\to-\omega(d),\ x\to+\omega(c),\ y\to-\omega(c),\ t\to+1/\omega(d),\ u\to-1/\omega(d),\ v\to+1/\omega(c),\ w\to-1/\omega(c)} f(n, z, x, y, t, u, v, w) =$$

$$f(+\omega(d), -\omega(d), +\omega(c), -\omega(c), +1/\omega(d), -1/\omega(d), +1/\omega(c), -1/\omega(c)) =$$

$$f(\omega_d, -\omega_d, \omega_c, -\omega_c, 1/\omega_d, -1/\omega_d, 1/\omega_c, -1/\omega_c).$$

Замечание. При стремлении переменной величины к конечному пределу разность этой величины и этого предела является бесконечно малой согласно классическому определению предела.

Определение. При определении общих пределов независимых или зависимых переменных величин

одностороннее стремление каждой независимой переменной величины к её конечному общему пределу считается стандартным в смысле стандартности стремления бесконечно малой разности этой дискретной или непрерывной независимой переменной величины и её конечного предела к положительному или отрицательному нулю.

Примеры для дискретной независимой переменной величины r и непрерывной независимой переменной величины s:

$$\mathrm{glim}_{r\to-\pi+0,\ s\to e-0}\, f(r, s) = \mathrm{glim}_{r\to-\pi+1/\omega(d),\ s\to e-1/\omega(c)}\, f(r, s) =$$

$$f(-\pi + 1/\omega(d), e - 1/\omega(c)) =$$

$$f(-\pi + 1/\omega_d, e - 1/\omega_c).$$

Замечание. Общие верхние и нижние пределы последовательностей (как дискретных зависимых переменных величин) и функций (как непрерывных зависимых переменных величин) определяются аналогично классическим верхним и нижним пределам последовательностей и функций при условиях именно стандартных стремлений независимых переменных величин к их конечным, бесконечно большим или бесконечно малым пределам. При этом ввиду уточнения классических пределов общими пределами при едином классическом пределе общие верхний и нижний пределы могут различаться между собой.

Пример. Последовательность

$$a_n = (\ln(1), \exp(2), \ln(3), \exp(4), \ln(5), \exp(6), \ln(7), \exp(8), \dots , \ln(2n - 1), \exp(2n), \dots),$$

$$n \in \{1, 2, 3, 4, \dots\};$$

существует единый классический бесконечный предел

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty,$$

которому, естественно, равны классические верхний

$$\lim_{n\to+\infty} \sup a_n = +\infty$$

и нижний

$$\lim_{n\to+\infty} \inf a_n = +\infty$$

пределы;

существуют (уточняющие классические верхний и нижний пределы) именно различные между собой общие верхний

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} \sup a_n = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} \sup a_n = \exp(+\omega(d)) = \exp(\omega_d);$$

и нижний

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} \inf a_n = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} \inf a_n = \ln(+\omega(d)) = \ln(\omega_d)$$

пределы,

поэтому единый общий предел

$$\mathrm{glim}_{n\to+\infty} a_n = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} a_n$$

не существует.

Таким образом, всеобщие математические теории и методологии конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов, или общих пределов glim, вводят измерение, выражение и учёт скоростей бесконечно большого возрастания, бесконечно малого убывания и бесконечного приближения к конечному пределу и тем самым существенно дополняют, обобщают, уточняют и развивают классическую теорию пределов.

ЧАСТЬ 2. ВСЕОБЩИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ И МЕТОДОЛОГИИ КОНЕЧНЫХ И БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ И СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ И ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ И СОЗДАНИЕ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, ЕЁ ОБЩИХ МЕТОДОЛОГИЙ И ВЫСОКОТОЧНЫХ И ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ОБЩИХ МЕТОДОВ

2.1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ И ЗАДАЧ

Ввиду объёмности второй части настоящей научной монографии есть смысл выделить цель и задачи этой части.

Целью второй части настоящей научной монографии является создание общей теории рациональных разложения

и приближения действительных чисел, её общих методологий и высокоточных и высокоскоростных общих методов.

Задачами второй части настоящей научной монографии являются:

1. Аналитический обзор и критический анализ ряда основных известных методов рационального разложения и приближения действительных чисел, включая следующие:

метод обыкновенных дробей;

метод дробей в позиционных системах счисления, в частности двоичных и особенно десятичных дробей;

метод непрерывных (цепных) дробей;

методы теории представлений рациональных чисел египетскими дробями как конечными суммами только положительных единичных (имеющих единичные числители, аликвотных) дробей, прежде всего по методу Фибоначчи;

методы теории действительных рядов, положительных и знакопеременных, в том числе знакочередующихся, расходящихся, в особенности гармонического ряда и вообще рядов, состоящих из единичных (аликвотных) дробей.

2. Аналитический обзор, критический анализ, обобщение, развитие и эффективное использование следующих функций действительных чисел:

целая часть действительного числа;

дробная часть действительного числа;

потолок действительного числа;

функции, определяющие ближайшее к данному действительному числу целое число.

3. Создание теории целочисленных начальных приближений.

4. Создание теории остаточно-модульной целой части и теории остаточно-модульного потолка.

5. Создание высокоточных и высокоскоростных общих методологий и методов рациональных разложения, включая знакопеременное, и приближения действительных чисел.

6. Исследование сущности и приложений общих методологий и методов рациональных разложения, включая знакопеременное, и приближения действительных чисел.

7. Создание общей метаметодологии методического, аналитического и численного различения общих методологий и методов рациональных разложения, включая знакопеременное, и приближения действительных чисел различающими системами задач.

8. Создание методов оценки точности рациональных приближений действительных чисел.

9. Создание методов оценки скорости роста последовательности знаменателей единичных (аликвотных) дробей рациональных приближений действительных чисел.

10. Создание, обобщение, развитие и эффективное использование методов численных испытаний и сравнения известных и созданных методов рационального разложения и приближения действительных чисел на примерах первых приближений:

к основанию натуральных логарифмов;

к отношению длины окружности к её диаметру;

к золотому сечению;

к целесообразно именно методологически выбираемым испытательным числам.

2.2. НЕКОТОРЫЕ ОСНОВНЫЕ ИЗВЕСТНЫЕ МЕТОДЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ЯВНЫМ ВЫДЕЛЕНИЕМ ИХ ЦЕЛЫХ И ДРОБНЫХ ЧАСТЕЙ

В качестве некоторых основных известных методов представления действительных чисел с явным выделением их целых и дробных частей представляется целесообразным рассмотреть следующие методы:

1. Метод представления действительных чисел обыкновенными дробями.

2. Метод представления действительных чисел m-ичными дробями в m-ичной позиционной системе счисления,
где m – натуральное число, большее единицы,

например двоичными и особенно десятичными дробями.

3. Метод представления действительных чисел непрерывными (цепными) дробями.

4. Метод Фибоначчи гармонического представления рациональных чисел египетскими дробями, то есть суммами непременно различных единичных, или аликвотных, дробей.

5. Методы свободных гармонических представлений рациональных чисел египетскими дробями, то есть суммами непременно различных единичных, или аликвотных, дробей.

Вкратце рассмотрим эти методы представления действительных чисел по порядку.

2.2.1. МЕТОД ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОБЫКНОВЕННЫМИ ДРОБЯМИ

Метод представления действительных чисел обыкновенными дробями как отношениями целых чисел при ненулевых знаменателях в соответствии с самим определением рациональных чисел позволяет представить рациональные числа точно, а иррациональные числа только приближённо. Для однозначности представлений действительных чисел обыкновенными дробями целесообразно при необходимости путём равносильного одновременного умножения и числителя, и знаменателя обыкновенной дроби на отрицательную единицу обеспечить именно положительность знаменателя обыкновенной

дроби, а также сократить её числитель и знаменатель на их наибольший общий делитель, тем самым добившись как взаимной простоты числителя и знаменателя, так и несократимости дроби. Явное выделение целой и дробной частей обыкновенной дроби, если она неправильная, то есть абсолютная величина её числителя не меньше абсолютной величины её знаменателя, обеспечивается её представлением смешанной дробью, причём для целого числа и для положительной дроби этого достаточно, а для отрицательной дроби с ненулевой дробной частью требуется следующее дополнительное преобразование положительной абсолютной величины такой отрицательной дроби. Во-первых,

целая часть этой абсолютной величины увеличивается на единицу и полученная сумма умножается на отрицательную единицу, что и даёт целую часть отрицательной обыкновенной дроби. Во-вторых, дробная часть абсолютной величины отрицательной обыкновенной дроби вычитается из единицы, что и даёт дробную часть отрицательной обыкновенной дроби.

Приведём примеры представлений правильных и неправильных обыкновенных дробей обоих знаков с явным выделением целых и дробных частей этих дробей.

Пример 1:

$$x = 16/21;$$

целая часть

$$[x] = [16/21] = 0;$$

потолок

$$]x[\; = \;]16/21[\; = 1;$$

дробная часть

$$\{x\} = \{16/21\} = 16/21;$$

$$x = [x] + \{x\} = [16/21] + \{16/21\} = 0 + 16/21 = 16/21.$$

Пример 2:

$$x = - 16/21;$$

целая часть

$$[x] = [- 16/21] = - 1;$$

потолок

$$]x[=]- 16/21[= 0;$$

дробная часть

$$\{x\} = x - [x] = \{- 16/21\} = - 16/21 - [- 16/21] = - 16/21 - (- 1) = 1 - 16/21 = 5/21;$$

$$x = [x] + \{x\} = [- 16/21] + \{- 16/21\} = - 1 + 5/21 = - 16/21.$$

Пример 3:

$$x = 67/21;$$

целая часть

$$[x] = [67/21] = 3;$$

потолок

$$]x[=]67/21[= 4;$$

дробная часть

$$\{x\} = x - [x] = \{67/21\} = 67/21 - [67/21] = 67/21 - 3 = 4/21;$$

$$x = [x] + \{x\} = [67/21] + \{67/21\} = 3 + 4/21 = 67/21.$$

Пример 4:

$$x = -\ 67/21;$$

целая часть

$$[x] = [-\ 67/21] = -\ 4;$$

потолок

$$]x[\ = \ ]-\ 67/21[\ = -\ 3;$$

дробная часть

$$\{x\} = x - [x] = \{-\ 67/21\} = -\ 67/21 - [-\ 67/21] = -\ 67/21 - (-\ 4) = 4 - 67/21 = 17/21;$$

$$x = [x] + \{x\} = [-\ 67/21] + \{-\ 67/21\} = -\ 4 + 17/21 = -\ 67/21.$$

2.2.2. МЕТОД ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ m-ИЧНЫМИ ДРОБЯМИ В m-ИЧНОЙ ПОЗИЦИОННОЙ СИСТЕМЕ СЧИСЛЕНИЯ

Существенно (без чисто нулевого продолжения) бесконечная периодическая или непериодическая десятичная (также в других позиционных системах счисления) дробь является именно общим пределом, отличающимся от классического предела. Поэтому именно общий предел впервые создал возможность избавиться от неоднозначности представления дробей с чисто нулевым продолжением, которые в классической математике могут быть представлены также дробями, бесконечные продолжения которых состоят из одинаковых цифр подряд, меньших основания системы счисления на единицу.

Метод представления действительных чисел m-ичными дробями в m-ичной позиционной системе счисления,
где m – натуральное число, большее единицы,
например десятичными дробями, точно представляет любое действительное число A положительной, нулевой или отрицательной правильной или неправильной конечной или бесконечной m-ичной дробью:

$$A = (\mathrm{sign}\ A)|A| = A^{\circ}|A| =$$

$$(\mathrm{sign}\ A)a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+1} a_{-q} a_{-q-1} \ldots\ .$$

Здесь

$$a_p,\ a_{p-1},\ a_{p-2},\ \ldots\ ,\ a_2,\ a_1,\ a_0,\ a_{-1},\ a_{-2},\ a_{-3},\ \ldots\ ,\ a_{-q+1},\ a_{-q},\ a_{-q-1},\ \ldots$$

принадлежат множеству m-ичных цифр

$$\{0, 1, 2, 3, \ldots , m - 1\},$$

причём для ненулевого числа A цифра a_p наивысшего указанного порядка непременно отлична от нуля, то есть не меньше единицы;

m-ичный разделитель в виде точки размещён между цифрами a_0 и a_{-1};

sign A = A° есть функция знака действительного числа A, равная положительной единице для положительных чисел, нулю для нуля и отрицательной единице для отрицательных чисел;

$$|A| = a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+1} a_{-q} a_{-q-1} \ldots$$

есть условное m-ичное изображение неотрицательной абсолютной величины действительного числа A, равной никоим образом не произведению указанных m-ичных

цифр, а сумме бесконечного ряда с неотрицательными элементами

$$|A| = a_p*m^p + a_{p-1}*m^{p-1} + a_{p-2}*m^{p-2} + ... + a_2*m^2 + a_1*m^1 + a_0*m^0 + a_{-1}*m^{-1} + a_{-2}*m^{-2} + a_{-3}*m^{-3} + ... + a_{-q+1}*m^{-q+1} + a_{-q}*m^{-q} + a_{-q-1}*m^{-q-1} + ...,$$

всегда сходящегося, поскольку последовательность его частичных сумм

$$|A|_1 = a_p*m^p,$$

$$|A|_2 = a_p*m^p + a_{p-1}*m^{p-1},$$

$$|A|_3 = a_p*m^p + a_{p-1}*m^{p-1} + a_{p-2}*m^{p-2},$$

……………………………………………………………………………………

$$|A|_n = a_p*m^p + a_{p-1}*m^{p-1} + a_{p-2}*m^{p-2} + ... + a_{p-n+1}*m^{p-n+1},$$

……………………………………………………………………………………

не убывает и ограничена сверху числом $(a_p + 1)*m^p$.

В классической математике с использованием классических пределов

$$|A| = a_p a_{p-1} a_{p-2} \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots a_{-q+1} a_{-q} a_{-q-1} \dots = \lim_{n\to+\infty} |A|_n;$$

$$A = (\mathrm{sign}\, A)|A| = A^\circ|A| = (\mathrm{sign}\, A) a_p a_{p-1} a_{p-2} \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots a_{-q+1} a_{-q} a_{-q-1} \dots = (\mathrm{sign}\, A) \lim_{n\to+\infty} |A|_n.$$

Во всеобщих математических теориях и методологиях конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов с дополнительным уточняющим использованием общих пределов

$$|A| = a_p a_{p-1} a_{p-2} \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots a_{-q+1} a_{-q} a_{-q-1} \dots = \mathrm{glim}_{n\to+\infty} |A|_n = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} |A|_n;$$

$$A = (\mathrm{sign}\ A)|A| = A°|A| = (\mathrm{sign}\ A)a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+1} a_{-q} a_{-q-1} \ldots = (\mathrm{sign}\ A)\mathrm{glim}_{n\to+\infty} |A|_n = (\mathrm{sign}\ A)\mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} |A|_n.$$

В классической математике единственно возможный случай неоднозначности такого представления имеет место для существенных конечных m-ичных дробей с аннулированием всех цифр после некоторой непременно ненулевой и поэтому не меньшей, чем единица, цифры a_{-q}:

$$A = (\mathrm{sign}\ A)|A| = A°|A| =$$

$$(\mathrm{sign}\ A)a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q}.$$

В классической математике с использованием классических пределов

$$|A| = a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} |a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q}|_n =$$

$$a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q};$$

$$A = (\mathrm{sign}\ A)|A| = A°|A| =$$

$$(\mathrm{sign}\ A) a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q} =$$

$$(\mathrm{sign}\ A) \lim_{n\to+\infty} |a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q}|_n =$$

$$(\mathrm{sign}\ A) a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q}.$$

Во всеобщих математических теориях и методологиях конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов с дополнительным уточняющим использованием общих пределов

$$|A| = a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q} = \mathrm{glim}_{n\to+\infty} |A|_n =$$

$$\mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)}\ a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q} =$$

$$a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q};$$

$$A = (\mathrm{sign}\ A)|A| = A°|A| =$$

$$(\mathrm{sign}\ A)a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q} = (\mathrm{sign}\ A)\mathrm{glim}_{n\to+\infty} |A|_n = (\mathrm{sign}\ A)\mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} |A|_n\ a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q} = A^\circ a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q}.$$

Следовательно, и классический предел, и общий предел существенно конечной m-ичной дроби равны именно этой существенно конечной m-ичной дроби.

В классической математике каждая такая непременно ненулевая существенно конечная m-ичная дробь может быть дополнительно представлена такой существенно бесконечной m-ичной дробью, в которой последняя ненулевая цифра a_{-q} берётся меньшей на единицу, зато все последующие цифры берутся наибольшими возможными, то есть каждая из них составляет $(m - 1)$:

$$A_- = (\mathrm{sign}\ A_-)|A_-| = (\mathrm{sign}\ A_-)a_pa_{p-1}a_{p-2}\ldots a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\ldots a_{-q+2}a_{-q+1}(a_{-q} - 1)(m - 1)(m - 1)(m - 1)\ldots(m - 1)\ldots =$$

$$(\mathrm{sign}\ A_-)a_pa_{p-1}a_{p-2}\ldots a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\ldots a_{-q+2}a_{-q+1}(a_{-q} - 1)((m - 1)),$$

где, как обычно, период чистой или смешанной бесконечной периодической др<u>о</u>би дополнительно берётся в круглые скобки, которые в данном случае оказываются двойными. А если период повторяется <u>конечное число</u> раз, то для него в скобках вводится сопровождение правым индексом, равным этому числу.

В классической математике с использованием <u>классических пределов</u>

$$|A_-| = a_pa_{p-1}a_{p-2}\ldots a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\ldots a_{-q+2}a_{-q+1}(a_{-q} - 1)((m - 1)) = \lim_{n\to+\infty}$$

$$a_pa_{p-1}a_{p-2}\ldots a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}\ldots a_{-q+2}a_{-q+1}(a_{-q} - 1)(m - 1)_{n-p-q-1} = \lim_{n\to+\infty}$$

$$(a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2} a_{-q+1} a_{-q} - 1*m^{-q} + (m - 1)*m^{-q-1} + (m - 1)*m^{-q-2} + (m - 1)*m^{-q-3} + \ldots + (m - 1)*m^{-n+p+1}) = \lim_{n\to+\infty} (a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2} a_{-q+1} a_{-q} - 1*m^{-q} + (m - 1)*m^{-q-1}(1 - 1/m^{n-p-q-1})/(1 - 1/m)) = \lim_{n\to+\infty} (a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2} a_{-q+1} a_{-q} - 1*m^{-q} + m^{-q}(1 - 1/m^{n-p-q-1})) = \lim_{n\to+\infty} (a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2} a_{-q+1} a_{-q} - 1/m^{n-p-1}) = a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q} - 0;$$

$$A_- = (\mathrm{sign}\ A_-)|A_-| = (\mathrm{sign}\ A_-)\lim_{n\to+\infty} (a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2} a_{-q+1} a_{-q} - 1/m^{n-p-1}) = (\mathrm{sign}\ A_-)(a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2}\ a_{-q+1} a_{-q} - 0).$$

Следовательно, в классической математике классический предел даёт лишь формальную возможность исключить неоднозначность представления действительного числа m-ичной дробью путём указания на односторонность предела

в случае представления существенно конечной m-ичной дроби существенно бесконечной m-ичной дробью. Однако и эта формальная возможность не используется в классической математике.

Кроме того, классический предел в классической математике не учитывает скорости приближения к пределу.

В принципе есть и другая, философская возможность различения существенно конечной m-ичной дроби и её существенно бесконечного m-ичного представления. А именно, по аналогии с различением потенциальной и актуальной бесконечностей в философии и математике вполне можно считать саму существенно конечную m-ичную дробь представленной тем самым существенно

конечно и актуально, тогда как её существенно бесконечное m-ичное представление ещё и потенциально. Однако и эта принципиальная возможность различения обоих представлений существенно конечной m-ичной дроби не используется ни в классической математике, ни в философии.

Во всеобщих математических теориях и методологиях конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов с дополнительным уточняющим использованием общих пределов

$$|A_-| = a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2} a_{-q+1} (a_{-q} - 1)((m - 1)) = \mathrm{glim}_{n \to +\infty}$$

$$a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2} a_{-q+1} (a_{-q} - 1)(m - 1)_{n-p-q-1} = \mathrm{glim}_{n \to +\omega(d)}$$

$$(a_p a_{p-1} a_{p-2} \ldots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} a_{-3} \ldots a_{-q+2} a_{-q+1} a_{-q} - 1 * m^{-q} + (m - 1) * m^{-q-1} + (m -$$

$1)*m^{-q-2} + (m - 1)*m^{-q-3} + ... + (m - 1)*m^{-n+p+1}) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} (a_pa_{p-1}a_{p-2}...a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}...a_{-q+2}a_{-q+1}a_{-q} - 1*m^{-q} + (m - 1)*m^{-q-1}(1 - 1/m^{n-p-q-1})/(1 - 1/m)) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} (a_pa_{p-1}a_{p-2}...a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}...a_{-q+2}a_{-q+1}a_{-q} - 1*m^{-q} + m^{-q}(1 - 1/m^{n-p-q-1})) = \mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} (a_pa_{p-1}a_{p-2}...a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}...a_{-q+2}a_{-q+1}a_{-q} - 1/m^{n-p-1}) = a_pa_{p-1}a_{p-2}...a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}...a_{-q+2}\, a_{-q+1}a_{-q} - 1/m^{\omega(d)-p-1}$;

$A_- = (\mathrm{sign}\ A_-)|A_-| = (\mathrm{sign}\ A_-)\mathrm{glim}_{n\to+\infty} (a_pa_{p-1}a_{p-2}...a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}...a_{-q+2}a_{-q+1}a_{-q} - 1/m^{n-p-1}) = (\mathrm{sign}\ A_-)\mathrm{glim}_{n\to+\omega(d)} (a_pa_{p-1}a_{p-2}...a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}...a_{-q+2}a_{-q+1}a_{-q} - 1/m^{n-p-1}) = (\mathrm{sign}\ A_-)(a_pa_{p-1}a_{p-2}...a_2a_1a_0.a_{-1}a_{-2}a_{-3}...a_{-q+2}\, a_{-q+1}a_{-q} - 1/m^{\omega(d)-p-1})$.

Следовательно, во всеобщих математических теориях и методологиях конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов дополнительное уточняющее

использование общих пределов учитывает скорость приближения к пределу и исключает неоднозначность представления действительного числа m-ичной дробью.

Кроме того, во всеобщих математических теориях и методологиях конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов используется и другая, философская возможность различения существенно конечной m-ичной дроби и её существенно бесконечного m-ичного представления. А именно, по аналогии с различением потенциальной и актуальной бесконечностей в философии и математике сама существенно конечная m-ичная дробь считается представленной тем самым существенно конечно и актуально, тогда как её

существенно бесконечное m-ичное представление ещё и потенциально.

Даже в классической математике с ограничением классическими пределами достаточно для всеобщей однозначности представления действительных чисел m-ичными дробями соглашение об исключении всех таких существенно бесконечных m-ичных дробей, в которых все цифры, начиная с некоторой цифры, равны именно (m - 1).

В дальнейшем, если явно не оговорено иное, рассматривается именно десятичная позиционная система счисления, в которой

$$m = 10.$$

Приведём примеры представлений правильных и неправильных десятичных дробей обоих знаков с явным выделением целых и дробных частей этих дробей.

Пример 1:

$$x = e - 2 = 0.718281828459045...;$$

целая часть

$$[x] = [e - 2] = [0.718281828459045...] = 0;$$

потолок

$$]x[=]e - 2[=]0.718281828459045...[= 1;$$

дробная часть

$$\{x\} = \{e - 2\} = \{0.718281828459045...\} = 0.718281828459045...;$$

$$x = [x] + \{x\} = [e - 2] + \{e - 2\} = [0.718281828459045...] + \{0.718281828459045...\} = 0 + 0.718281828459045... = 0.718281828459045... .$$

Пример 2:

$$x = -(e - 2) = -0.718281828459045\ldots;$$

целая часть

$$[x] = [-(e - 2)] = [-0.718281828459045\ldots] = -1;$$

потолок

$$]x[\; = \;]-(e - 2)[\; = \;]-0.718281828459045\ldots[\; = 0;$$

дробная часть

$$\{x\} = x - [x] = -(e - 2) - [-(e - 2)] = \{-0.718281828459045\ldots\} = -0.718281828459045\ldots - [-0.718281828459045\ldots] = -0.718281828459045\ldots - (-1) = 1 - 0.718281828459045\ldots = 0.281718171540954\ldots;$$

$$x = [x] + \{x\} = [-(e - 2)] + \{-(e - 2)\} = [-0.718281828459045\ldots] + \{-0.718281828459045\ldots\} = -1 + 0.281718171540954\ldots = -0.718281828459045\ldots .$$

Пример 3:

$$x = \pi = 3.1415926535...;$$

целая часть

$$[x] = [\pi] = [3.1415926535...] = 3;$$

потолок

$$]x[\; = \;]\pi[\; = \;]3.1415926535...[\; = 4;$$

дробная часть

$$\{x\} = x - [x] = \pi - [\pi] = \{3.1415926535...\} =$$
$$3.1415926535... - [3.1415926535...] =$$
$$3.1415926535... - 3 = 0.1415926535...;$$
$$x = [x] + \{x\} = [\pi] + \{\pi\} =$$
$$[3.1415926535...] + \{3.1415926535...\} =$$
$$3 + 0.1415926535... = 3.1415926535... .$$

Пример 4:

$$x = -\pi = -3.1415926535...;$$

целая часть

$$[x] = [-\pi] = [-3.1415926535...] = -4;$$

потолок

$$]x[\ = \ ]-\pi[\ = \ ]-3.1415926535...[\ = -3;$$

дробная часть

$$\{x\} = x - [x] = -\pi - [-\pi] = \{-3.1415926535...\} =$$

$$-3.1415926535... - [-3.1415926535...] =$$

$$-3.1415926535... - (-4) =$$

$$4 - 3.1415926535... = 0.8584073464...;$$

$$x = [x] + \{x\} = [-\pi] + \{-\pi\} = [-3.1415926535...] + \{-3.1415926535...\} = -4 + 0.8584073464... = -3.1415926535... .$$

2.2.3. МЕТОД ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ НЕПРЕРЫВНЫМИ (ЦЕПНЫМИ) ДРОБЯМИ

Отвлечёмся от обобщённых неклассических непрерывных (цепных) дробей, числители которых не обязаны быть единичными и которые обладают дополнительными свободой и возможностями, однако лишены заведомой однозначности. Ограничимся заведомо однозначными благодаря жёсткой необходимости выделения именно целых частей знаменателей классическими конечными или бесконечными непрерывными (цепными) дробями с единичными числителями. Для таких дробей общепринятым является обозначение с указанием элементов

$$a_0;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ ,$$

непрерывной (цепной) др<u>о</u>би, в том числе целой части a_0, которая обычно отделяется точкой с запятой и может быть любым целым числом, и далее упорядоченной последовательности неполных частных как целых частей знаменателей непрерывной (цепной) др<u>о</u>би

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ ,$$

являющихся положительными целыми числами:

$$x = [a_0;\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots].$$

Однако для прояснения сущности непрерывной (цепной) др<u>о</u>би полезно и дополнительное её полное обозначение с единичными числителями:

$$x = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + 1/(a_3 + 1/(a_4 + \ldots)))\ldots).$$

Последовательность подходящих дробей

$$x_0 = [a_0] = a_0;$$

$$x_1 = [a_0; a_1] = a_0 + 1/a_1;$$

$$x_2 = [a_0; a_1, a_2] = a_0 + 1/(a_1 + 1/a_2);$$

$$x_3 = [a_0; a_1, a_2, a_3] = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + 1/a_3));$$

$$x_4 = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4] = a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + 1/(a_3 + 1/a_4)));$$

………………………………………………………………………………………… ,

обрывающих непрерывную (цепную) дробь на её элементе с тем же индексом, всегда сходится к некоторому однозначно определённому действительному пределу, причём подходящие др<u>о</u>би с чётными индексами подходят к этому пределу снизу, а подходящие др<u>о</u>би с нечётными индексами подходят к этому пределу сверху, в итоге образуя бесконечно

сужающуюся систему вложенных отрезков, содержащих этот предел, который и является значением непрерывной (цепной) дробu. С другой стороны, любое действительное число однозначно разлагается в непрерывную (цепную) дробь посредством последовательного выделения целой части этого числа и далее целых частей знаменателей непрерывной (цепной) дроби. Значительное ускорение процесса разложения действительного числа в непрерывную (цепную) дробь достигается алгоритмом Евклида и рекуррентными формулами Эйлера для вычисления числителей p_n и знаменателей q_n подходящих дробей

$$x_n = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, \dots , a_n] = p_n/q_n:$$

$$p_{-1} = 1;\ p_0 = a_0;\ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2};$$

$$q_{-1} = 0;\ q_0 = 1;\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Из тождества

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$$

вытекает несократимость всех подходящих дробей. Благодаря равносильному делению этого тождества на произведение знаменателей соседних подходящих дробей $q_{n-1}q_n$

$$p_n/q_n - p_{n-1}/q_{n-1} = (-1)^{n-1}/(q_{n-1}q_n)$$

следуют оценки точности приближения любого действительного числа подходящими дробями непрерывной (цепной) дроби этого действительного числа:

$$|x - p_{n-1}/q_{n-1}| < 1/(q_{n-1}q_n) < 1/q_{n-1}^2.$$

Каждая подходящая дробь непрерывной (цепной) дроби любого действительного числа даёт именно наилучшее приближение этого действительного числа по сравнению со всеми другими дробями с не большими знаменателями, чем у этой подходящей дроби.

Непрерывная (цепная) дробь действительного числа конечна тогда и только тогда, когда это действительное число рационально.

Бесконечная непрерывная (цепная) дробь действительного числа периодична в смысле периодичности неполных частных, если, начиная с некоторого неполного частного, существует некий

период, являющийся непустой конечной последовательностью неполных частных и бесконечно повторяющий сам себя именно подряд, тогда и только тогда, когда это действительное число является квадратичной иррациональностью, то есть иррациональным корнем квадратного уравнения с целочисленными коэффициентами.

Приведём примеры представлений правильных и неправильных непрерывных (цепных) дробей обоих знаков с явным выделением целых и дробных частей этих дробей.

Пример 1:

$$x = e - 2 = [0; 1, 2, 1, 1, 4, ...] = 1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(4 + ...)))...);$$

целая часть

$$[x] = [e - 2] = [1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(4 + ...)))...)] = 0;$$

потолок

$$]x[=]e - 2[=]1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(4 + ...)))...)[= 1;$$

дробная часть

$$\{x\} = \{e - 2\} = \{1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(4 + ...)))...)\} = 1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(4 + ...)))...);$$

$$x = [x] + \{x\} = [e - 2] + \{e - 2\} = [1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(4 + ...)))...)] + \{1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(4 + ...)))...)\} = 0 + 1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(4 + ...)))...) = 1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(4 + ...)))...).$$

Пример 2:

$$x = - (e - 2) = - 1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(4 + ...)))...);$$

целая часть

$$[x] = [-(e-2)] = [-1/(1+1/(2+1/(1+1/(1+1/(4+\ldots)))\ldots)] = -1;$$

потолок

$$]x[\ = \ ]-(e-2)[\ = \ ]-1/(1+1/(2+1/(1+1/(1+1/(4+\ldots)))\ldots)[\ = 0;$$

дробная часть

$$\{x\} = x - [x] = -(e-2) - [-(e-2)] = \{-1/(1+1/(2+1/(1+1/(1+1/(4+\ldots)))\ldots)\} = -1/(1+1/(2+1/(1+1/(1+1/(4+\ldots)))\ldots) - [-1/(1+1/(2+1/(1+1/(1+1/(4+\ldots)))\ldots)] = -1/(1+1/(2+1/(1+1/(1+1/(4+\ldots)))\ldots) - (-1) = 1 - 1/(1+1/(2+1/(1+1/(1+1/(4+\ldots)))\ldots) = 0.281718171540954\ldots;$$

$$x = [x] + \{x\} = [-(e-2)] + \{-(e-2)\} = [-1/(1+1/(2+1/(1+1/(1+1/(4+\ldots)))\ldots)] + \{-1/(1+1/(2+1/(1+1/(1+1/(4+\ldots)))\ldots)\} = -1/(1+1/(2+1/(1+1/(1+1/(4+\ldots)))\ldots).$$

Пример 3:

$$x = \pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, ...] = 3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...);$$

целая часть

$$[x] = [\pi] = [3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...)] = 3;$$

потолок

$$]x[=]\pi[=]3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...)[= 4;$$

дробная часть

$$\{x\} = x - [x] = \pi - [\pi] = \{3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...)\} = 3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...) - [3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...)] = 3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...) - 3 = 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...);$$

$$x = [x] + \{x\} = [\pi] + \{\pi\} = [3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...)] + \{3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...)\} = 3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...) = 3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...).$$

<u>Пример 4</u>:

$$x = -\pi = -[3; 7, 15, 1, 292, 1, ...] = -3 - 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...);$$

целая часть

$$[x] = [-\pi] = [-3 - 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...)] = -4;$$

потолок

$$]x[\; = \;]-\pi[\; = \;]-3 - 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...)[\; = -3;$$

дробная часть

$$\{x\} = x - [x] = -\pi - [-\pi] = \{-3 - 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...)\} = -3 - 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292$$

$$+ 1/(1 + ...)))...) - [- 3 - 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...)] = - 3 - 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...) - (- 4) = 4 - 3 - 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...) = 1 - 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...);$$

$$x = [x] + \{x\} = [- \pi] + \{- \pi\} = [- 3 - 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...)] + \{- 3 - 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...)\} = - 4 + 1 - 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...) = - 3 - 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/(292 + 1/(1 + ...)))...).$$

2.2.4. МЕТОД ФИБОНАЧЧИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ЕГИПЕТСКИМИ ДРОБЯМИ

Египетская дробь определяется как сумма непременно различных единичных, или аликвотных, дробей, то есть имеющих единичные числители и положительные целые знаменатели.

Гармонический ряд является суммой всех единичных, или аликвотных, дробей:

$$\Sigma_{n=1}^{\infty} 1/n = 1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + ... = \infty.$$

Метод Фибоначчи гармонического представления <u>рациональных</u> чисел египетскими дробями как

суммами единичных, или аликвотных, дробей изложен в главном труде Леонардо Пизанского (Фибоначчи) «Книга абака», то есть арифметических вычислений (лат. Liber abaci) в 1202 г. (вторая, переработанная редакция – в 1228 г.). Метод Фибоначчи предусматривает из каждого остатка дробной части рационального числа последовательное выделение именно наибольшего возможного элемента гармонического ряда, то есть дроби с единичным числителем, знаменателем которой является наименьшее возможное натуральное число. При этом числитель каждого

следующего остатка оказывается строго меньше числителя предыдущего остатка. Поэтому каждое рациональное число разлагается методом Фибоначчи именно единственно возможным образом непременно в конечную сумму единичных дробей.

Примеры:

$$3/7 = 1/3 + 1/11 + 1/231;$$

$$2/9 = 1/5 + 1/45;$$

$$3/49 = 1/17 + 1/417 + 1/347361;$$

$$12/49 = 1/5 + 1/23 + 1/705 + 1/794535.$$

2.2.5. МЕТОДЫ СВОБОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ЕГИПЕТСКИМИ ДРОБЯМИ

Метод произвольных гармонических представлений рациональных чисел египетскими дробями, то есть суммами непременно различных единичных, или аликвотных, дробей, предусматривает из каждого остатка дробной части рационального числа последовательное выделение не большего, чем этот остаток, но при этом не обязательно наибольшего возможного элемента гармонического ряда, то есть дроби с единичным числителем, знаменателем которой является целое положительное число. При этом числитель каждого следующего остатка оказывается строго меньше числителя предыдущего остатка. Поэтому каждое рациональное число разлагается

методом гармонических представлений рациональных чисел египетскими дробями непременно в конечную сумму единичных дробей, однако именно бесконечным количеством способов. Ведь, например,

$$1/1 = 1/2 + 1/3 + 1/6;$$

$$1/n = 1/(2n) + 1/(3n) + 1/(6n),\ n = 1, 2, 3, 4, \dots ,$$

и последняя формула позволяет заменить любую единичную дробь 1/n суммой трёх дробей

$$1/(2n) + 1/(3n) + 1/(6n),$$

затем заменить каждое из этих трёх слагаемых своей суммой трёх единичных дробей, и так далее неограниченно.

Пример:

$$3/4 = 1/2 + 1/4 = (1/4 + 1/6 + 1/12) + (1/8 + 1/12 + 1/24) = \dots .$$

Метод кратчайших гармонических представлений рациональных чисел египетскими дробями добивается именно наименьшего количества слагаемых единичных дробей, однако и этот метод не обеспечивает именно единственности представления рационального числа египетскими дробями.

Пример:

$$2/9 = 1/5 + 1/45 = 1/6 + 1/18.$$

NOTA BENE

Из этих двух представлений только первое

$$2/9 = 1/5 + 1/45,$$

как мы видели, даётся методом Фибоначчи как единственно возможное.

Ввиду нацеленности настоящей научной монографии именно на приближения действительных чисел полезен применительно к представлениям рациональных чисел египетскими дробями только метод Фибоначчи, единственно дающий именно однозначные гармонические разложения рациональных чисел как предусматривающий из каждого остатка дробной части этого числа последовательное выделение именно наибольшего возможного элемента гармонического ряда. Методы свободных гармонических представлений рациональных чисел египетскими дробями не обеспечивают единственности гармонического представления рационального числа египетской дробью как суммой

непременно различных единичных, или аликвотных, дробей.

Пример: для числа 19/49 методы свободных гармонических представлений рациональных чисел египетскими дробями дают представление

$$19/49 = 1/3 + 1/21 + 1/147,$$

чрезвычайно простое, красивое и удобное, если самоцелью является именно простое и красивое представление рационального числа египетской дробью как суммой непременно различных единичных, или аликвотных, дробей. Однако эти методы не обладают однозначными алгоритмами, не обеспечивают единственности представлений рациональных чисел египетскими дробями

и не дают возможностей для обоснованных оценок погрешностей, если попытаться распространить эти методы на гармонические представления и приближения египетскими дробями уже действительных чисел, то есть не только рациональных, но и иррациональных чисел.

Метод Фибоначчи гармонического представления рациональных чисел египетскими дробями для числа 19/49 даёт представление

$$19/49 = 1/3 + 1/19 + 1/559 + 1/780644 + 1/1218809328828.$$

С точки зрения представления именно данного рационального числа 19/49 египетской дробью как суммой непременно различных единичных, или аликвотных, дробей, простоты и красоты этого представления как

самоцели метод Фибоначчи гармонического представления рациональных чисел египетскими дробями даёт чрезвычайно сложный, длинный и малопривлекательный итог и явно проигрывает методам свободных гармонических представлений рациональных чисел египетскими дробями. Однако метод Фибоначчи гармонического представления рациональных чисел египетскими дробями как предусматривающий из каждого остатка дробной части рационального числа последовательное выделение непременно наибольшего возможного элемента гармонического ряда обладает именно однозначным алгоритмом, обеспечивает единственность представлений рациональных чисел египетскими дробями

и открывает возможности для обоснованных оценок погрешностей, если попытаться распространить этот метод на гармонические представления и приближения египетскими дробями уже действительных чисел, то есть не только рациональных, но и иррациональных чисел. Поэтому именно метод Фибоначчи гармонического представления рациональных чисел египетскими дробями развивается методом сплошного гармонического разложения действительного числа, методом выборочного гармонического разложения действительного числа и общим методом гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях.

2.3. МЕТОДЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ НЕПРЕМЕННО ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЕДИНИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

2.3.1. МЕТОД СПЛОШНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ВЫБИРАЕМЫМИ НАИМЕНЬШИМИ ВОЗМОЖНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ ЕДИНИЧНЫХ, ИЛИ АЛИКВОТНЫХ, ДРОБЕЙ

Метод сплошного гармонического разложения действительного числа предусматривает изначальное определение единичных или

нулевых коэффициентов при всех элементах гармонического ряда без исключения и последующее опущение всех элементов гармонического ряда с нулевыми коэффициентами.

Сплошное гармоническое разложение действительного числа a

$$a = [a] + \Sigma_{n \in N - \{1\}} c_n / n,$$

$$N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

$$c_n = [n(\{a\} - \Sigma_{k=2}^{n-1} c_k / k)] \in \{0, 1\}.$$

2.3.2. МЕТОД ВЫБОРОЧНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ВЫБИРАЕМЫМИ НАИМЕНЬШИМИ ВОЗМОЖНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ ЕДИНИЧНЫХ, ИЛИ АЛИКВОТНЫХ, ДРОБЕЙ

Метод выборочного гармонического разложения действительного числа предусматривает изначальное выделение именно и только наличных элементов гармонического ряда.

Выборочное гармоническое разложение действительного числа a

$$a = [a] + \Sigma_{k\in N}1/n_k,$$

$$n_k =]1/\{a\} - \Sigma_{j=1}^{k-1}1/n_j[,$$

$$]x[= - [- x].$$

Очевидно,

$$n_{k+1} > n_k,\ k \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}.$$

2.3.3. ОБЩИЙ МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ОБРАЩЁННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ ДРОБНОЙ ЧАСТИ В ЗНАМЕНАТЕЛЯХ

Общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях опирается на то, что окончательные итоги метода сплошного гармонического разложения действительного числа,

с одной стороны, и метода выборочного гармонического разложения действительного числа, с другой стороны, всегда совпадают ввиду единственности гармонического разложения действительного числа при условии непременного последовательного выделения именно наибольшего возможного элемента гармонического ряда, то есть дроби с единичным числителем, знаменателем которой является наименьшее возможное натуральное число.

Для того, чтобы гармоническое разложение действительного числа a было конечным, необходимо и достаточно, чтобы действительное число a было рациональным числом.

Для определённости и краткости принимается именно выборочное гармоническое разложение действительного числа a

$$a = [a] + \Sigma_{k\in N}1/n_k,$$

$$n_k =]1/\{a\} - \Sigma_{j=1}^{k-1}1/n_j[,$$

$$]x[= - [- x].$$

Очевидно,

$$n_{k+1} > n_k,\ k \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\}.$$

2.3.4. МЕТОД ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ВЫБИРАЕМЫМИ НАИМЕНЬШИМИ ВОЗМОЖНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЯМИ ЕДИНИЧНЫХ, ИЛИ АЛИКВОТНЫХ, ДРОБЕЙ

Требуется оценить погрешность приближения действительного числа a частными суммами указанного конечного или бесконечного ряда, разлагающего это действительное число a, равное сумме своего ряда.

При этом из каждого остатка дробной части действительного числа a непременно

осуществляется последовательное выделение именно наибольшего возможного элемента гармонического ряда, то есть дроби с единичным числителем, знаменателем которой является наименьшее возможное натуральное число.

Поэтому для положительного остатка данного положительного ряда выполняется двойное неравенство

$$0 \leq \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/n_j = a - a_k = a - [a] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/n_j < 1/(n_k - 1) - 1/n_k = 1/(n_k(n_k - 1)).$$

Для понимания сущности этой оценки полезно отметить следующее. Если бы вместо строгого

неравенства имело место равенство, то по алгоритму построения этого ряда вместо n_k было бы выбрано на единицу меньшее натуральное число (n_k - 1).

Таким образом, поскольку в практически важных случаях знаменатель n_k последней, то есть наименьшей, учтённой единичной др<u>о</u>би во много раз больше единицы, погрешность частной суммы оценивается обращением квадрата знаменателя n_k последней учтённой единичной др<u>о</u>би.

Теперь становится понятно, насколько для точности конечного гармонического представления действительного числ<u>а</u> а важна малость последней учтённой единичной др<u>о</u>би этого представления.

2.3.5. МЕТОД ОЦЕНКИ СКОРОСТИ РОСТА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ВЫБИРАЕМЫХ НАИМЕНЬШИМИ ВОЗМОЖНЫМИ ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ ЕДИНИЧНЫХ, ИЛИ АЛИКВОТНЫХ, ДРОБЕЙ ГАРМОНИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Требуется оценить скорость роста последовательно выбираемых наименьшими возможными знаменателей единичных, или аликвотных, дробей гармонического разложения действительного числа a. При этом из каждого остатка дробной части действительного числа a осуществляется последовательное выделение именно наибольшего

возможного элемента гармонического ряда, то есть дроби с единичным числителем, знаменателем которой является наименьшее возможное натуральное число.

Метод оценки погрешностей гармонических разложения и приближения действительных чисел с последовательно выбираемыми наименьшими возможными знаменателями единичных, или аликвотных, дробей установил, что для положительного остатка данного положительного ряда выполняется двойное неравенство

$$0 \le \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty} 1/n_j = a - a_k = a - [a] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/n_j < 1/(n_k - 1) - 1/n_k = 1/(n_k(n_k - 1)).$$

Следующий после $1/n_k$ элемент $1/n_{k+1}$ положительного ряда

$$\Sigma_{j=1}{}^{\infty}1/n_j = a$$

является первым элементом указанного остатка ряда

$$\Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/n_j = a - a_k = a - [a] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/n_j$$

и поэтому не может превышать этот остаток целиком. Значит, для элемента $1/n_{k+1}$ этого ряда

$$1/n_{k+1} \le \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/n_j = a - a_k =$$

$$a - [a] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/n_j < 1/(n_k - 1) - 1/n_k = 1/(n_k(n_k - 1)),$$

$$1/n_{k+1} < 1/(n_k(n_k - 1)),$$

$$n_{k+1} > n_k(n_k - 1).$$

Отсюда следует достаточно быстрый рост знаменателей единичных, или аликвотных, дробей гармонического разложения действительного числа

а, как минимум, почти по закону последовательного возведения в квадрат, для достаточно больших чисел более быстрый, чем по закону факториала. Чтобы в этом убедиться, следует вначале непосредственно отметить, что $n_1 \geq 2$ и $n_2 \geq 3$,

и только теперь начать пользоваться этим строгим неравенством. При сравнении с ростом факториала следует иметь в виду, что для факториала взамен неравенства имеет место равенство. Для понимания причин опережения факториального закона квазиквадратным законом полезно отметить следующее.

При переходе от k к k + 1 факториал k! дополнительно умножается на k + 1, и для достаточно больших k этот дополнительный множитель k + 1 сколь угодно мал по сравнению с наличным k!.

А n_k при переходе от k к k + 1 дополнительно умножается более чем на (n_k - 1), и для достаточно больших k отношение этого дополнительного множителя (n_k - 1) к наличному n_k лишь несущественно меньше единицы.

Продолжение таблицы, приведённой далее здесь, показало бы это ещё более ярко.

Таблица. Сравнение скоростей роста нижних оценок знаменателей n_k первых наибольших единичных дробей, меньших, чем остатки, и скоростей роста первых факториалов.

k	n_k	k!
1	2	1
2	3	2
3	6	6
4	30	24
5	870	120
6	756030	720
7	571580604870	5040

2.3.6. МЕТОД ПРОВЕРКИ ДОСТОВЕРНОСТИ РАЦИОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА СО ВСЕМИ ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ РАСЧЁТАМИ В ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЯХ

Метод оценки погрешностей гармонических разложения и приближения действительных чисел основан именно на достоверности гармонического разложения действительного числа. Из каждого остатка дробной части действительного числа a осуществляется последовательное выделение именно наибольшего возможного элемента гармонического ряда, то есть дроби с единичным

числителем, знаменателем которой является непременно наименьшее возможное положительное целое число.

Во избежание погрешностей приближения обыкновенных дробей десятичными дробями и во избежание накопления этих погрешностей целесообразно вести все промежуточные расчёты с этими обыкновенными дробями совсем без перевода их в десятичные дроби, то есть в обыкновенных дробях, вплоть до итога. И только итог затем представляется в виде десятичной дроби.

Но и это ещё далеко не всё. Подлежащее гармоническому разложению действительное число обычно выражается десятичной дробью, именно бесконечной, кроме редких случаев рациональных чисел, знаменатели которых

представимы произведениями двоек и пятёрок. Число её знаков после десятичного разделителя целой и дробной частей вынужденно приходится ограничивать. Такое ограничение вполне может привести и нередко приводит к ошибкам в определении достаточно больших знаменателей единичных, или аликвотных, дробей разложения действительного числа.

Поэтому необходима доскональная проверка того, что знаменатель именно каждой очередной единичной, или аликвотной, дроби гармонического разложения действительного числа является

непременно наименьшим возможным положительным целым числом.

Такая проверка осуществляется следующим образом. На каждом шаге гармонического разложения действительного числ<u>а</u> после определения очередной единичной, или аликвотной, др<u>о</u>би разложения проводится дополнительный расчёт. К сумме всех предыдущих единичных, или аликвотных, дробей разложения <u>действительного</u> числ<u>а</u> прибавляется единичная, или аликвотная, дробь со знаменателем, на единицу меньшим, чем у только что определённой очередной единичной, или

аликвотной, дроби. Этот дополнительный расчёт непременно проводится именно с недостатком и обязательно должен привести к итогу, заведомо превышающему разлагаемое действительное число. Поэтому в итоге проверяется, что для гармонического разложения действительного числа a и для каждого положительного целого числа k непременно выполнено двойное неравенство

$$[a] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j \le a <$$
$$[a] + \Sigma_{j=1}^{k-1} 1/n_j + 1/(n_k - 1) =$$
$$[a] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j + 1/(n_k(n_k - 1)).$$

2.3.7. МЕТОД ПРОВЕРКИ ДОСТОВЕРНОСТИ РАЦИОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ РАСЧЁТАМИ В ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЯХ

Метод оценки погрешностей гармонических разложения и приближения действительных чисел основан именно на достоверности гармонического разложения действительного числа. Из каждого остатка дробной части действительного числа a осуществляется последовательное выделение именно наибольшего возможного элемента гармонического ряда, то есть дроби с единичным числителем, знаменателем которой является непременно наименьшее возможное положительное целое число.

Подлежащее гармоническому разложению действительное число обычно выражается десятичной дробью, именно бесконечной, кроме редких случаев рациональных чисел, знаменатели которых представимы произведениями двоек и пятёрок. Число её знаков после десятичного разделителя целой и дробной частей вынужденно приходится ограничивать. Такое ограничение вполне может привести и нередко приводит к ошибкам в определении достаточно больших знаменателей единичных, или аликвотных, дробей разложения действительного числа.

Но и это ещё далеко не всё. Если вести промежуточные расчёты с переводом обыкновенных единичных, или аликвотных, дробей гармонического разложения

действительного числа в десятичные дроби, то добавляются и накапливаются погрешности такого перевода.

Поэтому необходима доскональная проверка того, что знаменатель именно каждой очередной единичной, или аликвотной, дроби гармонического разложения действительного числа является непременно наименьшим возможным положительным целым числом.

Такая проверка осуществляется следующим образом. На каждом шаге гармонического разложения действительного числа после определения очередной единичной, или аликвотной, дроби разложения проводится дополнительный расчёт, весьма усложнённый по сравнению с приведенным выше. К сумме всех предыдущих

единичных, или аликвотных, дробей разложения действительного числа прибавляется единичная, или аликвотная, дробь со знаменателем, на единицу меньшим, чем у только что определённой очередной единичной, или аликвотной, дроби. Причём на каждом шаге гармонического разложения действительного числа приходится достаточно резко повышать точность. Поэтому воспользоваться достаточными для предыдущих шагов переводами обыкновенных единичных, или аликвотных, дробей гармонического разложения действительного числа в десятичные дроби удаётся на новом шаге разложения далеко не всегда, и часто требуется полный перерасчёт.

Этот дополнительный расчёт непременно проводится именно с недостатком и обязательно должен привести к итогу, заведомо превышающему разлагаемое действительное число.

Поэтому в итоге проверяется, что для гармонического разложения действительного числа a и для каждого положительного целого числа k непременно выполнено двойное неравенство

$$[a] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j \le a <$$

$$[a] + \Sigma_{j=1}^{k-1} 1/n_j + 1/(n_k - 1) =$$

$$[a] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j + 1/(n_k(n_k - 1)).$$

2.4. ДАЛЬНЕЙШИЕ РАЗВИТИЕ И ОБОБЩЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Чрезвычайно полезно отметить основополагающее значение следующего.

1. Как хорошо известно, гармонический ряд монотонно расходится к плюс бесконечности при бесконечной малости последовательности элементов этого ряда.

2. Из теории египетских дробей как конечных сумм различных единичных, или аликвотных, дробей известно, что каждое положительное рациональное число может быть представлено египетскими дробями, причём именно бесконечным множеством способов.

3. Множество рациональных чисел всюду часто (плотно) во множестве действительных чисел. Поэтому каждое положительное действительное число может быть сколь угодно точно представлено сходящимся рядом единичных, или аликвотных, дробей. Причём на каждом шаге в качестве очередного слагаемого можно выбрать любую единичную, или аликвотную, дробь, удовлетворяющую двум условиям. Во-первых, эта дробь должна быть меньше текущего остатка этого действительного числа. Этот остаток равен разности между этим действительным числом и конечной суммой ранее

выбранных единичных, или аликвотных, дробей для представления этого <u>действительного</u> числ<u>а</u>. Во-вторых, эта дробь не должна совпадать ни с одной из тех ранее выбранных дробей. Одна лишь такая произвольность выбора любой единичной, или аликвотной, др<u>о</u>би немедленно доказывает именно <u>бесконечность</u> множества всевозможных представлений любого <u>действительного</u> числ<u>а</u> сходящимся рядом единичных, или аликвотных, дробей. Каждый такой ряд для <u>рационального</u> числ<u>а</u> непременно конечен, а для иррационального числ<u>а</u> непременно бесконечен.

2.4.1. РАЗНОСЛАГАЕМАЯ ВСЮДУ ЧАСТОТА (ПЛОТНОСТЬ)

Определение 1. Множество A с определённым на нём действием сложения конечного подмножества различных элементов этого множества называется разнослагаемо всюду частым (плотным) во множестве B тогда и только тогда, когда для любой окрестности любого элемента множества B существует такое конечное подмножество различных элементов множества A, что сумма этих элементов принадлежит этой окрестности.

Теорема 1. Множество всех единичных, или аликвотных, дробей разнослагаемо всюду часто

(плотно) во множестве положительных действительных чисел.

Доказательство. Множество всех положительных рациональных чисел всюду часто (плотно) во множестве всех положительных действительных чисел. Поэтому в любой окрестности любого положительного действительного числа существует положительное рациональное число, бесконечным множеством способов представимое египетскими дробями, то есть конечными суммами конечных подмножеств различных единичных, или аликвотных, дробей. Любое из этих подмножеств удовлетворяет всем условиям теоремы, что и требовалось доказать.

Определение 2. Множество A с определённым на нём действием сложения конечного подмножества различных элементов этого множества называется избыточно разнослагаемо всюду частым (плотным) во множестве B тогда и только тогда, когда существует такой элемент множества A, что и с этим элементом, и без этого элемента это множество A является разнослагаемо всюду частым (плотным) во множестве B.

Теорема 2. Множество всех единичных, или аликвотных, дробей избыточно разнослагаемо всюду часто (плотно) во множестве положительных действительных чисел.

Доказательство. По теореме 1 множество всех единичных, или аликвотных, дробей разнослагаемо всюду часто (плотно) во множестве всех положительных действительных чисел. Множество всех положительных

рациональных чисел всюду часто (плотно) во множестве всех положительных действительных чисел. Поэтому в любой окрестности любого положительного действительного числа существует положительное рациональное число, бесконечным множеством способов представимое египетскими дробями, то есть конечными суммами конечных подмножеств различных единичных, или аликвотных, дробей. Рассмотрим любой из этих способов. Удалим из множества всех единичных, или аликвотных, дробей одну любую единичную, или аликвотную, дробь

$$1/n, \ n = 1, 2, 3, 4, \ldots .$$

Если этот способ не использует именно эту одну единичную, или аликвотную, дробь 1/n, то подмножество всех единичных, или аликвотных, дробей, использованных этим способом, удовлетворяет всем условиям теоремы, что и требовалось доказать. Если, однако, этот способ использует именно эту одну единичную, или аликвотную, дробь 1/n, то формула

$$1/n = 1/(2n) + 1/(3n) + 1/(6n),\ n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

позволяет заменить изъятую единичную, или аликвотную, дробь 1/n суммой трёх единичных, или аликвотных, дробей

$$1/(2n) + 1/(3n) + 1/(6n).$$

Если ни одна из этих трёх единичных, или аликвотных, дробей не использовалась этим способом, то подмножество

всех единичных, или аликвотных, дробей, использованных этим способом, после изъятия единичной, или аликвотной, др<u>о</u>би 1/n и добавления вместо неё заменяющей её своей суммой триады единичных, или аликвотных, дробей

1/(2n), 1/(3n), 1/(6n)

удовлетворяет всем условиям теоремы, что и требовалось доказать. Если, однако, этот способ <u>использует</u> хотя бы некоторые из этих трёх единичных, или аликвотных, дробей

1/(2n), 1/(3n), 1/(6n),

то каждая из таких использованных единичных, или аликвотных, дробей по той же формуле с заменой

знаменателя на наличный знаменатель соответствующей использованной др<u>о</u>би, а именно по формулам

1/(2n) = 1/(4n) + 1/(6n) + 1/(12n), n = 1, 2, 3, 4, ... ,

1/(3n) = 1/(6n) + 1/(9n) + 1/(18n), n = 1, 2, 3, 4, ... ,

1/(6n) = 1/(12n) + 1/(18n) + 1/(36n), n = 1, 2, 3, 4, ... ,

заменяется имеющей равную заменяемой др<u>о</u>би сумму соответствующей триадой

1/(4n), 1/(6n), 1/(12n), n = 1, 2, 3, 4, ... ,

1/(6n), 1/(9n), 1/(18n), n = 1, 2, 3, 4, ... ,

1/(12n), 1/(18n), 1/(36n), n = 1, 2, 3, 4, ...

Такой процесс замены отдельных единичных, или аликвотных, дробей имеющими равные заменяемым дробям суммы соответствующими триадами единичных,

или аликвотных, дробей продолжается до тех пор, пока ни одна из заменяющих дробей не была использована тем способом представления того рационального числа. Поскольку в том способе использована именно конечная сумма единичных, или аликвотных, дробей, то множество всех их знаменателей ограничено сверху. Поскольку при указанных заменах на каждом их шаге знаменатели заменяющих единичных, или аликвотных, дробей увеличиваются не менее чем вдвое, то через именно конечное число шагов замены все знаменатели заменяющих единичных, или аликвотных, дробей превзойдут верхнюю грань множества всех знаменателей единичных, или аликвотных, дробей, использованных тем способом

представления того рационального числа. Тем самым процесс последовательной замены отдельных единичных, или аликвотных, дробей через именно конечное число шагов замены единичных, или аликвотных, дробей имеющими равные заменяемым дробям суммы соответствующими триадами единичных, или аликвотных, дробей завершится тем, что ни одна из заменяющих единичных, или аликвотных, дробей не была использована тем способом представления того рационального числа. Однако возможны совпадения заменяющих дробей. В таком случае последовательно заменяем совпадающие дроби, кроме одной, соответствующими триадами дробей, имеющими требуемые суммы. Ввиду домножения

знаменателей заменяющих дробей на 2, на 3 и на 6 и вследствие единственности разложения любого целого числа, превышающего единицу, на простые множители по основной теореме арифметики неизбежно завершение совпадений новых дробей после именно конечного количества шагов. Подмножество всех единичных, или аликвотных, дробей, использованных этим способом, после совокупности всех соответствующих изъятий и добавлений единичных, или аликвотных, дробей удовлетворяет всем условиям теоремы, что и требовалось доказать.

Замечание. Это доказательство методологически полезно. Но можно дать методологически полезное более простое и изящное принципиально иное доказательство этой же

теоремы, причём несравненно более сильное. А именно, докажем возможность обойтись не только без любой одной-единственной единичной дроби 1/n, но и без любого конечного множества единичных дробей. Достаточно рассмотреть наименьшую единичную дробь этого множества и расходящийся к плюс бесконечности ввиду конечности отбрасываемой суммы остаток гармонического ряда после этой дроби. Берём произвольное рациональное число в произвольной окрестности приближаемого действительного числа и сумму наибольшего возможного количества первых элементов этого остатка, не превышающую это рациональное число. Если при этом имеет место равенство, то требуемое разложение этого

рационального числа получено и теорема доказана. В противоречащем случае положительная рациональная разность этого рационального числа и этой суммы, строго меньшая наименьшей из всех дробей последнего разложения, представляется египетской дробью, то есть суммой непременно различных единичных дробей, поэтому меньших наименьшей из всех дробей последнего разложения. Тем самым требуемое разложение этого рационального числа получено и теорема доказана и в этом последнем случае.

Определение 3. Множество A с определённым на нём действием сложения конечного подмножества различных элементов этого множества называется конечно избыточно

разнослагаемо всюду частым (плотным) во множестве B тогда и только тогда, когда это множество A и целиком, и без любого своего именно конечного подмножества является разнослагаемо всюду частым (плотным) во множестве B.

Теорема 3. Множество всех единичных, или аликвотных, дробей конечно избыточно разнослагаемо всюду часто (плотно) во множестве положительных действительных чисел.

Доказательство. Первое доказательство дано в замечании к теореме 2. Кроме него, дадим здесь и другое, независимое доказательство с опорой на первое доказательство теоремы 2. По теореме 1 множество всех единичных, или аликвотных, дробей разнослагаемо всюду часто (плотно) во

множестве положительных действительных чисел. Рассмотрим изъятие из множества всех единичных, или аликвотных, дробей любого его именно конечного подмножества. Соответствующим числу элементов этого подмножества числом шагов последовательного изъятия из множества всех единичных, или аликвотных, дробей ровно по одному элементу и применением теоремы 2 и её доказательства на каждом шаге изъятия ровно по одному элементу доказывается, что и без любого своего именно конечного подмножества множество всех единичных, или аликвотных, дробей разнослагаемо всюду часто (плотно) во множестве положительных действительных чисел.

Определение 4. Множество A с определённым на нём действием сложения конечного подмножества различных элементов этого множества называется бесконечно избыточно разнослагаемо всюду частым (плотным) во множестве B тогда и только тогда, когда существует такое бесконечное подмножество этого множества A, что это множество A и целиком, и без именно этого своего бесконечного подмножества является разнослагаемо всюду частым (плотным) во множестве B.

Замечание. В определении 4 заменить квантор существования на квантор всеобщности нельзя. Ведь бесконечное подмножество даже бесконечного множества вполне может оказаться и совпадающим с самим этим

множеством. Изъятие совпадающего подмножества из даже бесконечного множества делает разность этих множества и подмножества именно пустым множеством, говорить о частоте (плотности) которого где бы то ни было бессмысленно.

Теорема 4. Множество всех единичных, или аликвотных, дробей бесконечно избыточно разнослагаемо всюду часто (плотно) во множестве положительных действительных чисел.

Доказательство. По теореме 1 множество всех единичных, или аликвотных, дробей разнослагаемо всюду часто (плотно) во множестве положительных действительных чисел. Поэтому для именно конструктивного завершения доказательства теоремы 4 достаточно явно указать хотя бы

одно бесконечное подмножество множества всех единичных, или аликвотных, дробей такое, что и без именно этого своего бесконечного подмножества множество всех единичных, или аликвотных, дробей является разнослагаемо всюду частым (плотным) во множестве всех положительных действительных чисел. Докажем, что этому условию удовлетворяет, например, такое собственное бесконечное подмножество множества всех единичных, или аликвотных, дробей, как множество всех элементов бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$1/2^n, n = 1, 2, 3, 4, \ldots .$$

Представляется естественной попытка использовать доказательства теоремы 2 и теоремы 3. По-прежнему

множество всех положительных рациональных чисел всюду часто (плотно) во множестве всех положительных действительных чисел. Поэтому в любой окрестности любого положительного действительного числа существует положительное рациональное число, бесконечным множеством способов представимое египетскими дробями, то есть конечными суммами конечных подмножеств различных единичных, или аликвотных, дробей. Рассмотрим любой из этих способов. Удалим из множества всех единичных, или аликвотных, дробей множество всех элементов бесконечной убывающей геометрической прогрессии

$$1/2^n,\ n = 1, 2, 3, 4, \ldots .$$

Если этот способ не использует ни одной из именно таких единичных, или аликвотных, дробей со знаменателями, являющимися степенями числа 2 с положительными целыми показателями, то подмножество всех единичных, или аликвотных, дробей, использованных этим способом, удовлетворяет всем условиям теоремы, что и требовалось доказать. Если, однако, этот способ использует хотя бы одну именно такую единичную, или аликвотную, дробь со знаменателем, являющимся степенью числа 2 с положительным целым показателем, то полностью, без изменений, применить прежний метод доказательства невозможно. Ведь приведённая выше формула

$$1/n = 1/(2n) + 1/(3n) + 1/(6n), n = 1, 2, 3, 4, ...$$

позволяет заменить изъятую единичную, или аликвотную, дробь 1/n суммой трёх единичных, или аликвотных, дробей

$$1/(2n) + 1/(3n) + 1/(6n).$$

Однако в данном случае изымаются все др<u>о</u>би

$$1/2^n,\ n = 1, 2, 3, 4, \ldots .$$

А для каждой из таких изымаемых дробей именно первая

$$1/(2n)$$

из трёх заменяющих единичных, или аликвотных, дробей как раз и принадлежит той же изъятой последовательности в качестве следующего её элемента с индексом на единицу больше.

Такой процесс замены отдельных единичных, или аликвотных, дробей имеющими равные заменяемым

дробям суммы соответствующими триадами единичных, или аликвотных, дробей продолжался до тех пор, пока ни одна из заменяющих дробей не была использована тем способом представления того рационального числа. Поскольку в том способе использована именно конечная сумма единичных, или аликвотных, дробей, то множество всех их знаменателей ограничено сверху. Поскольку при указанных заменах на каждом их шаге знаменатели заменяющих единичных, или аликвотных, дробей увеличиваются не менее чем вдвое, то через именно конечное число шагов замены все знаменатели заменяющих единичных, или аликвотных, дробей превзойдут верхнюю грань множества всех знаменателей единичных, или

аликвотных, дробей, использованных тем способом представления того рационального числа. Тем самым процесс последовательной замены отдельных единичных, или аликвотных, дробей через именно конечное число шагов замены единичных, или аликвотных, дробей имеющими равные заменяемым дробям суммы соответствующими триадами единичных, или аликвотных, дробей завершался тем, что ни одна из заменяющих единичных, или аликвотных, дробей не была использована тем способом представления того рационального числа.

Однако в данном случае изымается не одна дробь и не конечное множество дробей, а целая бесконечная последовательность единичных, или аликвотных, дробей

$$1/2^n, n = 1, 2, 3, 4, \ldots ,$$

причём замена каждой изъятой дроби приводит именно к следующей изъятой дроби. Поэтому такой процесс замен оказывается бесконечным, никогда не завершится, и прежний метод доказательства уже не работает. Однако прежнюю идею доказательства можно всё-таки заставить работать. Для этого естественно и вполне достаточно сохранять единичную, или аликвотную, дробь 1/1, прежнюю формулу

$$1/n = 1/(2n) + 1/(3n) + 1/(6n), n = 3, 5, 7, \ldots$$

сохранить только для единичных, или аликвотных, дробей с превышающими единицу нечётными знаменателями, а для единичных, или аликвотных, дробей с чётными

знаменателями изменить формулу замен изъятых единичных, или аликвотных, дробей так, чтобы эта формула, сохраняя идею умножения знаменателей заменяющих единичных, или аликвотных, дробей на ч<u>и</u>сла, непременно строго превышающие единицу, полностью исключала возможность принадлежности заменяющих дробей изъятой бесконечной последовательности единичных, или аликвотных, дробей

$$1/2^n, n = 1, 2, 3, 4, ...$$

Для этого вполне достаточна заменяющая единичные, или аликвотные, др<u>о</u>би с <u>чётными</u> знаменателями уж<u>е</u> не триадами, а диадами дробей формула

$$1/(2n) = 1/(3n) + 1/(6n), n = 1, 2, 3, 4, ...$$

с умножением знаменателей единичных, или аликвотных, дробей на каждом шаге замен как минимум на строго большее единицы число 1.5.

При этом в формуле

$$1/n = 1/(2n) + 1/(3n) + 1/(6n), n = 3, 5, 7, ...$$

только для единичных, или аликвотных, дробей с превышающими единицу нечётными знаменателями целое положительное число n по основной теореме арифметики о разложимости в произведение простых множителей непременно имеет превышающий 2 именно нечётный простой делитель, имеющийся в знаменателях и заменяемой дроби, и всех трёх заменяющих единичных, или аликвотных, дробей. А в формуле

$$1/(2n) = 1/(3n) + 1/(6n), n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

для единичных, или аликвотных, дробей с чётными знаменателями знаменатель каждой из двух заменяющих дробей

$$1/(3n), 1/(6n)$$

непременно имеет превышающий 2 именно нечётный простой делитель 3, всегда сохраняемый и при всех сопровождающихся умножением знаменателей на целые положительные числа последующих заменах единичных, или аликвотных, дробей.

Поэтому совершенно исключено, что какая бы то ни было из заменяющих единичных, или аликвотных, дробей может принадлежать изъятой бесконечной последовательности единичных, или аликвотных, дробей

$$1/2^n, n = 1, 2, 3, 4, \dots .$$

Подмножество всех единичных, или аликвотных, дробей, использованных этим способом, после совокупности всех соответствующих изъятий и добавлений единичных, или аликвотных, дробей удовлетворяет всем условиям теоремы, что и требовалось доказать.

Замечание. Существует бесконечное множество допустимо изымаемых бесконечных подпоследовательностей бесконечной последовательности всех единичных дробей, например любых бесконечных подпоследовательностей указанной геометрической прогрессии со знаменателем 1/2. Можно также изъять, например, бесконечную последовательность обращений простых чисел или любую её бесконечную подпоследовательность. А если изъять

бесконечную последовательность именно всех положительных чётных чисел, то исчезнет представимость положительных рациональных чисел, равных несократимым дробям с чётными знаменателями. Однако множество остающихся представимыми положительных рациональных чисел, равных несократимым дробям с нечётными знаменателями, остаётся всюду частым (плотным) во множестве всех положительных действительных чисел.

Определение 5. Множество A с определённым на нём действием сложения конечного подмножества различных элементов этого множества называется неизбыточно разнослагаемо всюду частым (плотным) во множестве B

тогда и только тогда, когда это множество A только именно целиком является разнослагаемо всюду частым (плотным) во множестве B, то есть без любого своего элемента утрачивает свойство быть разнослагаемо всюду частым (плотным) во множестве B.

Теорема 5. Множество элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии как бесконечной последовательности единичных, или аликвотных, дробей

$$1/2^n, n = 1, 2, 3, 4, ...$$

является неизбыточно разнослагаемо всюду частым (плотным) во множестве всех действительных чисел отрезка [0, 1] от нуля до единицы в обоих случаях включительно.

Доказательство. В первой части доказательства установим разнослагаемую всюду частоту (плотность) множества элементов этой прогрессии на отрезке [0, 1]. Рассмотрим произвольное действительное число a отрезка [0, 1] и произвольную окрестность этого действительного числа a. Разложим это действительное число a в конечную или бесконечную дробь в двоичной позиционной системе счисления $a = (0.a_1a_2a_3a_4...)_2$, где a_1, a_2, a_3, a_4, ... – равные или нулю, или единице цифры двоичного разложения числа a после в данном случае двоичной точки как разделителя целой и дробной частей записи двоичного числа в двоичной позиционной системе счисления. Дополнительно приведём

справа ещё и значение (величину) числа a в привычной десятичной позиционной системе счисления:

$$a = (0.a_1a_2a_3a_4\ldots)_2 = \Sigma_{n=1}{}^{\infty}a_n/2^n =$$

$$a_1(1/2^1) + a_2(1/2^2) + a_3(1/2^3) + a_4(1/2^4) + \ldots .$$

То есть такой записи произвольного действительного числа a отрезка [0, 1] от нуля до единицы в обоих случаях включительно соответствует сумма конечного

или бесконечного множества тех и только тех единичных, или аликвотных, дробей $1/2^n$, n = 1, 2, 3, 4, ... , которым соответствуют единицы и только единицы в качестве цифр этой двоичной записи действительного числа a в смысле равенства показателя степени 2 в знаменателе единичной, или аликвотной, дроби и порядкового номера цифры

двоичного разложения действительного числа а в двоичной позиционной системе счисления. Тогда как исключаются те и только те единичные, или аликвотные, дроби $1/2^n$, $n = 1, 2, 3, 4, ...$, которым соответствуют нули и только нули в качестве цифр этой двоичной записи действительного числа а в смысле равенства показателя степени 2 в знаменателе единичной, или аликвотной, дроби и порядкового номера цифры двоичного разложения действительного числа а в двоичной позиционной системе счисления. В частности, начало отрезка

$$0 = 0_2 = (0)_2 = (0.0000...)_2 = \Sigma_{n=1}{}^{\infty}0/2^n =$$
$$0(1/2^1) + 0(1/2^2) + 0(1/2^3) + 0(1/2^4) + ...$$

выражается просто нулём, то есть пустой суммой и полным отсутствием единичных, или аликвотных, дробей $1/2^n$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Конец отрезка

$$1 = 1_2 = (1)_2 = (0.1111\ldots)_2 = \Sigma_{n=1}{}^{\infty}1/2^n = 1/2^1 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + \ldots$$

выражается полной суммой всех единичных, или аликвотных, дробей $1/2^n$, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ с целесообразно допускаемыми здесь и в других подобных случаях классическими пределами и отвлечением от их односторонности. Каждое промежуточное между нулём и единицей действительное число a отрезка [0, 1], выражающееся именно <u>конечной</u> двоичной дробью

$$a = (0.a_1a_2a_3a_4...a_{m-1}1)_2 = \Sigma_{n=1}{}^{m-1}a_n/2^n + 1/2^m = a_1(1/2^1) + a_2(1/2^2) + ... + a_{m-1}(1/2^{m-1}) + 1(1/2^m),$$

где m – положительное целое число, дополнительно выражается и другим способом с заменой последней наличной единицы на нуль в двоичном разложении этого числ<u>а</u> a и одновременно с заменой всех последующих нулей на единицы:

$$a = (0.a_1a_2a_3a_4...a_{m-1}01111...)_2 = \Sigma_{n=1}{}^{m-1}a_n/2^n + \Sigma_{n=m+1}{}^{\infty}a_n/2^n = a_1(1/2^1) + a_2(1/2^2) + a_3(1/2^3) + a_4(1/2^4) + ... + a_{m-1}(1/2^{m-1}) + 1(1/2^{m+1}) + 1(1/2^{m+2}) + 1(1/2^{m+3}) + 1(1/2^{m+4}) + ...$$

Каждое из остальных действительных чисел a отрезка [0, 1] от нуля до единицы в обоих случаях включительно выражается непременно бесконечной двоичной дробью в

двоичной позиционной системе счисления, причём периодической двоичной дробью, начиная с некоторой цифры, для рациональных чисел и непериодической двоичной дробью для иррациональных чисел. Ограничение действительного числа a в его двоичной записи в двоичной позиционной системе счисления m цифрами после разделительной точки может привести к уменьшению этого действительного числа a не более чем на число, двоичная запись которого в двоичной позиционной системе счисления имеет нулевую целую часть, нулевые первые m цифр после разделительной точки и все дальнейшие единичные цифры:

$$\Sigma_{n=m+1}{}^{\infty}1/2^n = 1/2^m.$$

Выбором достаточно большого целого положительного числа m указанная предельная абсолютная погрешность ограничения любого действительного числа a первыми m цифрами может быть сделана сколь угодно малой. Поэтому в любой окрестности любого действительного числа наличествует именно конечная двоичная дробь

$$a = (0.a_1a_2a_3a_4...a_{m-1}1)_2 = \Sigma_{n=1}^{m-1}a_n/2^n + 1/2^m =$$
$$a_1(1/2^1) + a_2(1/2^2) + ... + a_{m-1}(1/2^{m-1}) + 1(1/2^m).$$

В качестве такой конечный двоичной дроби достаточно взять двоичную запись этого действительного числа a с достаточно большим числом m двоичных цифр после разделительной точки. Отсюда следует разнослагаемая всюду частота (плотность) множества элементов бесконечно

убывающей геометрической прогрессии как бесконечной последовательности единичных, или аликвотных, дробей $1/2^n$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ во множестве всех действительных чисел отрезка [0, 1] от нуля до единицы в обоих случаях включительно.

Вторая часть доказательства теоремы 5 требует установить <u>неизбыточность</u> этой разнослагаемой всюду частоты (плотности). Сумма именно всех элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии как бесконечной последовательности единичных, или аликвотных, дробей $1/2^n$, $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ равна как раз единице, то есть концу отрезка [0, 1] от нуля до единицы в обоих случаях включительно. Изъятие одной любой единичной, или

аликвотной, дробu $1/2^m$, $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$ уменьшает эту сумму именно на эту величину $1/2^m$, $m = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Отсюда следует, что невозможна разнослагаемая всюду частота (плотность) множества элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии как бесконечной последовательности единичных, или аликвотных, дробей

$$1/2^n,\ n = 1, 2, 3, 4, \ldots , m - 2, m - 1, m + 1, m + 2, \ldots$$

во множестве всех действительных чисел полуотрезка $(1 - 1/2^m, 1]$, а следовательно, и в любом надмножестве этого полуотрезка, в частности во множестве всех действительных чисел отрезка [0, 1] от нуля до единицы в обоих случаях включительно.

Тем самым вторая часть теоремы 5 доказана.

Замечание. Представляет интерес выяснить, является ли такой полуотрезок единственным изъятием из отрезка [0, 1] или имеются и другие изъятия из отрезка [0, 1], вынуждаемые изъятием одной любой единичной, или аликвотной, дроби

$$1/2^m,\ m = 1, 2, 3, 4, \dots .$$

Изъятие этой дроби ведёт к тому, что в двоичной записи числа a

$$a = (0.a_1a_2a_3a_4\dots a_{m-2}a_{m-1}a_ma_{m+1}a_{m+2}\dots)_2 = \Sigma_{n=1}{}^{\infty}a_n/2^n = a_1(1/2^1) + a_2(1/2^2) + a_3(1/2^3) + a_4(1/2^4) + \dots + a_{m-2}(1/2^{m-2}) + a_{m-1}(1/2^{m-1}) + a_m(1/2^m) + a_{m+1}(1/2^{m+1}) + a_{m+2}(1/2^{m+2}) + \dots$$

на позиции m после двоичного разделителя цифра может быть только нулём и не может быть единицей.

На остальные цифры изъятие одной любой единичной, или аликвотной, дроби

$$1/2^m, m = 1, 2, 3, 4, ...$$

не оказывает влияния, так что каждая из этих цифр может быть и нулём, и единицей. То есть с каждым изымаемым из отрезка [0, 1] числом, в котором на позиции m после двоичного разделителя стоит единица, может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие (биекцию) оставляемое число отрезка [0, 1], имеющее цифру нуль на позиции m после двоичного разделителя, а во всех остальных цифрах эти два числа ничем не отличаются друг от друга. Поэтому следует ожидать, что суммарная мера

именно всех изъятий из отрезка [0, 1], вынуждаемых изъятием одной любой единичной, или аликвотной, дроби

$$1/2^m,\ m = 1, 2, 3, 4, \dots ,$$

должна составлять ровно половину единичной длины отрезка [0, 1].

Если

$$m = 1,$$

то есть из всех элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии как бесконечной последовательности единичных, или аликвотных, дробей

$$1/2^n,\ n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

изымается её именно первый элемент 1/2, то из отрезка [0, 1] изымается только единственный (соответствующий

единичной первой цифре в двоичной записи действительных чисел отрезка [0, 1]) уже знакомый нам полуотрезок

$$(1 - 1/2^m, 1] = (1 - 1/2, 1] = (1/2, 1]$$

длиной именно 1/2 в соответствии с ожиданиями.

Если

$$m = 2,$$

то есть из всех элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии как бесконечной последовательности единичных, или аликвотных, дробей

$$1/2^n, n = 1, 2, 3, 4, ...$$

изымается её именно второй элемент $1/2^2$, то из отрезка [0, 1] изымается теоретико-множественное объединение

$$(1/2 - 1/2^2, 1/2) \cup (1 - 1/2^2, 1]$$

(соответствующего нулевой первой цифре и единичной второй цифре в двоичной записи действительных чисел отрезка [0, 1]) интервала

$$(1/2 - 1/2^2, 1/2)$$

и (соответствующего единичной первой цифре и единичной второй цифре в двоичной записи действительных чисел отрезка [0, 1]) уже знакомого нам полуотрезка

$$(1 - 1/2^m, 1] = (1 - 1/2^2, 1],$$

итого два изъятия из отрезка [0, 1], каждое изъятие длиной $1/2^2$, суммарная длина изъятий из отрезка [0, 1] составляет именно 1/2 в соответствии с ожиданиями.

Если $m = 3$, то есть из всех элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии как бесконечной последовательности единичных, или аликвотных, дробей

$$1/2^n,\ n = 1, 2, 3, 4, ...$$

изымается её именно третий элемент $1/2^3$, то из отрезка $[0, 1]$ изымается теоретико-множественное объединение

$$(1/2^2 - 1/2^3, 1/2^2) \cup (1/2 - 1/2^3, 1/2) \cup (3/2^2 - 1/2^3, 3/2^2) \cup (1 - 1/2^3, 1]$$

(соответствующего нулевой первой цифре, нулевой второй цифре и единичной третьей цифре в двоичной записи действительных чисел отрезка $[0, 1]$) интервала

$$(1/2^2 - 1/2^3, 1/2^2),$$

(соответствующего нулевой первой цифре, единичной второй цифре и единичной третьей цифре в двоичной записи действительных чисел отрезка [0, 1]) интервала

$$(2/2^2 - 1/2^3, 2/2^2) = (1/2 - 1/2^3, 1/2),$$

(соответствующего единичной первой цифре, нулевой второй цифре и единичной третьей цифре в двоичной записи действительных чисел отрезка [0, 1]) интервала

$$(3/2^2 - 1/2^3, 3/2^2)$$

и (соответствующего единичной первой цифре, единичной второй цифре и единичной третьей цифре

в двоичной записи действительных чисел отрезка [0, 1]) уже знакомого нам полуотрезка

$$(1 - 1/2^m, 1] = (1 - 1/2^3, 1],$$

итого 2^2 изъятий из отрезка [0, 1], каждое изъятие длиной $1/2^3$, суммарная длина изъятий из отрезка [0, 1] составляет именно 1/2 в соответствии с ожиданиями.

Если в общем случае из всех элементов бесконечно убывающей геометрической прогрессии как бесконечной последовательности единичных, или аликвотных, дробей

$$1/2^n, n = 1, 2, 3, 4, ...$$

изымается одна любая единичная, или аликвотная, дробь

$$1/2^m, m = 1, 2, 3, 4, ... ,$$

то из отрезка [0, 1] изымается теоретико-множественное объединение

$$(1/2^{m-1} - 1/2^m, 1/2^{m-1}) \cup (2/2^{m-1} - 1/2^m, 2/2^{m-1}) \cup (3/2^{m-1} - 1/2^m, 3/2^{m-1}) \cup \ldots \cup ((2^{m-1} - 1)/2^{m-1} - 1/2^m, (2^{m-1} - 1)/2^{m-1}) \cup (2^{m-1}/2^{m-1} - 1/2^m, 2^{m-1}/2^{m-1}],$$

состоящее из $(2^{m-1} - 1)$ интервалов и (соответствующего единичным первым m цифрам в двоичной записи действительных чисел отрезка [0, 1]) уже знакомого нам полуотрезка

$$(2^{m-1}/2^{m-1} - 1/2^m, 2^{m-1}/2^{m-1}] = (1 - 1/2^m, 1],$$

итого 2^{m-1} изъятий из отрезка [0, 1], каждое изъятие длиной $1/2^m$, суммарная длина изъятий из отрезка [0, 1] составляет именно 1/2 в соответствии с ожиданиями.

2.4.2. ПОДЫТОГ И НАДЫТОГ

Хорошо известны понятия подпоследовательности и подмножества, подсистемы и надсистемы. Известно, однако крайне мало используется понятие надмножества.

Определение. Пусть система действий преобразует систему предметов действий, или данность, в систему итогов действий, или итог. Подданностью (относительно этой данности) называется подсистема данности как системы предметов действий. Подытогом (относительно этого итога) называется итог преобразования этой подданности этой системой действий. Надданностью (относительно этой данности) называется надсистема данности как системы предметов действий. Надытогом (относительно этого итога)

называется итог преобразования этой надданности этой системой действий.

Примеры.

Для объединения элементов в множество как системы действий данностью является совокупность элементов, итогом – множество этих элементов, подданностью – частичная совокупность элементов, подытогом – подмножество элементов, надданностью – расширенная совокупность элементов, надытогом – надмножество элементов.

Для объединения элементов в систему как системы действий данностью является совокупность элементов системы, итогом – система этих элементов с отношениями

между элементами, поддáнностью – частичная совокупность элементов системы, подытогом – подсистема элементов с отношениями между элементами, наддáнностью – расширенная совокупность элементов, надытогом – надсистема элементов с отношениями между элементами.

Для объединения элементов в последовательность как системы действий данностью является совокупность элементов последовательности, итогом – последовательность этих элементов, поддáнностью – частичная совокупность элементов последовательности, подытогом – подпоследовательность элементов,

наддaнностью – расширенная совокупность элементов, надытогом – надпоследовательность элементов.

Для сложения как системы действий данностью является совокупность слагаемых, итогом – сумма этих слагаемых, поддaнностью – частичная совокупность слагаемых, подытогом – подсумма как сумма частичной совокупности слагаемых, наддaнностью – расширенная совокупность слагаемых, надытогом – надсумма как сумма расширенной совокупности слагаемых.

Для умножения как системы действий данностью является совокупность сомножителей, итогом – произведение этих сомножителей, поддaнностью – частичная совокупность сомножителей, подытогом – подпроизведение как

произведение частичной совокупности сомножителей, наддaнностью – расширенная совокупность сомножителей, надытогом – надпроизведение как произведение расширенной совокупности сомножителей.

Для рядообразования (образования ряда) как системы действий данностью является совокупность слагаемых элементов ряда, итогом – сумма ряда, поддaнностью – частичная совокупность слагаемых элементов ряда, подытогом – подряд как сумма частичной совокупности слагаемых элементов ряда, наддaнностью – расширенная совокупность слагаемых элементов ряда, надытогом – надряд как сумма расширенной совокупности слагаемых элементов ряда.

Для объединения множеств как системы действий данностью является совокупность множеств, итогом – объединение этих множеств, подданностью – частичная совокупность множеств, подытогом – подобъединение как объединение частичной совокупности множеств, надданностью – расширенная совокупность множеств, надытогом – надобъединение как объединение расширенной совокупности множеств.

Для пересечения множеств как системы действий данностью является совокупность множеств, итогом – пересечение этих множеств, подданностью – частичная совокупность множеств, подытогом – подпересечение (в которое включено пересечение всех множеств) как

пересечение частичной совокупности множеств, надданностью – расширенная совокупность множеств, надытогом – надпересечение (которое включено в пересечение всех множеств) как пересечение расширенной совокупности множеств.

Для дизъюнкции как системы действий данностью является совокупность высказываний, итогом – дизъюнкция этих высказываний, подданностью – частичная совокупность высказываний, подытогом – поддизъюнкция как дизъюнкция частичной совокупности высказываний, надданностью – расширенная совокупность высказываний,

надытогом – наддизъюнкция как дизъюнкция расширенной совокупности высказываний.

Для конъюнкции как системы действий данностью является совокупность высказываний, итогом – конъюнкция этих высказываний, подданностью – частичная совокупность высказываний, подытогом – подконъюнкция как конъюнкция частичной совокупности высказываний, надданностью – расширенная совокупность высказываний, надытогом – надконъюнкция как конъюнкция расширенной совокупности высказываний.

Замечание. Здесь во всех случаях расширенная совокупность является именно произвольным надмножеством полной совокупности, а частичная совокупность является именно произвольным подмножеством полной совокупности. Это вопреки общепринятому большому ограничению общности в определении частичных сумм ряда: во-первых, лишь конечного подмножества его элементов, во-вторых, эти элементы берутся непременно подряд и, в-третьих, эти элементы берутся непременно с самого начала ряда.

2.4.3. ОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИБЛИЖЕНИЯ

2.4.3.1. ПОСТАНОВКА ОБЩЕЙ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Дана произвольная система S. Требуется найти наилучшее в том или ином разумном смысле приближение системы S приближающей системой $S_a(P)$, определяемой одним параметром P и принадлежащей тому или иному множеству

$$\{_{a\in A}S_a(P)\}$$

искомых приближающих систем, где A является множеством индексов a. Таким образом, общая однопараметрическая задача приближения по существу сводится к определению именно наилучшего значения p одного параметра P.

Вместе с данной системой S и с искомой приближающей системой $S_a(P)$ общая однопараметрическая задача приближения может быть непрерывной, разрывной (дискретной) или смешанной непрерывно-разрывной, или смешанной непрерывно-дискретной.

Примером непрерывной общей однопараметрической задачи приближения является задача наилучшего приближения заданной действительной функции

$$y = f(x),$$

непрерывной на заданном отрезке, наилучшей искомой постоянной функцией

$$y = c$$

из заданного множества постоянных функций

$$\{_{c \in R}(y = c)\}$$

общего вида

$$y = C,$$

где

C = constant – произвольная действительная постоянная, единственный параметр задачи;

c = constant – значение произвольной действительной постоянной C, наилучшее в смысле минимакса абсолютных величин отклонений, – наилучшее значение единственного параметра задачи;

R – множество всех действительных чисел;

минимакс абсолютных величин отклонений – разумный смысл и мерило, или критерий, наилучшего, или оптимальности.

В других примерах непрерывных общих однопараметрических задач приближения вместо постоянных функций могут использоваться также однопараметрические прямые пропорциональные функции

$$y = cx$$

общего вида

$$y = Cx$$

и/или равенство интегралов заданной и искомой приближающей функций на заданном отрезке как критерий оптимальности.

Примером разрывной (дискретной) общей однопараметрической задачи приближения является задача

наилучшего приближения заданной системы точек плоскости, по существу действительной функции

$$y = f(x)$$

с дискретной областью определения, искомой наилучшей постоянной функцией

$$y = c$$

из заданного множества постоянных функций

$$\{_{c\in R}(y = c)\}$$

общего вида

$$y = C,$$

где

C = constant – произвольная действительная постоянная, единственный параметр задачи;

c = constant – значение произвольной действительной постоянной C, наилучшее в смысле минимакса абсолютных величин отклонений, – наилучшее значение единственного параметра задачи;

R – множество всех действительных чисел;

минимакс абсолютных величин отклонений – разумный смысл и мерило, или критерий, наилучшего, или оптимальности.

В других примерах <u>разрывных</u> (<u>дискретных</u>) общих однопараметрических задач приближения вместо постоянных функций могут использоваться также однопараметрические прямые пропорциональные функции

$$y = cx$$

общего вида

$$y = Cx$$

и/или минимум суммы квадратов отклонений по методу наименьших квадратов Гаусса и Лежандра как критерий оптимальности.

Примером смешанной непрерывно-разрывной, или смешанной непрерывно-дискретной, общей однопараметрической задачи приближения является задача наилучшего приближения заданной системы, одни части которой непрерывны, например кривые декартовой плоскости, тогда как другие части заданной системы дискретны, например отдельные точки той же плоскости, приближающие прямые принадлежат тем же множествам

или постоянных, или прямо пропорциональных зависимостей, а в качестве общего критерия оптимальности остаётся критерий минимакса абсолютных величин отклонений.

Замечание. Общее линейное приближение общего вида

$$y = Cx + D$$

является не однопараметрическим, а двухпараметрическим, но может стать однопараметрическим, если есть возможность один из этих двух параметров C или D зафиксировать или если оба этих параметра вполне определяются единственным общим третьим параметром.

2.4.3.2. СУЩНОСТЬ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИИ РЕШЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Сущность общей методологии решения однопараметрических задач приближения задаётся её следующим общим алгоритмом:

1. Ищется и применяется к искомой приближающей системе $S_a(P)$ её взаимно однозначное преобразование T, явно выражающее единственный параметр P решаемой задачи через эту искомую приближающую систему S_a:

$$P = T(S_a).$$

2. То же самое взаимно однозначное преобразование T применяется и к заданной системе S.

3. Решается полученная общая задача наилучшего приближения в образах

$$T(S),\ P = T(S_a)$$

заданной S и искомой приближающей $S_a(P)$ систем и отыскивается наилучшее значение p единственного параметра оптимизации P.

4. Осуществляется обратное преобразование полученного решения общей задачи наилучшего приближения в образах

$$T(S),\ P = T(S_a)$$

заданной S и искомой приближающей систем, приводящее к искомому решению $S_a(p)$ исходной общей задачи в прообразах

$$S,\ S_a(P),$$

то есть в самих заданной и искомой приближающей системах.

Замечание. Цель явного выделения единственного параметра оптимизации P заключается в резком упрощении задачи оптимизации, в том числе благодаря наглядности, позволяющей сосредоточить внимание именно на этом единственном параметре оптимизации P, а также благодаря облегчению выбора наиболее обоснованных критериев оптимизации. Выбор искомого преобразования T осуществляется на основе наблюдения за поведением заданной и приближающей систем, в том числе по всеобщим методологиям именно систематических вычислительных экспериментов с синергией анализа и синтеза итогов этих экспериментов, по общему методу наведения, или индукции. Главная идея общей методологии решения однопараметрических задач приближения по существу подобна методу решения уравнения с одним неизвестным путём

последовательных равносильных взаимно однозначных и поэтому обратимых преобразований этого уравнения, направленных на явное выделение этого неизвестного и в конечном счёте приводящих это уравнение к искомому виду равенства, с одной стороны, этого неизвестного как переменной или параметра, а с другой стороны, искомого значения этого неизвестного.

Примеры применения этой общей методологии решения однопараметрических задач приближения будут даны ниже, а именно в системе методологий высокоточного приближения именно всех гармонических чисел как частичных сумм гармонического ряда с большим уточнением приближённой формулы Эйлера.

2.4.4. ОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ РЕШЕНИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИБЛИЖЕНИЯ

2.4.4.1. ПОСТАНОВКА ОБЩЕЙ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Дана произвольная система S. Требуется найти наилучшее в том или ином разумном смысле приближение системы S приближающей системой $S_a(Q)$, которая определяется системой Q параметров P_γ из системы параметров $({}_{\gamma\in\Gamma}P_\gamma)$ и принадлежит тому или иному множеству

$$\{{}_{a\in A}S_a(Q)\}$$

искомых приближающих систем, где Γ является множеством индексов γ, тогда как A есть множество индексов a. Таким образом, общая многопараметрическая

задача приближения по существу сводится к определению системы ($_{\gamma\in\Gamma}p_\gamma$) именно наилучших значений p_γ системы параметров ($_{\gamma\in\Gamma}P_\gamma$).

Вместе с данной системой S и с искомой приближающей системой $S_a(Q)$ общая многопараметрическая задача приближения может быть непрерывной, разрывной (дискретной) или смешанной непрерывно-разрывной, или смешанной непрерывно-дискретной.

Примером непрерывной общей многопараметрической задачи приближения является задача наилучшего приближения заданной действительной функции

$$y = f(x),$$

непрерывной на заданном отрезке, искомой наилучшей многочленной функцией

$$y = \Sigma_{j=0}{}^{h}c_jx^j$$

из заданного множества многочленных функций

$$\{_{c(j)\in R}(y = \Sigma_{j=0}{}^{H}c_jx^j)\}$$

общего вида

$$y = \Sigma_{j=0}{}^{H}C_jx^j,$$

где

C_j = constant – произвольная действительная постоянная, единственный параметр задачи;

c_j = constant – значение произвольной действительной постоянной C_j, наилучшее в смысле минимакса

абсолютных величин отклонений, – наилучшее значение параметра C_j задачи;

R – множество всех действительных чисел;

минимакс абсолютных величин отклонений – разумный смысл и мерило, или критерий, наилучшего, или оптимальности.

В других примерах непрерывных общих многопараметрических задач приближения вместо многочленных функций могут использоваться также многопараметрические неалгебраические функции, например степенные с нецелыми показателями степеней, показательные, логарифмические, тригонометрические функции и/или равенство интегралов заданной и искомой

приближающей функций на заданном отрезке как критерий оптимальности.

Примером разрывной (дискретной) общей многопараметрической задачи приближения является задача наилучшего приближения заданной системы точек плоскости, по существу действительной функции

$$y = f(x)$$

с дискретной областью определения, наилучшей искомой многочленной функцией

$$y = \Sigma_{j=0}^{h} c_j x^j$$

из заданного множества многочленных функций

$$\{_{c(j)\in R}(y = \Sigma_{j=0}^{H} c_j x^j)\}$$

общего вида

$$y = \Sigma_{j=0}{}^{H} C_j x^j,$$

где

C_j = constant – произвольная действительная постоянная, единственный параметр задачи;

c_j = constant – значение произвольной действительной постоянной C_j, наилучшее в смысле минимакса абсолютных величин отклонений, – наилучшее значение параметра C_j задачи;

R – множество всех действительных чисел;

минимакс абсолютных величин отклонений – разумный смысл и мерило, или критерий, оптимальности.

В других примерах разрывных (дискретных) общих многопараметрических задач приближения вместо

многочленных функций могут использоваться также многопараметрические неалгебраические функции, например степенные с нецелыми показателями степеней, показательные, логарифмические, тригонометрические функции и/или минимум суммы квадратов отклонений по методу наименьших квадратов Гаусса и Лежандра как критерий оптимальности.

Вместе с данной системой S и с искомой приближающей системой $S_a(Q)$ общая многопараметрическая задача приближения может быть непрерывной, разрывной (дискретной) или смешанной непрерывно-разрывной, или смешанной непрерывно-дискретной.

Примером смешанной непрерывно-разрывной, или смешанной непрерывно-дискретной, общей многопараметрической задачи приближения является задача наилучшего приближения заданной системы, одни части которой непрерывны, например кривые декартовой плоскости, тогда как другие части заданной системы дискретны, например отдельные точки той же плоскости, приближающие кривые изображают многочленные функции, могут использоваться также многопараметрические неалгебраические функции, например степенные с нецелыми показателями степеней, показательные, логарифмические, тригонометрические функции, а в качестве общего критерия оптимальности

остаётся критерий минимакса абсолютных величин отклонений.

Замечание. Общее линейное приближение общего вида

$$y = Cx + D$$

является двухпараметрическим, но может стать однопараметрическим, если есть возможность один из этих двух параметров C или D зафиксировать или если оба этих параметра вполне определяются единственным общим третьим параметром.

2.4.4.2. СУЩНОСТЬ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИИ РЕШЕНИЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Сущность общей методологии решения многопараметрических задач приближения задаётся её следующим общим алгоритмом:

1. Ищется и применяется к искомой приближающей системе $S_a(Q)$ система её взаимно однозначных преобразований T_γ, явно выражающих соответствующие, то есть имеющие те же индексы γ, параметры P_γ решаемой задачи через эту искомую приближающую систему S_a:

$$P_\gamma = T_\gamma(S_a).$$

2. Те же самые взаимно однозначные преобразования T_γ применяются и к заданной системе S.

3. Решается полученная общая задача наилучшего приближения в образах

$$T_\gamma(S),\ P_\gamma = T_\gamma(S_a),\ \gamma \in \Gamma$$

заданной S и искомой приближающей $S_a(Q)$ систем и отыскивается система наилучших значений p_γ системы Q параметров оптимизации P_γ.

4. Осуществляется система обратных преобразований полученного решения общей задачи наилучшего приближения в образах

$$T_\gamma(S),\ P_\gamma = T_\gamma(S_a),\ \gamma \in \Gamma$$

заданной S и искомой приближающей систем, приводящая к искомому решению $S_a(Q)$ именно при системе наилучших значений p_γ всех параметров P_γ, то есть при системе равенств

$$P_\gamma = p_\gamma,\ \gamma \in \Gamma,$$

исходной общей задачи в прообразах

$$S,\ S_a(Q),$$

то есть в самих заданной и искомой приближающей системах.

Замечание. Цель явного выделения системы параметров оптимизации P_γ заключается в резком упрощении задачи оптимизации, в том числе благодаря наглядности, позволяющей сосредоточить внимание именно на этой

системе параметров оптимизации P_γ, а также благодаря облегчению выбора наиболее обоснованных критериев оптимизации. Выбор искомой системы преобразований T_γ осуществляется на основе наблюдения за поведением заданной и приближающей систем, в том числе по всеобщим методологиям именно систематических вычислительных экспериментов с синергией анализа и синтеза итогов этих экспериментов, по общему методу наведения, или индукции. Главная идея общей методологии решения многопараметрических задач приближения по существу подобна методу решения совокупностей уравнений со многими неизвестными путём таких последовательных равносильных взаимно однозначных и

поэтому обратимых преобразований этих совокупностей уравнений, которые направлены на явное выделение этих неизвестных и в конечном счёте приводят совокупность уравнений к искомому виду совокупности равенств, с одной стороны, этих неизвестных как переменных или параметров, а с другой стороны, искомых значений этих неизвестных.

Примеры применения этой общей методологии решения многопараметрических задач приближения будут даны ниже, а именно в системе методологий высокоточного приближения именно всех гармонических чисел как частичных сумм гармонического ряда с большим уточнением приближённой формулы Эйлера.

2.4.5. ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЯ РАЗЛИЧИЙ ОДИНАКОВО ИНДЕКСИРОВАННЫХ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ РАЗБИЕНИЙ МНОЖЕСТВА

Представляется целесообразным предварить краткими разъяснениями смысла и значимости формальное общее определение, по существу являющееся целой системой определений.

Измерения различий разбиений множества представляют большой общенаучный и практический интерес ввиду жизненной необходимости разного рода упорядочений, систематизаций и классификаций.

Определение. Пусть

W – множество;

$$P: W = \cup_{j\in J}{}^{P}W_j$$

– произвольное систематическое индексированное разбиение множества W, то есть представление множества W в виде объединения именно системы непустых непересекающихся подмножеств $^{P}W_j$ множества W по разбиению P, имеющих системы j индексов из множества J систем индексов;

$$Q: W = \cup_{j\in J}{}^{Q}W_j$$

– произвольное систематическое индексированное разбиение того же множества W, то есть представление множества W в виде объединения именно системы

непустых непересекающихся подмножеств $^{Q}W_j$ множества W по разбиению Q, имеющих те же системы j индексов из того же множества J систем индексов;

V – произвольное подмножество множества W;

m – такая определённая на множестве W мера, что все указанные множество и подмножества и все их пересечения и объединения измеримы этой мерой.

Тогда

объединение пересечений частей (непустых непересекающихся подмножеств), имеющих совпадающие системы j индексов, в обоих разбиениях

$$\cup_{j\in J}\ {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j$$

называется областью совпадения разбиений P и Q;

мера

$$m(\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)$$

области совпадения разбиений P и Q называется <u>абсолютной мерой совпадения</u> разбиений P и Q;

отношение

$$m(\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)/m(W)$$

абсолютной меры совпадения разбиений P и Q к мере множества W называется <u>относительной мерой совпадения</u> разбиений P и Q;

дополнение

$$W \setminus \cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j$$

области совпадения разбиений P и Q до множества W называется <u>областью различия</u> разбиений P и Q;

мера

$$\mathbf{m(W \setminus \cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)}$$

области различия разбиений P и Q называется <u>абсолютной мерой различия</u> разбиений P и Q;

отношение

$$\mathbf{m(W \setminus \cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)/m(W)}$$

абсолютной меры различия разбиений P и Q к мере множества W называется <u>относительной мерой различия</u> разбиений P и Q;

пересечение

$$\mathbf{V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)}$$

произвольного подмножества V с областью совпадения разбиений P и Q называется <u>областью совпадения</u> разбиений P и Q <u>на подмножестве</u> V;

мера

$$m(V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j))$$

области совпадения разбиений P и Q на подмножестве V называется <u>абсолютной мерой совпадения</u> разбиений P и Q <u>на подмножестве</u> V;

отношение

$$m(V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j))/m(V)$$

абсолютной меры совпадения разбиений P и Q на подмножестве V к мере подмножества V называется <u>относительной мерой совпадения</u> разбиений P и Q <u>на подмножестве</u> V;

дополнение

$$V \setminus V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)$$

области совпадения разбиений P и Q на подмножестве V до подмножества V называется областью различия разбиений P и Q на подмножестве V;

мера

$$m(V \setminus V \cap (\cup_{j\in J} {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j))$$

области различия разбиений P и Q на подмножестве V называется абсолютной мерой различия разбиений P и Q на подмножестве V;

отношение

$$m(V \setminus V \cap (\cup_{j\in J} {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j))/m(V)$$

абсолютной меры различия разбиений P и Q на подмножестве V к мере подмножества V называется относительной мерой различия разбиений P и Q на подмножестве V.

Это определение и общие свойства множеств и их разбиений и мер позволяют сделать целый ряд выводов.

Следствия.

1. Все указанные абсолютные и относительные меры являются неотрицательными действительными числами.

2. Объединение непересекающихся области совпадения разбиений P и Q и области различия разбиений P и Q на всём множестве W равно этому множеству и является его разбиением:

$$(\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j) \cap (W \setminus \cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j) = \emptyset;$$

$$(\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j) \cup (W \setminus \cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j) = W.$$

3. Объединение непересекающихся области совпадения разбиений P и Q и области различия разбиений P и Q

на подмножестве V равно этому подмножеству V и является его разбиением:

$$(V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)) \cap (V \setminus V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)) = \emptyset;$$

$$(V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)) \cup (V \setminus V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)) = V.$$

4. Сумма абсолютных мер области совпадения разбиений P и Q и области различия разбиений P и Q на всём множестве W равна мере этого множества W:

$$m(\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j) + m(W \setminus \cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j) = m(W).$$

5. Сумма абсолютных мер области совпадения разбиений P и Q и области различия разбиений P и Q на подмножестве V равна мере этого подмножества V:

$$m(V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)) + m(V \setminus V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)) = m(V).$$

6. Сумма относительных мер области совпадения разбиений P и Q и области различия разбиений P и Q на всём множестве W равна единице:

$$m(\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)/m(W) + m(W \setminus \cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)/m(W) = 1.$$

7. Сумма относительных мер области совпадения разбиений P и Q и области различия разбиений P и Q на подмножестве V равна единице:

$$m(V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j))/m(V) + m(V \setminus V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j))/m(V) = 1.$$

Замечание. В этом формальном определении буквой j обозначена целая система индексов, только в простейшем частном случае являющаяся одиночным индексом. Далее по сложности идут относительно простые и привычные

двойные, тройные и вообще кратные индексы, например для многомерных пространств. В общем случае одна буква j обозначает сколь угодно сложную систему индексов. Соответственно разбиения являются именно систематическими индексированными, жёстко привязанными к этим системам индексов, составляющим множество J, и этим принципиально отличаются от обычных классических разбиений, которые лишены такой жёсткой индексации и свободно перестановочны. Обычное классическое разбиение является не системой непересекающихся подмножеств, объединение которых равно разбиваемому множеству, а бесструктурным множеством непересекающихся подмножеств, объединение

которых равно разбиваемому множеству. При этом отсутствует жёсткая привязка таких непересекающихся подмножеств к индексам, используемым только для удобства выражения общего количества таких непересекающихся подмножеств.

Примеры применения этой теории измерения различий одинаково индексированных систематических разбиений множества будут даны ниже, а именно в системе методологий высокоточного приближения именно всех гармонических чисел как частичных сумм гармонического ряда с большим уточнением приближённой формулы Эйлера.

2.4.6. ТЕОРИЯ АБСОЛЮТНЫХ И ОТНОСИТЕЛЬНЫХ МЕР ПРАВИЛЬНОСТИ И НЕПРАВИЛЬНОСТИ РАЗБИЕНИЯ

Представляется целесообразным предварить краткими разъяснениями смысла и значимости формальное общее определение, по существу являющееся целой системой определений.

Известны оценки точности и ошибок приближений, даваемые абсолютными и относительными погрешностями, в частности позволяющими оценить приближённые формулы по итогам (результатам) применения приближённых формул.

Если приближённая формула используется или может быть использована для разбиения того или иного множества, то такое разбиение тоже является итогом (результатом) применения этой приближённой формулы, так что и отклонение этого разбиения от правильного разбиения даёт дополнительную оценку качества этой приближённой формулы.

Эта дополнительная оценка тем более важна, что в окрестностях границ частей разбиения того или иного множества небольшие различия в значениях вполне могут привести и часто приводят к перемещениям элементов множества из одной части его разбиения в другую часть. А это может иметь принципиальное значение.

Определение. Пусть

W – множество;

$$P: W = \cup_{j\in J} {}^{P}W_j$$

– произвольное систематическое индексированное разбиение множества W, то есть представление множества W в виде объединения именно системы непустых непересекающихся подмножеств ${}^{P}W_j$ множества W по разбиению P, имеющих системы j индексов из множества J систем индексов;

$$Q: W = \cup_{j\in J} {}^{Q}W_j$$

– являющееся или по некоторому правилу или критерию считающееся правильным систематическое индексированное разбиение того же множества W, то есть

представление множества W в виде объединения именно системы непустых непересекающихся подмножеств $^{Q}W_{j}$ множества W по разбиению Q, имеющих те же системы j индексов из того же множества J систем индексов;

V – произвольное подмножество множества W;

m – такая определённая на множестве W мера, что все указанные множество и подмножества и все их пересечения и объединения измеримы этой мерой.

Тогда объединение пересечений частей (непустых непересекающихся подмножеств), имеющих совпадающие системы j индексов, в обоих разбиениях

$$\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_{j} \cap {}^{Q}W_{j}$$

называется областью правильности разбиения P;

мера

$$m(\cup_{j\in J}\ {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)$$

области правильности разбиения P называется <u>абсолютной мерой правильности</u> разбиения P;

отношение

$$m(\cup_{j\in J}\ {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)/m(W)$$

абсолютной меры правильности разбиения P к мере множества W называется <u>относительной мерой правильности</u> разбиения P;

дополнение

$$W \setminus \cup_{j\in J}\ {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j$$

области правильности разбиения P до множества W называется <u>областью неправильности</u> разбиения P;

мера

$$\mathbf{m(W \setminus \cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)}$$

области неправильности разбиения P называется <u>абсолютной мерой неправильности</u> разбиения P;

отношение

$$\mathbf{m(W \setminus \cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)/m(W)}$$

абсолютной меры неправильности разбиения P к мере множества W называется <u>относительной мерой неправильности</u> разбиения P;

пересечение

$$\mathbf{V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)}$$

произвольного подмножества V с областью правильности разбиения P называется <u>областью правильности</u> разбиения P <u>на подмножестве</u> V;

мера

$$\mathbf{m(V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j))}$$

области правильности разбиения P на подмножестве V называется <u>абсолютной мерой правильности</u> разбиения P <u>на подмножестве</u> V;

отношение

$$\mathbf{m(V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j))/m(V)}$$

абсолютной меры правильности разбиения P на подмножестве V к мере подмножества V называется <u>относительной мерой правильности</u> разбиения P <u>на подмножестве</u> V;

дополнение

$$\mathbf{V \setminus V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)}$$

области правильности разбиения P на подмножестве V до подмножества V называется <u>областью неправильности</u> разбиения P <u>на подмножестве</u> V;

мера

$$m(V \setminus V \cap (\cup_{j\in J} {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j))$$

области неправильности разбиения P на подмножестве V называется <u>абсолютной мерой неправильности</u> разбиения P <u>на подмножестве</u> V;

отношение

$$m(V \setminus V \cap (\cup_{j\in J} {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j))/m(V)$$

абсолютной меры неправильности разбиения P на подмножестве V к мере подмножества V называется <u>относительной мерой неправильности</u> разбиения P <u>на подмножестве</u> V.

Это определение и общие свойства множеств и их разбиений и мер позволяют сделать целый ряд выводов.

Следствия.

1. Все указанные абсолютные и относительные меры являются неотрицательными действительными числами.

2. Теоретико-множественное объединение непересекающихся области правильности разбиения P и области неправильности разбиения P на всём множестве W равно этому множеству W и является его разбиением:

$$(\cup_{j\in J}\ {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j) \cap (W \setminus \cup_{j\in J}\ {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j) = \emptyset;$$

$$(\cup_{j\in J}\ {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j) \cup (W \setminus \cup_{j\in J}\ {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j) = W.$$

3. Теоретико-множественное объединение непересекающихся области правильности разбиения P и

области неправильности разбиения P на подмножестве V равно этому подмножеству V и является его разбиением:

$$(V \cap (\bigcup_{j\in J} {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)) \cap (V \setminus V \cap (\bigcup_{j\in J} {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)) = \emptyset;$$

$$(V \cap (\bigcup_{j\in J} {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)) \cup (V \setminus V \cap (\bigcup_{j\in J} {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)) = V.$$

4. Сумма абсолютных мер области правильности разбиения P и области неправильности разбиения P на всём множестве W равна мере этого множества W:

$$m(\bigcup_{j\in J} {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j) + m(W \setminus \bigcup_{j\in J} {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j) = m(W).$$

5. Сумма абсолютных мер области правильности разбиения P и области неправильности разбиения P на подмножестве V равна мере этого подмножества V:

$$m(V \cap (\bigcup_{j\in J} {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)) + m(V \setminus V \cap (\bigcup_{j\in J} {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)) = m(V).$$

6. Сумма относительных мер области правильности разбиения P и области неправильности разбиения P на всём множестве W равна единице:

$$m(\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)/m(W) + m(W \setminus \cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j)/m(W) = 1.$$

7. Сумма относительных мер области правильности разбиения P и области неправильности разбиения P <u>на подмножестве</u> V равна единице:

$$m(V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j))/m(V)$$
$$+ m(V \setminus V \cap (\cup_{j\in J}\, {}^{P}W_j \cap {}^{Q}W_j))/m(V) = 1.$$

<u>Замечание</u>. В этом формальном определении одно разбиение считается правильным по некоторому правилу или критерию, а другое разбиение является совершенно произвольным и может быть не только приближённым или

неправильным, но и точным и даже правильным по другому, своему правилу или критерию. Это правило может отличаться от правила разбиения, считающегося правильным. При этом оба указанных правила или критерия отнюдь не обязаны быть явными и вполне могут выражаться неявно лишь самими разбиениями как таковыми.

Кроме того, и в этом формальном определении буквой j обозначена целая система индексов, только в простейшем частном случае являющаяся одиночным индексом. Далее по сложности идут относительно простые и привычные двойные, тройные и вообще кратные индексы, например для многомерных пространств. В общем случае одна буква j

обозначает сколь угодно сложную систему индексов. Соответственно разбиения являются именно систематическими индексированными, жёстко привязанными к этим системам индексов, составляющим множество J, и этим принципиально отличаются от обычных классических разбиений, которые лишены такой жёсткой индексации и свободно перестановочны. Обычное классическое разбиение является не системой непересекающихся подмножеств, объединение которых равно разбиваемому множеству, а бесструктурным множеством непересекающихся подмножеств, объединение которых равно разбиваемому множеству. При этом отсутствует жёсткая привязка таких непересекающихся

подмножеств к индексам, используемым только для удобства выражения общего количества таких непересекающихся подмножеств.

Примеры применения этой теории абсолютных и относительных мер правильности и неправильности, в частности ошибочности, разбиения будут даны ниже, а именно в системе методологий высокоточного приближения именно всех гармонических чисел как частичных сумм гармонического ряда с больш<u>и</u>м уточнением приближённой формулы Эйлера.

2.4.7. СИСТЕМА МЕТОДОЛОГИЙ ВЫСОКОТОЧНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ИМЕННО ВСЕХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ КАК ЧАСТИЧНЫХ СУММ ГАРМОНИЧЕСКОГО РЯДА

Гармонический ряд расходится к плюс бесконечности, хотя и весьма медленно, и поэтому при использовании каждой единичной дроби не более одного раза позволяет разложить и приблизить любое,

даже сколь угодно большое, положительное число, а если допустить и отрицательные единичные дроби, то и любое ненулевое действительное число, тогда как нуль представляется самим нулём. А для этого следует оценить, сколько именно начальных единичных дробей гармонического ряда следует брать для приближений даже сколь угодно больших абсолютных величин конкретных действительных чисел с недостатком и избытком.

2.4.7.1. ТОЧНАЯ И ПРИБЛИЖЁННАЯ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ КАК ЧАСТИЧНЫХ СУММ ГАРМОНИЧЕСКОГО РЯДА

Как известно, разность между последовательными гармоническими числами H_n как частичными суммами гармонического ряда и суммой

$$\ln(n) + \gamma,$$

где

$$\gamma = 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767...$$

– постоянная Эйлера–Маскерони,

является по точной формуле Эйлера положительной бесконечно малой ε_n:

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n.$$

Поэтому для приближения последовательных гармонических чисел H_n как частичных сумм гармонического ряда Эйлер предложил пренебречь этой бесконечно малой ε_n и просто отбросить её. Соответствующая приближённая формула Эйлера имеет следующий вид:

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx E_n = \ln(n) + \gamma.$$

Приближённая формула Эйлера даёт приближения последовательных гармонических чисел H_n как частичных сумм гармонического ряда именно с недостатком.

2.4.7.2. АБСОЛЮТНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ИЗБРАННЫХ ПЕРВЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Рассмотрим избранные первые гармонические числа H_n, их приближения E_n по приближённой формуле Эйлера и значения соответствующих элементов остаточной положительной бесконечно малой последовательности как абсолютные погрешности

$$\Delta_n = \varepsilon_n = H_n - E_n.$$

Вначале вычислим избранные первые гармонические числа H_n:

$$H_1 = 1;$$

$$H_2 = 1 + 1/2 = 1.5;$$

$H_3 = 1 + 1/2 + 1/3 =$
1.833333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333;

$H_4 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 =$
2.083333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333;

$H_5 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 =$
2.283333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333333;

$H_6 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 = 2.45;$

$H_7 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 =$
2.592857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857143;

$H_8 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 =$
2.717857142857142857142857142857142857142857142857142857142857142857143;

$H_9 = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 =$
2.828968253968253968253968253968253968253968253968253968253968253968254;

$H_{10} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 =$
2.928968253968253968253968253968253968253968253968253968253968253968254;

$$H_{11} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 = 3.019877344877344877344877344877344877344877344877344877345;$$

$$H_{12} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 = 3.103210678210678210678210678210678210678210678210678210678;$$

$$H_{13} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 = 3.180133755133755133755133755133755133755133755133755133755;$$

$$H_{14} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 = 3.251562326562326562326562326562326562326562326562326562326;$$

$$H_{15} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 = 3.318228993228993228993228993228993228993228993228993228993;$$

$$H_{16} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 = 3.380728993228993228993228993228993228993228993228993228993;$$

$$H_{17} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 =$$
$$3.43955252264075793487558193440546381722852311087605205252264 0758;$$

$$H_{18} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 =$$
$$3.4951080781963134904311374899610193727840786664316076080781963 13;$$

$$H_{19} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 =$$
$$3.547739657143681911483769068908387793836710245378976029130827892;$$

$$H_{20} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 =$$
$$3.597739657143681911483769068908387793836710245378976029130827892;$$

$$H_{30} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 =$$
$$3.994987130920391070501773664124377312674804795617454303591111348;$$

H_{40} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 +
1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 +
1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 +
1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 =
4.278543038936375986516650729635618395672604062267215310687582342;

H_{50} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 +
1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 +
1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 +
1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 =
4.499205338329425057560471792964769091970601823967453829658902432;

H_{60} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 +
1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 +
1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 +
1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 +
1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 =
4.679870412951737817188846811924531441670661593490101368943105024;

$$H_{70} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + 1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 = 4.832836757638071788327349986674968852945767941766469415983784297;$$

$$H_{80} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + 1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 + 1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 = 4.965479278945516525171459530160566607078628196559970075672050858;$$

$$\mathbf{H}_{90} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + 1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 + 1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 + 1/81 + 1/82 + 1/83 + 1/84 + 1/85 + 1/86 + 1/87 + 1/88 + 1/89 + 1/90 = 5.082570602848515554132389950381294312997768292054706718770350147;$$

$$\mathbf{H}_{100} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + 1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 + 1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 + 1/81 + 1/82 + 1/83 + 1/84 + 1/85 + 1/86 + 1/87 + 1/88 + 1/89 + 1/90 + 1/91 + 1/92 + 1/93 + 1/94 + 1/95 + 1/96 + 1/97 + 1/98 + 1/99 + 1/100 = 5.187377517639620260805117675658253157908972126708451653176533957;$$

H_{110} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + 1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 + 1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 + 1/81 + 1/82 + 1/83 + 1/84 + 1/85 + 1/86 + 1/87 + 1/88 + 1/89 + 1/90 + 1/91 + 1/92 + 1/93 + 1/94 + 1/95 + 1/96 + 1/97 + 1/98 + 1/99 + 1/100 + 1/101 + 1/102 + 1/103 + 1/104 + 1/105 + 1/106 + 1/107 + 1/108 + 1/109 + 1/110 =

5.28223459824397758451037451307888101478197107470068934776963295l;

H_{120} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + 1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 + 1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 + 1/81 + 1/82 + 1/83 + 1/84 + 1/85 + 1/86 + 1/87 + 1/88 + 1/89 + 1/90 + 1/91 + 1/92 + 1/93 + 1/94 + 1/95 + 1/96 + 1/97 + 1/98 + 1/99 + 1/100 + 1/101 + 1/102 + 1/103 + 1/104 + 1/105 + 1/106 + 1/107 + 1/108 + 1/109 + 1/110 + 1/111 + 1/112 + 1/113 + 1/114 + 1/115 + 1/116 + 1/117 + 1/118 + 1/119 + 1/120 =

5.36886828735339491282215493943870101389415627313163327988174633 4;

H_{130} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + 1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 + 1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 + 1/81 + 1/82 + 1/83 + 1/84 + 1/85 + 1/86 + 1/87 + 1/88 + 1/89 + 1/90 + 1/91 + 1/92 + 1/93 + 1/94 + 1/95 + 1/96 + 1/97 + 1/98 + 1/99 + 1/100 + 1/101 + 1/102 + 1/103 + 1/104 + 1/105 + 1/106 + 1/107 + 1/108 + 1/109 + 1/110 + 1/111 + 1/112 + 1/113 + 1/114 + 1/115 + 1/116 + 1/117 + 1/118 + 1/119 + 1/120 + 1/121 + 1/122 + 1/123 + 1/124 + 1/125 + 1/126 + 1/127 + 1/128 + 1/129 + 1/130 = 5.448591338265976193134347463051792096949408664325405801180243572;

$$H_{140} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + 1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 + 1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 + 1/81 + 1/82 + 1/83 + 1/84 + 1/85 + 1/86 + 1/87 + 1/88 + 1/89 + 1/90 + 1/91 + 1/92 + 1/93 + 1/94 + 1/95 + 1/96 + 1/97 + 1/98 + 1/99 + 1/100 + 1/101 + 1/102 + 1/103 + 1/104 + 1/105 + 1/106 + 1/107 + 1/108 + 1/109 + 1/110 + 1/111 + 1/112 + 1/113 + 1/114 + 1/115 + 1/116 + 1/117 + 1/118 + 1/119 + 1/120 + 1/121 + 1/122 + 1/123 + 1/124 + 1/125 + 1/126 + 1/127 + 1/128 + 1/129 + 1/130 + 1/131 + 1/132 + 1/133 + 1/134 + 1/135 + 1/136 + 1/137 + 1/138 + 1/139 + 1/140 = 5.522425264403277281879564496179638862249209125559199247414054776;$$

H_{150} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + 1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 + 1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 + 1/81 + 1/82 + 1/83 + 1/84 + 1/85 + 1/86 + 1/87 + 1/88 + 1/89 + 1/90 + 1/91 + 1/92 + 1/93 + 1/94 + 1/95 + 1/96 + 1/97 + 1/98 + 1/99 + 1/100 + 1/101 + 1/102 + 1/103 + 1/104 + 1/105 + 1/106 + 1/107 + 1/108 + 1/109 + 1/110 + 1/111 + 1/112 + 1/113 + 1/114 + 1/115 + 1/116 + 1/117 + 1/118 + 1/119 + 1/120 + 1/121 + 1/122 + 1/123 + 1/124 + 1/125 + 1/126 + 1/127 + 1/128 + 1/129 + 1/130 + 1/131 + 1/132 + 1/133 + 1/134 + 1/135 + 1/136 + 1/137 + 1/138 + 1/139 + 1/140 + 1/141 + 1/142 + 1/143 + 1/144 + 1/145 + 1/146 + 1/147 + 1/148 + 1/149 + 1/150 = 5.591180588643878797237239151940135376453540273027445268198755232;

H_{200} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 +

Ph. D. & Dr. Sc. LEV GRIGOREVIC GELIMSON: СИНЕРГИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ВСЕОБЩИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ, МЕТОДОВ И (МЕТА)МЕТОДОЛОГИЙ (ЛОГИЧЕСКОГО) ВЗВЕШИВАНИЯ И О(БЕС)КОНЕЧИВАНИЯ, МНОГОПОРЯДКОВЫХ <u>АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДЕЛОВ И ВЫСОКОТОЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 598/2207</u>

1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + 1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 + 1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 + 1/81 + 1/82 + 1/83 + 1/84 + 1/85 + 1/86 + 1/87 + 1/88 + 1/89 + 1/90 + 1/91 + 1/92 + 1/93 + 1/94 + 1/95 + 1/96 + 1/97 + 1/98 + 1/99 + 1/100 + 1/101 + 1/102 + 1/103 + 1/104 + 1/105 + 1/106 + 1/107 + 1/108 + 1/109 + 1/110 + 1/111 + 1/112 + 1/113 + 1/114 + 1/115 + 1/116 + 1/117 + 1/118 + 1/119 + 1/120 + 1/121 + 1/122 + 1/123 + 1/124 + 1/125 + 1/126 + 1/127 + 1/128 + 1/129 + 1/130 + 1/131 + 1/132 + 1/133 + 1/134 + 1/135 + 1/136 + 1/137 + 1/138 + 1/139 + 1/140 + 1/141 + 1/142 + 1/143 + 1/144 + 1/145 + 1/146 + 1/147 + 1/148 + 1/149 + 1/150 + 1/151 + 1/152 + 1/153 + 1/154 + 1/155 + 1/156 + 1/157 + 1/158 + 1/159 + 1/160 + 1/161 + 1/162 + 1/163 + 1/164 + 1/165 + 1/166 + 1/167 + 1/168 + 1/169 + 1/170 + 1/171 + 1/172 + 1/173 + 1/174 + 1/175 + 1/176 + 1/177 + 1/178 + 1/179 + 1/180 + 1/181 + 1/182 + 1/183 + 1/184 + 1/185 + 1/186 + 1/187 + 1/188 + 1/189 + 1/190 + 1/191 + 1/192 + 1/193 + 1/194 + 1/195 + 1/196 + 1/197 + 1/198 + 1/199 + 1/200 =

5.878030948121444476057386397130861636837400246530243084464971945;

$$H_{250} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + 1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 + 1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 + 1/81 + 1/82 + 1/83 + 1/84 + 1/85 + 1/86 + 1/87 + 1/88 + 1/89 + 1/90 + 1/91 + 1/92 + 1/93 + 1/94 + 1/95 + 1/96 + 1/97 + 1/98 + 1/99 + 1/100 + 1/101 + 1/102 + 1/103 + 1/104 + 1/105 + 1/106 + 1/107 + 1/108 + 1/109 + 1/110 + 1/111 + 1/112 + 1/113 + 1/114 + 1/115 + 1/116 + 1/117 + 1/118 + 1/119 + 1/120 + 1/121 + 1/122 + 1/123 + 1/124 + 1/125 + 1/126 + 1/127 + 1/128 + 1/129 + 1/130 + 1/131 + 1/132 + 1/133 + 1/134 + 1/135 + 1/136$$

+ 1/137 + 1/138 + 1/139 + 1/140 + 1/141 + 1/142 + 1/143 + 1/144 + 1/145 + 1/146 + 1/147 + 1/148 + 1/149 + 1/150 + 1/151 + 1/152 + 1/153 + 1/154 + 1/155 + 1/156 + 1/157 + 1/158 + 1/159 + 1/160 + 1/161 + 1/162 + 1/163 + 1/164 + 1/165 + 1/166 + 1/167 + 1/168 + 1/169 + 1/170 + 1/171 + 1/172 + 1/173 + 1/174 + 1/175 + 1/176 + 1/177 + 1/178 + 1/179 + 1/180 + 1/181 + 1/182 + 1/183 + 1/184 + 1/185 + 1/186 + 1/187 + 1/188 + 1/189 + 1/190 + 1/191 + 1/192 + 1/193 + 1/194 + 1/195 + 1/196 + 1/197 + 1/198 + 1/199 + 1/200 + 1/201 + 1/202 + 1/203 + 1/204 + 1/205 + 1/206 + 1/207 + 1/208 + 1/209 + 1/210 + 1/211 + 1/212 + 1/213 + 1/214 + 1/215 + 1/216 + 1/217 + 1/218 + 1/219 + 1/220 + 1/221 + 1/222 + 1/223 + 1/224 + 1/225 + 1/226 + 1/227 + 1/228 + 1/229 + 1/230 + 1/231 + 1/232 + 1/233 + 1/234 + 1/235 + 1/236 + 1/237 + 1/238 + 1/239 + 1/240 + 1/241 + 1/242 + 1/243 + 1/244 + 1/245 + 1/246 + 1/247 + 1/248 + 1/249 + 1/250 = 6.100675249432579277572327015974150896377961227512264821152364799;

$$H_{300} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + 1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 + 1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 + 1/81 + 1/82 + 1/83 + 1/84 + 1/85 + 1/86 + 1/87 + 1/88 + 1/89 + 1/90 + 1/91 + 1/92 + 1/93 + 1/94 + 1/95 + 1/96 + 1/97 + 1/98 + 1/99 + 1/100 + 1/101 + 1/102 + 1/103 + 1/104 + 1/105 + 1/106 + 1/107 + 1/108 + 1/109 + 1/110 + 1/111 + 1/112 + 1/113 + 1/114 + 1/115 + 1/116 + 1/117 + 1/118 + 1/119 + 1/120 + 1/121 + 1/122 + 1/123 + 1/124 + 1/125 + 1/126 + 1/127 + 1/128 + 1/129 + 1/130 + 1/131 + 1/132 + 1/133 + 1/134 + 1/135 + 1/136 + 1/137 + 1/138 + 1/139 + 1/140 + 1/141 + 1/142 + 1/143 + 1/144 + 1/145 + 1/146 + 1/147 + 1/148 + 1/149 + 1/150 + 1/151 + 1/152 + 1/153 + 1/154 + 1/155 + 1/156 + 1/157 + 1/158 + 1/159 + 1/160 + 1/161 + 1/162 + 1/163 + 1/164 +$$

**1/165 + 1/166 + 1/167 + 1/168 + 1/169 + 1/170 + 1/171 + 1/172 + 1/173 +
1/174 + 1/175 + 1/176 + 1/177 + 1/178 + 1/179 + 1/180 + 1/181 + 1/182 +
1/183 + 1/184 + 1/185 + 1/186 + 1/187 + 1/188 + 1/189 + 1/190 + 1/191 +
1/192 + 1/193 + 1/194 + 1/195 + 1/196 + 1/197 + 1/198 + 1/199 + 1/200 + 1/201 +
1/202 + 1/203 + 1/204 + 1/205 + 1/206 + 1/207 + 1/208 + 1/209 + 1/210 + 1/211 +
1/212 + 1/213 + 1/214 + 1/215 + 1/216 + 1/217 + 1/218 + 1/219 + 1/220 + 1/221 +
1/222 + 1/223 + 1/224 + 1/225 + 1/226 + 1/227 + 1/228 + 1/229 + 1/230 + 1/231 +
1/232 + 1/233 + 1/234 + 1/235 + 1/236 + 1/237 + 1/238 + 1/239 + 1/240 + 1/241 +
1/242 + 1/243 + 1/244 + 1/245 + 1/246 + 1/247 + 1/248 + 1/249 + 1/250 + 1/251 +
1/252 + 1/253 + 1/254 + 1/255 + 1/256 + 1/257 + 1/258 + 1/259 + 1/260 + 1/261 +
1/262 + 1/263 + 1/264 + 1/265 + 1/266 + 1/267 + 1/268 + 1/269 + 1/270 + 1/271 +
1/272 + 1/273 + 1/274 + 1/275 + 1/276 + 1/277 + 1/278 + 1/279 + 1/280 + 1/281 +
1/282 + 1/283 + 1/284 + 1/285 + 1/286 + 1/287 + 1/288 + 1/289 + 1/290 + 1/291 +
1/292 + 1/293 + 1/294 + 1/295 + 1/296 + 1/297 + 1/298 + 1/299 + 1/300 =
6.2826638802995034619194855410472892832350153827038442027222294297;**

$$
\begin{gathered}
H_{350} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + \\
1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + \\
1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + \\
1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + \\
1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + \\
1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + \\
1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 + \\
1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 + 1/81 + \\
1/82 + 1/83 + 1/84 + 1/85 + 1/86 + 1/87 + 1/88 + 1/89 + 1/90 + 1/91 + \\
1/92 + 1/93 + 1/94 + 1/95 + 1/96 + 1/97 + 1/98 + 1/99 + 1/100 + 1/101 + \\
1/102 + 1/103 + 1/104 + 1/105 + 1/106 + 1/107 + 1/108 + 1/109 + 1/110 \\
+ 1/111 + 1/112 + 1/113 + 1/114 + 1/115 + 1/116 + 1/117 + 1/118 + 1/119 \\
+ 1/120 + 1/121 + 1/122 + 1/123 + 1/124 + 1/125 + 1/126 + 1/127 + \\
1/128 + 1/129 + 1/130 + 1/131 + 1/132 + 1/133 + 1/134 + 1/135 + 1/136
\end{gathered}
$$

+ 1/137 + 1/138 + 1/139 + 1/140 + 1/141 + 1/142 + 1/143 + 1/144 +
1/145 + 1/146 + 1/147 + 1/148 + 1/149 + 1/150 + 1/151 + 1/152 + 1/153
+ 1/154 + 1/155 + 1/156 + 1/157 + 1/158 + 1/159 + 1/160 + 1/161 +
1/162 + 1/163 + 1/164 + 1/165 + 1/166 + 1/167 + 1/168 + 1/169 + 1/170
+ 1/171 + 1/172 + 1/173 + 1/174 + 1/175 + 1/176 + 1/177 + 1/178 +
1/179 + 1/180 + 1/181 + 1/182 + 1/183 + 1/184 + 1/185 + 1/186 + 1/187
+ 1/188 + 1/189 + 1/190 + 1/191 + 1/192 + 1/193 + 1/194 + 1/195 +
1/196 + 1/197 + 1/198 + 1/199 + 1/200 + 1/201 + 1/202 + 1/203 + 1/204
+ 1/205 + 1/206 + 1/207 + 1/208 + 1/209 + 1/210 + 1/211 + 1/212 +
1/213 + 1/214 + 1/215 + 1/216 + 1/217 + 1/218 + 1/219 + 1/220 + 1/221
+ 1/222 + 1/223 + 1/224 + 1/225 + 1/226 + 1/227 + 1/228 + 1/229 +
1/230 + 1/231 + 1/232 + 1/233 + 1/234 + 1/235 + 1/236 + 1/237 + 1/238
+ 1/239 + 1/240 + 1/241 + 1/242 + 1/243 + 1/244 + 1/245 + 1/246 +
1/247 + 1/248 + 1/249 + 1/250 + 1/251 + 1/252 + 1/253 + 1/254 + 1/255

+ 1/256 + 1/257 + 1/258 + 1/259 + 1/260 + 1/261 + 1/262 + 1/263 +
1/264 + 1/265 + 1/266 + 1/267 + 1/268 + 1/269 + 1/270 + 1/271 + 1/272
+ 1/273 + 1/274 + 1/275 + 1/276 + 1/277 + 1/278 + 1/279 + 1/280 +
1/281 + 1/282 + 1/283 + 1/284 + 1/285 + 1/286 + 1/287 + 1/288 + 1/289
+ 1/290 + 1/291 + 1/292 + 1/293 + 1/294 + 1/295 + 1/296 + 1/297 +
1/298 + 1/299 + 1/300 + 1/301 + 1/302 + 1/303 + 1/304 + 1/305 + 1/306
+ 1/307 + 1/308 + 1/309 + 1/310 + 1/311 + 1/312 + 1/313 + 1/314 +
1/315 + 1/316 + 1/317 + 1/318 + 1/319 + 1/320 + 1/321 + 1/322 + 1/323
+ 1/324 + 1/325 + 1/326 + 1/327 + 1/328 + 1/329 + 1/330 + 1/331 +
1/332 + 1/333 + 1/334 + 1/335 + 1/336 + 1/337 + 1/338 + 1/339 + 1/340
+ 1/341 + 1/342 + 1/343 + 1/344 + 1/345 + 1/346 + 1/347 + 1/348 +
1/349 + 1/350 =
6.436576710542010131376437709768251539426693808970873367263470709;
H_{400} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 +
1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 +

**1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 +
1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 +
1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 +
1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 +
1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 +
1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 + 1/81 +
1/82 + 1/83 + 1/84 + 1/85 + 1/86 + 1/87 + 1/88 + 1/89 + 1/90 + 1/91 +
1/92 + 1/93 + 1/94 + 1/95 + 1/96 + 1/97 + 1/98 + 1/99 + 1/100 + 1/101 +
1/102 + 1/103 + 1/104 + 1/105 + 1/106 + 1/107 + 1/108 + 1/109 + 1/110
+ 1/111 + 1/112 + 1/113 + 1/114 + 1/115 + 1/116 + 1/117 + 1/118 + 1/119
+ 1/120 + 1/121 + 1/122 + 1/123 + 1/124 + 1/125 + 1/126 + 1/127 +
1/128 + 1/129 + 1/130 + 1/131 + 1/132 + 1/133 + 1/134 + 1/135 + 1/136
+ 1/137 + 1/138 + 1/139 + 1/140 + 1/141 + 1/142 + 1/143 + 1/144 +
1/145 + 1/146 + 1/147 + 1/148 + 1/149 + 1/150 + 1/151 + 1/152 + 1/153**

+ 1/154 + 1/155 + 1/156 + 1/157 + 1/158 + 1/159 + 1/160 + 1/161 + 1/162 + 1/163 + 1/164 + 1/165 + 1/166 + 1/167 + 1/168 + 1/169 + 1/170 + 1/171 + 1/172 + 1/173 + 1/174 + 1/175 + 1/176 + 1/177 + 1/178 + 1/179 + 1/180 + 1/181 + 1/182 + 1/183 + 1/184 + 1/185 + 1/186 + 1/187 + 1/188 + 1/189 + 1/190 + 1/191 + 1/192 + 1/193 + 1/194 + 1/195 + 1/196 + 1/197 + 1/198 + 1/199 + 1/200 + 1/201 + 1/202 + 1/203 + 1/204 + 1/205 + 1/206 + 1/207 + 1/208 + 1/209 + 1/210 + 1/211 + 1/212 + 1/213 + 1/214 + 1/215 + 1/216 + 1/217 + 1/218 + 1/219 + 1/220 + 1/221 + 1/222 + 1/223 + 1/224 + 1/225 + 1/226 + 1/227 + 1/228 + 1/229 + 1/230 + 1/231 + 1/232 + 1/233 + 1/234 + 1/235 + 1/236 + 1/237 + 1/238 + 1/239 + 1/240 + 1/241 + 1/242 + 1/243 + 1/244 + 1/245 + 1/246 + 1/247 + 1/248 + 1/249 + 1/250 + 1/251 + 1/252 + 1/253 + 1/254 + 1/255 + 1/256 + 1/257 + 1/258 + 1/259 + 1/260 + 1/261 + 1/262 + 1/263 + 1/264 + 1/265 + 1/266 + 1/267 + 1/268 + 1/269 + 1/270 + 1/271 + 1/272 + 1/273 + 1/274 + 1/275 + 1/276 + 1/277 + 1/278 + 1/279 + 1/280 + 1/281 + 1/282 + 1/283 + 1/284 + 1/285 +

1/286 + 1/287 + 1/288 + 1/289 + 1/290 + 1/291 + 1/292 + 1/293 + 1/294 + 1/295 +
1/296 + 1/297 + 1/298 + 1/299 + 1/300 + 1/301 + 1/302 + 1/303 + 1/304 + 1/305 +
1/306 + 1/307 + 1/308 + 1/309 + 1/310 + 1/311 + 1/312 + 1/313 + 1/314 + 1/315 +
1/316 + 1/317 + 1/318 + 1/319 + 1/320 + 1/321 + 1/322 + 1/323 + 1/324 + 1/325 +
1/326 + 1/327 + 1/328 + 1/329 + 1/330 + 1/331 + 1/332 + 1/333 + 1/334 + 1/335 +
1/336 + 1/337 + 1/338 + 1/339 + 1/340 + 1/341 + 1/342 + 1/343 + 1/344 + 1/345 +
1/346 + 1/347 + 1/348 + 1/349 + 1/350 + 1/351 + 1/352 + 1/353 + 1/354 + 1/355 +
1/356 + 1/357 + 1/358 + 1/359 + 1/360 + 1/361 + 1/362 + 1/363 + 1/364 + 1/365 +
1/366 + 1/367 + 1/368 + 1/369 + 1/370 + 1/371 + 1/372 + 1/373 + 1/374 + 1/375 +
1/376 + 1/377 + 1/378 + 1/379 + 1/380 + 1/381 + 1/382 + 1/383 + 1/384 + 1/385 +
1/386 + 1/387 + 1/388 + 1/389 + 1/390 + 1/391 + 1/392 + 1/393 + 1/394 + 1/395 +
1/396 + 1/397 + 1/398 + 1/399 + 1/400 =
6.569929691176507034008153596155759258732435614078756375005953071;

H_{450} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 +
1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 +
1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 +

1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + 1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 + 1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 + 1/81 + 1/82 + 1/83 + 1/84 + 1/85 + 1/86 + 1/87 + 1/88 + 1/89 + 1/90 + 1/91 + 1/92 + 1/93 + 1/94 + 1/95 + 1/96 + 1/97 + 1/98 + 1/99 + 1/100 + 1/101 + 1/102 + 1/103 + 1/104 + 1/105 + 1/106 + 1/107 + 1/108 + 1/109 + 1/110 + 1/111 + 1/112 + 1/113 + 1/114 + 1/115 + 1/116 + 1/117 + 1/118 + 1/119 + 1/120 + 1/121 + 1/122 + 1/123 + 1/124 + 1/125 + 1/126 + 1/127 + 1/128 + 1/129 + 1/130 + 1/131 + 1/132 + 1/133 + 1/134 + 1/135 + 1/136 + 1/137 + 1/138 + 1/139 + 1/140 + 1/141 + 1/142 + 1/143 + 1/144 + 1/145 + 1/146 + 1/147 + 1/148 + 1/149 + 1/150 + 1/151 + 1/152 + 1/153 + 1/154 + 1/155 + 1/156 + 1/157 + 1/158 + 1/159 + 1/160 + 1/161 +

1/162 + 1/163 + 1/164 + 1/165 + 1/166 + 1/167 + 1/168 + 1/169 + 1/170
+ 1/171 + 1/172 + 1/173 + 1/174 + 1/175 + 1/176 + 1/177 + 1/178 +
1/179 + 1/180 + 1/181 + 1/182 + 1/183 + 1/184 + 1/185 + 1/186 + 1/187
+ 1/188 + 1/189 + 1/190 + 1/191 + 1/192 + 1/193 + 1/194 + 1/195 +
1/196 + 1/197 + 1/198 + 1/199 + 1/200 + 1/201 + 1/202 + 1/203 + 1/204
+ 1/205 + 1/206 + 1/207 + 1/208 + 1/209 + 1/210 + 1/211 + 1/212 +
1/213 + 1/214 + 1/215 + 1/216 + 1/217 + 1/218 + 1/219 + 1/220 + 1/221
+ 1/222 + 1/223 + 1/224 + 1/225 + 1/226 + 1/227 + 1/228 + 1/229 +
1/230 + 1/231 + 1/232 + 1/233 + 1/234 + 1/235 + 1/236 + 1/237 + 1/238 +
1/239 + 1/240 + 1/241 + 1/242 + 1/243 + 1/244 + 1/245 + 1/246 + 1/247 +
1/248 + 1/249 + 1/250 + 1/251 + 1/252 + 1/253 + 1/254 + 1/255 + 1/256 + 1/257
+ 1/258 + 1/259 + 1/260 + 1/261 + 1/262 + 1/263 + 1/264 + 1/265 + 1/266 + 1/267 + 1/268 +
1/269 + 1/270 + 1/271 + 1/272 + 1/273 + 1/274 + 1/275 + 1/276 + 1/277 + 1/278 + 1/279 +
1/280 + 1/281 + 1/282 + 1/283 + 1/284 + 1/285 + 1/286 + 1/287 + 1/288 + 1/289 + 1/290 +
1/291 + 1/292 + 1/293 + 1/294 + 1/295 + 1/296 + 1/297 + 1/298 + 1/299 + 1/300 + 1/301 +
1/302 + 1/303 + 1/304 + 1/305 + 1/306 + 1/307 + 1/308 + 1/309 + 1/310 + 1/311 + 1/312 +

1/313 + 1/314 + 1/315 + 1/316 + 1/317 + 1/318 + 1/319 + 1/320 + 1/321 + 1/322 + 1/323 +
1/324 + 1/325 + 1/326 + 1/327 + 1/328 + 1/329 + 1/330 + 1/331 + 1/332 + 1/333 + 1/334 +
1/335 + 1/336 + 1/337 + 1/338 + 1/339 + 1/340 + 1/341 + 1/342 + 1/343 + 1/344 + 1/345 +
1/346 + 1/347 + 1/348 + 1/349 + 1/350 + 1/351 + 1/352 + 1/353 + 1/354 + 1/355 + 1/356 +
1/357 + 1/358 + 1/359 + 1/360 + 1/361 + 1/362 + 1/363 + 1/364 + 1/365 + 1/366 + 1/367 +
1/368 + 1/369 + 1/370 + 1/371 + 1/372 + 1/373 + 1/374 + 1/375 + 1/376 + 1/377 + 1/378 +
1/379 + 1/380 + 1/381 + 1/382 + 1/383 + 1/384 + 1/385 + 1/386 + 1/387 + 1/388 + 1/389 +
1/390 + 1/391 + 1/392 + 1/393 + 1/394 + 1/395 + 1/396 + 1/397 + 1/398 + 1/399 + 1/400 +
1/401 + 1/402 + 1/403 + 1/404 + 1/405 + 1/406 + 1/407 + 1/408 + 1/409 + 1/410 + 1/411 +
1/412 + 1/413 + 1/414 + 1/415 + 1/416 + 1/417 + 1/418 + 1/419 + 1/420 + 1/421 + 1/422 +
1/423 + 1/424 + 1/425 + 1/426 + 1/427 + 1/428 + 1/429 + 1/430 + 1/431 + 1/432 + 1/433 +
1/434 + 1/435 + 1/436 + 1/437 + 1/438 + 1/439 + 1/440 + 1/441 + 1/442 + 1/443 + 1/444 +
1/445 + 1/446 + 1/447 + 1/448 + 1/449 + 1/450 =
6.687573947254578888846714950383000159953333189401160450456989824;

H_{500} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 +
1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 +
1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 +

1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 + 1/51 + 1/52 + 1/53 + 1/54 + 1/55 + 1/56 + 1/57 + 1/58 + 1/59 + 1/60 + 1/61 + 1/62 + 1/63 + 1/64 + 1/65 + 1/66 + 1/67 + 1/68 + 1/69 + 1/70 + 1/71 + 1/72 + 1/73 + 1/74 + 1/75 + 1/76 + 1/77 + 1/78 + 1/79 + 1/80 + 1/81 + 1/82 + 1/83 + 1/84 + 1/85 + 1/86 + 1/87 + 1/88 + 1/89 + 1/90 + 1/91 + 1/92 + 1/93 + 1/94 + 1/95 + 1/96 + 1/97 + 1/98 + 1/99 + 1/100 + 1/101 + 1/102 + 1/103 + 1/104 + 1/105 + 1/106 + 1/107 + 1/108 + 1/109 + 1/110 + 1/111 + 1/112 + 1/113 + 1/114 + 1/115 + 1/116 + 1/117 + 1/118 + 1/119 + 1/120 + 1/121 + 1/122 + 1/123 + 1/124 + 1/125 + 1/126 + 1/127 + 1/128 + 1/129 + 1/130 + 1/131 + 1/132 + 1/133 + 1/134 + 1/135 + 1/136 + 1/137 + 1/138 + 1/139 + 1/140 + 1/141 + 1/142 + 1/143 + 1/144 + 1/145 + 1/146 + 1/147 + 1/148 + 1/149 + 1/150 + 1/151 + 1/152 + 1/153 + 1/154 + 1/155 + 1/156 + 1/157 + 1/158 + 1/159 + 1/160 + 1/161 +

1/162 + 1/163 + 1/164 + 1/165 + 1/166 + 1/167 + 1/168 + 1/169 + 1/170 + 1/171 + 1/172 + 1/173 + 1/174 + 1/175 + 1/176 + 1/177 + 1/178 + 1/179 + 1/180 + 1/181 + 1/182 + 1/183 + 1/184 + 1/185 + 1/186 + 1/187 + 1/188 + 1/189 + 1/190 + 1/191 + 1/192 + 1/193 + 1/194 + 1/195 + 1/196 + 1/197 + 1/198 + 1/199 + 1/200 + 1/201 + 1/202 + 1/203 + 1/204 + 1/205 + 1/206 + 1/207 + 1/208 + 1/209 + 1/210 + 1/211 + 1/212 + 1/213 + 1/214 + 1/215 + 1/216 + 1/217 + 1/218 + 1/219 + 1/220 + 1/221 + 1/222 + 1/223 + 1/224 + 1/225 + 1/226 + 1/227 + 1/228 + 1/229 + 1/230 + 1/231 + 1/232 + 1/233 + 1/234 + 1/235 + 1/236 + 1/237 + 1/238 + 1/239 + 1/240 + 1/241 + 1/242 + 1/243 + 1/244 + 1/245 + 1/246 + 1/247 + 1/248 + 1/249 + 1/250 + 1/251 + 1/252 + 1/253 + 1/254 + 1/255 + 1/256 + 1/257 + 1/258 + 1/259 + 1/260 + 1/261 + 1/262 + 1/263 + 1/264 + 1/265 + 1/266 + 1/267 + 1/268 + 1/269 + 1/270 + 1/271 + 1/272 + 1/273 + 1/274 + 1/275 + 1/276 + 1/277 + 1/278 + 1/279 + 1/280 +

1/281 + 1/282 + 1/283 + 1/284 + 1/285 + 1/286 + 1/287 + 1/288 + 1/289 + 1/290 + 1/291 + 1/292 + 1/293 + 1/294 + 1/295 + 1/296 + 1/297 + 1/298 + 1/299 + 1/300 + 1/301 + 1/302 + 1/303 + 1/304 + 1/305 + 1/306 + 1/307 + 1/308 + 1/309 + 1/310 + 1/311 + 1/312 + 1/313 + 1/314 + 1/315 + 1/316 + 1/317 + 1/318 + 1/319 + 1/320 + 1/321 + 1/322 + 1/323 + 1/324 + 1/325 + 1/326 + 1/327 + 1/328 + 1/329 + 1/330 + 1/331 + 1/332 + 1/333 + 1/334 + 1/335 + 1/336 + 1/337 + 1/338 + 1/339 + 1/340 + 1/341 + 1/342 + 1/343 + 1/344 + 1/345 + 1/346 + 1/347 + 1/348 + 1/349 + 1/350 + 1/351 + 1/352 + 1/353 + 1/354 + 1/355 + 1/356 + 1/357 + 1/358 + 1/359 + 1/360 + 1/361 + 1/362 + 1/363 + 1/364 + 1/365 + 1/366 + 1/367 + 1/368 + 1/369 + 1/370 + 1/371 + 1/372 + 1/373 + 1/374 + 1/375 + 1/376 + 1/377 + 1/378 + 1/379 + 1/380 + 1/381 + 1/382 + 1/383 + 1/384 + 1/385 + 1/386 + 1/387 + 1/388 + 1/389 + 1/390 + 1/391 + 1/392 + 1/393 + 1/394 + 1/395 + 1/396 + 1/397 + 1/398 + 1/399 + 1/400 + 1/401 + 1/402 + 1/403 + 1/404 + 1/405 + 1/406 + 1/407 + 1/408 +

1/409 + 1/410 + 1/411 + 1/412 + 1/413 + 1/414 + 1/415 + 1/416 + 1/417 + 1/418 + 1/419 + 1/420 + 1/421 + 1/422 + 1/423 + 1/424 + 1/425 + 1/426 + 1/427 + 1/428 + 1/429 + 1/430 + 1/431 + 1/432 + 1/433 + 1/434 + 1/435 + 1/436 + 1/437 + 1/438 + 1/439 + 1/440 + 1/441 + 1/442 + 1/443 + 1/444 + 1/445 + 1/446 + 1/447 + 1/448 + 1/449 + 1/450 + 1/451 + 1/452 + 1/453 + 1/454 + 1/455 + 1/456 + 1/457 + 1/458 + 1/459 + 1/460 + 1/461 + 1/462 + 1/463 + 1/464 + 1/465 + 1/466 + 1/467 + 1/468 + 1/469 + 1/470 + 1/471 + 1/472 + 1/473 + 1/474 + 1/475 + 1/476 + 1/477 + 1/478 + 1/479 + 1/480 + 1/481 + 1/482 + 1/483 + 1/484 + 1/485 + 1/486 + 1/487 + 1/488 + 1/489 + 1/490 + 1/491 + 1/492 + 1/493 + 1/494 + 1/495 + 1/496 + 1/497 + 1/498 + 1/499 + 1/500 = 6.7928234299905246029892871453679736948198138143967791166430888987.

Для этих избранных первых гармонических чисел H_n вычислим их приближения E_n по приближённой формуле Эйлера:

$$H_n \approx E_n = \ln(n) + \gamma = \ln(n) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767\ldots .$$

$$H_1 \approx E_1 = \ln(1) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767;$$

$$H_2 \approx E_2 = \ln(2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 1.270362845461478170023744211540578999117659470300178852926447009;$$

$$H_3 \approx E_3 = \ln(3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 1.675827953569642552001757327004928135689649893762673050540461334;$$

$$H_4 \approx E_4 = \ln(4) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 1.963510026021423479440976332998755567193159604660434107047127019;$$

$$H_5 \approx E_5 = \ln(5) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 2.186653577335633235207271423308590070567760690208441320718414891;$$

$$H_6 \approx E_6 = \ln(6) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 2.368975134129587861418989448463104703765150028122928304661141343;$$

$H_7 \approx E_7 = \ln(7) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67$

$= 2.5231258139568461657118648335255821606792440655217847872651 5715;$

$H_8 \approx E_8 = \ln(8) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767$

$= 2.656657206581368788858208454456932135268659739020689361167807028;$

$H_9 \approx E_9 = \ln(9) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767$

$= 2.774440242237752243397002563927453840337140451585422502275155667;$

$H_{10} \approx E_{10} = \ln(10) +$

$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$

$2.879800757895578544624503544766766638643260824568696574839094901;$

$H_{11} \approx E_{11} = \ln(11) +$

$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$

$2.975110937699903404668455668047531730863866189877340774024334709;$

$H_{12} \approx E_{12} = \ln(12) +$

$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$

$3.062122314689533170836221569921281271840650162483183558781821353;$

$H_{13} \approx E_{13} = \ln(13) +$

$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$

$3.142165022363069596659999531647721035847427280700130715224812511;$

$H_{14} \approx E_{14} = \ln(14) +$
$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 =$
$3.2162729945167914751290969549837587287547441998820400413858 37159;$

$H_{15} \approx E_{15} = \ln(15) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$3.285265866003742926602516660231115775215251248031190772453109225;$

$H_{16} \approx E_{16} = \ln(16) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$3.349804387141314098275440575915108703344159873380944615288487038;$

$H_{17} \approx E_{17} = \ln(17) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$3.410429008957748940856046707955528966630362348525668386103004738;$

$H_{18} \approx E_{18} = \ln(18) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$3.467587422797697552814234685385630408412640585945677756395835677;$

$H_{19} \approx E_{19} = \ln(19) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$3.521654644067973320615539521970255968279538597239052417343727236;$

$$H_{20} \approx E_{20} = \ln(20) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 3.5729479384555238540417356662249432067187609589289518289597 7491;$$

$$H_{30} \approx E_{30} = \ln(30) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.978413046563688236019748781689292343290751382391446026573789235;$$

$$H_{40} \approx E_{40} = \ln(40) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.266095119015469163458967787683119774794261093289207083080 45492;$$

$$H_{50} \approx E_{50} = \ln(50) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.489238670329678919225262877992954278168862178837214296751742792;$$

$$H_{50} \approx E_{50} = \ln(50) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.489238670329678919225262877992954278168862178837214296751742792;$$

$$H_{60} \approx E_{60} = \ln(60) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.671560227123633545436980903147468911366251516751701280694469244;$$

$H_{70} \approx E_{70} = \ln(70) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$4.825710906950891849729856288209946368280345554150557763298485051;$

$H_{80} \approx E_{80} = \ln(80) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$4.959242299575414472876199909141296342869761227649462337201134929;$

$H_{90} \approx E_{90} = \ln(90) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$5.077025335231797927414994018611818047938241940214195478308483568;$

$H_{100} \approx E_{100} = \ln(100) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$5.182385850889624228642494999451130846244362313197469550872422802;$

$H_{100} \approx E_{100} = \ln(100) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$5.182385850889624228642494999451130846244362313197469550872422802;$

$H_{110} \approx E_{110} = \ln(110) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$5.277696030693949088686447122731895938464967678506113750057662 61;$

$$H_{120} \approx E_{120} = \ln(120) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.36470740768357885485421302460564547944175165111195653481514925;$$

$$H_{130} \approx E_{130} = \ln(130) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.44475011535711528067799098633208524344852876932890369125814041;$$

$$H_{140} \approx E_{140} = \ln(140) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.51885808751083715914708840966812293635584568851081301741916506;$$

$$H_{150} \approx E_{150} = \ln(150) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.58785095899778861062050811491547998281635273665996374848643712;$$

$$H_{200} \approx E_{200} = \ln(200) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.87553303144956953805972712090930741431986244755772480499310281;$$

$$H_{250} \approx E_{250} = \ln(250) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 6.09867658276377929382602221121914191769446353310573201866439068;$$

$$H_{300} \approx E_{300} = \ln(300) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 6.2809981395577339200377402363736565508918528710202190026071171 35;$$

$$H_{350} \approx E_{350} = \ln(350) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.435148819384992224330615621436134007805946908419075485211132942;$$

$$H_{400} \approx E_{400} = \ln(400) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.568680212009514847476959242367483982395362581917980059113782821;$$

$$H_{450} \approx E_{450} = \ln(450) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.686463247665898302015753351838005687463843294482713200221131 46;$$

$$H_{500} \approx E_{500} = \ln(500) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.791823763323724603243254332677318485769963667465987272785070693.$$

Для этих же избранных первых гармонических чисел H_n вычислим элементы бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n как разности этих гармонических чисел H_n и их

приближений E_n по приближённой формуле Эйлера, являющиеся также абсолютными отклонениями Δ_n приближений E_n по приближённой формуле Эйлера с недостатком:

$$\Delta_n = \varepsilon_n = H_n - E_n = H_n - \ln(n) - \gamma;$$

$$\varepsilon_1 = H_1 - \ln(1) - \gamma =$$
$$0.4227843350984671393934879099175975689578406640600764011942333;$$

$$\varepsilon_2 = H_2 - \ln(2) - \gamma =$$
$$0.22963715453852182997625578845942100088234052969982114707355299 1;$$

$$\varepsilon_3 = H_3 - \ln(3) - \gamma =$$
$$0.1575053797636907813315760063284051976436834395706602827928 72;$$

$$\varepsilon_4 = H_4 - \ln(4) - \gamma =$$
$$0.11982330731190985389235700033457776614017372867289922628620 6314;$$

$$\varepsilon_5 = H_5 - \ln(5) - \gamma =$$
$$0.09667975599770009812606191002474326276557264312489201261491 8442;$$

$\varepsilon_6 = H_6 - \ln(6) - \gamma =$
0.081024865870412138581010551536895296234849971877071695338858657;

$\varepsilon_7 = H_7 - \ln(7) - \gamma =$
0.069731328900296691430992309331560696463613077335358069877699993;

$\varepsilon_8 = H_8 - \ln(8) - \gamma =$
0.061199936275774068284648688400210721874197403836453495975050114;

$\varepsilon_9 = H_9 - \ln(9) - \gamma =$
0.054528011730501724856965690040800127916827802382831465978812587;

$\varepsilon_{10} = H_{10} - \ln(10) - \gamma =$
0.049167496072675423629464709201487329610707429399557393414873353;

$\varepsilon_{11} = H_{11} - \ln(11) - \gamma =$
0.044766407177441472676421676829813146481011155000004103320542636;

$\varepsilon_{12} = H_{12} - \ln(12) - \gamma =$
0.041088363521145039841989108289396938837560515727494651896389326;

$\varepsilon_{13} = H_{13} - \ln(13) - \gamma =$
0.037968732770685537095134223486034097907706474433624418530321244;

$$\varepsilon_{14} = H_{14} - \ln(14) - \gamma =$$
$$0.035289332045535087197465371578567833571818126680286520940725167;$$

$$\varepsilon_{15} = H_{15} - \ln(15) - \gamma =$$
$$0.032963127225250302390712332997877453777977745197802456540119768;$$

$$\varepsilon_{16} = H_{16} - \ln(16) - \gamma =$$
$$0.030924606087679130717788417313884525649069119848048613704741955;$$

$$\varepsilon_{17} = H_{17} - \ln(17) - \gamma =$$
$$0.029123513683008994019535226449934850598160762350383666641963602;$$

$$\varepsilon_{18} = H_{18} - \ln(18) - \gamma =$$
$$0.027520655398615937616902804575388964371438080485929851682360637;$$

$$\varepsilon_{19} = H_{19} - \ln(19) - \gamma =$$
$$0.026085013075708590868229546938131825557171648139923611787100656;$$

$$\varepsilon_{20} = H_{20} - \ln(20) - \gamma =$$
$$0.024791718688158057442033402683444587117949286450024200171052982;$$

$$\varepsilon_{30} = H_{30} - \ln(30) - \gamma =$$
$$0.016574084356702834482024882435084969384053413226008277017322114;$$

$$\varepsilon_{40} = H_{40} - \ln(40) - \gamma =$$
$$0.012447919920906823057682941952498620878342968978008227607127422;$$

$$\varepsilon_{50} = H_{50} - \ln(50) - \gamma =$$
$$0.0099666679997461383352089149718148138017396451302395329071596 4;$$

$$\varepsilon_{60} = H_{60} - \ln(60) - \gamma =$$
$$0.008310185828104271751865908777062530304410076738400088248635 78;$$

$$\varepsilon_{70} = H_{70} - \ln(70) - \gamma =$$
$$0.007125850687179938597493698465022484665422387615911652685299246;$$

$$\varepsilon_{80} = H_{80} - \ln(80) - \gamma =$$
$$0.006236979370102052295259621019270264208866968910507738470915928;$$

$$\varepsilon_{90} = H_{90} - \ln(90) - \gamma =$$
$$0.005545267616717626717395931769476265059526351840511240461866579;$$

$$\varepsilon_{100} = H_{100} - \ln(100) - \gamma =$$
$$0.004991666749996032162622676207122311664609813510982102304111155;$$

$$\varepsilon_{110} = H_{110} - \ln(110) - \gamma =$$
$$0.004538567550028495823927390346985076317003396194575597711970341;$$

$\varepsilon_{120} = H_{120} - \ln(120) - \gamma =$

0.004160879669816057967941914833055534452404622019676745066597081;

$\varepsilon_{130} = H_{130} - \ln(130) - \gamma =$

0.00384122290886091245635647671970685350087989499650210992210316;

$\varepsilon_{140} = H_{140} - \ln(140) - \gamma =$

0.003567176892440122732476086511515925893363437048386229994889716;

$\varepsilon_{150} = H_{150} - \ln(150) - \gamma =$

0.003329629646090186616731037024655393637187536367481519712318106;

$\varepsilon_{200} = H_{200} - \ln(200) - \gamma =$

0.002497916671874937997659276221554222517537798972518279471869134;

$\varepsilon_{250} = H_{250} - \ln(250) - \gamma =$

0.0019986666668799983746304804755008978683497694406532802487974115;

$\varepsilon_{300} = H_{300} - \ln(300) - \gamma =$

0.001665740741769541881745304673632732343162511683625200115177161;

$\varepsilon_{350} = H_{350} - \ln(350) - \gamma =$

6.436576710542010131376437709768251539426693808970873367263470709 -

$$6.435148819384992224330615621436134007805946908419075485211132942 =$$
$$0.001427891157017907045822088332117531620746900551797882052337767;$$

$$\varepsilon_{400} = H_{400} - \ln(400) - \gamma =$$
$$6.569929691176507034008153596155759258732435614078756375005953071 -$$
$$6.568680212009514847476959242367483982395362581917980059113782821 =$$
$$0.001249479166992186531194353788275276337073032160776315892170 25;$$

$$\varepsilon_{450} = H_{450} - \ln(450) - \gamma =$$
$$6.687573947254578888846714950383000159953331894011604504569898 24 -$$
$$6.686463247665898302015753351838005687463843294482713200221131 46 =$$
$$0.001110699588680586830961598544994472489489894918447250235858364;$$

$$\varepsilon_{500} = H_{500} - \ln(500) - \gamma =$$
$$6.792823429990524602989287145367973694819813814396779116643088 8987 -$$
$$6.791823763323724603243254332677318485769963667465987272785070693 =$$
$$0.000999666666679999997460328126906552090498501469307918438580182057.$$

Следовательно, абсолютная погрешность приближённой формулы Эйлера при n = 1

превышает 0.42, только при n = 10 становится меньше, чем 0.05, и только при n = 50 становится меньше, чем 0.01. Эти абсолютные погрешности ε_n тем более существенны, что сами гармонические чиcла H_n растут медленно и при указанных значениях n составляют всего лишь

$$H_1 = 1;$$

$$H_{10} =$$
$$2.928968253968253968253968253968253968253968253968253968253968254;$$

$$H_{50} =$$
$$4.499205338329425057560471792964769091970601823967453829658902432.$$

2.4.7.3. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ИЗБРАННЫХ ПЕРВЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Приведём также соответствующие относительные погрешности с меньшей точностью

$$\delta_n = \Delta_n/H_n = \varepsilon_n/H_n = (H_n - E_n)/H_n$$

приближений Эйлера для избранных первых гармонических чисел вновь до n = 50 включительно:

$$\delta_1 = \Delta_1/H_1 = \varepsilon_1/H_1 = (H_1 - E_1)/H_1 = (1 - 0.57721566490153286)/1 = 0.42278433509846714;$$

$$\delta_2 = \Delta_2/H_2 = \varepsilon_2/H_2 = (H_2 - E_2)/H_2 = (1.5 - 1.27036284546147816942)/1.5 = 0.15309143635901455372;$$

$$\delta_3 = \Delta_3/H_3 = \varepsilon_3/H_3 = (H_3 - E_3)/H_3 = (1.8333333333333333 - 1.6758279535696425514)/1.8333333333333333 = 0.0859120253256495;$$

$$\delta_4 = \Delta_4/H_4 = \varepsilon_4/H_4 = (H_4 - E_4)/H_4 = (2.0833333333333333 - 1.9635100260214234 7883)/2.0833333333333333 = 0.05751518750971 6715;$$

$$\delta_5 = \Delta_5/H_5 = \varepsilon_5/H_5 = (H_5 - E_5)/H_5 = (2.2833333333333333 - 2.1866535773356332346)/2.2833333333333333 = 0.0423414989770949197714;$$

$$\delta_6 = \Delta_6/H_6 = \varepsilon_6/H_6 = (H_6 - E_6)/H_6 = (2.45 - 2.36897513412958786081)/2.45 = 0.0330713738246580159959;$$

$$\delta_7 = \Delta_7/H_7 = \varepsilon_7/H_7 = (H_7 - E_7)/H_7 = (2.5928571428571429 - 2.52312581395684616511)/2.5928571428571429 = 0.0268936254711888229 2903;$$

$$\delta_8 = \Delta_8/H_8 = \varepsilon_8/H_8 = (H_8 - E_8)/H_8 = (2.7178571428571429 - 2.6566572065813687 8825)/2.7178571428571429 = 0.0225177163695358094 87237;$$

$$\delta_9 = \Delta_9/H_9 = \varepsilon_9/H_9 = (H_9 - E_9)/H_9 = (2.828968253968254 - 2.7744402422377522 4279)/2.828968253968254 = 0.0192748757975683022341436;$$

$$\delta_{10} = \Delta_{10}/H_{10} = \varepsilon_{10}/H_{10} = (H_{10} - E_{10})/H_{10} = (2.928968253968254 - 2.87980075789557854402)/2.928968253968254 = 0.01678662648735159839136565;$$

$$\delta_{11} = \Delta_{11}/H_{11} = \varepsilon_{11}/H_{11} = (H_{11} - E_{11})/H_{11} = (3.0198773448773449 - 2.97511093769990340406)/3.0198773448773449 = 0.01482391569756278455815103;$$

$$\delta_{12} = \Delta_{12}/H_{12} = \varepsilon_{12}/H_{12} = (H_{12} - E_{12})/H_{12} = (3.1032106782106782 - 3.06212231468953317023)/3.1032106782106782 = 0.013240597491381642030941;$$

$$\delta_{13} = \Delta_{13}/H_{13} = \varepsilon_{13}/H_{13} = (H_{13} - E_{13})/H_{13} = (3.1801337551337551 - 3.14216502236306959605)/3.1801337551337551 = 0.01193935088717315755737798;$$

$$\delta_{14} = \Delta_{14}/H_{14} = \varepsilon_{14}/H_{14} = (H_{14} - E_{14})/H_{14} = (3.2515623265623266 - 3.21627299451679147452)/3.2515623265623266 = 0.0108530387860792839927116;$$

$$\delta_{15} = \Delta_{15}/H_{15} = \varepsilon_{15}/H_{15} = (H_{15} - E_{15})/H_{15} = (3.3182289932289932 - 3.285265866003742926)/3.3182289932289932 = 0.0099339519040166094302;$$

$$\delta_{16} = \Delta_{16}/H_{16} = \varepsilon_{16}/H_{16} = (H_{16} - E_{16})/H_{16} = (3.3807289932289932 - 3.34980438714131409767)/3.3807289932289932 = 0.009147318862179033145686;$$

$$\delta_{17} = \Delta_{17}/H_{17} = \varepsilon_{17}/H_{17} = (H_{17} - E_{17})/H_{17} = (3.4395525226407579 - 3.41042900895774894025)/3.4395525226407579 = 0.008467239122328921771;$$

$$\delta_{18} = \Delta_{18}/H_{18} = \varepsilon_{18}/H_{18} = (H_{18} - E_{18})/H_{18} = (3.4951080781963135 - 3.46758742279769755221)/3.4951080781963135 = 0.00787404989570973876356;$$

$$\delta_{19} = \Delta_{19}/H_{19} = \varepsilon_{19}/H_{19} = (H_{19} - E_{19})/H_{19} = (3.5477396571436819 - 3.52165464406797332001)/3.5477396571436819 = 0.00735257250998791324272;$$

$$\delta_{20} = \Delta_{20}/H_{20} = \varepsilon_{20}/H_{20} = (H_{20} - E_{20})/H_{20} = (3.5977396571436819 - 3.5729479384555238 5344)/3.5977396571436819 = 0.0068909151441604 56627;$$

$$\delta_{30} = \Delta_{30}/H_{30} = \varepsilon_{30}/H_{30} = (H_{30} - E_{30})/H_{30} = (3.9949871309203911 - 3.9784130465636882 3541)/3.9949871309203911 = 0.0041487203371502 273939;$$

$$\delta_{40} = \Delta_{40}/H_{40} = \varepsilon_{40}/H_{40} = (H_{40} - E_{40})/H_{40} = (4.278543038936376 - 4.2660951190154691 6285)/4.278543038936376 = 0.0029093828921728 754233;$$

$$\delta_{50} = \Delta_{50}/H_{50} = \varepsilon_{50}/H_{50} = (H_{50} - E_{50})/H_{50} = (4.4992053383294251 - 4.4892386703296789 1862)/4.4992053383294251 = 0.0022152062976185 14432845.$$

Следовательно, относительная погрешность приближённой формулы Эйлера при n = 1 превышает 42 % и только при n = 15 становится чуть меньше 1 %.

2.4.7.4. ОБЩИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ИЗМЕРЕНИЕМ СОВОКУПНОСТЕЙ ОБЛАСТЕЙ ПРАВИЛЬНОСТИ И ОШИБОЧНОСТИ РАЗБИЕНИЯ

Покажем сущность общего метода оценки приближений измерением совокупностей областей правильности и ошибочности разбиения на примере оценки приближённой формулы Эйлера для гармонических чисел по измерениям совокупностей областей правильности и областей ошибочности разбиения положительной полуоси, осуществляемого приближениями гармонических чисел по приближённой формуле Эйлера.

Указанные выше оценки абсолютных и относительных погрешностей приближённой формулы Эйлера убедительно

доказывают необходимость и полезность её существенного уточнения. Кроме того, возможны и в данном случае необходимы и другие оценки, а именно по точному разбиению положительной полуоси, даваемому самими гармоническими числами, и по её приближённому разбиению, осуществляемому приближениями гармонических чисел по приближённой формуле Эйлера. Методологически это осуществимо по теории измерения различий одинаково индексированных систематических разбиений множества и по теории абсолютных и относительных мер правильности и неправильности разбиения.

Всеобщие методологии именно систематических вычислительных экспериментов с синергией анализа и синтеза итогов этих экспериментов, а именно итогов вычислений избранных первых гармонических чисел и их приближений по приближённой формуле Эйлера, показывают, что эти приближённые гармонические числа действительно сближаются с точными гармоническими числами при росте их номеров. Однако вместе с этим и сами точные гармонические числа всё более сближаются между собой, уплотняются, и всё время растёт количество гармонических чисел, приходящихся на единицу длины. Например, строго между нулём и единицей вообще нет гармонических чисел, первое из них равно как раз единице,

строго между единицей и двойкой есть два гармонических числа, строго между двойкой и тройкой есть семь гармонических чисел, строго между тройкой и четвёркой есть 20 гармонических чисел. Поэтому представляется интересным сопоставление именно суммарных длин промежутков правильности и промежутков ошибочности приближённого разбиения положительной полуоси, даваемого приближёнными гармоническими числами по приближённой формуле Эйлера, проведённое на имеющих одну и ту же единичную длину первых соседних единичных полуотрезках-полуинтервалах (0, 1], (1, 2], (2, 3], начинающих равномерное разбиение положительной полуоси при движении от 0 в направлении плюс бесконечности.

Для полуинтервала-полуотрезка (0, 1] актуален расчёт абсолютной погрешности

$$\Delta_1 = \varepsilon_1 = H_1 - E_1 = 1 - 0.5772156649015328 6 = 0.4227843350984671 4.$$

На полуотрезке-полуинтервале (0, 1] сначала встречается Эйлерово приближение первого гармонического числа

$$E_1 = 0.57721566490153286,$$

затем само первое гармоническое число

$$H_1 = 1.$$

Следовательно, на полуотрезке-полуинтервале (0, 1] приближённая формула Эйлера правильно относит интервал

$$(0, 0.57721566490153286)$$

к промежутку между нулём и первым гармоническим числом и ошибочно относит интервал

(0.5772156649015328б, 1)

к промежутку между первым и вторым гармоническими числами. То есть и абсолютная, и ввиду единичной длины относительная мера правильности разбиения по приближённой формуле Эйлера на полуотрезке-полуинтервале (0, 1] составляют

0.5772156649015328б,

тогда как и абсолютная, и ввиду единичной длины относительная мера ошибочности разбиения по приближённой формуле Эйлера на полуотрезке-полуинтервале (0, 1] составляют

0.42278433509846714.

Следовательно, на полуотрезке-полуинтервале (0, 1] и абсолютная, и ввиду единичной длины относительная мера ошибочности разбиения по приближённой формуле Эйлера совпадают с абсолютной погрешностью определения первого гармонического числа по приближённой формуле Эйлера. Это совпадение принципиально важно как успешное испытание общего метода оценки приближений измерением совокупностей областей правильности и ошибочности разбиения. А если на этом полуотрезке-полуинтервале (0, 1] общий метод оценки приближений измерением совокупностей областей правильности и ошибочности разбиения не привёл к принципиально новым

итогам, то по той единственной причине, что на этом полуотрезке-полуинтервале (0, 1] имеются лишь одно гармоническое число

$$H_1 = 1$$

и его приближение

$$E_1 = 0.57721566490153286.$$

Для полуотрезка-полуинтервала (1, 2] актуальны расчёты абсолютных погрешностей

$$\Delta_2 = \varepsilon_2 = H_2 - E_2 = 1.5 - 1.27036284546147816942 = 0.22963715453852183058;$$

$$\Delta_3 = \varepsilon_3 = H_3 - E_3 = 1.8333333333333333 - 1.67582795356964255514 = 0.15750537976369077486;$$

$$\Delta_4 = \varepsilon_4 = H_4 - E_4 = 2.0833333333333333 - 1.9635100260214234788 = 0.1198233073119098211 7.$$

Ведём рассмотрение от единицы к двойке. Вначале встречается приближение

$$E_2 = 1.2703628454614781694 2$$

второго гармонического числа, затем само второе гармоническое число

$$H_2 = 1.5.$$

Следовательно, приближённая формула Эйлера правильно относит интервал

$$(1, 1.2703628454614781694 2)$$

к промежутку между первым и вторым гармоническими числами и ошибочно относит интервал

$$(1.27036284546147816942,\ 1.5)$$

к промежутку между вторым и третьим гармоническими числами.

Далее встречается приближение

$$E_3 = 1.67582795356964255 14$$

третьего гармонического числ<u>а</u>, затем само третье гармоническое число

$$H_3 = 1.83333333333333333.$$

Следовательно, приближённая формула Эйлера <u>правильно</u> относит интервал

$$(1.5,\ 1.67582795356964255 14)$$

к промежутку между вторым и третьим гармоническими числами и <u>ошибочно</u> относит интервал

$$(1.6758279535696425514, 1.8333333333333333)$$

к промежутку между третьим и четвёртым гармоническими числами.

Далее встречается приближение

$$E_4 = 1.9635100260214234788з$$

четвёртого гармонического числа, но пока ещё не само четвёртое гармоническое число

$$H_4 = 2.0833333333333333.$$

Следовательно, приближённая формула Эйлера правильно относит интервал

$$(1.8333333333333333, 1.9635100260214234788з)$$

к промежутку между третьим и четвёртым гармоническими числами и ошибочно относит полуотрезок-полуинтервал

(1.96351002602142347883, 2]

к промежутку между четвёртым и пятым гармоническими числами.

В итоге на полуотрезке-полуинтервале (1, 2] сумма длин промежутков правильности как и абсолютная, и ввиду единичной длины полуотрезка-полуинтервала (1, 2] относительная мера правильности разбиения по приближённой формуле Эйлера составляет

(1.27036284546147816942 - 1) + (1.6758279535696425514 - 1.5)

+ (1.96351002602142347883 - 1.8333333333333333) =

0.57636749171921089965,

тогда как сумма длин промежутков ошибочности как и абсолютная, и ввиду единичной длины полуотрезка-

полуинтервала (1, 2] относительная мера ошибочности разбиения по приближённой формуле Эйлера составляет

(1.5 - 1.27036284546147816942) + (1.833333333333333333 - 1.67582795356964255514) + (2 - 1.96351002602142347883) = 0.42363250828078910035

и весьма неожиданно превышает, хотя и незначительно, и абсолютную, и ввиду единичной длины полуотрезка-полуинтервала (0, 1] относительную меру ошибочности разбиения по приближённой формуле Эйлера на полуотрезке-полуинтервале (0, 1], составляющую

0.42278433509846714.

И это тем более неожиданно, что абсолютные погрешности строго монотонно убывают от

$$\Delta_1 = \varepsilon_1 = H_1 - E_1 = 1 - 0.57721566490153286 = 0.42278433509846714$$

на полуотрезке-полуинтервале (0, 1] до

$$\Delta_2 = \varepsilon_2 = H_2 - E_2 = 1.5 - 1.27036284546147816942 = 0.22963715453852183058;$$

$$\Delta_3 = \varepsilon_3 = H_3 - E_3 = 1.8333333333333333 - 1.6758279535696425514 = 0.15750537976369077486;$$

$$\Delta_4 = \varepsilon_4 = H_4 - E_4 = 2.0833333333333333 - 1.9635100260214234 7883 = 0.11982330731190982117$$

на полуотрезке-полуинтервале (1, 2], которому принадлежит E_4, но не H_4.

Для полуотрезка-полуинтервала (2, 3] актуальны расчёты абсолютных погрешностей

$$\Delta_4 = \varepsilon_4 = H_4 - E_4 = 2.0833333333333333 - 1.96351002602142347883 = 0.11982330731190982117;$$

$$\Delta_5 = \varepsilon_5 = H_5 - E_5 = 2.2833333333333333 - 2.18665357733563332346 = 0.09667975599770000654;$$

$$\Delta_6 = \varepsilon_6 = H_6 - E_6 = 2.45 - 2.36897513412958786081 = 0.08102486587041213919;$$

$$\Delta_7 = \varepsilon_7 = H_7 - E_7 = 2.592857142857142 9 - 2.52312581395684616511 = 0.06973132890029673489;$$

$$\Delta_8 = \varepsilon_8 = H_8 - E_8 = 2.7178571428571429 - 2.65665720658136878825 = 0.06119993627577411175;$$

$$\Delta_9 = \varepsilon_9 = H_9 - E_9 = 2.82896825396825 4 - 2.77444024223775224279 = 0.05452801173050175721;$$

$$\Delta_{10} = \varepsilon_{10} = H_{10} - E_{10} = 2.928968253968254 - 2.87980075789557854402 = 0.04916749607267545598;$$

$$\Delta_{11} = \varepsilon_{11} = H_{11} - E_{11} = 3.0198773448773449 - 2.97511093769990340406 = 0.04476640717744149594.$$

Ограничимся приведением лишь важнейшей части итогов, а именно суммы длин промежутков ошибочности как и абсолютной, и ввиду единичной длины полуотрезка-полуинтервала (2, 3] относительной меры ошибочности разбиения по приближённой формуле Эйлера

$$(2.0833333333333333 - 2) + (2.2833333333333333 - 2.18665357733563 32346) + (2.45 - 2.36897513412958786081) + (2.5928571428571429 - 2.52312581395684616511) + (2.7178571428571429 - 2.65665720658136878825) +$$

(2.828968253968254 - 2.77444024223775224279) + (2.928968253968254 - 2.87980075789557854402) + (3 - 2.97511093769990340406) = 0.52055379048079016036.

Эта мера ошибочности теперь уже ожидаемо превышает, но неожиданно весьма значительно, и абсолютную, и ввиду единичной длины полуотрезка-полуинтервала (1, 2] относительную меру ошибочности разбиения по приближённой формуле Эйлера на полуотрезке-полуинтервале (1, 2], составляющую

0.42363250828078910035.

И это тем более неожиданно, что абсолютные погрешности строго монотонно убывают от

$\Delta_2 = \varepsilon_2 = H_2 - E_2 = 1.5 - 1.2703628454614781694 2 = 0.2296371545385218305 8$;

$\Delta_3 = \varepsilon_3 = H_3 - E_3 = 1.8333333333333333 - 1.6758279535696425514 = 0.1575053797636907486$;

$\Delta_4 = \varepsilon_4 = H_4 - E_4 = 2.0833333333333333 - 1.9635100260214234788 3 = 0.1198233073119098211 7$

на полуотрезке-полуинтервале (1, 2], которому принадлежит E_4, но не H_4,

до

$\Delta_4 = \varepsilon_4 = H_4 - E_4 = 2.0833333333333333 - 1.9635100260214234788 3 = 0.1198233073119098211 7$;

$\Delta_5 = \varepsilon_5 = H_5 - E_5 = 2.2833333333333333 - 2.1866535773356332346 = 0.0966797559977000654$;

$\Delta_6 = \varepsilon_6 = H_6 - E_6 = 2.45 - 2.36897513412958786081 =$
$0.08102486587041213919;$

$\Delta_7 = \varepsilon_7 = H_7 - E_7 = 2.5928571428571429 -$
$2.52312581395684616511 = 0.06973132890029673489;$

$\Delta_8 = \varepsilon_8 = H_8 - E_8 = 2.7178571428571429 -$
$2.65665720658136878825 = 0.06119993627577411175;$

$\Delta_9 = \varepsilon_9 = H_9 - E_9 = 2.828968253968254 -$
$2.77444024223775224279 = 0.05452801173050175721;$

$\Delta_{10} = \varepsilon_{10} = H_{10} - E_{10} = 2.928968253968254 -$
$2.87980075789557854402 = 0.04916749607267545598;$

$\Delta_{11} = \varepsilon_{11} = H_{11} - E_{11} = 3.0198773448773449 -$
$2.97511093769990340406 = 0.04476640717744149594$

на полуотрезке-полуинтервале (2, 3], которому принадлежат H_4 и E_{11}, но не E_4 и не H_{11}.

Следовательно, на полуотрезке-полуинтервале (2, 3] сумма длин промежутков ошибочности как и абсолютная, и ввиду единичной длины полуотрезка-полуинтервала (2, 3] относительная мера ошибочности разбиения по приближённой формуле Эйлера

0.52055379048079016036

даже превышает сумму длин промежутков правильности как и абсолютную, и ввиду единичной длины полуотрезка-полуинтервала (2, 3] относительную меру правильности разбиения по приближённой формуле Эйлера

1 - 0.52055379048079016036 = 0.47944620951920983964.

Смысл и значимость этого неожиданного итога заключается в следующем. Если берётся случайное число, принадлежащее полуотрезку-полуинтервалу (2, 3], то приближённая формула Эйлера с вероятностью

0.47944620951920983964

правильно предскажет наибольшее гармоническое число, не превышающее выбранное случайное число. Тем самым приближённая формула Эйлера с вероятностью

0.47944620951920983964

правильно предскажет как можно большее количество взятых подряд первых единичных дробей гармонического ряда для разложения этого выбранного случайного числа. Однако с большей вероятностью

0.520553790480790160З6

приближённая формула Эйлера ошибочно предскажет наибольшее гармоническое число, не превышающее выбранное случайное число. Тем самым приближённая формула Эйлера с вероятностью

0.52055379048079016036

ошибочно предскажет как можно большее количество взятых подряд первых единичных дробей гармонического ряда для разложения этого выбранного случайного числа. При этом ошибочность будет заключаться в том, что приближённая формула Эйлера укажет не искомое, а непосредственно следующее за ним гармоническое число, соответственно не искомое, а ровно на единицу большее количество взятых подряд первых единичных дробей гармонического ряда для разложения этого выбранного случайного числа.

2.4.7.5. ОБЩИЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ИЗМЕРЕНИЕМ СМЕЖНЫХ ОБЛАСТЕЙ ПРАВИЛЬНОСТИ И ОШИБОЧНОСТИ РАЗБИЕНИЯ

Покажем сущность общего метода оценки приближений измерением смежных областей правильности и ошибочности разбиения на примере оценки приближённой формулы Эйлера для гармонических чисел по измерениям смежных областей правильности и областей ошибочности разбиения положительной полуоси, осуществляемого приближениями гармонических чисел по приближённой формуле Эйлера.

Указанные выше оценки абсолютных и относительных погрешностей приближённой формулы Эйлера убедительно

доказывают необходимость и полезность её существенного уточнения. Кроме того, возможны и в данном случае необходимы и другие оценки, а именно по точному разбиению положительной полуоси, даваемому самими гармоническими числами, и по её приближённому разбиению, осуществляемому приближениями гармонических чисел по приближённой формуле Эйлера. Методологически это осуществимо по теории измерения различий одинаково индексированных систематических разбиений множества и по теории абсолютных и относительных мер правильности и неправильности (ошибочности) разбиения.

Всеобщие методологии именно систематических вычислительных экспериментов с синергией анализа и синтеза итогов этих экспериментов, а именно итогов вычислений избранных первых гармонических чисел и их приближений по приближённой формуле Эйлера, показывают, что эти приближённые гармонические числа действительно сближаются с точными гармоническими числами при росте их номеров. Однако вместе с этим и сами точные гармонические числа всё более сближаются между собой, уплотняются, и всё время растёт количество гармонических чисел, приходящихся на единицу длины. Например, строго между нулём и единицей вообще нет гармонических чисел, первое из них равно как раз единице,

строго между единицей и двойкой есть два гармонических числа, строго между двойкой и тройкой есть семь гармонических чисел, строго между тройкой и четвёркой есть 20 гармонических чисел. Поэтому представляется интересным сопоставление длин именно смежных промежутков правильности и промежутков ошибочности приближённого разбиения положительной полуоси, даваемого приближёнными гармоническими числами по приближённой формуле Эйлера при движении от 0 в направлении плюс бесконечности.

Всеобщие методологии именно систематических вычислительных экспериментов с синергией анализа и синтеза итогов этих экспериментов, а также применение

предыдущего общего метода оценки приближений измерением совокупностей областей правильности и ошибочности разбиения показывают именно чередование промежутков правильности и промежутков ошибочности приближённого разбиения положительной полуоси, даваемого приближёнными гармоническими числами по приближённой формуле Эйлера при движении от 0 в направлении плюс бесконечности. Это чередование обусловлено тем, что приближённая формула Эйлера даёт приближения гармонических чисел непременно с недостатком. То есть последовательность всех гармонических чисел и последовательность всех их приближений с недостатком по приближённой формуле

Эйлера естественно разбивают положительную полуось именно на пары полуотрезков-полуинтервалов, составленные следующим образом. Первый из каждой пары полуотрезков-полуинтервалов, завершающийся приближением гармонического числа, является промежутком правильности приближённого разбиения положительной полуоси, даваемого приближёнными гармоническими числами по приближённой формуле Эйлера. А второй из каждой пары полуотрезков-полуинтервалов, завершающийся самим гармоническим числом, является промежутком ошибочности приближённого разбиения положительной полуоси, даваемого приближёнными гармоническими числами

по приближённой формуле Эйлера. Последовательность таких пар (n = 1, 2, 3, 4, ...) является следующей:

$$(0, E_1], (E_1, H_1];$$

$$(H_1, E_2], (E_2, H_2];$$

$$(H_2, E_3], (E_3, H_3];$$

$$(H_3, E_4], (E_4, H_4];$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(H_{n-1}, E_n], (E_n, H_n];$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Эта последовательность сразу наталкивает на целесообразность введения следующего определения.

Определение. Нуль считается нулевым по счёту, или по порядку, гармоническим числом:

$$H_0 = 0.$$

Замечание. Это определение естественно, поскольку оно следует из общего определения гармонического числа

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j,$$

если применить его к случаю n = 0, что даёт пустую сумму, равную именно нулю:

$$H_0 = \Sigma_{j=1}{}^0 1/j = 0.$$

Это определение тем более целесообразно, что вместе с ненулевыми действительными числами можно и нужно представлять гармоническими числами также и нуль, причём именно нулём.

Использование этого определения позволяет представить указанную последовательность именно в упорядоченном и правильном, или регулярном, виде:

$$(H_0, E_1], (E_1, H_1];$$

$$(H_1, E_2], (E_2, H_2];$$

$$(H_2, E_3], (E_3, H_3];$$

$$(H_3, E_4], (E_4, H_4];$$

……………………………

$$(H_{n-1}, E_n], (E_n, H_n];$$

……………………………

Обозначим функцию длин<u>ы</u> промежутка буквой L и будем присоединять её к соответствующему промежутку без дополнительных скобок. Тогда в паре с номером n относительная мера <u>ошибочности</u> h_n составляет:

$$h_n = L(E_n, H_n]/(L(H_{n-1}, E_n] + L(E_n, H_n]) =$$

$$(H_n - E_n)/((E_n - H_{n-1}) + (H_n - E_n)) = (H_n - E_n)/(H_n - H_{n-1}) =$$

$$(H_n - E_n)/(1/n) = n(H_n - E_n) = n\Delta_n = n\varepsilon_n,$$

$$h_n = n(H_n - E_n).$$

Численно для избранных первых пар эта последовательность такова:

$$h_1 = (H_1 - E_1)/(H_1 - H_0) = 1(1 - 0.57721566490153286) = 0.42278433509846714;$$

$$h_2 = (H_2 - E_2)/(H_2 - H_1) = 2(1.5 - 1.27036284546147816942) = 0.45927430907704366116;$$

$$h_3 = (H_3 - E_3)/(H_3 - H_2) = 3(1.8333333333333333 - 1.6758279535696425514) = 0.4725161392910722458;$$

$$h_4 = (H_4 - E_4)/(H_4 - H_3) = 4(2.0833333333333333 - 1.96351002602142347883) = 0.47929322924763928468;$$

$$h_5 = (H_5 - E_5)/(H_5 - H_4) = 5(2.2833333333333333 - 2.1866535773356332346) = 0.4833987799988500327;$$

$$h_6 = (H_6 - E_6)/(H_6 - H_5) = 6(2.45 - 2.36897513412958786081) = 0.486149195222247283514;$$

$$h_7 = (H_7 - E_7)/(H_7 - H_6) = 7(2.5928571428571429 - 2.52312581395684616511) = 0.48811930230207714423;$$

$$h_8 = (H_8 - E_8)/(H_8 - H_7) = 8(2.7178571428571429 - 2.65665720658136878825) = 0.489599490206192894;$$

$$h_9 = (H_9 - E_9)/(H_9 - H_8) = 9(2.828968253968254 - 2.77444024223775224279) = 0.49075210557451581489;$$

$$h_{10} = (H_{10} - E_{10})/(H_{10} - H_9) = 10(2.928968253968254 - 2.87980075789557854402) = 0.4916749607267545598;$$

$$h_{11} = (H_{11} - E_{11})/(H_{11} - H_{10}) = 11(3.0198773448773449 - 2.97511093769990340406) = 0.49243047895185645534;$$

$$h_{12} = (H_{12} - E_{12})/(H_{12} - H_{11}) = 12(3.1032106782106782 - 3.06212231468953317023) = 0.49306036225374035724;$$

$$h_{13} = (H_{13} - E_{13})/(H_{13} - H_{12}) = 13(3.1801337551337551 - 3.14216502236306959605) = 0.49359352601891155135;$$

$$h_{14} = (H_{14} - E_{14})/(H_{14} - H_{13}) = 14(3.2515623265623266 - 3.21627299451679147452) = 0.49405064863749175672;$$

$$h_{15} = (H_{15} - E_{15})/(H_{15} - H_{14}) = 15(3.3182289932289932 - 3.28526586600374 2926) = 0.49444690837875411;$$

$$h_{16} = (H_{16} - E_{16})/(H_{16} - H_{15}) = 16(3.3807289932289932 - 3.34980438714131409767) = 0.49479369740286563728;$$

$h_{17} = (H_{17} - E_{17})/(H_{17} - H_{16}) = 17(3.4395525226407579 - 3.41042900895774894025) = 0.49509973261115231575;$

$h_{18} = (H_{18} - E_{18})/(H_{18} - H_{17}) = 18(3.4951080781963135 - 3.46758742279769755221) = 0.49537179717508706022;$

$h_{19} = (H_{19} - E_{19})/(H_{19} - H_{18}) = 19(3.5477396571436819 - 3.52165464406797332001) = 0.49561524843846301981;$

$h_{20} = (H_{20} - E_{20})/(H_{20} - H_{19}) = 20(3.5977396571436819 - 3.57294793845552385344) = 0.4958343737631609312;$

$h_{30} = (H_{30} - E_{30})/(H_{30} - H_{29}) = 30(3.9949871309203911 - 3.97841304656368823541) = 0.4972225307010859377;$

$h_{40} = (H_{40} - E_{40})/(H_{40} - H_{39}) = 40(4.278543038936376 - 4.26609511901546916285) = 0.497916796836273486;$

$h_{50} = (H_{50} - E_{50})/(H_{50} - H_{49}) = 50(4.4992053383294251 - 4.48923867032967891862) = 0.498333399987309069.$

Всеобщие методологии именно систематических вычислительных экспериментов с синергией анализа и синтеза итогов этих экспериментов позволяют предположить следующее:

1. Относительная мера ошибочности, строго монотонно возрастая, стремится к 1/2.
2. Приближённая формула Эйлера на деле приближает не гармоническое число с соответствующим номером, а среднее арифметическое этого гармонического числа и предыдущего гармонического числа.

3. Приближённая формула Эйлера может быть весьма существенно уточнена.

Замечание. Общий метод оценки приближений измерением совокупностей областей правильности и ошибочности разбиения зафиксировал превышение 1/2 относительной мерой ошибочности на полуотрезке-полуинтервале от 2 до 3. Это никоим образом не противоречит полученным данным, коль скоро не обеспечиваются именно парность промежутков правильности и промежутков ошибочности и отсутствие обрезания этих промежутков началом и концом произвольного промежутка, в данном случае полуотрезка-полуинтервала от 2 до 3.

2.4.8. ПОЛНАЯ СИСТЕМА ВСЕОБЩИХ МЕТОДОЛОГИЙ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УТОЧНЕНИЮ ПРИБЛИЖЁННОЙ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Разность гармонического числа и его приближения по приближённой формуле Эйлера является бесконечно малой для последовательности всех гармонических чисел. Кроме того, производная натурального логарифма независимой переменной по этой независимой переменной есть обращение этой независимой переменной, то есть континуализация единичной дроби, а гармонический ряд связан с соответствующим интегралом. Поэтому несомненно, что приближённая формула Эйлера не только

исторически, но и логически и вполне научно обоснованно может и должна быть принята в качестве непременного начального приближения, то есть приближения нулевого порядка, к гармоническим числам.

Зависимая переменная в принципе является произвольным вообще переменным и в частном случае постоянным предметом, изменяющимся в зависимости от своей системы независимых переменных, и, следовательно, обобщает функцию, функционал, оператор и даже систему. Ведь система тоже может быть переменной, а постоянная система есть частный случай переменной системы с отсутствующими, при измерениях нулевыми, изменениями.

Разумеется, последовательность вообще как функция порядкового номера является частным случаем функции как зависимой переменной, простая последовательность – частным случаем функции одного аргумента, n-кратная последовательность – частным случаем функции n аргументов, а порядковый номер – частным случаем независимой переменной, в том числе аргумента функции.

Настоящую полную систему всеобщих методологий изменения зависимой переменной составляют следующие три априорно возможные и целесообразные всеобщие методологии:

1. Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной.

2. Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной.

3. Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной.

Полнота системы всеобщих методологий изменения зависимой переменной обусловлена включением логически полной системы принципиально возможных способов изменения зависимой переменной.

Всеобщность системы всеобщих методологий изменения зависимой переменной обусловлена:

1. Всеобщностью понятий зависимой и независимых переменных.

2. Всеобщностью понятия изменения, включающего постоянство, или неизменность, как частный случай.

3. Всеобщностью иерархичности рассмотрений и действий как многоуровневой соподчинённости следующих сверхуровней:

3.1. Сверхуровень зависимой переменной в целом, включающий:

3.1.1. Уровень зависимой переменной как таковой.

3.1.2. Уровень системы значений зависимой переменной.

3.1.3. Уровень отдельного значения зависимой переменной.

3.2. Сверхуровень системы независимых переменных в целом, включающий:

3.2.1. Уровень системы независимых переменных как таковых.

3.2.2. Уровень целых систем всех значений системы независимых переменных.

3.2.3. Уровень систем отдельных значений системы независимых переменных.

3.3. Сверхуровень отдельной независимой переменной в целом, включающий:

3.3.1. Уровень отдельной независимой переменной как таковой.

3.3.2. Уровень системы значений отдельной независимой переменной.

3.3.3. Уровень отдельного значения отдельной независимой переменной.

4. Всеобщностью единообразия приложения методологий ко всем элементам систем переменных и их значений.

Сущность этой полной системы всеобщих методологий изменения зависимой переменной показывается приложением этой системы к уточнению приближённой формулы Эйлера.

Общей целью приложения полной системы всеобщих методологий изменения зависимой переменной к уточнению приближённой формулы Эйлера является высокоточное

приближение непременно всех гармонических чисел, то есть не только имеющих достаточно большие порядковые номера.

Общей задачей приложения полной системы всеобщих методологий изменения зависимой переменной к уточнению приближённой формулы Эйлера является обеспечение бесконечной малости разностей предлагаемых приближений гармонических чисел и приближений тех же гармонических чисел по приближённой формуле Эйлера. Это обеспечивает бесконечную малость разностей гармонических чисел и их предлагаемых приближений и позволяет опираться на всеобщие методологии именно систематических вычислительных экспериментов

с синергией анализа и синтеза итогов этих экспериментов и тем самым эффективно использовать метод наведения, или неполной индукции, для поиска и нахождения искомых приближений.

Общими функциональными методами и алгоритмами полной системы всеобщих методологий изменения зависимой переменной, в том числе применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера, являются следующие:

1. <u>Общие функциональные метод и алгоритм обращения последовательных остатков</u>. При этом, в том числе в знаменателе обращения остатка, выделяются <u>бесконечно большая</u> часть и <u>конечная постоянная</u> часть, а <u>бесконечно</u>

малая часть оставляется и определяет следующий по порядку остаток или непосредственно самой собой в общих методе и алгоритме построения именно функциональных непрерывных, или цепных, дробей, или опосредствованно как разность точного значения (в частном случае гармонического числа) и его приближения, получаемого отбрасыванием этой бесконечно малой части, в общих методе и алгоритме построения рядов именно функциональных единичных дробей последовательным их выделением. Процесс выделения прекращается при получении именно нулевого остатка, уже не подлежащего обращению. В любом случае необходимо обеспечить непременную однозначность именно каждой оставляемой бесконечно малой.

Три части в знаменателе обращения остатка имеют три пары взаимных отношений.

Во-первых, есть пара, включающая бесконечно большую часть и конечную постоянную часть, которые объединяются, вместе выделяются и могут рассматриваться наподобие сообщающихся сосудов с законом сохранения суммы. Только эта сумма и является важной, и только её однозначность непременно должна быть обеспечена. Но это как раз и обеспечивается однозначностью определения бесконечно малой части.

Пара, включающая конечную постоянную часть и бесконечно малую часть, не создаёт никаких проблем, поскольку эти части именно чётко взаимно разделены, или

отделены друг от друга. Действительно, нельзя вычесть переменную величину из конечной постоянной части, которая при этом утратит постоянство. А если ненулевую постоянную величину вычесть из конечной постоянной части и прибавить к бесконечно малой части, то бывшая бесконечно малой часть перестанет быть бесконечно малой, то есть утратит свой атрибут как непременный признак и, следовательно, изменит свою сущность. Разумеется, это относится к любым переменным величинам, а также к постоянным величинам обоих знаков.

Остаётся пара, состоящая из бесконечно большой и бесконечно малой частей. Взаимное разделение именно этих частей не только является нечётким, но и не позволяет

однозначно выделить следующий по счёту остаток. Действительно, из бесконечно большой части можно вычесть произвольную бесконечно малую величину и прибавить её к бесконечно малой части, которая и после такого изменения останется бесконечно малой. И обратно, из бесконечно малой части вполне можно вычесть произвольную бесконечно малую величину и прибавить её к бесконечно большой части, причём после такого изменения бесконечно малая часть останется бесконечно малой, а бесконечно большая часть останется бесконечно большой. Более того, бесконечно большая часть вообще способна поглотить бесконечно малую часть целиком. При этом бесконечно большая часть останется бесконечно

большой, бесконечно малая часть станет нулевой и тем самым останется бесконечно малой, да и процесс выделения придётся прекратить ввиду получения именно нулевого остатка, что воспрепятствует дальнейшему уточнению.

Отсюда ясно, что для однозначности выделения бесконечно малой части, определяющей новый остаток, необходимо воспрепятствовать возможности свободного перебрасывания ненулевых бесконечно малых величин между бесконечно большой и бесконечно малой частями. Во многих случаях удаётся для бесконечно большой части найти достаточно простое и удобное для практики аналитическое выражение. Тогда именно оно и

принимается полной системой всеобщих методологий изменения зависимой переменной. Тем самым фиксируется разбиение на бесконечно большую, конечную постоянную и бесконечно малую части. Этот путь рассматривается ввиду его практической полезности как наиболее целесообразный и предпочтительный.

Для примера вернёмся к точной

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^{n} 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$$

и приближённой

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^{n} 1/j \approx E_n = \ln(n) + \gamma$$

формулам Эйлера для гармонических чисел H_n как частичных сумм гармонического ряда.

Точная формула Эйлера представляет гармоническое число суммой трёх частей: бесконечно большой части ln(n), конечной постоянной части γ и бесконечно малой части ε_n. При любом разумном подходе бесконечно большая часть ln(n) и конечная постоянная часть γ вполне учитываются, так что важна непременная однозначность только их суммы, необязательная для отдельных слагаемых. А вот судьба бесконечно малой части ε_n зависит от подходов и как раз и определяет различие между подходами.

Эйлер просто отбросил бесконечно малую часть ε_n, а другие подходы учитывают ε_n, хотя и по-разному. Однако в любом случае требуется непременная однозначность определения бесконечно малой ε_n. В данном случае Эйлеру удалось для бесконечно большой части найти достаточно простое и удобное для практики аналитическое выражение ln(n). Оно и принимается. Тем самым фиксируется разбиение на бесконечно большую, конечную постоянную и бесконечно малую части. Этот путь рассматривается ввиду его практической полезности как наиболее целесообразный и предпочтительный.

2. Общие функциональные метод и алгоритм последовательного построения функциональных непрерывных, или цепных, дробей.

3. Общие функциональные метод и алгоритм построения рядов функциональных единичных дробей последовательным их выделением.

Замечание. Правый индекс, как и выше, обозначает порядковый номер гармонического числа, в том числе у приближающей функции. Левый индекс у приближающей функции обозначает порядковый номер собственного приближения приближающей функции по мере её уточнения, в частности в первом, втором и дальнейших приближениях.

2.4.8.1. ВСЕОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИЗМЕНЕНИЕМ ЗНАЧЕНИЯ САМОЙ ЭТОЙ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УТОЧНЕНИЮ ПРИБЛИЖЁННОЙ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной для частного случая функции f системы переменных ($_{\omega\in\Omega}x_\omega$) и аддитивного изменения $\Delta f(_{\omega\in\Omega}x_\omega)$ предусматривает замену

$$y = f(_{\omega\in\Omega}x_\omega)$$

на

$$y = f(_{\omega\in\Omega}x_\omega) + \Delta f(_{\omega\in\Omega}x_\omega).$$

Для частного случая функции f одной переменной x и аддитивного изменения $\Delta f(x)$ предусматривается замена

$$y = f(x)$$

на

$$y = f(x) + \Delta f(x).$$

Для частного случая простой последовательности Φ_n как функции Φ одной переменной, а именно номера n элемента последовательности, и аддитивного изменения $\Delta\Phi(n)$ предусматривается замена

$$y = \Phi(n) = \Phi_n$$

на

$$y = \Phi(n) + \Delta\Phi(n) = \Phi_n + \varphi_n,$$

где φ_n есть другое, более удобное обозначение последовательности $\Delta\Phi(n)$:

$$\varphi_n = \Delta\Phi(n).$$

Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением значения сам<u>о</u>й этой зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера для последовательных гармонических чисел H_n как частичных сумм гармонического ряда берёт в качестве основы <u>именно точную</u> формулу Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$$

с бесконечно малой последовательностью ε_n, но <u>не отбрасывает</u> ε_n, как это сделал Эйлер при получении своей приближённой формулы

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx E_n = \ln(n) + \gamma,$$

где

$$\gamma = 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767...$$

– постоянная Эйлера–Маскерони,

а приближает бесконечно малую последовательность ε_n аналитически.

Всеобщие методологии именно систематических вычислительных экспериментов с синергией анализа и синтеза итогов этих экспериментов позволили предположить, что приближённая формула Эйлера на деле приближает не гармоническое число с соответствующим номером, а среднее арифметическое этого гармонического числа и предыдущего гармонического числа, то есть

разность между гармоническим числом с номером n и половиной 1/(2n) последней дроби гармонического числа с номером n, равной 1/n. Отсюда следует, что в почти первом приближении, или не совсем полном первом приближении, что красноречиво выражается левым индексом 1 - δ, имеют место, во всяком случае для достаточно больших n, следующие соотношения:

$$\varepsilon_n \approx {}_{1-\delta}g_n = 1/(2n),$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx {}_{1-\delta}G_n = \ln(n) + \gamma + {}_{1-\delta}g_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n).$$

Последняя приближённая формула собственного первого приближения $_{1-\delta}G_n$ приближающей функции G_n даёт следующие приближения избранных первых гармонических чисел H_n:

$$H_1 \approx {}_{1\text{-}\delta}G_1 = \ln(1) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 + 0.5/1 =$$
$$1.077215664901532860606512090082402431042159335939923598805767;$$

$$H_2 \approx {}_{1\text{-}\delta}G_2 = \ln(2) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/2 =$$
$$1.520362845461478170023744211540578999117659470300178852926447009;$$

$$H_3 \approx {}_{1\text{-}\delta}G_3 = \ln(3) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/3 =$$
$$1.842494620236309218668423993671594802356316560429339717207128;$$

$$H_4 \approx {}_{1\text{-}\delta}G_4 = \ln(4) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/4 =$$
$$2.088510026021423479440976332998755567193159604660434107047127019;$$

$$H_5 \approx {}_{1\text{-}\delta}G_5 = \ln(5) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/5 =$$
$$2.286653577335633235207271423308590070567760690208441320718414891;$$

$$H_6 \approx {}_{1-\delta}G_6 = \ln(6) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/6 = 2.452308467462921194752322781796438037098483361456261637994474676;$$

$$H_7 \approx {}_{1-\delta}G_7 = \ln(7) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/7 = 2.594554385385417594283293404954153589250672636950356215836585721;$$

$$H_8 \approx {}_{1-\delta}G_8 = \ln(8) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/8 = 2.719157206581368788858208454456932135268659739020689361167807028;$$

$$H_9 \approx {}_{1-\delta}G_9 = \ln(9) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/9 = 2.829995797793307798952558119483009395892696007140978057830711223;$$

$$H_{10} \approx {}_{1-\delta}G_{10} = \ln(10) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/10 = 2.929800757895578544624503544766766638643260824568696574839094901;$$

$$H_{11} \approx {}_{1-\delta}G_{11} = \ln(11) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/11 = 3.020565483154448859213910213502077185409320735331886228569789255;$$

$$H_{12} \approx {}_{1-\delta}G_{12} = \ln(12) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/12 = 3.103788981356199837502888236587947938507316829149850225448488019;$$

$$H_{13} \approx {}_{1-\delta}G_{13} = \ln(13) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/13 = 3.180626560824608058198461070109259497385888191616691767632740 49;$$

$$H_{14} \approx {}_{1-\delta}G_{14} = \ln(14) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/14 = 3.251987280231077189414811240698044443040458485596325755671551445;$$

$$H_{15} \approx {}_{1-\delta}G_{15} = \ln(15) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/15 = 3.318599199337076259935849993564449108548584581364524105786442558;$$

$$H_{16} \approx {}_{1-\delta}G_{16} = \ln(16) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 + 0.5/16 = 3.3810543871413140982754405759151087033441598733809446152884 87038;$$

$$H_{17} \approx {}_{1-\delta}G_{17} = \ln(17) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/17 = 3.43984077366363129379722317854376426074800940734919779786771062;$$

$$H_{18} \approx {}_{1-\delta}G_{18} = \ln(18) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/18 = 3.49536520057547533059201246316340818619041836372345553417361 3454;$$

$$H_{19} \approx {}_{1-\delta}G_{19} = \ln(19) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/19 = 3.54797043354165753114185531144394017880585438671273662787004 3026;$$

$$H_{20} \approx {}_{1-\delta}G_{20} = \ln(20) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/20 = 3.59794793845552385404173566622494320671876095892895182895977491;$$

$$H_{30} \approx {}_{1\text{-}\delta}G_{30} = \ln(30) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 + 0.5/30 = 3.9950797132303549026864154483559590099574180490581126932404559 01;$$

$$H_{40} \approx {}_{1\text{-}\delta}G_{40} = \ln(40) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/40 = 4.2785951190154691634589677876831197747942610932892070830804549 2;$$

$$H_{50} \approx {}_{1\text{-}\delta}G_{50} = \ln(50) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/50 = 4.4992386703296789192252628779929542781688621788372142967517427 92;$$

$$H_{60} \approx {}_{1\text{-}\delta}G_{60} = \ln(60) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/60 = 4.6798935604569668787703142364808022446995848500850346140278025 77;$$

$$H_{70} \approx {}_{1\text{-}\delta}G_{70} = \ln(70) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/70 = 4.8328537640937489925869991453528035111374884112934149061556279 08;$$

$$H_{80} \approx {}_{1-\delta}G_{80} = \ln(80) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 + 0.5/80$$
$$= 4.965492299575414472876199909141296342869761227649462337201134929;$$

$$H_{90} \approx {}_{1-\delta}G_{90} = \ln(90) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 + 0.5/90$$
$$= 5.082580890787353482970549574167373603493797495769751033864039124;$$

$$H_{100} \approx {}_{1-\delta}G_{100} = \ln(100) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 + 0.5/100$$
$$= 5.187385850889624228642494999451130846244362313197469550872422802;$$

$$H_{110} \approx {}_{1-\delta}G_{110} = \ln(110) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 + 0.5/110$$
$$= 5.282241485239403634140992577277350483919513133051568295512208064;$$

$$H_{120} \approx {}_{1-\delta}G_{120} = \ln(120) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 + 0.5/120$$
$$= 5.368874074350245521520879691272312146108418317778623201481815 92;$$

$$H_{130} \approx {}_{1-\delta}G_{130} = \ln(130) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 + 0.5/130 = 5.448596269203269126831837140178239089602374923175057537411986565;$$

$$H_{140} \approx {}_{1-\delta}G_{140} = \ln(140) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/140 = 5.522429516082265730575659838239551507784417117082241588847736489;$$

$$H_{150} \approx {}_{1-\delta}G_{150} = \ln(150) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/150 = 5.591184292331121943953841448248813316149686069993297081819770459;$$

$$H_{200} \approx {}_{1-\delta}G_{200} = \ln(200) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/200 = 5.878033031449569538059727120909307414319862447557724804993102811;$$

$$H_{250} \approx {}_{1-\delta}G_{250} = \ln(250) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/250 = 6.100676582763779293826022211219141917694463533105732018664390684;$$

$$H_{300} \approx {}_{1-\delta}G_{300} = \ln(300) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/300 = 6.282664806224400586704406903040323217558519537686885669273783802;$$

$$H_{350} \approx {}_{1-\delta}G_{350} = \ln(350) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/350 = 6.436577390813563652902044192864705436377375479847646913782561514;$$

$$H_{400} \approx {}_{1-\delta}G_{400} = \ln(400) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/400 = 6.569930212009514847476959242367483982395362581917980059113782821;$$

$$H_{450} \approx {}_{1-\delta}G_{450} = \ln(450) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/450 = 6.687574358777009413126864462949116798574954405593824311332242571;$$

$$H_{500} \approx {}_{1-\delta}G_{500} = \ln(500) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/500 = 6.792823763323724603243254332677318485769963667465987272785070693.$$

Однако общей целью системы общих методологий уточнения функции применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера как начального приближения нулевого порядка, что обозначено левым индексом 0, является высокоточное приближение непременно всех гармонических чисел, то есть не только имеющих достаточно большие порядковые номера. Поэтому будем действовать последовательно, исходя из тех же формул для избранных первых элементов последовательности ε_n как соответствующих абсолютных погрешностей Δ_n, причём исследуем возможности, как и отчасти выше, ограничиться гармоническими числами с номерами до 50 включительно и значительно снизить

точность для краткости и наглядности представляемых вычислений:

$$\Delta_n = \varepsilon_n = H_n - E_n.$$

$$\Delta_1 = \varepsilon_1 = H_1 - E_1 = 1 - 0.57721566490153286 = 0.42278433509846714;$$

$$\Delta_2 = \varepsilon_2 = H_2 - E_2 = 1.5 - 1.27036284546147816942 = 0.22963715453852183058;$$

$$\Delta_3 = \varepsilon_3 = H_3 - E_3 = 1.8333333333333333 - 1.67582795356964255514 = 0.1575053797636907486;$$

$$\Delta_4 = \varepsilon_4 = H_4 - E_4 = 2.0833333333333333 - 1.96351002602142347883 = 0.11982330731190982117;$$

$$\Delta_5 = \varepsilon_5 = H_5 - E_5 = 2.2833333333333333 - 2.18665357733563323346 = 0.0966797559977000654;$$

$$\Delta_6 = \varepsilon_6 = H_6 - E_6 = 2.45 - 2.36897513412958786081 = 0.08102486587041213919;$$

$$\Delta_7 = \varepsilon_7 = H_7 - E_7 = 2.5928571428571429 - 2.52312581395684616511 = 0.06973132890029673489;$$

$$\Delta_8 = \varepsilon_8 = H_8 - E_8 = 2.7178571428571429 - 2.65665720658136878825 = 0.06119993627577411175;$$

$$\Delta_9 = \varepsilon_9 = H_9 - E_9 = 2.828968253968254 - 2.77444024223775224279 = 0.05452801173050175721;$$

$$\Delta_{10} = \varepsilon_{10} = H_{10} - E_{10} = 2.928968253968254 - 2.87980075789557854402 = 0.04916749607267545598;$$

$$\Delta_{11} = \varepsilon_{11} = H_{11} - E_{11} = 3.0198773448773449 - 2.97511093769990340406 = 0.04476640717744149594;$$

$$\Delta_{12} = \varepsilon_{12} = H_{12} - E_{12} = 3.1032106782106782 - 3.06212231468953317023 = 0.04108836352114502977;$$

$$\Delta_{13} = \varepsilon_{13} = H_{13} - E_{13} = 3.1801337551337551 - 3.14216502236306959605 = 0.03796873277068550395;$$

$$\Delta_{14} = \varepsilon_{14} = H_{14} - E_{14} = 3.2515623265623266 - 3.21627299451679147452 = 0.03528933204553512548;$$

$$\Delta_{15} = \varepsilon_{15} = H_{15} - E_{15} = 3.3182289932289932 - 3.285265866003742926 = 0.032963127225250274;$$

$$\Delta_{16} = \varepsilon_{16} = H_{16} - E_{16} = 3.3807289932289932 - 3.34980438714131409767 = 0.03092460608767910233;$$

$$\Delta_{17} = \varepsilon_{17} = H_{17} - E_{17} = 3.4395525226407579 - 3.41042900895774894025 = 0.02912351368300895975;$$

$$\Delta_{18} = \varepsilon_{18} = H_{18} - E_{18} = 3.4951080781963135 - 3.46758742279769755221 = 0.02752065539861594779;$$

$$\Delta_{19} = \varepsilon_{19} = H_{19} - E_{19} = 3.5477396571436819 - 3.52165464406797332001 = 0.02608501307570857999;$$

$$\Delta_{20} = \varepsilon_{20} = H_{20} - E_{20} = 3.5977396571436819 - 3.57294793845552385344 = 0.02479171868815804656;$$

$$\Delta_{30} = \varepsilon_{30} = H_{30} - E_{30} = 3.9949871309203911 - 3.97841304656368823541 = 0.01657408435670286459;$$

$$\Delta_{40} = \varepsilon_{40} = H_{40} - E_{40} = 4.278543038936376 - 4.26609511901546916285 = 0.01244791992090683715;$$

$$\Delta_{50} = \varepsilon_{50} = H_{50} - E_{50} = 4.4992053383294251 - 4.48923867032967891862 = 0.00996666799974618138.$$

Прежде всего, с учётом алгоритма построения вычисления непрерывных дробей и алгоритма выделения единичных дробей обращениями последовательных остатков, тем более что здесь идёт речь о гармоническом ряде единичных дробей, вычислим именно обращения

$${}_0\eta_n = 1/\varepsilon_n$$

этих избранных элементов последовательности ε_n:

$${}_0\eta_n = 1/\varepsilon_n =1/\Delta_n = 1/(H_n -E_n).$$

$${}_0\eta_1 = 1/\varepsilon_1 = 1/(H_1 - E_1) = 1/(1 - 0.5772156649015328606512) = 2.3652721186254415518772;$$

$${}_0\eta_2 = 1/\varepsilon_2 = 1/(H_2 - E_2) = 1/(1.5 - 1.27036284546147816942) = 4.35469600731465751627236;$$

$${}_0\eta_3 = 1/\varepsilon_3 = 1/(H_3 - E_3) = 1/(1.8333333333333333 - 1.6758279535696425514) = 6.3489894853136124773 7;$$

$${}_0\eta_4 = 1/\varepsilon_4 = 1/(H_4 - E_4) = 1/(2.0833333333333333 - 1.9635100260214234788 3) = 8.3456217528441158072 6886;$$

$${}_0\eta_5 = 1/\varepsilon_5 = 1/(H_5 - E_5) = 1/(2.2833333333333333 - 2.1866535773356332346) = 10.343427015101167 67;$$

$${}_0\eta_6 = 1/\varepsilon_6 = 1/(H_6 - E_6) = 1/(2.45 - 2.3689751341295878608 1) = 12.341890224161051 4;$$

$${}_0\eta_7 = 1/\varepsilon_7 = 1/(H_7 - E_7) = 1/(2.592857142857142 9 - 2.5231258139568461651 1) = 14.340756382684463614 636;$$

$${}_0\eta_8 = 1/\varepsilon_8 = 1/(H_8 - E_8) = 1/(2.717857142857142 9 - 2.6566572065813687882 5) = 16.339886294879170 64;$$

$${}_0\eta_9 = 1/\varepsilon_9 = 1/(H_9 - E_9) = 1/(2.828968253968254 - 2.77444024223775224279) = 18.33919793265856853592;$$

$${}_0\eta_{10} = 1/\varepsilon_{10} = 1/(H_{10} - E_{10}) = 1/(2.928968253968254 - 2.87980075789557854402) = 20.3386399527419510528141;$$

$${}_0\eta_{11} = 1/\varepsilon_{11} = 1/(H_{11} - E_{11}) = 1/(3.0198773448773449 - 2.97511093769990340406) = 22.33817862658220857269868;$$

$${}_0\eta_{12} = 1/\varepsilon_{12} = 1/(H_{12} - E_{12}) = 1/(3.1032106782106782 - 3.06212231468953317023) = 24.337790904847711610148695766;$$

$${}_0\eta_{13} = 1/\varepsilon_{13} = 1/(H_{13} - E_{13}) = 1/(3.1801337551337551 - 3.14216502236306959605) = 26.337460510983115615495;$$

$${}_0\eta_{14} = 1/\varepsilon_{14} = 1/(H_{14} - E_{14}) = 1/(3.2515623265623266 - 3.21627299451679147452) = 28.33717562887456050430195;$$

$${}_0\eta_{15} = 1/\varepsilon_{15} = 1/(H_{15} - E_{15}) = 1/(3.3182289932289932 - 3.285265866003742926) = 30.336927475557727694;$$

$${}_0\eta_{16} = 1/\varepsilon_{16} = 1/(H_{16} - E_{16}) = 1/(3.3807289932289932 - 3.34980438714131409767) = 32.336709388140510134284541;$$

$${}_0\eta_{17} = 1/\varepsilon_{17} = 1/(H_{17} - E_{17}) = 1/(3.4395525226407579 - 3.41042900895774894025) = 34.336516221372461976;$$

$${}_0\eta_{18} = 1/\varepsilon_{18} = 1/(H_{18} - E_{18}) = 1/(3.4951080781963135 - 3.46758742279769755221) = 36.33634393933406822617;$$

$${}_0\eta_{19} = 1/\varepsilon_{19} = 1/(H_{19} - E_{19}) = 1/(3.5477396571436819 - 3.52165464406797332001) = 38.336189332074380926736;$$

$${}_0\eta_{20} = 1/\varepsilon_{20} = 1/(H_{20} - E_{20}) = 1/(3.5977396571436819 - 3.57294793845552385344) = 40.33604981479793992;$$

$${}_0\eta_{30} = 1/\varepsilon_{30} = 1/(H_{30} - E_{30}) = 1/(3.9949871309203911 - 3.97841304656368823541) = 60.33515809852757297264;$$

$$ {}_0\eta_{40} = 1/\varepsilon_{40} = 1/(H_{40} - E_{40}) = 1/(4.278543038936376 - 4.26609511901546916285) = 80.3347070316909223199; $$

$$ {}_0\eta_{50} = 1/\varepsilon_{50} = 1/(H_{50} - E_{50}) = 1/(4.4992053383294251 - 4.48923867032967891862) = 100.334434740423454234. $$

По итогам проведённых математических экспериментов всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения позволяют предложить чрезвычайно простые и предположительно высокоточные приближённые формулы уже в первом приближении для непременно всех гармонических чисел,
то есть не только имеющих достаточно большие номера,
причём точность растёт вместе с ростом номеров n:

$$ {}_0\eta_n \approx 2n + 1/3; $$

$$\varepsilon_n = {}_0\varepsilon_n = 1/{}_0\eta_n \approx {}_1g_n = 1/(2n + 1/3);$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx {}_1G_n = \ln(n) + \gamma + {}_1g_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3).$$

Последняя приближённая формула собственного первого приближения ${}_1G_n$ приближающей функции G_n даёт следующие приближения избранных первых гармонических чисел H_n:

$$H_1 \approx {}_1G_1 = \ln(1) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 + 0.5/(1 + 1/6) =$$

$$1.0057870934729614320350835186538310024707307645113521702343 38429;$$

$$H_2 \approx {}_1G_2 = \ln(2) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(2 + 1/6) =$$

$$1.501132076230708939254513442309809768348428701069409622157 21624;$$

$$H_3 \approx {}_1G_3 = \ln(3) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 + 0.5/(3 + 1/6) =$$

$$1.8337226904117478151596520638470333988475446306047783136983 5607;$$

$$H_4 \approx {}_1G_4 = \ln(4) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(4 + 1/6) =$$

$$2.0835100260214234794409763329987555671931596046604341070471 27019;$$

$$H_5 \approx {}_1G_5 = \ln(5) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(5 + 1/6) =$$

$$2.2834277708840203319814649716956868447613090773052155142668 01988;$$

$$H_6 \approx {}_1G_6 = \ln(6) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(6 + 1/6) =$$

$$2.4500562152106689425000705295441857848462311092040093857422 22424;$$

$$H_7 \approx {}_1G_7 = \ln(7) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(7 + 1/6) =$$

$$2.5928932558173112819909346009674426257955231352892266477302 73429;$$

$$H_8 \approx {}_1G_8 = \ln(8) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 + 0.5/(8 + 1/6) =$$

$$2.7178816963772871562051472299671362169013128002451791570861 74375;$$

$$H_9 \approx {}_1G_9 = \ln(9) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(9 + 1/6) =$$

$$2.828985696783206788851548018472908385791685906130877047729701122;$$

$$H_{10} \approx {}_1G_{10} = \ln(10) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(10 + 1/6) =$$

$$2.928981085764431003640896987389717458315391972109680181396 47195;$$

$$H_{11} \approx {}_1G_{11} = \ln(11) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(11 + 1/6) =$$

$$3.019887057102888479295321339689322775639985592862415400890006351;$$

$$H_{12} \approx {}_1G_{12} = \ln(12) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(12 + 1/6) =$$

$$3.103218205100492074945810611017171682799554272072224654672232311;$$

$$H_{13} \approx {}_1G_{13} = \ln(13) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(13 + 1/6) =$$

$$3.18013970590737339412835396202746787129046525538367501902228 0865;$$

$$H_{14} \approx {}_1G_{14} = \ln(14) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(14 + 1/6) =$$

$$3.2515671121638502986585087196896410816959206704702753355034842 18;$$

$$H_{15} \approx {}_1G_{15} = \ln(15) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(15 + 1/6) =$$

$$3.3182328989707775893635483693198148742248218280998223739486076258;$$

$$H_{16} \approx {}_1G_{16} = \ln(16) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(16 + 1/6) =$$

$$3.3807322221928604900280178955027375693235413166799136874534354 91;$$

$$H_{17} \approx {}_1G_{17} = \ln(17) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(17 + 1/6) =$$

$$3.4395552225499819505647845720331988695429837077489693569767911 46;$$

$$H_{18} \approx {}_1G_{18} = \ln(18) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 + 0.5/(18 + 1/6) =$$

$$3.4951103585775140665757025752938872891465855400741181233683 12741;$$

$$H_{19} \approx {}_1G_{19} = \ln(19) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(19 + 1/6) =$$

$$3.547741600589712451050322130665908142192582075499921982561118541;$$

$$H_{20} \approx {}_1G_{20} = \ln(20) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(20 + 1/6) =$$

$$3.597741326885275920157438145563786181925372529176885713257295572;$$

$$H_{30} \approx {}_1G_{30} = \ln(30) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(30 + 1/6) =$$

$$3.994987632199047352041848229203104497986883979076528899501966 03;$$

$$H_{40} \approx {}_1G_{40} = \ln(40) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(40 + 1/6) =$$

$$4.278543251795552151010835007600132222927041176276758950300371932;$$

$$H_{50} \approx {}_{1}G_{50} = \ln(50) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 + 0.5/(50 + 1/6) =$$

$$4.4992054477383167929794157019132200588997591888039917053896 16547;$$

$$H_{60} \approx {}_{1}G_{60} = \ln(60) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(60 + 1/6) =$$

$$4.679870476431112769813712205086527083111403871322338399808042651;$$

$$H_{70} \approx {}_{1}G_{70} = \ln(70) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(70 + 1/6) =$$

$$4.832836797687233892485200706262202900346853867689750162348366286;$$

$$H_{80} \approx {}_{1}G_{80} = \ln(80) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(80 + 1/6) =$$

$$4.965479305812420709882436915378302579875998233886468574207371936;$$

$$H_{90} \approx {}_{1}G_{90} = \ln(90) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(90 + 1/6) =$$

$$5.082570621738267428339208436356734868640644897700332262042309816;$$

$$H_{100} \approx {}_1G_{100} = \ln(100) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 + 0.5/(100 + 1/6) =$$

$$5.187377531422070152103393501946971112467324043646720798792555913;$$

$$H_{110} \approx {}_1G_{110} = \ln(110) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(110 + 1/6) =$$

$$5.282234608606203249049533355712228767511866316932740073809553684;$$

$$H_{120} \approx {}_1G_{120} = \ln(120) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(120 + 1/6) =$$

$$5.368868295339612141955461290902455465572126131000999530654261597;$$

$$H_{130} \approx {}_1G_{130} = \ln(130) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(130 + 1/6) =$$

$$5.448591344550457150076198412708525704396031970353231476149305584;$$

$$H_{140} \approx {}_1G_{140} = \ln(140) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(140 + 1/6) =$$

$$5.522425269437115399337338112402962413169163167702251780796097284;$$

$$H_{150} \approx {}_1G_{150} = \ln(150) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 + 0.5/(150 + 1/6) =$$

$$5.5911805927380771788779997908311292613957090074701746252899887 35;$$

$$H_{200} \approx {}_1G_{200} = \ln(200) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(200 + 1/6) =$$

$$5.878030949850901761207104306587908580015116402595193581013086159;$$

$$H_{250} \approx {}_1G_{250} = \ln(250) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(250 + 1/6) =$$

$$6.100675250318742651587514549660181224823044479141708034653731124;$$

$$H_{300} \approx {}_1G_{300} = \ln(300) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(300 + 1/6) =$$

$$6.282663880812592332031077271354222902918504731097953594500509695;$$

$$H_{350} \approx {}_1G_{350} = \ln(350) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 0.5/(350 + 1/6) =$$

$$6.436576710865239725520525188309051666063919302517124033521461357;$$

$$H_{400} \approx {}_1G_{400} = \ln(400) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 + 0.5/(400 + 1/6) =$$

$$6.5699296913931050182391416663574881473266412158205206671937495 01;$$

$$H_{450} \approx {}_1G_{450} = \ln(450) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 + 0.5/(450 + 1/6) =$$

$$6.6875739474067350291538503529487054283005704325797143109208722 96;$$

$$H_{500} \approx {}_1G_{500} = \ln(500) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 + 0.5/(500 + 1/6) =$$

$$6.7928234301014653563255602307113071562131492722643878059406854 88.$$

Теперь стало ясно, что почти, или не совсем полное, первое приближение

$${}_{1-\delta}g_n = 1/(2n)$$

взяло бесконечно большую часть знаменателя обращения первого остатка при использовании приближённой

формулы Эйлера в качестве начального, то есть нулевого по счёту, или порядку, приближения и пренебрегло конечной частью этого знаменателя. Такое пренебрежение не соответствует настоящей системе общих методологий уточнения функции, а именно общим функциональным методу и алгоритму обращения последовательных остатков, и заведомо нецелесообразно, поскольку лишь частично использует достигнутое и наличные возможности, беспричинно и необоснованно снижает качество приближения и замедляет построение достаточно точного приближения. Тем не менее, коль скоро главная, а именно бесконечно большая, часть знаменателя выделена правильно, так что

гармонические числа с достаточно большими порядковыми номерами будут приближаться с приемлемой точностью, всё-таки нельзя считать такое выделение принципиально недопустимым.

Оно нуждается в дополнительном исправлении, то есть в выделении нового остатка и его использовании.

Для этой цели могут быть применены указанные выше:

2. Общие функциональные метод и алгоритм последовательного построения функциональных непрерывных, или цепных, дробей.

3. Общие функциональные метод и алгоритм построения рядов функциональных единичных дробей последовательным их выделением.

Общие функциональные метод и алгоритм последовательного построения <u>функциональных непрерывных, или цепных, дробей</u> возвращают рассмотрение к исследованию знаменателя обращения, ведут к нахождению конечной части знаменателя, равной 1/3, и, следовательно, <u>почти</u>, или <u>не совсем полным</u>, <u>вторым приближением</u> $_{2-\delta}C_n$ приближающей функции C_n ведут

к тому же итогу, который достигается <u>первым приближением</u> $_1C_n = {}_1G_n$ приближающей функции G_n при целесообразном немедленном выделении <u>и бесконечно большой</u>, <u>и конечной</u> частей знаменателя.

Общие функциональные метод и алгоритм построения <u>рядов функциональных единичных дробей</u>

последовательным их выделением ведут к следующим собственным приближениям приближающих функций S_n и тем самым к уточнениям первого приближения $_1S_n = {}_1G_n$, которые подлежат дополнительным исследованиям, полезным для показа сущности и возможностей этих метода и алгоритма.

Вначале определим остатки r_n приближений к избранным первым гармоническим числам H_n, даваемые приближающей функцией G_n в собственном почти, или не совсем полном, первом приближении $_{1-\delta}G_n$:

$$\varepsilon_n \approx {}_{1-\delta}g_n = 1/(2n),$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx {}_{1-\delta}G_n = \ln(n) + \gamma + {}_{1-\delta}g_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n),$$

$$r_n = H_n - {}_{1-\delta}G_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j - (\ln(n) + \gamma + 1/(2n)).$$

$$r_1 = H_1 - {}_{1-\delta}G_1 = 1 - 1.0772156649015 = - 0.0772156649015;$$

$$r_2 = H_2 - {}_{1-\delta}G_2 = 1.5 - 1.5203628454615 = - 0.0203628454615;$$

$$r_3 = H_3 - {}_{1-\delta}G_3 = 1.8333333333333 - 1.8424946202363 = - 0.009161286903;$$

$$r_4 = H_4 - {}_{1-\delta}G_4 = 2.0833333333333 - 2.0885100260214 = - 0.0051766926880998;$$

$$r_5 = H_5 - {}_{1-\delta}G_5 = 2.2833333333333 - 2.2866535773356 = - 0.0033202440023001;$$

$$r_6 = H_6 - {}_{1-\delta}G_6 = 2.45 - 2.4523084674629 = - 0.0023084674628997;$$

$$r_7 = H_7 - {}_{1-\delta}G_7 = 2.5928571428571 - 2.5945543853854 = - 0.0016972425283002;$$

$$r_8 = H_8 - {}_{1-\delta}G_8 = 2.7178571428571 - 2.7191572065814 = - 0.0013000637243001;$$

$$r_9 = H_9 - {}_{1-\delta}G_9 = 2.8289682539683 - 2.8299957977933 = -0.0010275438250003;$$

$$r_{10} = H_{10} - {}_{1-\delta}G_{10} = 2.9289682539683 - 2.9298007578956 = -0.00083250392729983;$$

$$r_{11} = H_{11} - {}_{1-\delta}G_{11} = 3.0198773448773 - 3.0205654831544 = -0.00068813827709979;$$

$$r_{12} = H_{12} - {}_{1-\delta}G_{12} = 3.1032106782107 - 3.1037889813562 = -0.00057830314550023;$$

$$r_{13} = H_{13} - {}_{1-\delta}G_{13} = 3.1801337551338 - 3.1806265608246 = -0.00049280569079979;$$

$$r_{14} = H_{14} - {}_{1-\delta}G_{14} = 3.2515623265623 - 3.2519872802311 = -0.00042495366879969;$$

$$r_{15} = H_{15} - {}_{1-\delta}G_{15} = 3.318228993229 - 3.3185991993371 = -0.00037020610810012;$$

$$r_{16} = H_{16} - {}_{1-\delta}G_{16} = 3.380728993229 - 3.3810543871413 = -0.00032539391230024;$$

$$r_{17} = H_{17} - {}_{1-\delta}G_{17} = 3.4395525226408 - 3.4398407736636 = -0.00028825102280017;$$

$$r_{18} = H_{18} - {}_{1-\delta}G_{18} = 3.4951080781963 - 3.4953652005755 = -0.00025712237919961;$$

$$r_{19} = H_{19} - {}_{1-\delta}G_{19} = 3.5477396571437 - 3.5479704335417 = -0.00023077639800029;$$

$$r_{20} = H_{20} - {}_{1-\delta}G_{20} = 3.5977396571437 - 3.5979479384555 = -0.00020828131179984;$$

$$r_{30} = H_{30} - {}_{1-\delta}G_{30} = 3.9949871309204 - 3.9950797132304 = -0.0000925823100002;$$

$$r_{40} = H_{40} - {}_{1-\delta}G_{40} = 4.2785430389364 - 4.2785951190155 = -0.000052080079099959;$$

$$r_{50} = H_{50} - {}_{1-\delta}G_{50} = 4.4992053383294 - 4.4992386703297 = -0.000033332000300312.$$

Теперь осуществим обращения этих остатков:

$$\varepsilon_n \approx {}_{1-\delta}g_n = 1/(2n),$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx {}_{1-\delta}G_n = \ln(n) + \gamma + {}_{1-\delta}g_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n),$$

$$1/r_n = 1/(H_n - {}_{1-\delta}G_n) = 1/(\Sigma_{j=1}{}^n 1/j - (\ln(n) + \gamma + 1/(2n))).$$

$$1/r_1 = 1/(H_1 - {}_{1-\delta}G_1) = 1/(1 - 1.0772156649015) = -12.95073999139;$$

$$1/r_2 = 1/(H_2 - {}_{1-\delta}G_2) = 1/(1.5 - 1.5203628454615) = -49.109050200803;$$

$$1/r_3 = 1/(H_3 - {}_{1-\delta}G_3) = 1/(1.8333333333333 - 1.8424946202363) = -109.15497032109;$$

$$1/r_4 = 1/(H_4 - {}_{1-\delta}G_4) = 1/(2.0833333333333 - 2.0885100260214) = -193.17352994486;$$

$$1/r_5 = 1/(H_5 - {}_{1-\delta}G_5) = 1/(2.2833333333333 - 2.2866535773356) = -301.18268395553;$$

$$1/r_6 = 1/(H_6 - {}_{1-\delta}G_6) = 1/(2.45 - 2.4523084674629) = -433.18782528729;$$

$$1/r_7 = 1/(H_7 - {}_{1-\delta}G_7) = 1/(2.5928571428571 - 2.5945543853854) = -589.19098674809;$$

$$1/r_8 = 1/(H_8 - {}_{1-\delta}G_8) = 1/(2.7178571428571 - 2.7191572065814) = -769.19306439254;$$

$$1/r_9 = 1/(H_9 - {}_{1-\delta}G_9) = 1/(2.8289682539683 - 2.8299957977933) = -973.19450097396;$$

$$1/r_{10} = 1/(H_{10} - {}_{1-\delta}G_{10}) = 1/(2.9289682539683 - 2.9298007578956) = -1201.1955345886;$$

$$1/r_{11} = 1/(H_{11} - {}_{1-\delta}G_{11}) = 1/(3.0198773448773 - 3.0205654831544) = -1453.1963026596;$$

$$1/r_{12} = 1/(H_{12} - {}_{1-\delta}G_{12}) = 1/(3.1032106782107 - 3.1037889813562) = -1729.1968888307;$$

$$1/r_{13} = 1/(H_{13} - {}_{1-\delta}G_{13}) = 1/(3.1801337551338 - 3.1806265608246) = -2029.1973462747;$$

$$1/r_{14} = 1/(H_{14} - {}_{1-\delta}G_{14}) = 1/(3.2515623265623 - 3.2519872802311) = -2353.1977093516;$$

$$1/r_{15} = 1/(H_{15} - {}_{1-\delta}G_{15}) = 1/(3.318228993229 - 3.3185991993371) = -2701.1980032743;$$

$$1/r_{16} = 1/(H_{16} - {}_{1-\delta}G_{16}) = 1/(3.380728993229 - 3.3810543871413) = -3073.1982443399;$$

$$1/r_{17} = 1/(H_{17} - {}_{1-\delta}G_{17}) = 1/(3.4395525226408 - 3.4398407736636) = -3469.1984447641;$$

$$1/r_{18} = 1/(H_{18} - {}_{1-\delta}G_{18}) = 1/(3.4951080781963 - 3.4953652005755) = -3889.1986108438;$$

$$1/r_{19} = 1/(H_{19} - {}_{1-\delta}G_{19}) = 1/(3.5477396571437 - 3.5479704335417) = -4333.1987528411;$$

$$1/r_{20} = 1/(H_{20} - {}_{1-\delta}G_{20}) = 1/(3.5977396571437 - 3.5979479384555) = -4801.1988754949;$$

$$1/r_{30} = 1/(H_{30} - {}_{1-\delta}G_{30}) = 1/(3.9949871309204 - 3.9950797132304) = -10801.199494783;$$

$$1/r_{40} = 1/(H_{40} - {}_{1-\delta}G_{40}) = 1/(4.2785430389364 - 4.2785951190155) = -19201.199715551;$$

$$1/r_{50} = 1/(H_{50} - {}_{1-\delta}G_{50}) = 1/(4.4992053383294 - 4.4992386703297) = -30001.199777699.$$

По итогам проведённых математических экспериментов всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения позволяют предложить уточняющее дополнение первой дроби в виде

второй дроби и предположительно высокоточные приближённые формулы собственного почти, или не совсем полного, второго приближения $_{2-\delta}G_n$ приближающей функции G_n для непременно всех гармонических чисел, то есть не только имеющих достаточно большие номера, причём точность растёт вместе с ростом номеров n:

$$\varepsilon_n \approx {}_{2-\delta}g_n = 1/(2n) - 1/(12n^2 + 6/5),$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j \approx {}_{2-\delta}G_n = \ln(n) + \gamma + {}_{2-\delta}g_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n) - 1/(12n^2 + 6/5).$$

Замечание. В данном случае, в отличие от общих функциональных метода и алгоритма последовательного построения функциональных непрерывных, или цепных, дробей, общие функциональные метод и алгоритм построения рядов функциональных единичных дробей

последовательным их выделением привели к несовпадению собственного почти, или не совсем полного, второго приближения ${}_{2-\delta}G_n$ приближающей функции и собственного первого приближения ${}_1G_n$ приближающей функции G_n, давшего

$$\varepsilon_n \approx {}_1g_n = 1/(2n + 1/3) = 1/(2n) - 1/(12n^2 + 2n).$$

Приближённая формула собственного почти, или не совсем полного, второго приближения ${}_{2-\delta}G_n$ приближающей функции G_n даёт следующие приближения избранных первых гармонических чисел H_n:

$$\varepsilon_n \approx {}_{2-\delta}g_n = 1/(2n) - 1/(12n^2 + 6/5),$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx {}_{2-\delta}G_n = \ln(n) + \gamma + {}_{2-\delta}g_n = \ln(n) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2n) - 1/(12n^2 + 6/5).$$

$H_1 \approx {}_{2-\delta}G_1 = \ln(1) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
0.5/1 - 1/(12*1^2 + 6/5) =
1.001458089143957103030754514324826673466401760182347841230009424;
$H_2 \approx {}_{2-\delta}G_2 = \ln(2) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
0.5/2 - 1/(12*2^2 + 6/5) =
1.500037642209445649698540959508058673914407437779853649674414489;
$H_3 \approx {}_{2-\delta}G_3 = \ln(3) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
0.5/3 - 1/(12*3^2 + 6/5) =
1.833337111078800061159266484514085644847159051271830559697970491;
$H_4 \approx {}_{2-\delta}G_4 = \ln(4) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

0.5/4 - 1/(12*4^2 + 6/5) =

2.083334042584570477370582958257554739035809708180102844107168427;

$H_5 \approx {}_{2-\delta}G_5 = \ln(5) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

0.5/5 - 1/(12*5^2 + 6/5) =

2.283333524214783301608333840307262049319420716768866287517883683;

$H_6 \approx {}_{2-\delta}G_6 = \ln(6) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

0.5/6 - 1/(12*6^2 + 6/5) =

2.45000064877510299092119642368921878280385485186640216018482063;

$H_7 \approx {}_{2-\delta}G_7 = \ln(7) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

0.5/7 - 1/(12*7^2 + 6/5) =

2.592857168820583921506647104886264926657325725884504213121039218;

$H_8 \approx {}_{2-\delta}G_8 = \ln(8) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

0.5/8 - 1/(12*8^2 + 6/5) =

2.7178571545792887056548803213316071222681397182198573278864757775;

$H_9 \approx {}_{2-\delta}G_9 = \ln(9) +$

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +

0.5/9 - 1/(12*9^2 + 6/5) =

2.8289682597744010994046748478019571969613355468039455876293137771;

$H_{10} \approx {}_{2-\delta}G_{10} = \ln(10) +$

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +

0.5/10 - 1/(12*10^2 + 6/5) =

2.9289682570630777121236710439342658061424283237361957423382624;

$H_{11} \approx {}_{2-\delta}G_{11} = \ln(11) +$

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +

0.5/11 - 1/(12*11^2 + 6/5) =

3.0198773466281620439097538688833048209722164138345011473696791153;

$H_{12} \approx {}_{2-\delta}G_{12} = \ln(12) +$

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +

0.5/12 - 1/(12*12^2 + 6/5) =

3.103210679251180175231317568070714535777730893457044303634932618;

$H_{13} \approx {}_{2-\delta}G_{13} = \ln(13) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

0.5/13 - 1/(12*13^2 + 6/5) =

3.180133755778284383844035680793272901683148823104109547352668884;

$H_{14} \approx {}_{2-\delta}G_{14} = \ln(14) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

0.5/14 - 1/(12*14^2 + 6/5) =

3.251562326975935255027593834612713829407958060643070613737164228;

$H_{15} \approx {}_{2-\delta}G_{15} = \ln(15) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

0.5/15 - 1/(12*15^2 + 6/5) =

3.318228993502632309099184807721120217685264575441230754683229172;

$H_{16} \approx {}_{2-\delta}G_{16} = \ln(16) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

0.5/16 - 1/(12*16^2 + 6/5) =
3.380728993414905143440089801478039850031651738537784391417603268;
$H_{17} \approx {}_{2-\delta}G_{17} = \ln(17) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
0.5/17 - 1/(12*17^2 + 6/5) =
3.439552522770053523706135896173188911964428178247387582256042224;
$H_{18} \approx {}_{2-\delta}G_{18} = \ln(18) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
0.5/18 - 1/(12*18^2 + 6/5) =
3.49510807828811546223862359141600512129275303409268313882238441;
$H_{19} \approx {}_{2-\delta}G_{19} = \ln(19) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
0.5/19 - 1/(12*19^2 + 6/5) =
3.547739657210078097928525670531912116403934327633995743535140413;
$H_{20} \approx {}_{2-\delta}G_{20} = \ln(20) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

0.5/20 - 1/(12*20^2 + 6/5) =
3.5977396571925062751031369825625254778176529026096983090006429913;
$H_{30} \approx {}_{2-\delta}G_{30} = \ln(30) +$
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
0.5/30 - 1/(12*30^2 + 6/5) =
3.9949871309246851622872005463080384085427604184244793932367526 09;
$H_{40} \approx {}_{2-\delta}G_{40} = \ln(40) +$
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
0.5/40 - 1/(12*40^2 + 6/5) =
4.2785430389371407256529973275035476647178075383030603839158193 76;
$H_{50} \approx {}_{2-\delta}G_{50} = \ln(50) +$
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
0.5/50 - 1/(12*50^2 + 6/5) =
4.4992053383296255880251775480728177502966437342416647853988635 74;
$H_{60} \approx {}_{2-\delta}G_{60} = \ln(60) +$
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +

0.5/60 - 1/(12*60^2 + 6/5) =
4.679870412951804985119211952284992869034094076680592144837131948;
$H_{70} \approx {}_{2-\delta}G_{70} = \ln(70) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
0.5/70 - 1/(12*70^2 + 6/5) =
4.832836757638098427632542433585016459172562525427140068227150258;
$H_{80} \approx {}_{2-\delta}G_{80} = \ln(80) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
0.5/80 - 1/(12*80^2 + 6/5) =
4.965479278945528481511481649530769424019534929102043807282331577;
$H_{90} \approx {}_{2-\delta}G_{90} = \ln(90) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
0.5/90 - 1/(12*90^2 + 6/5) =
5.082570602848521452090272375943483363455608666825252406275079317;
$H_{100} \approx {}_{2-\delta}G_{100} = \ln(100) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

$$0.5/100 - 1/(12*100\text{^}2 + 6/5) =$$

$$5.18737751763962339531749491611863083791111231236414455078909030 2;$$

$$H_{110} \approx {}_{2-\delta}G_{110} = \ln(110) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 +$$

$$0.5/110 - 1/(12*110\text{^}2 + 6/5) =$$

$$5.2822345982439793539008843688052441927869329615378342492371084 1;$$

$$H_{120} \approx {}_{2-\delta}G_{120} = \ln(120) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 +$$

$$0.5/120 - 1/(12*120\text{^}2 + 6/5) =$$

$$5.3688682873533959626057795646528210777593559270081887369063843 5;$$

$$H_{130} \approx {}_{2-\delta}G_{130} = \ln(130) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 +$$

$$0.5/130 - 1/(12*130\text{^}2 + 6/5) =$$

$$5.4485913382659768425652746149071854666455087902330433875943326 26;$$

$$H_{140} \approx {}_{2-\delta}G_{140} = \ln(140) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 +$$

0.5/140 - 1/(12*140^2 + 6/5) =
5.5224252644032776982016753517658430403106117113275090449661576533;

$H_{150} \approx {}_{2-\delta}G_{150} = \ln(150) +$
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
0.5/150 - 1/(12*150^2 + 6/5) =
5.5911805886438790724406778030501993840634583050796596609490484034;

$H_{200} \approx {}_{2-\delta}G_{200} = \ln(200) +$
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
0.5/200 - 1/(12*200^2 + 6/5) =
5.8780309481214445250389263395779274094365413225272040479616620577;

$H_{250} \approx {}_{2-\delta}G_{250} = \ln(250) +$
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
0.5/250 - 1/(12*250^2 + 6/5) =
6.1006752494325792904126943392104037983421211635201900221982516966;

$H_{300} \approx {}_{2-\delta}G_{300} = \ln(300) +$
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +

0.5/300 - 1/(12*300^2 + 6/5) =

6.2826638802995034662197259600932227884108482202846457458366661695;

$H_{350} \approx {}_{2\text{-}\delta}G_{350} = \ln(350) +$

0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 +

0.5/350 - 1/(12*350^2 + 6/5) =

6.4365767105420101330817882638219264236799708790894978728157922 35;

$H_{400} \approx {}_{2\text{-}\delta}G_{400} = \ln(400) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

0.5/400 - 1/(12*400^2 + 6/5) =

6.5699296911765070347735088486906466970853325673534058286393435 34;

$H_{450} \approx {}_{2\text{-}\delta}G_{450} = \ln(450) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

0.5/450 - 1/(12*450^2 + 6/5) =

6.6875739472545788892242425218570712473217286870221627006301573 21;

$H_{500} \approx {}_{2\text{-}\delta}G_{500} = \ln(500) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

0.5/500 - 1/(12*500^2 + 6/5) =
6.79282342999052460318992102067730995244004366610065448558485224.

Теперь сопоставим избранные первые гармонические числа H_n с приближениями E_n по приближённой формуле Эйлера и с полученными их приближениями.

Таблица. Избранные первые гармонические числа H_n и их приближения E_n по приближённой формуле Эйлера и на основе приближающих бесконечно малую последовательность Эйлера ε_n собственного почти, или не совсем полного, первого приближения ${}_{1\text{-}\delta}G_n$ приближающей функции G_n, собственного почти, или не совсем полного, второго приближения ${}_{2\text{-}\delta}G_n$ приближающей функции G_n и собственного первого приближения ${}_{1}G_n$ приближающей функции G_n с подчёркиваниями первых верных цифр в приближениях.

n	$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$	$E_n = \ln(n) + \gamma$	${}_{1-\delta}G_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n)$	${}_{2-\delta}G_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n) - 1/(12n^2 + 6/5)$	${}_1G_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3)$
1	1	0.5772	1.07721566	1.0014580891439571030	1.005787093472961
2	1.5	1.2703	1.52036284	1.5000376422094456496	1.501132076230708
3	1.8333333333333333333	1.6758	1.84249462	1.8333371110788000611	1.833722690411747
4	2.0833333333333333333	1.9635	2.08851002	2.0833340425845704773	2.083510026021423
5	2.2833333333333333333	2.1866	2.28665357	2.2833335242147833016	2.283427770884020
6	2.45	2.3689	2.45230846	2.4500000648775102990	2.450056215210668
7	2.5928571428571428571	2.5231	2.59455438	2.5928571688205839215	2.592893255817311
8	2.7178571428571428571	2.6566	2.71915720	2.7178571545792887056	2.717881696377287

9	2.8289682539682539682	2.7744	2.82999579	2.8289682597744010994	2.828985696783206
10	2.9289682539682539682	2.8798	2.92980075	2.9289682570630777121	2.928981085764431
11	3.0198773448773448773	2.9751	3.02056548	3.0198773466281620439	3.019887057102888
12	3.1032106782106782106	3.0621	3.10378898	3.1032106792511801752	3.103218205100492
13	3.1801337551337551337	3.1421	3.18062656	3.1801337557782843838	3.180139705907373
14	3.2515623265623265623	3.2162	3.25198728	3.2515623269759352550	3.251567112163850
15	3.3182289932289932289	3.2852	3.31859919	3.3182289935026323090	3.318232898970775
16	3.3807289932289932289	3.3498	3.38105438	3.3807289934149051434	3.380732222192860
17	3.4395525226407579348	3.4104	3.43984077	3.4395525227700535237	3.439555222549981
18	3.4951080781963134904	3.4675	3.49536520	3.4951080782881154622	3.495110358577514
19	3.5477396571436819114	3.5216	3.54797043	3.5477396572100780979	3.547741600589712

20	3.5977396571436819114	3.5729	3.59794793	3.5977396571925062751	3.597741326885275
30	3.9949871309203910705	3.9784	3.99507971	3.9949871309246851622	3.994987632199047
40	4.2785430389363759865	4.2660	4.27859511	4.2785430389371407256	4.278543251795552
50	4.4992053383294250575	4.4892	4.49923867	4.4992053383296255880	4.499205447738316
60	4.6798704129517378171	4.6715	4.67989356	4.6798704129518049851	4.679870476431112
70	4.8328367576380717883	4.8257	4.83285376	4.8328367576380984276	4.832836797687233
80	4.9654792789455165251	4.9592	4.96549229	4.9654792789455284815	4.965479305812420
90	5.0825706028485155541	5.0770	5.08258089	5.0825706028485214520	5.082570621738267
100	5.1873775176396202608	5.1823	5.18738585	5.1873775176396233953	5.187377531422070
110	5.2822345982439775845	5.2776	5.28224148	5.2822345982439793539	5.282234608606203
120	5.3688682873533949128	5.3647	5.36887407	5.3688682873533959626	5.368868295339612
130	5.4485913382659761931	5.4447	5.44859626	5.4485913382659768425	5.448591344550457

140	5.5224252644032772818	5.5188	5.52242951	5.5224252644032776982	5.522425269437115
150	5.5911805886438787972	5.5878	5.59118429	5.5911805886438790724	5.591180592738077
200	5.8780309481214444760	5.8755	5.87803303	5.8780309481214445250	5.878030949850901
250	6.1006752494325792775	6.0986	6.10067658	6.1006752494325792904	6.100675250318742
300	6.2826638802995034619	6.2809	6.28266480	6.2826638802995034662	6.282663880812592
350	6.4365767105420101313	6.4351	6.43657739	6.4365767105420101330	6.436576710865239
400	6.5699296911765070340	6.5686	6.56993021	6.5699296911765070347	6.569929691393105
450	6.6875739472545788888	6.6864	6.68757435	6.6875739472545788892	6.687573947406735
500	6.7928234299905246029	6.7918	6.79282376	6.7928234299905246031	6.792823430101465

Анализ итогов сопоставления избранных первых гармонических чисел H_n с их приближениями E_n по приближённой формуле Эйлера и на основе приближающих бесконечно малую последовательность Эйлера ε_n собственного почти, или не совсем полного, первого

приближения $_{1-\delta}G_n$ приближающей функции G_n, собственного почти, или не совсем полного, второго приближения $_{2-\delta}G_n$ приближающей функции G_n и собственного первого приближения $_1G_n$ приближающей функции G_n с подчёркиваниями первых верных цифр в приближениях позволяет сделать следующие основные выводы:

1. Абсолютные и относительные погрешности этих четырёх приближений убывают вместе с ростом порядкового номера гармонического числа.

2. Количество первых верных цифр в отдельных случаях может отклоняться от правильного выражения действительных точности и погрешности, что должно

замечаться и анализироваться дополнительно. Пример: число 999 не выражает верно ни одной цифры числа 1000, а несравненно более далёкое от числа 1000 число 1999 верно выражает одну первую цифру числа 1000. Тем не менее, вероятность правильного выражения действительных точности и погрешности количеством первых верных цифр куда больше вероятности неправильного выражения, так что при достаточно большом количестве сравниваемых чисел общая картина даётся в основном правильно и к тому же весьма наглядно. Это позволяет легко заметить отклонения от общих закономерностей и проанализировать эти отклонения. Зато указание первых верных цифр позволяет избежать явного указания действительных

погрешностей и тем самым серьёзного дополнительного загромождения, весьма вредного для восприятия и к тому же ограничивающего количество сопоставляемых объектов. А это мешает анализу и выявлению ключевых закономерностей.

3. Фундаментальные итоги исследования гармонического ряда Леонардом Эйлером, включая его точную формулу

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n,$$

не только были исторически первыми, но и навсегда останутся основополагающими.

4. Приближённая формула Эйлера

$$E_n = \ln(n) + \gamma,$$

отбрасывающая введённую им положительную бесконечно малую ε_n и поэтому дающая приближения с недостатком, вполне приемлема для приближения гармонических чисел с достаточно больш<u>и</u>ми порядковыми номерами. Для легко подсчитываемых первых гармонических чисел приближённая формула Эйлера даёт более чем значительные погрешности, поскольку на деле приближает не само гармоническое число, а среднее арифметическое этого и предшествующего гармонических чисел. В частности, вместо первого гармонического числ<u>а</u>, равного единице, на деле приближается среднее арифметическое первого и нулевого гармонических чисел, то есть 1/2, поскольку по введённому определению нулевое по счёту,

или порядку, гармоническое число равно нулю. Это даёт дополнительное оправдание этому введённому определению. В итоге простейшая приближённая формула Эйлера качественно верно выражает сущность основных закономерностей, количественно приемлема для гармонических чисел с достаточно больш<u>и</u>ми порядковыми номерами, необходимо является основополагающей для усовершенствований и может и должна рассматриваться как достаточно качественное именно начальное, причём непременно основополагающее, приближение.

5. <u>Почти</u>, или <u>не совсем полное</u>, <u>первое приближение</u>

$$_{1-\delta}G_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n)$$

с избытком незначительно сложнее приближения Эйлера, даёт простейшее приемлемое выражение бесконечно малой Эйлера ε_n, естественно перенацеливает приближение Эйлера со среднего арифметического рассматриваемого и предшествующего гармонических чисел на рассматриваемое гармоническое число, даёт погрешности примерно на два порядка меньше по сравнению с погрешностями приближённой формулы Эйлера, уже для третьего гармонического числа даёт относительную погрешность меньше 1 % и может и должно рассматриваться как достаточно качественное первое приближение.

6. Первое приближение

$$_1G_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3)$$

с избытком ещё менее значительно сложнее приближения

$$_{1-\delta}G_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n),$$

даёт куда более точное, чем $_{1-\delta}G_n$, именно первое весьма простое приближение бесконечно малой Эйлера ε_n и погрешности примерно на 2 порядка меньше по сравнению с погрешностями приближения

$$_{1-\delta}G_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n),$$

уж<u>е</u> для первого гармонического числ<u>а</u> даёт относительную погрешность меньше 0.6 % и может и должно рассматриваться как достаточно качественное первое приближение именно всех без исключения гармонических чисел, так что дальнейших приближений не требуется. Во

многих случаях это приближение может рассматриваться как практически точное. Например, относительная мера ошибочности приближённой формулы Эйлера в имеющей порядковый номер n паре смежных промежутков правильности и ошибочности в указанном порядке составляет

$$(H_n - E_n)/(H_n - H_{n-1}) \approx (G_n - E_n)/(G_n - G_{n-1}) = (\ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3) - \ln(n) - \gamma)/(\ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3) - \ln(n - 1) - \gamma - 1/(2(n - 1) + 1/3)) = (1/(2n + 1/3))/(\ln(n) + 1/(2n + 1/3) - \ln(n - 1) - 1/(2(n - 1) + 1/3)) = 1/((2n + 1/3)\ln(n/(n - 1)) + 1 - (2n + 1/3)/(2(n - 1) + 1/3)) = 1/((2n + 1/3)\ln(n/(n - 1)) - 2/(2(n - 1) + 1/3)).$$

Например, уж<u>е</u> при n = 2

$$1/((2n + 1/3)\ln(n/(n - 1)) - 2/(2(n - 1) + 1/3)) = 1/((4 + 1/3)\ln(2) - 2/(2 + 1/3)) = 0.46587578112624,$$

что лишь на 1.3 % превышает найденное выше

$$h_2 = (H_2 - E_2)/(H_2 - H_1) = 2(1.5 - 1.2703628454615) = 0.459274309077$$

для точных гармонических чисел. А для лишь с большими затруднениями вычислимых гармонических чисел с гораздо бóльшими порядковыми номерами итог будет несравненно точнее.

7. Все четыре приближения по своим естественности, простоте и красоте вполне соответствуют гармоническому ряду и гармоническим числам, если учесть необходимость суммирования.

8. Собственное почти, или не совсем полное, второе приближение $_{2-\delta}G_n$ приближающей функции G_n, как и следовало ожидать, намного точнее приближений нулевого и первого порядка и заслуживает рассмотрения совместно с приближениями второго и третьего порядков, что и будет сделано в дальнейшем.

9. Эти выводы относятся ко всей бесконечной совокупности гармонических чисел. Если априорно выбирается именно конечная совокупность гармонических чисел, то итог окажется иным, нацеленным только на эту совокупность и поэтому зависящим от её выбора. Итог оптимизации зависит от критерия оптимизации. В качестве такого критерия могут быть выбраны, например, минимакс

абсолютных величин отклонений или минимум суммы квадратов разностей по методу наименьших квадратов Гаусса и Лежандра. Если бы не удалось найти решение для всей бесконечной совокупности гармонических чисел целиком, то пришлось бы выбрать именно конечную совокупность гармонических чисел, например первые 20 гармонических чисел. Разумеется, в таком случае приближённые формулы не были бы столь естественными, простыми и красивыми.

10. Изначально применённое обращение бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n является в действительности применением всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы

независимых переменных этой зависимой переменной, в данном случае аргумента n функции 1/(2n). То есть оказалось целесообразным сочетание всеобщих методологий изменения зависимой переменной. Прямым продолжением рассматриваемой всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной ε_n было бы вычитание дроби 1/(2n) из бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n.

Общие функциональные метод и алгоритм последовательного построения функциональных непрерывных, или цепных, дробей и общие функциональные метод и алгоритм построения рядов

функциональных единичных дробей последовательным их выделением всегда дают совпадающие первые приближения

$${}_1C_n = {}_1S_n$$

соответственно, каждое из которых является суммой начального приближения нулевого порядка и первой единичной дроби, знаменателем которой является сумма бесконечно большой и конечной постоянной частей знаменателя обращения остатка нулевого порядка начального приближения нулевого порядка. Применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера всеобщей методологией изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой

переменной этими совпадающими первыми приближениями являются

$$\varepsilon_n = H_n - E_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j - (\ln(n) + \gamma) \approx {}_1c_n = {}_1C_n - (\ln(n) + \gamma) = {}_1s_n = {}_1S_n - (\ln(n) + \gamma) = {}_1G_n - (\ln(n) + \gamma) = 1/(2n + 1/3);$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j \approx {}_1C_n = {}_1S_n = {}_1G_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3).$$

Различия итогов этих методов и алгоритмов начнутся во втором приближении.

Общие функциональные метод и алгоритм последовательного построения функциональных непрерывных, или цепных, дробей развивают первую функциональную единичную дробь

$$1/(2n + 1/3)$$

в функциональную непрерывную, или цепную, дробь определением

$${}_1r_n = {}_0\eta_n - (2n + 1/3)$$

и обращением

$${}_1\eta_n = 1/({}_0\eta_n - 2n - 1/3)$$

бесконечно малого остатка в знаменателе для избранных гармонических чисел:

$${}_1\eta_1 = 1/{}_1r_1 = 1/(2.3652721186254415518772 - 2*1 - 1/3) = 31.3098945640581655218466961;$$

$${}_1\eta_2 = 1/{}_1r_2 = 1/(4.35469600731465751627236 - 2*2 - 1/3) = 46.81061934822515961523879702;$$

$${}_1\eta_3 = 1/{}_1r_3 = 1/(6.34898948531361247737 - 2*3 - 1/3) = 63.87265537915213372531688;$$

$${}_1\eta_4 = 1/{}_1r_4 = 1/(8.34562175284411580726886 - 2*4 - 1/3) =$$
$$81.37743011805138820431448925;$$

$${}_1\eta_5 = 1/{}_1r_5 = 1/(10.34342701510116767 - 2*5 - 1/3) =$$
$$99.07187714067949377089;$$

$${}_1\eta_6 = 1/{}_1r_6 = 1/(12.3418902241610514 - 2*6 - 1/3) =$$
$$116.8648776914076698464;$$

$${}_1\eta_7 = 1/{}_1r_7 = 1/(14.340756382684463614636 - 2*7 - 1/3) =$$
$$134.715526288092582795191728;$$

$${}_1\eta_8 = 1/{}_1r_8 = 1/(16.33988629487917064 - 2*8 - 1/3) =$$
$$152.60275724267579140951;$$

$${}_1\eta_9 = 1/{}_1r_9 = 1/(18.33919793265856853592 - 2*9 - 1/3) =$$
$$170.51463272128902298358399;$$

$${}_1\eta_{10} = 1/{}_1r_{10} = 1/(20.3386399527419510528141 - 2*10 - 1/3) = 188.4438892256044261981692098;$$

$${}_1\eta_{11} = 1/{}_1r_{11} = 1/(22.33817862658220857269868 - 2*11 - 1/3) = 206.38585708556126868049277405;$$

$${}_1\eta_{12} = 1/{}_1r_{12} = 1/(24.337790904847711610148695766 - 2*12 - 1/3) = 224.337399136371626384186909696;$$

$${}_1\eta_{13} = 1/{}_1r_{13} = 1/(26.337460510983115615495 - 2*13 - 1/3) = 242.296330532985957926899641;$$

$${}_1\eta_{14} = 1/{}_1r_{14} = 1/(28.33717562887456050430195 - 2*14 - 1/3) = 260.26108332120000178005568103;$$

$${}_1\eta_{15} = 1/{}_1r_{15} = 1/(30.336927475557727694 - 2*15 - 1/3) = 278.230503293037419109755;$$

$${}_1\eta_{16} = 1/{}_1r_{16} = 1/(32.336709388140510134284541 - 2*16 - 1/3) = 296.203722129808095907549211646;$$

$${}_1\eta_{17} = 1/{}_1r_{17} = 1/(34.336516221372461976 - 2*17 - 1/3) = 314.180074104574256893507;$$

$${}_1\eta_{18} = 1/{}_1r_{18} = 1/(36.33634393933406822617 - 2*18 - 1/3) = 332.15904032473817584608396;$$

$${}_1\eta_{19} = 1/{}_1r_{19} = 1/(38.336189332074380926736 - 2*19 - 1/3) = 350.140210367598210358659091;$$

$${}_1\eta_{20} = 1/{}_1r_{20} = 1/(40.33604981479793992 - 2*20 - 1/3) = 368.12325540561882574326;$$

$${}_1\eta_{30} = 1/{}_1r_{30} = 1/(60.33515809852757297264 - 2*30 - 1/3) = 548.01571355962300010865581;$$

$${}_1\eta_{40} = 1/{}_1r_{40} = 1/(80.3347070316909223199 - 2*40 - 1/3) = 727.9618516506970302301575;$$

$${}_1\eta_{50} = 1/{}_1r_{50} = 1/(100.334434740423454234 - 2*50 - 1/3) = 907.929510323227279130355.$$

По итогам проведённых математических экспериментов всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения позволяют предложить уточняющее дополнение знаменателя (2n + 1/3) первой единичной дроби как приближения первого порядка функциональной непрерывной, или цепной, дробью к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n

1/(2n + 1/3),

являющееся второй единичной дробью в знаменателе (2n + 1/3) первой др<u>о</u>би. Бесконечная часть знаменателя второй единичной др<u>о</u>би составляет 18n, а конечная часть знаменателя этой др<u>о</u>би меньше 8 и подлежит уточнению.

Для этого целесообразно резко увеличить точность вычислений, дополнительно рассматривать также избранные гармонические ч<u>и</u>сла с номерами, кратными 10 до 150 и далее кратными 50 до 500 включительно, и сразу перейти к приведённым выше вычислениям бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n:

$$\varepsilon_n = \Delta_n = H_n - E_n = H_n - \ln(n) - \gamma.$$

Теперь определим <u>высокоточные</u> обращения элементов бесконечно малой последовательности Эйлера:

$${}_0\eta_n = 1/\varepsilon_n = 1/\Delta_n = 1/(H_n - E_n);$$

$${}_0\eta_1 = 1/\varepsilon_1 =$$

$$1/0.422784335098467139393487909917597568957840664060076401194233 =$$

$$2.365272118625441551877219328456522016188316071765111058699766381;$$

$${}_0\eta_2 = 1/\varepsilon_2 =$$

$$1/0.229637154538521829976255788459421000882340529699821147073552991 =$$

$$4.3546960073146575277213898302397328931479885999440977321970696873;$$

$${}_0\eta_3 = 1/\varepsilon_3 =$$

$$1/0.157505379763690781331576006328405197643683439570660282792872 =$$

$$6.348989485313611157971231490940457691877729276188184470524331231;$$

$${}_0\eta_4 = 1/\varepsilon_4 =$$

$$1/0.119823307311909853892357000334577766140173728672899226286206314 =$$

$$8.3456217528441135281762522563015198859924146836447173451250541885;$$

$${}_0\eta_5 = 1/\varepsilon_5 =$$

$$1/0.096679755997700098126061910024743262765572643124892012614918442 =$$

$$10.3434270151011641690011405484870310414387995506166394676291398256;$$

$${}_0\eta_6 = 1/\varepsilon_6 =$$
$$1/0.08102486587041213858101055153689529623484997187707169533885865 7 =$$
$$12.341890224161051497659532829168369273912198326792466915007057038;$$

$${}_0\eta_7 = 1/\varepsilon_7 =$$
$$1/0.0697313289002966914309923093315606964636130773353580698776999 93 =$$
$$14.340756382684472552297927742769384647424876610983562931984060 1842;$$

$${}_0\eta_8 = 1/\varepsilon_8 =$$
$$1/0.0611999362757740682846486884002107218741974038364534959750501 14 =$$
$$16.339886294879182245429033475112179842311709614198908580746392 7575;$$

$${}_0\eta_9 = 1/\varepsilon_9 =$$
$$1/0.0545280117305017248569656900408001279168278023828314659788125 87 =$$
$$18.339197932658579417092774964178285442880403679127216227176658 4725;$$

$${}_0\eta_{10} = 1/\varepsilon_{10} =$$
$$1/0.0491674960726754236294647092014873296107074293995573934148733 53 =$$
$$20.338639952741964434945429017432824260944630008824298577026814 6834;$$

$${}_0\eta_{11} = 1/\varepsilon_{11} =$$
$$1/0.0447664071774414726764216768298131464810111550000041033205426 36 =$$
$$22.338178626582220181089902482516931048158984215281851244288945 7808;$$

$${}_0\eta_{12} = 1/\varepsilon_{12} =$$
$$1/0.041088363521145039841989108289396938837560515727494651896389326 =$$
$$24.337790904847705644226865189843544719232349092808863735605424 1973;$$

$${}_0\eta_{13} = 1/\varepsilon_{13} =$$
$$1/0.037968732770685537095134223486034097907706474433624418530321244 =$$
$$26.337460510983092623980885346924120487231197976024942533254671 7249;$$

$${}_0\eta_{14} = 1/\varepsilon_{14} =$$
$$1/0.035289332045535087197465371578567833571818126680286520940725167 =$$
$$28.337175628874591245005852208434050788189634510242936619332127 5087;$$

$${}_0\eta_{15} = 1/\varepsilon_{15} =$$
$$1/0.032963127225250302390712332997877453777977745197802456540119768 =$$
$$30.336927475557701565313217827445995517225490988048689302168392 4302;$$

$${}_0\eta_{16} = 1/\varepsilon_{16} =$$
$$1/0.030924606087679130717788417313884525649069119848048613704741955 =$$
$$32.3367093881404804502309553592810466749487715245293130508433898054;$$

$${}_0\eta_{17} = 1/\varepsilon_{17} =$$
$$1/0.02912351368300899401953522644993485059816076235038366641963602 =$$
$$34.3365162213724215723896159990004852356905930724461723357625757966;$$

$${}_0\eta_{18} = 1/\varepsilon_{18} =$$
$$1/0.027520655398615937616902804575388964371438080485929851682360637 =$$
$$36.3363439393340816580158211955484961175244150066819258043945453013;$$

$${}_0\eta_{19} = 1/\varepsilon_{19} =$$
$$1/0.026085013075708590868229546938131825557171648139923611787100656 =$$
$$38.3361893320743649394000976795071854571926785569093075899821572949;$$

$${}_0\eta_{20} = 1/\varepsilon_{20} =$$
$$1/0.024791718688158057442033402683444587117949286450024200171052982 =$$
$$40.3360498147979222159420597554444320005421352102835078551466114012;$$

$${}_0\eta_{30} = 1/\varepsilon_{30} =$$
$$1/0.01657408435670283448202488243508496938405341322600827701732211 4 =$$
$$60.33515809852768257564501957815171910249227370791966150695144692 26;$$

$${}_0\eta_{40} = 1/\varepsilon_{40} =$$
$$1/0.0124479199209068230576829419524986208783429689780082276071274 22 =$$
$$80.33470703169101326701486506639980651104999485607386544105566521 19;$$

$${}_0\eta_{50} = 1/\varepsilon_{50} =$$
$$1/0.0099666679997461383352089149718148138017396451302395329071596 4 =$$
$$100.334434740423887565942447897071721050860441665199270837739854096 4;$$

$${}_0\eta_{60} = 1/\varepsilon_{60} =$$
$$1/0.0083101858281042717518659087770625303044100767384000882486357 8 =$$
$$120.334252528757355325815441832516632870627945748926482945759930704 4;$$

$${}_0\eta_{70} = 1/\varepsilon_{70} =$$
$$1/0.0071258506871799385974936984650224846654223876159116526852992 46 =$$
$$140.334122043715013769126482836629154279396047934789878087460253783 8;$$

$${}_0\eta_{80} = 1/\varepsilon_{80} =$$

$$1/0.006236979370102052295259621019270264208866968910507738470915928 =$$

$$160.334023997843934642164588189733559394874946534783789425856704113 6;$$

$${}_0\eta_{90} = 1/\varepsilon_{90} =$$

$$1/0.005545267616717626717395931769476265059526351840511240461866579 =$$

$$180.3339476322557236028650601348610199683564567776575880320644236839;$$

$${}_0\eta_{100} = 1/\varepsilon_{100} =$$

$$1/0.004991666749996032162622676207122311664609813510982102304111155 =$$

$$200.3338864720476166167720094464509408297231932457099636133042122764;$$

$${}_0\eta_{110} = 1/\varepsilon_{110} =$$

$$1/0.004538567550028495823927390346985076317003396194575597711970341 =$$

$$220.3338363871484970611631381300909350438790291247553923370760676481;$$

$${}_0\eta_{120} = 1/\varepsilon_{120} =$$

$$1/0.004160879669816057967941914833055534452404622019676745066597081 =$$

$$240.3337946190132161535091413487028270027447108459955751221258171538;$$

$${}_0\eta_{130} = 1/\varepsilon_{130} =$$

$$1/0.0038412229088609124563564767197068535008798949965021099221031 6 =$$

$$= 260.33375925495116407009211209572410970061822109453278366646979679 41;$$

$${}_0\eta_{140} = 1/\varepsilon_{140} =$$

$$1/0.003567176892440122732476086511515925893363437048386229994889716 =$$

$$= 280.333728927009082346184425502797124437018544977153859186228059143 9;$$

$${}_0\eta_{150} = 1/\varepsilon_{150} =$$

$$1/0.003329629646090186616731037024655393637187536367481519712318106 =$$

$$= 300.333702630936365548389430667867823356333216265372273386370541872 7;$$

$${}_0\eta_{200} = 1/\varepsilon_{200} =$$

$$1/0.002497916671874937997659276221554222517537798972518279471869134 =$$

$$= 400.333610508071633117484095165297986974739766393736705180543789123 7;$$

$${}_0\eta_{250} = 1/\varepsilon_{250} =$$

$$1/0.001998666668799983746304804755008978683497694406532802487974115 =$$

$$= 500.333555169761448252306834385274276865526634618347365045339660000 8;$$

$${}_0\eta_{300} = 1/\varepsilon_{300} =$$

$$1/0.0016657407417695418817453046736327323431625116836252001151771 61 =$$

$$600.33351825067609047006884424118611269812472580556169585885751210 13;$$

$${}_0\eta_{350} = 1/\varepsilon_{350} =$$

$$1/0.0014278911570179070458220883321175316207469005517978820523377 67 =$$

$$700.33349186674674256729712334962185682741786213922950407190542993 89;$$

$${}_0\eta_{400} = 1/\varepsilon_{400} =$$

$$1/0.0012494791669921865311943537882752763370730321607763158921702 5 =$$

$$800.33347207161028289329297040199906155240128580764721236369192582 16;$$

$${}_0\eta_{450} = 1/\varepsilon_{450} =$$

$$1/0.0011106995886805868309615985449944724894898949184472502358583 64 =$$

$$900.33345667113446873403440703874877444622023256934312754085601121 88;$$

$${}_0\eta_{500} = 1/\varepsilon_{500} =$$

$$1/0.0009996666667999997460328126906552090498501469307918438580182 057 =$$

$$1000.3334443480718187450433378287260332507523232654074571387177829 021.$$

Определяем вторую дробь искомой функциональной непрерывной, или цепной, дроби как второго приближения к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n в знаменателе (2n + 1/3) первой дроби

$$1/(2n + 1/3)$$

(как приближения первого порядка функциональной непрерывной, или цепной, дробью к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n) путём, во-первых, обращения

$$_1\eta_n = 1/(_0\eta_n - 2n - 1/3)$$

бесконечно малой части

$$_1r_n = {}_0\eta_n - (2n + 1/3)$$

этого знаменателя и, во-вторых, выделения бесконечно большой и конечной постоянной частей этого обращения.

Во-первых, вычислим обращения

$${}_1\eta_n = 1/({}_0\eta_n - 2n - 1/3)$$

бесконечно малой части

$${}_1r_n = {}_0\eta_n - (2n + 1/3)$$

этого знаменателя:

$${}_1\eta_1 = 1/{}_1r_1 =$$

$$1/(2.36527211862544155187721932845652201618831607176511105869976638 1 - 2*1 - 1/3) =$$

$$31.3098945640581655218277482657829684736240982214603986660920741034;$$

$${}_1\eta_2 = 1/{}_1r_2 =$$

$$1/(4.3546960073146575277213898302397328931479885999440977321970696873 - 2*2 - 1/3) =$$

$$46.810619348225134527734406960135005012418171518951911594642690896 3;$$

$${}_1\eta_3 = 1/{}_1r_3 =$$

$$1/(6.348989485313611157971231490940457691877729276188184470524331231 - 2*3 - 1/3)$$

$$= 63.8726553791575164977219232574910142256253851006343429577327142022;$$

$${}_1\eta_4 = 1/{}_1r_4 =$$

$$1/(8.3456217528441135281762522563015198859924146836447173451250541885 - 2*4 - 1/3)$$

$$= 81.3774301180664810076857061073125125276030419412418194643805245157;$$

$${}_1\eta_5 = 1/{}_1r_5 = 1/(10.3434270151011641690011405484870310414387995506166394676291398256 -$$

$$2*5 - 1/3) =$$

$$99.0718771407138569038740558611337735153612709246648058030912767086;$$

$${}_1\eta_6 = 1/{}_1r_6 =$$

$$1/(12.341890224161051497659532829168369273912198326792466915007057038 - 2*6 - 1/3)$$

$$= 116.8648776914063360710871292622555803742626613172381180608627940736;$$

$${}_1\eta_7 = 1/{}_1r_7 =$$
$$1/(14.340756382684472552297927742769384647424876610983562931984060184\,2 - 2*7 - 1/3)$$
$$= 134.71552628793037966633927971450460916822027562775083040340146016\,48;$$

$${}_1\eta_8 = 1/{}_1r_8 = 1/(16.339886294879182245429033475112179842311709614198908580746392757\,5 - 2*8 - 1/3) =$$
$$152.60275724240552880273762293105374460405564526953712488776670916\,68;$$

$${}_1\eta_9 = 1/{}_1r_9 = 1/(18.339197932658579417092774964178285442880403679127216227176658472\,5 - 2*9 - 1/3) =$$
$$170.51463272097265027397487734750337859449902459505886368844708917\,18;$$

$${}_1\eta_{10} = 1/{}_1r_{10} = 1/(20.338639952741964434945429017432824260944630008824298577026814683\,4 - 2*10 - 1/3) =$$
$$188.44388922512921200254285120419377422519046064020421834898095920\,77;$$

$${}_1\eta_{11} = 1/{}_1r_{11} = 1/(22.338178626582220181089902482516931048158984215281851244288945780\,8 - 2*11 - 1/3) =$$
$$206.38585708506680784009122130451730953390893135850115278611631952\,91;$$

${}_1\eta_{12} = 1/{}_1r_{12} = 1/(24.3377909048477056442268651898435447192323490928088637356054241973$
$- 2*12 - 1/3) =$
$224.3373991366718749349072044927536080368469487899903802226973965121;$

${}_1\eta_{13} = 1/{}_1r_{13} =$

$1/(26.3374605109830926239808853469241204872311979760249425332546717249 - 2*13 - 1/3) =$
$242.2963305343357325128573593155461025899937448944871024770536574588;$

${}_1\eta_{14} = 1/{}_1r_{14} = 1/(28.3371756288745912450058522084340507881896345102429366193321275087$

$- 2*14 - 1/3) =$

$260.2610833191177546406214967719762959441653184642880611381505013467;$

${}_1\eta_{15} = 1/{}_1r_{15} = 1/(30.3369274755577015653132178274459955172254909880486893021683924302$

$- 2*15 - 1/3) =$

$278.2305032950600985753870258780647355108729069574781857192570586199;$

${}_1\eta_{16} = 1/{}_1r_{16} =$

$1/(32.3367093881404804502309553592810466749487715245293130508433898054 - 2*16 -$

$1/3) =$

$296.2037221324124751792819021471239275870886204456474690298658858084;$

${}_1\eta_{17} = 1/{}_1r_{17} = 1/(34.3365162213724215723896159990004852356905930724461723357625757966$

$- 2*17 - 1/3) =$

$314.1800741085624616775414281579153703546527344722710682566503541 89;$

${}_1\eta_{18} = 1/{}_1r_{18} =$

$1/(36.3363439393340816580158211955484961175244150066819258043945453013 - 2*18 - 1/3) =$

$332.1590403232562452923518546892680253667025875363813475193493895 73;$

${}_1\eta_{19} = 1/{}_1r_{19} =$

$1/(38.3361893320743649394000976795071854571926785569093075899821572949 - 2*19 - 1/3) =$

$350.1402103695582284341691620281834703488754544554262816769059107219;$

${}_1\eta_{20} = 1/{}_1r_{20} =$

$1/(40.3360498147979222159420597554444320005421352102835078551466114012 - 2*20 - 1/3) =$

$368.1232554080179863956779760755983378249743065936042429638486593082;$

$${}_1\eta_{30} = 1/{}_1r_{30} =$$

$$1/(60.3351580985276825756450195781517191024922737079196615069514469226 - 2*30 - 1/3) =$$

$$548.0157135267068916744945219128780705472455079750255616968407999663;$$

$${}_1\eta_{40} = 1/{}_1r_{40} =$$

$$1/(80.3347070316910132670148650663998065110499948560738654410556652119 - 2*40 - 1/3) =$$

$$727.9618516025015659425834006674178005501449082503155995518136911394;$$

$${}_1\eta_{50} = 1/{}_1r_{50} =$$

$$1/(100.3344347404238875659424478970717210508604416651992708377398540964 - 2*50 - 1/3) =$$

$$907.9295099660161610176556634375627251701074917552986241598865427401;$$

$${}_1\eta_{60} = 1/{}_1r_{60} =$$

$$1/(120.3342525287573553258154418325166328706279457489264829457599307044 - 2*60 - 1/3) =$$

$$1087.9079397767696068282049970614539511911496844283539064244243737466;$$

$${}_1\eta_{70} = 1/{}_1r_{70} =$$

$$1/(140.3341220437150137691264828366291542793960479347898780874602537838 - 2*70 - 1/3) =$$

$$1267.8925283947550093338834175195271346205901925409843568357625892116;$$

$${}_1\eta_{80} = 1/{}_1r_{80} =$$

$$1/(160.3340239978439346421645881897335593948749465347837894258567041136 - 2*80 - 1/3) =$$

$$1447.880967749995417436607281137475159143138143233811150798896076 7482;$$

$${}_1\eta_{90} = 1/{}_1r_{90} =$$

$$1/(180.3339476322557236028650601348610199683564567776575880320644236839 - 2*90 - 1/3) =$$

$$1627.871974948201466363279449411565418373262592262820746271230424 1123;$$

$${}_1\eta_{100} = 1/{}_1r_{100} =$$

$$1/(200.3338864720476166167720094464509408297231932457099636133042122764 - 2*100 - 1/3) =$$

$$1807.864779986927200441566950226965853438628749800896197280481682 95;$$

$${}_1\eta_{110} = 1/{}_1r_{110} =$$

$$1/(220.3338363871484970611631381300909350438790291247553923370760676481 - 2*110 - 1/3) =$$

$$1987.858892739998756462096904473100259743491186029155315090344671 8317;$$

$${}_1\eta_{120} = 1/{}_1r_{120} =$$

$$1/(240.3337946190132161535091413487028270027447108459955751221258171538 - 2*120 - 1/3) =$$

$$2167.853986393049853616593134300990316138001056424317818962441584 4222;$$

$${}_1\eta_{130} = 1/{}_1r_{130} =$$

$$1/(260.33375925495116407009211209572410970061822109453278366646979679\,41 - 2*130 - 1/3) =$$

$$2347.849834655269066231096173457324004546052308409776694682961759308\,5;$$

$${}_1\eta_{140} = 1/{}_1r_{140} =$$

$$1/(280.33372892700908234618442550279712443701854497715385918622805914\,39 - 2*140 - 1/3) =$$

$$2527.846275870337547200762832331690307577896796034490254301379551713\,3;$$

$${}_1\eta_{150} = 1/{}_1r_{150} =$$

$$1/(300.33370263093636554838943066786782335633321626537227338637054187\,27 - 2*150 - 1/3) =$$

$$2707.843191478192940460933983180330095446005360213571897587002089831\,7;$$

$${}_1\eta_{200} = 1/{}_1r_{200} =$$

$$1/(400.33361050807163311748409516529798697473976639373670518054378912\,37 - 2*200 - 1/3) =$$

$$3607.832395311686122277348915199241640380620508809253433829437251758;$$

$${}_1\eta_{250} = 1/{}_1r_{250} =$$

$$1/(500.33355516976144825230683438527427686552663461834736504533966000\,08 - 2*250 - 1/3) =$$

$$4507.825917039942929897571346348665371783971094542313659242365071399\,7;$$

$${}_1\eta_{300} = 1/{}_1r_{300} =$$

$$1/(600.3335182506760904700688442411861126981247258055616958588575121013 - 2*300 - 1/3) =$$

$$5407.8215979631570147314475607412473780702507859196737174071653084799;$$

$${}_1\eta_{350} = 1/{}_1r_{350} =$$

$$1/(700.3334918667467425672971233496218568274178621392295040719054299389 - 2*350 - 1/3) =$$

$$6307.8185127991058083079075390151408362159107171302620374151333193471;$$

$${}_1\eta_{400} = 1/{}_1r_{400} =$$

$$1/(800.3334720716102828932929704019990615524012858076472123636919258216 - 2*400 - 1/3) =$$

$$7207.8161988674728892551090098493258505928173358277544819381859132614;$$

$${}_1\eta_{450} = 1/{}_1r_{450} =$$

$$1/(900.3334566711344687340344070387487744462202325693431275408560112188 - 2*450 - 1/3) =$$

$$8107.8143991086418525104585690351801072042793729109144213314835776249;$$

$${}_1\eta_{500} = 1/{}_1r_{500} =$$

$$1/(1000.3334443480718187450433378287260332507523232654074571387177829021 - 2*500 - 1/3) =$$

$$9007.8129592802543751904156895318598693969539556286426572287823161496.$$

Во-вторых, всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения немедленно приводят к целесообразности попытки выделить бесконечно большую

$$18n,$$

конечную постоянную

$$7.8 = 39/5$$

и бесконечно малую части этого обращения в виде

$$x/n,$$

где x есть искомая действительная постоянная.

Для наибольших рассмотренных значений

$$n = 500, 450, 400, 350, 300, 250, 200, 150$$

получаем соответствующие значения x

$$x_{500} = 0.012959280254375190415689531859869*500 = 6.4796401271875952078447659299345;$$

$$x_{450} = 0.0143991086418525104585690351801072*450 = 6.47959888883362970635606583104824;$$

$$x_{400} = 0.016198867472889255109009849325 85*400 = 6.479546989155702043603939730 34;$$

$$x_{350} = 0.018512799105808307907539015140836*350 = 6.4794796870329077676386552992926;$$

$$x_{300} = 0.021597963157014731447560741247378*300 = 6.4793889471044194342682223742134;$$

$$x_{250} = 0.025917039942929897571346348665371 78*250 = 6.4792599857324743928365871663429 45;$$

$$x_{200} = 0.032395311686122277348915199241640 38*200 =$$
$$6.4790623372244554697830398483280 76;$$
$$x_{150} = 0.043191478192940460933983180330095 4*150 =$$
$$6.4787217289410691400974770495143169.$$

Сразу видно, что

$$x = 6.48 = 162/25.$$

По итогам проведённых математических экспериментов всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения позволяют предложить уточняющее дополнение знаменателя (2n + 1/3) первой дроби

$$1/_1z = 1/(2n + 1/3)$$

как приближению первого порядка функциональной непрерывной, или цепной, дробью к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n, являющееся в знаменателе (2n + 1/3) первой дроби второй единичной дробью с найденными бесконечно большой и конечной постоянной частями знаменателя

$$1/_2z = 1/(18n + 39/5).$$

А найденная главная часть

$$(162/25)/n$$

бесконечно малой части знаменателя будет использована в дальнейшем при обращении этой бесконечно малой части для определения третьей дроби в приближении третьего порядка.

Тем самым получаются предположительно высокоточные приближённые формулы собственного приближения ${}_2C_n$ второго порядка приближающей функции C_n для непременно всех гармонических чисел H_n, то есть не только имеющих достаточно большие номера, причём точность растёт вместе с ростом номеров n.

Приближения второго порядка к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n и к гармоническим числам H_n определяются по следующим формулам:

$$\varepsilon_n \approx {}_2c_n = 1/({}_1z_n + 1/{}_2z_n) = 1/(2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5));$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx {}_2C_n = \ln(n) + \gamma + {}_2c_n = \ln(n) + \gamma + 1/({}_1z_n + 1/{}_2z_n) =$$
$$\ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5)).$$

Вычислим приближения второго порядка к избранным первым гармоническим числам H_n:

$${}_3C_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5));$$

$${}_2C_1 = \ln(1) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 +$$
$$1/(2*1 + 1/3 + 1/(18*1 + 39/5)) =$$
$$0.99878429235251325276337483518044164672843384574384516743321798;$$

$${}_2C_2 = \ln(2) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$
$$1/(2*2 + 1/3 + 1/(18*2 + 39/5)) =$$
$$1.4999225938891511259985869788361764833943890300486065258824218 52;$$

$${}_2C_3 = \ln(3) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

1/(2*3 + 1/3 + 1/(18*3 + 39/5)) =
1.8333203083097037140812680303688425087783349090531929282163 02312;

${}_2C_4 = \ln(4) +$
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 +
1/(2*4 + 1/3 + 1/(18*4 + 39/5)) =
2.0833298458412432992607961528185753870129794244802539268669 46839;

${}_2C_5 = \ln(5) +$
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 +
1/(2*5 + 1/3 + 1/(18*5 + 39/5)) =
2.2833321063985039350886474612682579234740477601965789245143 81677;

${}_2C_6 = \ln(6) +$
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 +
1/(2*6 + 1/3 + 1/(18*6 + 39/5)) =
2.4499994834159018832493840748275043679129250071321642408492 18589;

$${}_2C_7 = \ln(7) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

$$1/(2*7 + 1/3 + 1/(18*7 + 39/5)) =$$

$$2.5928568958830500431352544520371518917611702693992081768836687 2;$$

$${}_2C_8 = \ln(8) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

$$1/(2*8 + 1/3 + 1/(18*8 + 39/5)) =$$

$$2.7178570130641941396080875062227763539430670926733260326724030 61;$$

$${}_2C_9 = \ln(9) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

$$1/(2*9 + 1/3 + 1/(18*9 + 39/5)) =$$

$$2.8289681805807194880983513115189759983332868870382163365718801 37;$$

$${}_2C_{10} = \ln(10) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

$$1/(2*10 + 1/3 + 1/(18*10 + 39/5)) =$$

$$2.928968209984802547137855728241476032297046561295055355863285916;$$

$${}_2C_{11} = \ln(11) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

$$1/(2*11 + 1/3 + 1/(18*11 + 39/5)) =$$

$$3.019877317235272759928178977888304375082085975834010050975522389;$$

$${}_2C_{12} = \ln(12) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

$$1/(2*12 + 1/3 + 1/(18*12 + 39/5)) =$$

$$3.103210660140072937304606676773010727667924892599949366228395488;$$

$${}_2C_{13} = \ln(13) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

$$1/(2*13 + 1/3 + 1/(18*13 + 39/5)) =$$

$$3.180133742920823506590280292906435940690087917594798135612979083;$$

${}_2C_{14}$ = ln(14) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
1/(2*14 + 1/3 + 1/(18*14 + 39/5)) =
3.2515623180701737082179315108109795926504247214794320544257719 6;

${}_2C_{15}$ = ln(15) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
1/(2*15 + 1/3 + 1/(18*15 + 39/5)) =
3.3182289871770306953623059240784744538426184700160975074666362 08;

${}_2C_{16}$ = ln(16) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
1/(2*16 + 1/3 + 1/(18*16 + 39/5)) =
3.3807289888224080639008326220824653712653742755889486298412407 7;

${}_2C_{17}$ = ln(17) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +

1/(2*17 + 1/3 + 1/(18*17 + 39/5)) =
3.439552519370935264500105066347332062743515260876709704735369144;

${}_2C_{18}$ = ln(18) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
1/(2*18 + 1/3 + 1/(18*18 + 39/5)) =
3.495108075728920803535843125716077307984652131680723043546228829;

${}_2C_{19}$ = ln(19) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
1/(2*19 + 1/3 + 1/(18*19 + 39/5)) =
3.547739655253655647237463459330434939196764548022050180207261912;

${}_2C_{20}$ = ln(20) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
1/(2*20 + 1/3 + 1/(18*20 + 39/5)) =
3.597739655676263156799965869250098913262480120944643813106017732;

$${}_2C_{30} = \ln(30) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$
$$1/(2*30 + 1/3 + 1/(18*30 + 39/5)) =$$
$$3.994987130723002762396686660642202338570858850713705765890494023;$$

$${}_2C_{40} = \ln(40) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$
$$1/(2*40 + 1/3 + 1/(18*40 + 39/5)) =$$
$$4.278543038889040166886507142813140504223893915570265310201111662;$$

$${}_2C_{50} = \ln(50) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$
$$1/(2*50 + 1/3 + 1/(18*50 + 39/5)) =$$
$$4.499205338313816568593535541787534202546027771765030061609 5218;$$

$${}_2C_{60} = \ln(60) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

$$1/(2*60 + 1/3 + 1/(18*60 + 39/5)) =$$

$$4.67987041294543895966284561167217028554921311480089318044053416\text{7};$$

$${}_2C_{70} = \ln(70) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +$$

$$1/(2*70 + 1/3 + 1/(18*70 + 39/5)) =$$

$$4.83283675763514887946755213950123279847533688711967345635744109\text{5};$$

$${}_2C_{80} = \ln(80) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +$$

$$1/(2*80 + 1/3 + 1/(18*80 + 39/5)) =$$

$$4.96547927894401400865676576058073845243175106444893298230072498\text{9};$$

$${}_2C_{90} = \ln(90) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +$$

$$1/(2*90 + 1/3 + 1/(18*90 + 39/5)) =$$

$$5.08257060284768032604472221260829425827005865409637336019203499\text{2};$$

$$
{}_2C_{100} = \ln(100) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*100 + 1/3 + 1/(18*100 + 39/5)) = 5.18737751763912638733541720367043946809371437397884018005768603 6;
$$

$$
{}_2C_{110} = \ln(110) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*110 + 1/3 + 1/(18*110 + 39/5)) = 5.282234598243670582564244170813587414506317549596000128327335444;
$$

$$
{}_2C_{120} = \ln(120) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*120 + 1/3 + 1/(18*120 + 39/5)) = 5.368868287353196026285219351722419594232740289019839058199223898;
$$

$$
{}_2C_{130} = \ln(130) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
$$

$$1/(2*130 + 1/3 + 1/(18*130 + 39/5)) =$$
$$5.448591338265842798284005008317270079600198665646316515229413208;$$
$$_2C_{140} = \ln(140) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +$$
$$1/(2*140 + 1/3 + 1/(18*140 + 39/5)) =$$
$$5.522425264403185128658860178083578388556691379533855303663731318;$$
$$_2C_{150} = \ln(150) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +$$
$$1/(2*150 + 1/3 + 1/(18*150 + 39/5)) =$$
$$5.591180588643813491726243223067576107519947084036321828648395978;$$
$$_2C_{200} = \ln(200) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +$$
$$1/(2*200 + 1/3 + 1/(18*200 + 39/5)) =$$
$$5.878030948121428946851496500015208612638577173260468982267503091;$$

${}_2C_{250}$ = ln(250) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*250 + 1/3 + 1/(18*250 + 39/5)) =
6.1006752494325741826875989152733519934432120054412377348031784 38;

${}_2C_{300}$ = ln(300) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*300 + 1/3 + 1/(18*300 + 39/5)) =
6.282663880299501412718128333821615320805244702107861028582544826;

${}_2C_{350}$ = ln(350) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*350 + 1/3 + 1/(18*350 + 39/5)) =
6.436576710542009182728226467378453887478986590292586032970988624;

${}_2C_{400}$ = ln(400) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

1/(2*400 + 1/3 + 1/(18*400 + 39/5)) =
6.569929691176506547224192716801577986746749448667730381702614622;

${}_2C_{450}$ = ln(450) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*450 + 1/3 + 1/(18*450 + 39/5)) =
6.687573947254578618623905474200556510621037903878608683167910431;

${}_2C_{500}$ = ln(500) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*500 + 1/3 + 1/(18*500 + 39/5)) =
6.792823429990524443381818666717403434464217751530143326524828155.

Определяем третью дробь искомой функциональной непрерывной, или цепной, дроби как третьего приближения к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n в знаменателе (18n + 39/5) второй дроби

$$1/z_2 = 1/(18n + 39/5)$$

путём, во-первых, обращения

$${}_2\eta_n = 1/({}_1\eta_n - 18n - 39/5)$$

бесконечно малой части

$${}_2r_n = {}_1\eta_n - (18n + 39/5)$$

этого знаменателя и, во-вторых, выделения бесконечно большой и конечной постоянной частей этого обращения.

Во-первых, вычислим обращения

$${}_2\eta_n = 1/({}_1\eta_n - 18n - 39/5)$$

бесконечно малой части

$${}_2r_n = {}_1\eta_n - (18n + 39/5)$$

этого знаменателя:

${}_2\eta_1 = 1/{}_2r_1 = 1/(31.309894564058165521827748265782968473624098221460398666092074103 4 - 18*1 - 39/5) =$

$0.18149167617891343772502373249944520200195399501414076748595657 24;$

${}_2\eta_2 = 1/{}_2r_2 = 1/(46.810619348225134527734406960135005012418171518951911594642690896 3 - 18*2 - 39/5) =$

$0.33215756770763298198956925879829925358429981106716866603374332 43;$

${}_3\eta_3 = 1/{}_2r_3 = 1/(63.872655379157516497721923257491014225625385100634342957732714202 2 - 18*3 - 39/5) =$

$0.48247287516098090441827164320155475733507877967949319235932870 9;$

${}_2\eta_4 = 1/{}_2r_4 = 1/(81.377430118066481007685706107312512527603041941241819464380524515 7 - 18*4 - 39/5) =$

$0.63394250467699949385286975785266534310946543538932106952436597 08;$

${}_2\eta_5 = 1/{}_2r_5 = 1/(99.071877140713856903874055861133773515361270924664805803091276708 6 - 18*5 - 39/5) =$

$0.78623946290813712659761826248263092691844566131179360945462636 26;$

$${}_2\eta_6 = 1/{}_2r_6 = 1/(116.8648776914063360710871292622555803742626613172381180608627940736 - 18*6 - 39/5) =$$
$$0.9390749830427426626727964863621804420613261876511491258068168921;$$

$${}_2\eta_7 = 1/{}_2r_7 = 1/(134.7155262879303796663392797145046091682202756277508304034014601648 - 18*7 - 39/5) =$$
$$1.0922679263099915023702789031560666741611796759026310916409085822;$$

$${}_2\eta_8 = 1/{}_2r_8 = 1/(152.6027572424055288027376229310537446040556452695371248877667091668 - 18*8 - 39/5) =$$
$$1.2457066061508419147283151996364593768889415067821337969706138805;$$

$${}_2\eta_9 = 1/{}_2r_9 = 1/(170.5146327209726502739748773475033785944990245950588636884470891718 - 18*9 - 39/5) =$$
$$1.3993201971481949873009295768612192634546250368703309863821458259;$$

$${}_2\eta_{10} = 1/{}_2r_{10} = 1/(188.4438892251292120025428512041937742251904606402042183489809592077 - 18*10 - 39/5) =$$
$$1.5530621743193881313709469212090632461126530219515675517801450504;$$

$${}_2\eta_{11} = 1/{}_2r_{11} = 1/(206.3858570850668078400912213045173095339089313585011527861163195291 - 18*11 - 39/5) = 1.7069009242859384998284132340201341779769817204650858401077434807;$$

$${}_2\eta_{12} = 1/{}_2r_{12} = 1/(224.3373991366718749349072044927536080368469487899903802226973965121 - 18*12 - 39/5) = 1.8608143031137391170295097763008340884343537985335160177779751178;$$

$${}_2\eta_{13} = 1/{}_2r_{13} = 1/(242.2963305343357325128573593155461025899937448944871024770536574588 - 18*13 - 39/5) = 2.0147863788762403768394797375148208550477309270760168766201773442;$$

$${}_2\eta_{14} = 1/{}_2r_{14} = 1/(260.2610833191177546406214967719762959441653184642880611381505013467 - 18*14 - 39/5) = 2.1688054165859188187026335146633049235087600684597918338344192666;$$

$${}_2\eta_{15} = 1/{}_2r_{15} = 1/(278.2305032950600985753870258780647355108729069574781857192570586199 - 18*15 - 39/5) = 2.3228625923999008355486621657446701217109251224361177084011933151;$$

${}_2\eta_{16} = 1/{}_2r_{16} =$
1/(296.2037221324124751792819021471239275870886204456474690298658858084 - 18*16 - 39/5) =
2.4769511496048453704644257133658404437024454973000783530972852826;

${}_2\eta_{17} = 1/{}_2r_{17} =$ 1/(
314.180074108562461677541428157915370354652734472271068256650354189 - 18*17 - 39/5) =
2.6310658302462589727310725659772571001706635651349715711086507573;

${}_2\eta_{18} = 1/{}_2r_{18} =$ 1/(332.159040323256245292351854689268025366702587536381347519349389573
- 18*18 - 39/5) =
2.7852024834723228994073818565286386464345048204485487543062808303;

${}_2\eta_{19} = 1/{}_2r_{19} =$
1/(350.1402103695582284341691620281834703488754544554262816769059107219 - 18*19 - 39/5) =
2.9393577900007124810031104241034325290980530317757630550953376441;

${}_2\eta_{20} = 1/{}_2r_{20} =$
1/(368.1232554080179863956779760755983378249743065936042429638486593082 - 18*20 - 39/5) =
3.0935290646223575699695117117212326107176706075835964763745157574;

$${}_2\eta_{30} = 1/{}_2r_{30} =$$

$$1/(548.0157135267068916744945219128780705472455079750255616968407999663 - 18*30 - 39/5) =$$

$$4.6357779007469712268125175604119850141253486134770321846613785483;$$

$${}_2\eta_{40} = 1/{}_2r_{40} =$$

$$1/(727.9618516025015659425834006674178005501449082503155995518136911394 - 18*40 - 39/5) =$$

$$6.1784992211635644754772948031265722516304344170177705778402290076;$$

$${}_2\eta_{50} = 1/{}_2r_{50} =$$

$$1/(907.9295099660161610176556634375627251701074917552986241598865427401 - 18*50 - 39/5) =$$

$$7.7214135001410941618001950251983139984047568579157279561235139154;$$

$${}_2\eta_{60} = 1/{}_2r_{60} =$$

$$1/(1087.9079397767696068282049970614539511911496844283539064244243737466 - 18*60 - 39/5) =$$

$$9.2644253112961344391829147461225369262269184569451523424861504101;$$

$${}_2\eta_{70} = 1/{}_2r_{70} =$$

$$1/(1267.8925283947550093338834175195271346205901925409843568357625892116 - 18*70 - 39/5) =$$

$$10.8074932311074342718196571807014491674042650539220038268913262636;$$

$${}_2\eta_{80} = 1/{}_2r_{80} =$$
$$1/(1447.8809677499954174366072811374751591431381432338111507988960767482 - 18*80 - 39/5) =$$
$$12.3505963801216829027580946916854693464822765062791790023148177935;$$

$${}_2\eta_{90} = 1/{}_2r_{90} =$$
$$1/(1627.8719749482014663632794494115654183732625922628207462712304241123 - 18*90 - 39/5) =$$
$$13.8937230937753805099709611003355093975931163398533623155289056852;$$

$${}_2\eta_{100} = 1/{}_2r_{100} =$$
$$1/(1807.86477998692720044156695022696585343862874980089619728048168295 - 18*100 - 39/5) =$$
$$15.4368663445980168763655785105758303187079139028250872404235487727;$$

$${}_2\eta_{110} = 1/{}_2r_{110} =$$
$$1/(1987.8588927399987564620969044731002597434911860291553150903446718317 - 18*110 - 39/5)$$
$$= 16.9800216464901327483284526380239676216098239946212566112579843745;$$

$${}_2\eta_{120} = 1/{}_2r_{120} =$$
$$1/(2167.8539863930498536165931343009903161380010564243178189624415844222 - 18*120 - 39/5)$$
$$= 18.5231860012679896397129763871068910525426343091626688415529702904;$$

$${}_2\eta_{130} = 1/{}_2r_{130} =$$

$$1/(2347.84983465526906623109617345732400454605230840977669468296175930085 - 18*130 - 39/5)$$

$$= 20.066357329067911910669778669496865068006097485507776419346733257 2;$$

$${}_2\eta_{140} = 1/{}_2r_{140} =$$

$$1/(2527.846275870337547200762832331690307577896796034490254301379551713 3 - 18*140 - 39/5)$$

$$= 23.152715346599262686815952648129029348642056430385092480692942751 8;$$

$${}_2\eta_{150} = 1/{}_2r_{150} =$$

$$1/(2707.843191478192940460933983180330095446005360213571897587002089831 7 - 18*150 - 39/5)$$

$$= 23.152715346599262686815952648129029348642056430385092480692942751 8;$$

$${}_2\eta_{200} = 1/{}_2r_{200} =$$

$$1/(3607.832395311686122277348915199241640380620508809253433829437251758 - 18*200 - 39/5) =$$

$$30.868664258858999069112193321952383651459797784895366449859977190 5;$$

$${}_2\eta_{250} = 1/{}_2r_{250} =$$

$$1/(4507.825917039942929897571346348665371783971094542313659242365071399 7 - 18*250 - 39/5)$$

$$= 38.584653270667873890347882358389673482772549849375543026834191981 9;$$

$${}_2\eta_{300} = 1/{}_2r_{300} =$$

$$1/(5407.8215979631570147314475607412473780702507859196737174071653084799 - 18*300 - 39/5)$$

$$= 46.300662369414834733356489527863641202903369270219956740300334631 9;$$

$${}_2\eta_{350} = 1/{}_2r_{350} =$$

$$1/(6307.8185127991058083079075390151408362159107171302620374151333193471 - 18*350 - 39/5)$$

$$= 54.016682959966571085654907297856509566085382608165427273277195016 4;$$

$${}_2\eta_{400} = 1/{}_2r_{400} =$$

$$1/(7207.8161988674728892551090098493258505928173358277544819381859132614 - 18*400 - 39/5)$$

$$= 61.732710738798238350233258605867340423598672465501756053121134383 9;$$

$${}_2\eta_{450} = 1/{}_2r_{450} =$$

$$1/(8107.8143991086418525104585690351801072042793729109144213314835776249 - 18*450 - 39/5)$$

$$= 69.448743312721159986935671076868633301296034934210554581654222112 1;$$

$${}_2\eta_{500} = 1/{}_2r_{500} =$$

$$1/(9007.8129592802543751904156895318598693969539556286426572287823161496 - 18*500 - 39/5)$$

$$= 77.164779244772439998700784938458471308385073921736839699338727661 1.$$

Всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения немедленно приводят к целесообразности попытки представления знаменателя искомой третьей дроби приближения третьего порядка к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n многочленом первой степени относительно номера n, а именно

$$ {}_3z_n = x_1 n + x_2. $$

Действительно, сразу видна близость последовательности ${}_2\eta_n$ к арифметической прогрессии.

Определение этих двух коэффициентов x_1, x_2 соответственно достигается решением совокупности двух уравнений

$$500x_1 + x_2 =$$
$$77.16477924477243999870078493845847130838507392173683969933872766 11;$$

$$450x_1 + x_2 =$$
$$69.44874331272115998693567107686863330129603493421055458165422211 21$$

для наибольших рассмотренных значений

$$n = 500, 450,$$

дающим

$$x_1 = (77.164779244772439998700784938458 4713 -$$
$$69.4487433127211599869356 71)/(500 - 450) =$$
$$0.15432071864102560023530227876916 9426;$$
$$x_2 = 77.1647792447724399987007849384584713 -$$
$$0.154320718641025600235302278769169*500 =$$
$$0.0044199242596398810496455538739713.$$

<u>Проверка</u>.

Определение этих двух коэффициентов x_1, x_2 соответственно достигается решением совокупности двух уравнений

$$400x_1 + x_2 =$$

$$61.73271073879823835023325860586734042359867246550175605312113438 39;$$

$$350x_1 + x_2 =$$

$$54.0166829599665710856549072978565095660853826081654272732771950164$$

для рассмотренных значений

$$n = 400, 350,$$

дающим

$$x_1 = (61.7327107387982383502332586058 67 -$$

$$54.0166829599665710856549072978565)/(400 - 350) =$$

$$0.154320555576633345291567026160 21;$$

$$x_2 = 61.7327107387982383502332586058 67 - 0.154320555576633345291567026160 21*400 = 0.00448850814490023360644814178 3.$$

Проверка.

Определение этих двух коэффициентов x_1, x_2 соответственно достигается решением совокупности двух уравнений

$$300x_1 + x_2 =$$

$$46.3006623694148347333564895278636412029033692702199567403003346319;$$

$$250x_1 + x_2 =$$

$$38.5846532706678738903478823583896734827725498493755430268341919819$$

для рассмотренных значений

$$n = 300, 250,$$

дающим

$$x_1 = (46.30066236941483473335648952786364 -$$
$$38.584653270667873890347882358)/(300 - 250) =$$
$$0.1543201819749392168601721433972728;$$
$$x_2 = 46.30066236941483473335648952786364 -$$
$$0.1543201819749392168601721433972728*300 =$$
$$0.0046077769330696753048465086818.$$
$$1/0.154321= 6.4816000415$$

Принимаем

$$x_1 = 0.154321 \approx 1/6.48 = 25/162;$$
$$x_2 = 0.004 = 1/250.$$

По итогам проведённых математических экспериментов всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического

взвешивания и последовательного выделения позволяют предложить уточняющее дополнение знаменателя (18n + 39/5) второй др<u>о</u>би

$$1/(18n + 39/5)$$

в приближении <u>второго порядка</u> <u>функциональной непрерывной, или цепной, дробью</u> к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n, являющееся в знаменателе 1/(18n + 39/5) второй др<u>о</u>би третьей единичной дробью

$$1/{}_3z_n = 1/((25/162)n + 1/250),$$

и предположительно высокоточные приближённые формулы собственного <u>третьего приближения</u> ${}_3C_n$ приближающей функции C_n для <u>непременно всех</u> гармонических чисел H_n, то есть не только имеющих

достаточно большие номера, причём точность растёт вместе с ростом номеров n:

$$\varepsilon_n \approx {}_3c_n = 1/({}_1z_n + 1/({}_2z_n + 1/{}_3z_n)) = 1/(2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5 + 1/((25/162)n + 1/250))),$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx {}_3C_n = \ln(n) + \gamma + {}_3c_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5 + 1/((25/162)n + 1/250))).$$

Вычислим приближения третьего порядка к избранным первым гармоническим числам H_n:

$${}_3C_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5 + 1/((25/162)n + 1/250)));$$

$${}_3C_1 = \ln(1) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*1 + 1/3 + 1/(18*1 + 39/5 + 1/((25/162)*1 + 1/250))) = 1.000143391006983839259022675105149755828610506823347872148268269;$$

$${}_3C_2 = \ln(2) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

$$1/(2*2 + 1/3 + 1/(18*2 + 39/5 + 1/((25/162)*2 + 1/250))) =$$

$$1.50000450458012927018174316315363160184013144076752604497204258;$$

$${}_3C_3 = \ln(3) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

$$1/(2*3 + 1/3 + 1/(18*3 + 39/5 + 1/((25/162)*3 + 1/250))) =$$

$$1.833333751498799500748344918639404924748186236673725830686176211;$$

$${}_3C_4 = \ln(4) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

$$1/(2*4 + 1/3 + 1/(18*4 + 39/5 + 1/((25/162)*4 + 1/250))) =$$

$$2.083333402987567338558099824522085362731044901470241100651017471;$$

$${}_3C_5 = \ln(5) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

1/(2*5 + 1/3 + 1/(18*5 + 39/5 + 1/((25/162)*5 + 1/250))) =
2.283333349937482289512777250458890420196033251019913475582098927;

${}_3C_6$ **= ln(6) +**
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*6 + 1/3 + 1/(18*6 + 39/5 + 1/((25/162)*6 + 1/250))) =
2.450000005035671954763678222189520760845587843435861605232279705;

${}_3C_7$ **= ln(7) +**
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*7 + 1/3 + 1/(18*7 + 39/5 + 1/((25/162)*7 + 1/250))) =
2.592857144671699739815659569742502113677755869883252902290993852;

${}_3C_8$ **= ln(8) +**
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*8 + 1/3 + 1/(18*8 + 39/5 + 1/((25/162)*8 + 1/250))) =
2.717857143601271221128700835868271146941620961746358386556553331;

$${}_3C_9 = \ln(9) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 + 1/(2*9 + 1/3 + 1/(18*9 + 39/5 + 1/((25/162)*9 + 1/250))) = 2.8289682543056759446350789692142721192744138183414517194824 76988;$$

$${}_3C_{10} = \ln(10) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*10 + 1/3 + 1/(18*10 + 39/5 + 1/((25/162)*10 + 1/250))) = 2.928968254134050254612076406233781358723659188516991891968961726;$$

$${}_3C_{11} = \ln(11) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*11 + 1/3 + 1/(18*11 + 39/5 + 1/((25/162)*11 + 1/250))) = 3.019877344964335356938764775968949165391469913434908892445631 16;$$

$${}_3C_{12} = \ln(12) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

$$1/(2*12 + 1/3 + 1/(18*12 + 39/5 + 1/((25/162)*12 + 1/250))) =$$
$$3.103210678258882031181817739595548628846276851697030312066489607;$$

$${}_3C_{13} = \ln(13) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 +$$
$$1/(2*13 + 1/3 + 1/(18*13 + 39/5 + 1/((25/162)*13 + 1/250))) =$$
$$3.180133755161727442547125433991542729159057395307983919031212235;$$

$${}_3C_{14} = \ln(14) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$
$$1/(2*14 + 1/3 + 1/(18*14 + 39/5 + 1/((25/162)*14 + 1/250))) =$$
$$3.251562326579212583705634800166856249514443527203597724804928113;$$

$${}_3C_{15} = \ln(15) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$
$$1/(2*15 + 1/3 + 1/(18*15 + 39/5 + 1/((25/162)*15 + 1/250))) =$$
$$3.318228993239541304072747471961690695855561186515832996708552186;$$

${}_{3}C_{16} = \ln(16) +$
$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 +$
$1/(2*16 + 1/3 + 1/(18*16 + 39/5 + 1/((25/162)*16 + 1/250))) =$
$3.3807289932357820610984741422561537546938233492137480308657 16546;$

${}_{3}C_{17} = \ln(17) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$
$1/(2*17 + 1/3 + 1/(18*17 + 39/5 + 1/((25/162)*17 + 1/250))) =$
$3.43955252264524388000244361256785988174878857553274085838795623;$

${}_{3}C_{18} = \ln(18) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$
$1/(2*18 + 1/3 + 1/(18*18 + 39/5 + 1/((25/162)*18 + 1/250))) =$
$3.49510807819934786270443122753568821885190366098068283277922 6796;$

${}_{3}C_{19} = \ln(19) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$

1/(2*19 + 1/3 + 1/(18*19 + 39/5 + 1/((25/162)*19 + 1/250))) =
3.54773965714577771117512873779904512692706775951091008002940977;

${}_3C_{20}$ = ln(20) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*20 + 1/3 + 1/(18*20 + 39/5 + 1/((25/162)*20 + 1/250))) =
3.597739657145157002932893997031575876799756191478959917604502677;

${}_3C_{30}$ = ln(30) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*30 + 1/3 + 1/(18*30 + 39/5 + 1/((25/162)*30 + 1/250))) =
3.994987130920482548813154851516119088808774711250038111227463879;

${}_3C_{40}$ = ln(40) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*40 + 1/3 + 1/(18*40 + 39/5 + 1/((25/162)*40 + 1/250))) =
4.278543038936388702809088635978933434275731653078305941115323678;

${}_3C_{50} = \ln(50) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

1/(2*50 + 1/3 + 1/(18*50 + 39/5 + 1/((25/162)*50 + 1/250))) =

4.49920533832942781515606318767808616578364349658654251708385407;

${}_3C_{60} = \ln(60) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

1/(2*60 + 1/3 + 1/(18*60 + 39/5 + 1/((25/162)*60 + 1/250))) =

4.679870412951738610005567405496316405756249603007752555643663692;

${}_3C_{70} = \ln(70) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

1/(2*70 + 1/3 + 1/(18*70 + 39/5 + 1/((25/162)*70 + 1/250))) =

4.832836757638072065302070868472525304367922260461772166871134697;

${}_3C_{80} = \ln(80) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

1/(2*80 + 1/3 + 1/(18*80 + 39/5 + 1/((25/162)*80 + 1/250))) =
4.965479278945516636776234575721501254749850349662393493569964025;

${}_3C_{90} = \ln(90) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*90 + 1/3 + 1/(18*90 + 39/5 + 1/((25/162)*90 + 1/250))) =
5.082570602848515604281826085504770658632103074602826067511483749;

${}_3C_{100} = \ln(100) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*100 + 1/3 + 1/(18*100 + 39/5 + 1/((25/162)*100 + 1/250))) =
5.187377517639620285362708780676322876257525365133985975696508693;

${}_3C_{110} = \ln(110) +$
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*110 + 1/3 + 1/(18*110 + 39/5 + 1/((25/162)*110 + 1/250))) =
5.282234598243977597401787998403997482707444614048450333787876576;

${}_3C_{120}$ = ln(120) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*120 + 1/3 + 1/(18*120 + 39/5 + 1/((25/162)*120 + 1/250))) =
5.368868287353394919989108304063089365694179852465371208714325225;

${}_3C_{130}$ = ln(130) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*130 + 1/3 + 1/(18*130 + 39/5 + 1/((25/162)*130 + 1/250))) =
5.448591338265976197315345788451291418561647756445888302497491777;

${}_3C_{140}$ = ln(140) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*140 + 1/3 + 1/(18*140 + 39/5 + 1/((25/162)*140 + 1/250))) =
5.522425264403277284420658842543463681168483211603781945645611343;

${}_3C_{150}$ = ln(150) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

1/(2*150 + 1/3 + 1/(18*150 + 39/5 + 1/((25/162)*150 + 1/250))) =
5.5911805886438787988371163473348953541271409878067577782673231558;

${}_3C_{200}$ = ln(200) +

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
1/(2*200 + 1/3 + 1/(18*200 + 39/5 + 1/((25/162)*200 + 1/250))) =
5.8780309481214444762921863085109058767597705521110669084139558 09;

${}_3C_{250}$ = ln(250) +

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
1/(2*250 + 1/3 + 1/(18*250 + 39/5 + 1/((25/162)*250 + 1/250))) =
6.1006752494325792776259844223584892932445647412043869968222834 37;

${}_3C_{300}$ = ln(300) +

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 +
1/(2*300 + 1/3 + 1/(18*300 + 39/5 + 1/((25/162)*300 + 1/250))) =
6.2826638802995034619356874791626543762476562648351004243048864 17;

$${}_3C_{350} = \ln(350) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$
$$1/(2*350 + 1/3 + 1/(18*350 + 39/5 + 1/((25/162)*350 + 1/250))) =$$
$$6.4365767105420101313823611026011389418417702141144362675346020 59;$$

$${}_3C_{400} = \ln(400) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$
$$1/(2*400 + 1/3 + 1/(18*400 + 39/5 + 1/((25/162)*400 + 1/250))) =$$
$$6.569929691176507034010642827116442342281960169764741075085433105;$$

$${}_3C_{450} = \ln(450) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$
$$1/(2*450 + 1/3 + 1/(18*450 + 39/5 + 1/((25/162)*450 + 1/250))) =$$
$$6.687573947254578888847877840100904326306812776556030371097199882;$$

$${}_3C_{500} = \ln(500) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +$$

1/(2*500 + 1/3 + 1/(18*500 + 39/5 + 1/((25/162)*500 + 1/250))) = 6.792823429990524602989877503895632840684088346984288236901301796.

Общие функциональные метод и алгоритм построения рядов функциональных единичных дробей $1/_m z$ последовательным их выделением ведут к следующим собственным приближениям приближающих функций S_n и s_n и тем самым к уточнениям, которые подлежат дополнительным исследованиям, полезным для показа сущности и возможностей этих метода и алгоритма.

Вторую функциональную единичную дробь $1/_2 z$ разложения бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n вычислим по следующему алгоритму:

1. Вначале определим остатки первого порядка ${}_1r_n$ приближений первого порядка к избранным первым гармоническим числам H_n, даваемые приближающей

функцией S_n в собственном первом приближении $_1S_n = {}_1G_n$, или, что есть то же самое, остатки первого порядка $_1r_n$ приближений первого порядка к избранным первым элементам бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n, даваемые приближающей функцией s_n в собственном первом приближении $_1s_n = {}_1g_n$:

$$\varepsilon_n \approx {}_1s_n = {}_1g_n = 1/{}_1z = 1/(2n + 1/3),$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n \approx {}_1S_n = {}_1G_n = \ln(n) + \gamma + {}_1s_n = \ln(n) + \gamma + {}_1g_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3),$$

$$_1r_n = H_n - {}_1S_n = H_n - {}_1G_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j - (\ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3)) = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \ln(n) - \gamma - 1/(2n + 1/3),$$

$$_1r_n = \varepsilon_n - {}_1s_n = \varepsilon_n - {}_1g_n = \varepsilon_n - 1/(2n + 1/3).$$

2. Затем для избранных гармонических чисел выполним обращения ${}_1\eta_n$ этих остатков первого порядка ${}_1r_n$:

$${}_1\eta_n = 1/{}_1r_n = 1/(\varepsilon_n - {}_1g_n) = 1/(\varepsilon_n - 1/(2n + 1/3)).$$

3. После этого в обращениях ${}_1\eta_n$ этих остатков первого порядка ${}_1r_n$ выделяются бесконечно большая и конечная постоянная части и своей суммой составляют знаменатель ${}_2z$ искомой второй единичной дроби $1/{}_2z$.

4. Вторая единичная дробь $1/{}_2z$ прибавляется к первой единичной дроби $1/{}_1z$ как приближению ${}_1s_n = {}_1g_n$ первого порядка к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n, и этой суммой составляется приближение ${}_2s_n$ второго порядка к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n:

$$\varepsilon_n \approx {}_2s_n = 1/{}_1z + 1/{}_2z = 1/(2n + 1/3) + 1/{}_2z.$$

5. Вторая единичная дробь вычитается из остатка ${}_1r_n$ первого порядка, и этой разностью составляется остаток ${}_2r_n$ второго порядка:

$${}_2r_n = {}_1r_n - 1/{}_2z = \varepsilon_n - {}_2s_n = \varepsilon_n - (1/{}_1z + 1/{}_2z) = \varepsilon_n - 1/{}_1z - 1/{}_2z.$$

Объединим первые два шага этого алгоритма и сразу определим обращения остатков первого порядка:

$${}_1\eta_n = 1/{}_1r_n = 1/(\varepsilon_n - {}_1s_n) = 1/(\varepsilon_n - 1/(2n + 1/3)).$$

$${}_1\eta_1 = 1/(0.42278433509846713939348790991759756895784066406007640119423 3 - 1/(2*1 + 1/3)) = -172.79831484876112339661774055815171724528675698350661495983462 5614;$$

$${}_1\eta_2 = 1/(0.229637154538521829976255788459421000882340529699821147073552991 - 1/(2*2 + 1/3)) = -883.332741094449748354123864029201760788741220744763673277179397 0985;$$

$${}_1\eta_3 = 1/(0.157505379763690781331576006328405197643683439570660282792872 - 1/(2*3 + 1/3)) = -2568.336510208429272853068255106028459494529335703221978637945866743;$$

$${}_1\eta_4 = 1/(0.119823307311909853892357000334577766140173728672899226286206314 - 1/(2*4 + 1/3)) = -5659.5437581990611810892851463411467033057668014751263516930919867607;$$

$${}_1\eta_5 = 1/(0.096679755997700098126061910024743262765572643124892012614918442 - 1/(2*5 + 1/3)) = -10589.0082146917796094025519647277284831402423731780975974189656616926;$$

$${}_1\eta_6 = 1/(0.081024865870412138581010551536895296234849971877071695338858657 - 1/(2*6 + 1/3)) = -17788.7797288372526757020311066697655035961759270332204028134568978448;$$

$${}_1\eta_7 = 1/(0.069731328900296691430992309331560696463613077335358069877699993 - 1/(2*7 + 1/3)) = -27690.8897895981413336734809102354469280043655150790317128765657865377;$$

$${}_1\eta_8 = 1/(0.061199936275774068284648688400210721874197403836453495975050114 - 1/(2*8 + 1/3)) = -40727.3577932239638505970036286066711993708449213509596506142719077216;$$

$${}_1\eta_9 = 1/(0.054528011730501724856965690040800127916827802382831465978812587 - 1/(2*9 + 1/3)) = -57330.1959978824741198637782195775244720399499333392291841726439224584;$$

$${}_1\eta_{10} = 1/(0.049167496072675423629464709201487329610707429399557393414873353 - 1/(2*10 + 1/3)) = -77931.4124229673108734957721478672259879926337824666551640618980863465;$$

$${}_1\eta_{11} = 1/(0.044766407177441472676421676829813146481011155000004103320542636 - 1/(2*11 + 1/3)) = -102963.0124949849889326854991595531336108574658742568527618750335430257;$$

$${}_1\eta_{12} = 1/(0.041088363521145039841989108289396938837560515727494651896389326 - 1/(2*12 + 1/3)) = -132856.99999992493572534672141576488635870637667798430402297278748006 61;$$

$${}_1\eta_{13} = 1/(0.037968732770685537095134223486034097907706474433624418530321244 - 1/(2*13 + 1/3)) = -168045.37765164325629030475327648035847379455132072155628436662235572 5;$$

$${}_1\eta_{14} = 1/(0.035289332045535087197465371578567833571818126680286520940725167 - 1/(2*14 + 1/3)) = -208960.14744229175303094336824194763757739938065605347130257184921442 2;$$

$${}_1\eta_{15} = 1/(0.032963127225250302390712332997877453777977745197802456540119768 - 1/(2*15 + 1/3)) = -256033.31086515474181141999569958378608505983805720853954901647334091 13;$$

$${}_1\eta_{16} = 1/(0.030924606087679130717788417313884525649069119848048613704741955 - 1/(2*16 + 1/3)) = -309696.86906042988655131815747803211496299075886367744845577947858587 17;$$

$${}_1\eta_{17} = 1/(0.029123513683008994019535226449934850598160762350383666641963602 - 1/(2*17 + 1/3)) = -370382.82291308212843744855681414712934361231777959152923719587859811 64;$$

$${}_1\eta_{18} = 1/(0.027520655398615937616902804575388964371438080485929851682360637 - 1/(2*18 + 1/3)) = -438523.17312006749447982582061813260104242149361330519887526944572904 11;$$

$${}_1\eta_{19} = 1/(0.026085013075708590868229546938131825557171648139923611787100656 - 1/(2*19 + 1/3)) = -514549.92023748973011576524086919182170709754279700139724191051289505 72;$$

${}_1\eta_{20}$ = 1/(0.024791718688158057442033402683444587117949286450024200171052982 - 1/(2*20 + 1/3)) = -598895.06471431014875768013863587058489949431364855108013706327608 5308;

${}_1\eta_{30}$ = 1/(0.016574084356702834482024882435084969384053413226008277017322114 - 1/(2*30 + 1/3)) = -1994898.4212053827197942350035986442743553677874188680474166098941160261;

${}_1\eta_{40}$ = 1/(0.012447919920906823057682941952498620878342968978008227607127422 - 1/(2*40 + 1/3)) = -4697941.7003249881612790207215738103637503296017873978152864947437267802;

${}_1\eta_{50}$ = 1/(0.0099666679997461383352089149718148138017396451302395329071596 4 - 1/(2*50 + 1/3)) = -9140024.9480478922449289578625674022736818787622802011830527129407301393;

${}_1\eta_{60}$ = 1/(0.0083101858281042717518659087770625303044100767384000882486357 8 - 1/(2*60 + 1/3)) = -15753148.179960932436828722602449526708131313113820834382126928826369 0544;

${}_1\eta_{70}$ = 1/(0.007125850687179938597493698465022484665422387615911652685299246 - 1/(2*70 + 1/3)) = -24969311.402801641401038536756064278763032002924017400932185723786 3406398;

${}_1\eta_{80}$ = 1/(0.006236979370102052295259621019270264208866968910507738470915928 - 1/(2*80 + 1/3)) = -37220514.619956298863727877463471932254946175995190864628938312681 6484384;

${}_1\eta_{90}$ = 1/(0.005545267616717626717395931769476265059526351840511240461866579 - 1/(2*90 + 1/3)) = -52938757.833312728152963443614802930912767207640674959871016025878 9559676;

$${}_1\eta_{100} = 1/(0.004991666749996032162622676207122311664609813510982102304111155 - 1/(2*100 + 1/3)) = -72556041.044006454636299380443214477025320682561870389705888967549462747 5;$$

$${}_1\eta_{110} = 1/(0.004538567550028495823927390346985076317003396194575597711970341 - 1/(2*110 + 1/3)) = -96504364.25276144407468620462214349317637621249900495215856798812976289 69;$$

$${}_1\eta_{120} = 1/(0.004160879669816057967941914833055534452404622019676745066597081 - 1/(2*120 + 1/3)) = -125215727.4600610476615448212809067896590549563525193110358397273189163945;$$

$${}_1\eta_{130} = 1/(0.003841222908860912456356476719706853500879894996502109922103 16 - 1/(2*130 + 1/3)) = -159122130.6662402861008206281175780896818794013433262002728145625543031284;$$

$${}_1\eta_{140} = 1/(0.003567176892440122732476086511515925893363437048386229994889716 - 1/(2*140 + 1/3)) = -198655573.8715386900801891929793766947148891581995633668408832085440874 48;$$

$${}_1\eta_{150} = 1/(0.003329629646090186616731037024655393637187536367481519712318106 - 1/(2*150 + 1/3)) = -244248057.0761320563621251853866416835347958441585264311161512845709849 9;$$

$${}_1\eta_{200} = 1/(0.002497916671874937997659276221554222517537798972518279471869134 - 1/(2*200 + 1/3)) = -578216073.0922190416065522614035890379251830447252195513601205422157800262;$$

$${}_1\eta_{250} = 1/(0.001998666668799983746304804755008978683497694406532802487974115 - 1/(2*250 + 1/3)) = -1128460089.101878717889128682321654381254962073330547468518372612957624019 7;$$

$${}_{1}\eta_{300} = 1/(0.0016657407417695418817453046736327323431625116836252001151771 61 - 1/(2*300 + 1/3)) = -1948980105.1083215617933264488297634151951159466066488432312952185212620862;$$

$${}_{1}\eta_{350} = 1/(0.001427891157017907045822088332117531620746900551797882052337767 - 1/(2*350 + 1/3)) = -3093776121.1129250731265081962920192993739010337185688688116672092150805232;$$

$${}_{1}\eta_{400} = 1/(0.001249479166992186531194353788275276337073032160776315892170 25 - 1/(2*400 + 1/3)) = -4616848137.1163785088278601861209337236470359967107972083088526750105251679;$$

$${}_{1}\eta_{450} = 1/(0.001110699588680586830961598544994472489489894918447250235858364 - 1/(2*450 + 1/3)) = -6572196153.1190649866051835505553135543642452157126286656495457156710228455;$$

$${}_{1}\eta_{500} = 1/(0.000999666666679999974603281269065520904985014693079184385801820 57 - 1/(2*500 + 1/3)) = -9013820169.1212144648021398767044021684054263023717234862747176357726607023.$$

Всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения немедленно приводят к целесообразности попытки представления знаменателя искомой второй дроби приближения второго

порядка к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n многочленом третьей степени относительно номера n, а именно

$$ {}_2z_n = x_1n^3 + x_2n^2 + x_3n + x_4. $$

Действительно, сразу видно, что удвоения номера от 150 до 300 и от 100 до 200 приводят к умножению соответствующих элементов последовательности ${}_1\eta_n$ примерно на 8.

Нахождение этих четырёх коэффициентов x_1, x_2, x_3, x_4 соответственно достигается решением совокупности четырёх уравнений

$$125000000x_1 + 250000x_2 + 500x_3 + x_4 = -9013820169.1212144648021398767044021684054263023717234862747176357726607023;$$

$$91125000x_1 + 202500x_2 + 450x_3 + x_4 = -6572196153.1190649866051835505553135543642452157126286656495457156710228455;$$

$$64000000x_1 + 160000x_2 + 400x_3 + x_4 = -4616848137.1163785088278601861209337236470359967107972083088526750105251679;$$

$$42875000x_1 + 122500x_2 + 350x_3 + x_4 = -3093776121.1129250731265081962920192993739010337185688688116672092150805232$$

для наибольших рассмотренных значений

$$n = 500,\ 450,\ 400,\ 350,$$

дающим

$$x_1 = -6205352435880009 00/861854504979688 7 = -72.00000000003045799;$$

$$x_2 = -7390420850188282 0/1338844369501603 = -55.1999994811901357;$$

$$x_3 = -1364408681259835/33839224497542 = -40.3203294850608166;$$

$$x_4 = -\ 10318268784967680/1140379609639337 = -\ 9.0481000341903648.$$

Проверка.

Вычисление предыдущих приближений этих четырёх коэффициентов x_1, x_2, x_3, x_4 соответственно достигается решением совокупности четырёх уравнений

$$27000000x_1 + 90000x_2 + 300x_3 + x_4 = -\ 1948980105.1083215617933264488297634151951159466066488432312952185212620862;$$

$$15625000x_1 + 62500x_2 + 250x_3 + x_4 = -\ 1128460089.1018787178891286823216543812549620733305474685183726129576240197;$$

$$8000000x_1 + 40000x_2 + 200x_3 + x_4 = -\ 578216073.0922190416065522614035890379251830447252195513601205422157800262;$$

$$3375000x_1 + 22500x_2 + 150x_3 + x_4 = -\ 244248057.07613205636212518538664168353479584415852643111615128457098499$$

для рассмотренных значений

$$n = 300, 250, 200, 150,$$

дающим

$$x_1 = - 6447857532968275000/89553576841457390 = - 72.0000000042805986;$$

$$x_2 = - 2329108260305122600/42193993168729190 = - 55.1999961461640277;$$

$$x_3 = - 537508329682580200/13330638345738950 = - 40.3212746263115875;$$

$$x_4 = - 40239481446256640/4492416235502441 = - 8.9572023910549718.$$

Принимаем

$$x_1 \approx - 72;$$

$$x_2 \approx - 55.2;$$

$$x_3 \approx - 40.32$$

и попытаемся с учётом этих значений уточнить

$$x_4 \approx - 9.05$$

исследованием последовательности последних значений соответствующих сумм ${}_4x_n$, выражающих x_4:

$${}_4x_n = {}_1\eta_n + 72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n;$$

$${}_4x_{150} = -$$

244248057.07613205636212518538664168353479584415852643111615128457098499 +

72*150^3 + 55.2*150^2 + 40.32*150 = -

9.07613205636212518538664168353479584415852643111615128457098499;

$${}_4x_{200} = -$$

578216073.0922190416065522614035890379251830447252195513601205422157800262 +

72*200^3 + 55.2*200^2 + 40.32*200 = -
9.0922190416065522614035890379251830447252195513601205422157800262;

${}_4x_{250} = -$

1128460089.1018787178891286823216543812549620733305474685183726129576240197 +
72*250^3 + 55.2*250^2 + 40.32*250 = -
9.1018787178891286823216543812549620733305474685183726129576240197;

${}_4x_{300} = -$

1948980105.1083215617933264488297634151951159466066488432312952185212620862 +
72*300^3 + 55.2*300^2 + 40.32*300 = -
9.1083215617933264488297634151951159466066488432312952185212620862;

${}_4x_{350} = -$

3093776121.1129250731265081962920192993739010337185688688116672092150805232 +
72*350^3 + 55.2*350^2 + 40.32*350 = -
9.1129250731265081962920192993739010337185688688116672092150805232;

${}_4x_{400} = -$

4616848137.1163785088278601861209337236470359967107972083088526750105251679 +

72*400^3 + 55.2*400^2 + 40.32*400 = -
9.11637850882786018612093372364703599671079720830885267501052516 79;

$${}_4x_{450} = -$$

6572196153.1190649866051835505553135543642452157126286656495457156710228455 +
72*450^3 + 55.2*450^2 + 40.32*450 = -
9.1190649866051835505553135543642452157126286656495457156710228455;

$${}_4x_{500} = -$$

9013820169.1212144648021398767044021684054263023717234862747176357726607023 +
72*500^3 + 55.2*500^2 + 40.32*500 = -
9.1212144648021398767044021684054263023717234862747176357726607023.

Всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения на основании строгого монотонного убывания последовательности ${}_4x_n$, сгущения значений её элементов примерно по закону обращений их номеров и её стремления к пределу предлагают величину этого

предела, проще всего определяемую для различных пар элементов последовательности с удвоением их номеров, причём три пары таких элементов обеспечивают возможность взаимной проверки:

$$x_4 = \lim_{n\to\infty} {}_4x_n = {}_4x_{500} + {}_4x_{500} - {}_4x_{250} = 2{}_4x_{500} - {}_4x_{250} = 2*(-9.1212144648021398767044021684054263023717234862747176357726607023) - (-9.1018787178891286823216543812549620733305474685183726129576240197) = -9.1405502117151510710871499555558905314128995040310626585876973849;$$

$$x_4 = \lim_{n\to\infty} {}_4x_n = {}_4x_{400} + {}_4x_{400} - {}_4x_{200} = 2{}_4x_{400} - {}_4x_{200} = 2*(-9.1163785088278601861209337236470359967107972083088526750105251679) - (-9.0922190416065522614035890379251830447252195513601205422157800262) = -9.1405379760491681108382784093688889486963748652575848078052703096;$$

$$x_4 = \lim_{n\to\infty} {}_4x_n = {}_4x_{300} + {}_4x_{300} - {}_4x_{150} = 2{}_4x_{300} - {}_4x_{150} = 2*(-9.1083215617933264488297634151951159466066488432312952185212620862) - (-9.07613205636212518538664168353479584415852643111615128457098499) = -9.1405110672245277122728851468554360490547712553464391524715391824.$$

Эти три весьма близких между собой итога дают основание принять

$$x_4 = \lim_{n\to\infty} {}_4x_n \approx - 9.141.$$

К этому же можно прийти менее олимпиадным и более методологическим путём, который немедленно приводит к целесообразности попытки представления

$$- {}_4x_n = 9 + y_1 + y_2/n,$$

$$ny_1 + y_2 = - n({}_4x_n + 9)$$

с искомыми постоянными $y_1 > 0$ и $y_2 < 0$, причём искомый предел последовательности ${}_4x_n$ есть

$$x_4 = \lim_{n\to\infty} {}_4x_n \approx - 9 - y_1.$$

Определение этих двух коэффициентов y_1, y_2 соответственно достигается решением совокупности двух уравнений

$$500y_1 + y_2 = - 500({}_4x_{500} + 9) = - 500*(-$$
$$9.121214464802139876704402168405426302371723486274717635772660702 3 + 9)$$
$$= 60.607232401069938352201084202713151185861743137358817886330351 15;$$

$$450y_1 + y_2 = - 450({}_4x_{450} + 9) = - 450*(-$$
$$9.1190649866051835505553135543642452157126286656495457156710228455 + 9)$$
$$= 53.579243972332597749891099463910347070682899542295572051960280475$$

для наибольших рассмотренных значений

$$n = 500, 450,$$

дающим

$$y_1 = (60.60723240106993835220108420271315118586174313735881788633035115$$
$$- 53.579243972332597749891099463910347070682899542295572051960280475)/(500 - 450)$$
$$= 0.14055976857474681204619969477605608230357687190126491668740141 35;$$

$$y_2 = 60.60723240106993835220108420271315118586174313735881788633035115 - 500*$$
$$0.1405597685747468120461996947760560823035768719012649166874014135 = -$$
$$9.672651886303467670898763185314889965926692813273640457370355 6.$$

Проверка.

Определение этих двух коэффициентов y_1, y_2 соответственно достигается решением совокупности двух уравнений

$$400y_1 + y_2 = - 400({}_4x_{400} + 9) = - 400*(-9.1163785088278601861209337236470359967107972083088526750105251679 + 9)$$
$$= 46.551403531144074448373489458814398684318883323541070004210067 16;$$

$$350y_1 + y_2 = - 350({}_4x_{350} + 9) = - 350*(-9.1129250731265081962920192993739010337185688688116672092150805232 + 9)$$
$$= 39.523775594277868702206754780865361801499104084083523225 27818312$$

для рассмотренных значений

$$n = 400, 350,$$

дающим

$$y_1 = (46.55140353114407444837348945881439868431888332354107000421006716 - 39.52377559427786870220675478086536180149910408408352322527818312)/(400 - 350)$$
$$= 0.1405525587373241149233346935589807376563955847891509355786376808;$$

$$y_2 = 46.551403531144074448373489458814398684318883323541070004210 06716 - 400^* 0.1405525587373241149233346935589807376563955847891509355786376808 = -9.669619963785571520960387964777896378239350592119304227 24500516.$$

Поэтому опять

$$x_4 = \lim_{n\to\infty} {}_4x_n \approx -9 - y_1 \approx -9 - 0.141 = -9.141.$$

Упрощающие округления дают искомое уточнение знаменателя искомой второй дроби:

$${}_2z_n = -(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n + 9.141).$$

Теперь получаем приближение второго порядка

$$\varepsilon_n \approx {}_2s_n = 1/{}_1z_n + 1/{}_2z_n =$$

$$1/(2n + 1/3) - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n + 9.141)$$

к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n и приближение второго порядка

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n \approx {}_2S_n = \ln(n) + \gamma + {}_2s_n =$$

$\ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3) - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n + 9.141)$

к гармоническим числам H_n.

Вычислим приближения второго порядка к избранным первым гармоническим числам H_n:

$$_2S_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3) - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n + 9.141);$$

$_2S_1$ = ln(1) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*1 + 1/3) - 1/(72*1^3 + 55.2*1^2 + 40.32*1 + 9.141) = 1.000126534549373316944599484260274982749343474730359194987962601;

$_2S_2$ = ln(2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*2 + 1/3) - 1/(72*2^3 + 55.2*2^2 + 40.32*2 + 9.141) = 1.500004147705283738398641277217167358912629828772349342273031941;

$_2S_3$ = ln(3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*3

+ 1/3) - 1/(72*3^3 + 55.2*3^2 + 40.32*3 + 9.141) =
1.833333721719448889607870801169085084229439927234247904320476486;

${}_2S_4$ = ln(4) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*4
+ 1/3) - 1/(72*4^3 + 55.2*4^2 + 40.32*4 + 9.141) =
2.083333398161663880555780732657439890993710718908456007488714331;

${}_2S_5$ = ln(5) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*5
+ 1/3) - 1/(72*5^3 + 55.2*5^2 + 40.32*5 + 9.141) =
2.283333348784565723470124735918039180636579750056064581390622692;

${}_2S_6$ = ln(6) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*6
+ 1/3) - 1/(72*6^3 + 55.2*6^2 + 40.32*6 + 9.141) =
2.45000004680649174942978477887383223040083352293641404069553316;

${}_2S_7$ = ln(7) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*7

+ 1/3) - 1/(72*7^3 + 55.2*7^2 + 40.32*7 + 9.141) =
2.592857144540991081714907227031095755897482240641022521085282917;

$${}_2S_8 = \ln(8) +$$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*8
+ 1/3) - 1/(72*8^3 + 55.2*8^2 + 40.32*8 + 9.141) =
2.717857143546334698612858233129270762437373653552792908940189332;

$${}_2S_9 = \ln(9) +$$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*9
+ 1/3) - 1/(72*9^3 + 55.2*9^2 + 40.32*9 + 9.141) =
2.828968254280107125231964545795778415020611625330194292342370369;

$${}_2S_{10} = \ln(10) +$$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*10
+ 1/3) - 1/(72*10^3 + 55.2*10^2 + 40.32*10 + 9.141) =
2.928968254121146991423170844657780277062232901730926898468656398;

$${}_2S_{11} = \ln(11) +$$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*11

**+ 1/3) - 1/(72*11^3 + 55.2*11^2 + 40.32*11 + 9.141) =
3.019877344957381426097306552734121085990837723397807813962006438;**

**$_2S_{12}$ = ln(12) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*12 + 1/3) - 1/(72*12^3 + 55.2*12^2 + 40.32*12 + 9.141) =
3.103210678254924783708272931534176253273300179359355997020935245;**

**$_2S_{13}$ = ln(13) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*13 + 1/3) - 1/(72*13^3 + 55.2*13^2 + 40.32*13 + 9.141) =
3.180133755159370023315245956623641215413456838508831847266692201;**

**$_2S_{14}$ = ln(14) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*14 + 1/3) - 1/(72*14^3 + 55.2*14^2 + 40.32*14 + 9.141) =
3.251562326577752319076010812103414666553725186848970076562144205;**

**$_2S_{15}$ = ln(15) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*15**

+ 1/3) - 1/(72*15^3 + 55.2*15^2 + 40.32*15 + 9.141) =
3.3182289932386057982651983918442942546512008215044451392496333387;

${}_2S_{16}$ = ln(16) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 + 1/(2*16
+ 1/3) - 1/(72*16^3 + 55.2*16^2 + 40.32*16 + 9.141) =
3.3807289932351649020748444595732773662255249593549823086973145 3;

${}_2S_{17}$ = ln(17) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 + 1/(2*17
+ 1/3) - 1/(72*17^3 + 55.2*17^2 + 40.32*17 + 9.141) =
3.4395525226448261088128027248779130334325346808796995394954285 03;

${}_2S_{18}$ = ln(18) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 + 1/(2*18
+ 1/3) - 1/(72*18^3 + 55.2*18^2 + 40.32*18 + 9.141) =
3.4951080781990585358448789749521579831631901294803358730447435 71;

${}_2S_{19}$ = ln(19) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 + 1/(2*19

+ 1/3) - 1/(72*19^3 + 55.2*19^2 + 40.32*19 + 9.141) = 3.547739657145573280867814399319595629895560750159290301297757957;

${}_2S_{20}$ = ln(20) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*20 + 1/3) - 1/(72*20^3 + 55.2*20^2 + 40.32*20 + 9.141) = 3.597739657145009812549200000407851551248267521310413720272462178;

${}_2S_{30}$ = ln(30) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*30 + 1/3) - 1/(72*30^3 + 55.2*30^2 + 40.32*30 + 9.141) = 3.994987130920471428573460015908823813491730447872811527463181431;

${}_2S_{40}$ = ln(40) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*40 + 1/3) - 1/(72*40^3 + 55.2*40^2 + 40.32*40 + 9.141) = 4.278543038936386891267153556258841583507451124769990020650034221;

${}_2S_{50}$ = ln(50) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*50

+ 1/3) - 1/(72*50^3 + 55.2*50^2 + 40.32*50 + 9.141) =
4.499205338329427367256117245616337100468080625437554243201896291;

${}_2S_{60}$ = ln(60) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*60
+ 1/3) - 1/(72*60^3 + 55.2*60^2 + 40.32*60 + 9.141) =
4.67987041295173846611686618806342108581353966529645038395418369;

${}_2S_{70}$ = ln(70) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*70
+ 1/3) - 1/(72*70^3 + 55.2*70^2 + 40.32*70 + 9.141) =
4.832836757638072009988586299507783207073821786857017362092421896;

${}_2S_{80}$ = ln(80) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*80
+ 1/3) - 1/(72*80^3 + 55.2*80^2 + 40.32*80 + 9.141) =
4.965479278945516612544499457755112746946331174503121288972684912;

${}_2S_{90}$ = ln(90) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 + 1/(2*90

+ 1/3) - 1/(72*90^3 + 55.2*90^2 + 40.32*90 + 9.141) =
5.082570602848515592557655754083538956977614216320938922263084035;

${}_2S_{100}$ = ln(100) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*100 + 1/3) - 1/(72*100^3 + 55.2*100^2 + 40.32*100 + 9.141) =
5.187377517639620279229616280215738399041074843984643552217772316;

${}_2S_{110}$ = ln(110) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*110 + 1/3) - 1/(72*110^3 + 55.2*110^2 + 40.32*110 + 9.141) =
5.282234598243977593985053042438393677799009037152981434137027539;

${}_2S_{120}$ = ln(120) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*120 + 1/3) - 1/(72*120^3 + 55.2*120^2 + 40.32*120 + 9.141) =
5.368868287353394917984414252764318453699265491244602206124979046;

${}_2S_{130}$ = ln(130) +
0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359

8805767 + 1/(2*130 + 1/3) - 1/(72*130^3 + 55.2*130^2 + 40.32*130 + 9.141) =
5.448591338265976196086960001345038192133245182536382932029671007;

${}_2S_{140} = \ln(140) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*140 + 1/3) - 1/(72*140^3 + 55.2*140^2 + 40.32*140 + 9.141) =
5.522425264403277283639681177661419449216130393131179671338482697;

${}_2S_{150} = \ln(150) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*150 + 1/3) - 1/(72*150^3 + 55.2*150^2 + 40.32*150 + 9.141) =
5.591180588643878798324585487347156886504882771991079285762077743;

${}_2S_{200} = \ln(200) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*200 + 1/3) - 1/(72*200^3 + 55.2*200^2 + 40.32*200 + 9.141) =
5.878030948121444476203291341301379141227621214561976838372802551;

${}_2S_{250} = \ln(250) +$

0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

1/(2*250 + 1/3) - 1/(72*250^3 + 55.2*250^2 + 40.32*250 + 9.141) =
6.1006752494325792776030483925516418976092346561672308088485 4032;

${}_2S_{300}$ = ln(300) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 +
1/(2*300 + 1/3) - 1/(72*300^3 + 55.2*300^2 + 40.32*300 + 9.141) =
6.2826638802995034619280884728536458129274200707898089595933 45465;

${}_2S_{350}$ = ln(350) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*350 + 1/3) - 1/(72*350^3 + 55.2*350^2 + 40.32*350 + 9.141) =
6.43657671054201013137937090430580486294608561853272772026340 8345;

${}_2S_{400}$ = ln(400) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +
1/(2*400 + 1/3) - 1/(72*400^3 + 55.2*400^2 + 40.32*400 + 9.141) =
6.56992969117650703400930870570197643397968499809685349314804 5574;

${}_2S_{450}$ = ln(450) +
0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 +

1/(2*450 + 1/3) - 1/(72*450^3 + 55.2*450^2 + 40.32*450 + 9.141) =
6.6875739472545788888472227786489209051127807905028945656312 08478;

$_2S_{500}$ = ln(500) +
0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880 5767 +
1/(2*500 + 1/3) - 1/(72*500^3 + 55.2*500^2 + 40.32*500 + 9.141) =
6.7928234299905246029895306627822135143493032756162159674824 55008.

Теперь сопоставим избранные первые гармонические числа H_n с полученными их приближениями второго и третьего порядков.

Таблица. Избранные первые гармонические числа H_n и их приближения с подчёркиваниями первых верных цифр на основе приближающих бесконечно малую последовательность Эйлера ε_n второго приближения $_2C_n$ и третьего приближения $_3C_n$ приближающей функции C_n в функциональных непрерывных, или цепных, дробях, а

также второго приближения ${}_2S_n$ приближающей функции S_n в рядах функциональных единичных дробей.

n	$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$	${}_2C_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5))$	${}_3C_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5 + 1/((25/162)n + 1/250)))$	${}_2S_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3) - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n + 9.141)$
1	1	0.9987842923525132	$\underline{1.000}14339100698383925 90$	$\underline{1.000}1265345493733169445$
2	1.5	$\underline{1}.4999225938891511$	$\underline{1.50000}45045801292701817$	$\underline{1.50000}41477052837383986$
3	1.8333333333333333333333	$\underline{1.8333}203083097037$	$\underline{1.833333}7514987995007483$	$\underline{1.833333}7217194488896078$
4	2.0833333333333333333333	$\underline{2.0833}298458412432$	$\underline{2.083333}4029875673385580$	$\underline{2.0833333}981616638805557$
5	2.2833333333333333333333	$\underline{2.28333}21063985039$	$\underline{2.2833333}499374822895127$	$\underline{2.2833333}487845657234701$

6	2.45	2.4499994834159018	2.4500000050356719547636	2.4500000046806491749429
7	2.5928571428571428571428	2.5928568958830500	2.5928571446716997398156	2.5928571445409910817149
8	2.7178571428571428571428	2.7178570130641941	2.7178571436012712211287	2.7178571435463346986128
9	2.8289682539682539682539	2.8289681805807194	2.8289682543056759446350	2.8289682542801071252319
10	2.9289682539682539682539	2.9289682099848025	2.9289682541340502546120	2.9289682541211469914231
11	3.0198773448773448773448	3.0198773172352727	3.0198773449643353569387	3.0198773449573814260973
12	3.1032106782106782106782	3.1032106601400729	3.1032106782588820311818	3.1032106782549247837082
13	3.1801337551337551337551	3.1801337429208235	3.1801337551617274425471	3.1801337551593700233152
14	3.2515623265623265623265	3.2515623180701737	3.2515623265792125837056	3.2515623265777523190760
15	3.3182289932289932289932	3.3182289871770306	3.3182289932395413040727	3.3182289932386057982651
16	3.3807289932289932289932	3.3807289888224080	3.3807289932357820610984	3.3807289932351649020748

17	3.4395525226407579348755	3.4395525193709352	3.4395525226452438800024	3.4395525226448261088128
18	3.4951080781963134904311	3.4951080757289208	3.4951080781993478627044	3.4951080781990585358448
19	3.5477396571436819114837	3.5477396552536556	3.5477396571457777711175	3.5477396571455732808678
20	3.5977396571436819114837	3.5977396556762631	3.5977396571451570029328	3.5977396571450098125492
30	3.9949871309203910705017	3.9949871307230027	3.9949871309204825488131	3.9949871309204714285734
40	4.2785430389363759865166	4.2785430388890401	4.2785430389363887028090	4.2785430389363868912671
50	4.4992053383294250575604	4.4992053383138165	4.4992053383294278151560	4.4992053383294273672561
60	4.6798704129517378171888	4.6798704129454389	4.6798704129517386100055	4.6798704129517384661168
70	4.8328367576380717883273	4.8328367576351488	4.8328367576380720653020	4.8328367576380720099885
80	4.9654792789455165251714	4.9654792789440140	4.9654792789455166367762	4.9654792789455166125444
90	5.0825706028485155541323	5.0825706028476803	5.0825706028485156042818	5.0825706028485155925576

100	5.18737751763962608051	5.1873775176391263	5.18737751763962853627	5.18737751763962792296
110	5.2822345982439775845103	5.2822345982436705	5.2822345982439775974017	5.2822345982439775939850
120	5.3688682873533949128221	5.3688682873531960	5.3688682873533949199891	5.3688682873533949179844
130	5.4485913382659761931343	5.4485913382658427	5.4485913382659761973153	5.4485913382659761960869
140	5.5224252644032772818795	5.5224252644031851	5.5224252644032772844206	5.5224252644032772836396
150	5.5911805886438787972372	5.5911805886438134	5.5911805886438787988371	5.5911805886438787983245
200	5.8780309481214444760573	5.8780309481214289	5.8780309481214444762921	5.8780309481214444762032
250	6.1006752494325792775723	6.1006752494325741	6.1006752494325792776259	6.1006752494325792776030
300	6.2826638802995034619194	6.2826638802995014	6.2826638802995034619356	6.2826638802995034619280
350	6.4365767105420101313764	6.4365767105420091	6.4365767105420101313823	6.4365767105420101313793
400	6.5699296911765070340081	6.5699296911765065	6.5699296911765070340106	6.5699296911765070340093
450	6.6875739472545788888467	6.6875739472545786	6.6875739472545788888478	6.6875739472545788888472
500	6.7928234299905246029892	6.7928234299905244	6.7928234299905246029898	6.7928234299905246029895

Анализ итогов сопоставления избранных первых гармонических чисел H_n с их приближениями с подчёркиваниями первых верных цифр на основе приближающих бесконечно малую последовательность Эйлера ε_n почти, или не совсем полного, второго приближения ${}_{2-\delta}S_n$ приближающей функции S_n в рядах функциональных единичных дробей, второго приближения ${}_2C_n$ и третьего приближения ${}_3C_n$ приближающей функции C_n в функциональных непрерывных, или цепных, дробях, а также второго приближения ${}_2S_n$ приближающей функции S_n в рядах функциональных единичных дробей позволяет сделать следующие основные выводы:

1. Абсолютные и относительные погрешности этих четырёх приближений убывают вместе с ростом порядкового номера гармонического числа.

2. Количество первых верных цифр в отдельных случаях может отклоняться от правильного выражения действительных точности и погрешности, что должно замечаться и анализироваться дополнительно. Пример: число 999 не выражает верно ни одной цифры числа 1000, а несравненно более далёкое от числа 1000 число 1999 верно выражает одну первую цифру числа 1000. Тем не менее, вероятность правильного выражения действительных точности и погрешности количеством первых верных цифр куда больше вероятности неправильного выражения,

так что при достаточно большом количестве сравниваемых чисел общая картина даётся в основном правильно и к тому же весьма наглядно. Это позволяет легко заметить отклонения от общих закономерностей и проанализировать эти отклонения. Зато указание первых верных цифр позволяет избежать явного указания действительных погрешностей и тем самым серьёзного дополнительного загромождения, весьма вредного для восприятия и к тому же ограничивающего количество сопоставляемых объектов. А это мешает анализу и выявлению ключевых закономерностей.

3. Все четыре указанных приближения осуществляют именно высокоточные приближения всех без исключения гармонических чисел.

4. Общие функциональные метод и алгоритм построения рядов функциональных единичных дробей последовательным их выделением дают значительно лучшие итоги, чем итоги общих функциональных метода и алгоритма последовательного построения функциональных непрерывных, или цепных, дробей. Во-первых, итоги почти, или не совсем полного, второго приближения ${}_{2-\delta}S_n$ приближающей функции S_n в рядах функциональных единичных дробей намного лучше итогов второго приближения ${}_{2}C_n$ в функциональных непрерывных, или

цепных, дробях. Во-вторых, итоги второго приближения ${}_2S_n$ приближающей функции S_n в рядах функциональных единичных дробей, причём с упрощающими округлениями, лучше итогов даже третьего приближения ${}_3C_n$ в функциональных непрерывных, или цепных, дробях.

5. Для углублённого сравнительного анализа приближений избранных первых гармонических чисел с целесообразными для табличного представления именно краткими и наглядными итогами полезна всеобщая математическая теория и методология деления приближения к отклонению на ненулевое отклонение, дающая здесь кратно бесконечный математический микроскоп. Вместо последовательности гармонических

чисел, стремящейся к плюс бесконечности, хотя и очень медленно, а именно асимптотически со скоростью натурального логарифма, рассматривается бесконечно малая последовательность Эйлера разностей гармонических чисел и их приближений по приближённой формуле Эйлера. Для каждого номера гармонического числа составляется дробь, знаменателем которой является элемент бесконечно малой последовательности Эйлера, имеющий этот номер, и числителем которой является приближение этого элемента рассматриваемой приближающей функцией, а именно её приближением рассматриваемого порядка. Качество приближения выражается близостью этой дроби к единице. Разность этой

дроби и единицы выражает относительное отклонение рассматриваемого приближения от соответствующего элемента бесконечно малой последовательности Эйлера. Эта разность отрицательна для приближений с недостатком и положительна для приближений с избытком. Тогда каждому приближению соответствует последовательность дробей, по возможности близких к единице, с обеспечением краткости, наглядности и чрезвычайно удобной сопоставимости табличных итогов с весьма ограниченным числом представляемых значащих цифр.

Последовательно рассмотрим не только эти четыре приближения, но и вначале также приближение первого порядка:

$$ {}_1c_n = {}_1s_n = {}_1g_n = 1/(2n + 1/3), $$

$$ {}_1c_n/\varepsilon_n = {}_1s_n/\varepsilon_n = {}_1g_n/\varepsilon_n = 1/((2n + 1/3)\varepsilon_n) = 1/((2n + 1/3)(H_n - \ln(n) - \gamma)); $$

$$ {}_1g_1/\varepsilon_1 = 1/((2*1 + 1/3)*0.4227843350984671393934879099175975689578406640600764011942 33) = 1.0136880508394749508045225693385094355092783164707618822998 99878; $$

$$ {}_1g_2/\varepsilon_2 = 1/((2*2 + 1/3)*0.2296371545385218299762557884594210008823405296998211470735 52991) = 1.0049298478418440448587822685168614368803050615255610151224 006971; $$

$$ {}_1g_3/\varepsilon_3 = 1/((2*3 + 1/3)*0.1575053797636907813315760063284051976436834395706602827928 72) = 1.0024720239968859723112470775169143724017467278191870216617 3651; $$

$$ {}_1g_4/\varepsilon_4 = 1/((2*4 + 1/3)*0.1198233073119098538923570003345777661401737286728992262862 06314) = 1.0014746103412936233811502707561823863190897620373660814150 065027; $$

$${}_1g_5/\varepsilon_5 = 1/((2*5 + 1/3)*0.096679755997700098126061910024743262765572643124892012614918442) = 1.000976807913015887322691020821325584655367698446771561383465144\,5;$$

$${}_1g_6/\varepsilon_6 = 1/((2*6 + 1/3)*0.081024865870412138581010551536895296234849971877071695338858657) = 1.0006938019590041754859080672298677789658539183885783985140857059;$$

$${}_1g_7/\varepsilon_7 = 1/((2*7 + 1/3)*0.069731328900296691430992309331560696463613077335358069877699993) = 1.0005178871640329687649717029839105567970844147197834603709809432;$$

$${}_1g_8/\varepsilon_8 = 1/((2*8 + 1/3)*0.061199936275774068284648688400210721874197403836453495975050114) = 1.0004012017272968721691244984762559087129618131142188926987587403;$$

$${}_1g_9/\varepsilon_9 = 1/((2*9 + 1/3)*0.054528011730501724856965690040800127916827802382831465978812587) = 1.0003198872359225136596059071369973877934765643160299760278177349;$$

$$\mathbf{{}_1g_{10}/\varepsilon_{10} = 1/((2*10 + 1/3)*0.049167496072675423629464709201487329610707429399557393414873353) = 1.0002609812823916935219063451196470948005555742044737005095154763;}$$

$$\mathbf{{}_1g_{11}/\varepsilon_{11} = 1/((2*11 + 1/3)*0.044766407177441472676421676829813146481011155000004103320542636) = 1.0002169534290546349741747380231461663354769051618739363114453335;}$$

$$\mathbf{{}_1g_{12}/\varepsilon_{12} = 1/((2*12 + 1/3)*0.041088363521145039841989108289396938837560515727494651896389326) = 1.0001831878704536566120629530072689610643431134031039891344694876;}$$

$$\mathbf{{}_1g_{13}/\varepsilon_{13} = 1/((2*13 + 1/3)*0.037968732770685537095134223486034097907706474433624418530321244) = 1.0001567282651807325562361524148400185024505560515800961995444959;}$$

$$\mathbf{{}_1g_{14}/\varepsilon_{14} = 1/((2*14 + 1/3)*0.035289332045535087197465371578567833571818126680286520940725167) = 1.0001356104308679262943241955917900278184576885968095277411339121;}$$

$${}_1g_{15}/\varepsilon_{15} = 1/((2*15 + 1/3)*0.032963127225250302390712332997877453777977745197802456540119768) = 1.000118488205198952702633554750966885183257944660945801170386563 7;$$

$${}_1g_{16}/\varepsilon_{16} = 1/((2*16 + 1/3)*0.030924606087679130717788417313884525649069119848048613704741955) = 1.0001044140662004262958027430705478353076939646761643211601048394;$$

$${}_1g_{17}/\varepsilon_{17} = 1/((2*17 + 1/3)*0.029123513683008994019535226449934850598160762350383666641963602) = 1.0000927054768666477395033786116646185152599924013448253134730816;$$

$${}_1g_{18}/\varepsilon_{18} = 1/((2*18 + 1/3)*0.027520655398615937616902804575388964371438080485929851682360637) = 1.0000828607156169263674079228132613610327820644040897010383819809;$$

$${}_1g_{19}/\varepsilon_{19} = 1/((2*19 + 1/3)*0.026085013075708590868229546938131825557171648139923611787100656) = 1.0000745043149834332017416785958396206224177014845906327821432338;$$

$${}_1g_{20}/\varepsilon_{20} = 1/((2*20 + 1/3)*0.024791718688158057442033402683444587117949286450024200171052982) = 1.0000673507801137739489766881515148429886479804202522608714035885;$$

$${}_1g_{30}/\varepsilon_{30} = 1/((2*30 + 1/3)*0.016574084356702834482024882435084969384053413226008277017322114) = 1.0000302447269781642372102692511334657871647575898286437616261922;$$

$${}_1g_{40}/\varepsilon_{40} = 1/((2*40 + 1/3)*0.012447919920906823057682941952498620878342968978008227607127422) = 1.0000170999795561817470730091253087947433609318183468727102364964;$$

$${}_1g_{50}/\varepsilon_{50} = 1/((2*50 + 1/3)*0.00996666799974613833520891497181481380173964513023953290715964) = 1.000010977479307849494430022963958908723632059654412375854470509;$$

$${}_1g_{60}/\varepsilon_{60} = 1/((2*60 + 1/3)*0.00831018582810427175186590877706253030441007673840008824863578) = 1.0000076387431359168350313725693903008639441474980040133996670142;$$

$${}_1g_{70}/\varepsilon_{70} = 1/((2*70 + 1/3)*0.0071258506871799385974936984650224846654223876159116526852992 46) = 1.00000562026400247341420296558168043429498371449969034266598 75567;$$

$${}_1g_{80}/\varepsilon_{80} = 1/((2*80 + 1/3)*0.00623697937010205229525962101927026420886696891050773847091 5928) = 1.00000430767886029922347976001912822907406411560156209621116 44748;$$

$${}_1g_{90}/\varepsilon_{90} = 1/((2*90 + 1/3)*0.00554526761671762671739593176947626505952635184051124046186 6579) = 1.00000340646352526951681179372381341941787314294449679130534 80057;$$

$${}_1g_{100}/\varepsilon_{100} = 1/((2*100 + 1/3)*0.00499166674999603216262226762071223116646098135109821023041 11155) = 1.00000276109175183003380370771938905572241194631801978509136 87801;$$

$${}_1g_{110}/\varepsilon_{110} = 1/((2*110 + 1/3)*0.00453856755002849582392739034698507631700339619457559771197 0341) = 1.00000228314893417728213224567363510609929967832718029805026 9596;$$

$${}_1g_{120}/\varepsilon_{120} = 1/((2*120 + 1/3)*0.0041608796698160579679419148330555344524046220196767450665970 81) = 1.0000019193578913293488591179557676574316700867378456662501767705;$$

$${}_1g_{130}/\varepsilon_{130} = 1/((2*130 + 1/3)*0.0038412229088609124563564767197068535008798949965021099221031 6) = 1.0000016360625524868249376905085433151112095560609453918046214986;$$

$${}_1g_{140}/\varepsilon_{140} = 1/((2*140 + 1/3)*0.0035671768924401227324760865115159258933634370483862299948897 16) = 1.0000014111546102818532143597008220847931696015831885583337505083;$$

$${}_1g_{150}/\varepsilon_{150} = 1/((2*150 + 1/3)*0.0033296296460901866167310370246553936371875363674815197123181 06) = 1.0000012296257592637571235205367408102874579897848133409091139 02;$$

$${}_1g_{200}/\varepsilon_{200} = 1/((2*200 + 1/3)*0.0024979166718749379976592762215542225175377989725182794718691 34) = 1.0000006923598791834741484475402947218353199826654538847140977248;$$

$${}_1g_{250}/\varepsilon_{250} = 1/((2*250 + 1/3)*0.0019986666687999837463048047550089786834976944065328024879741 15) = 1.000000443377271382249780481782693424781199136479042035400412 3785;$$

$${}_1g_{300}/\varepsilon_{300} = 1/((2*300 + 1/3)*0.00166574074176954188174530467363273234316251168362520011517716 1) = 1.000000308024446569356028058147450493111812424995383169115254 0458;$$

$${}_1g_{350}/\varepsilon_{350} = 1/((2*350 + 1/3)*0.00142789115701790704582208833211753162074690055179788205233776 7) = 1.000000226368510341600138681603458148730249208194996912049365 2023;$$

$${}_1g_{400}/\varepsilon_{400} = 1/((2*400 + 1/3)*0.00124947916699218653119435378827527633707303216077631589217025) = 1.0000001733506167632985751400274873738680565836830244219454709611;$$

$${}_1g_{450}/\varepsilon_{450} = 1/((2*450 + 1/3)*0.00111069958868058683096159854499447248948989491844725023585836 4) = 1.000000136991263756461348841583208561028752572272502548175700 864;$$

$${}_1g_{500}/\varepsilon_{500} = 1/((2*500 + 1/3)*0.00099966666679999974603281269065520904985014693079184385801820570) = 1.0000001109777459034438953727044912028498023891356955586191780 57.$$

Проведём далее вычисления, оценивающие качество приближения бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n почти, или не совсем полным, вторым приближением ${}_{2\text{-}\delta}s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей:

$${}_{2\text{-}\delta}s_n = 1/(2n) - 1/(12n^2 + 6/5),$$

$${}_{2\text{-}\delta}s_n/\varepsilon_n = (0.5/n - 1/(12n^2 + 6/5))/\varepsilon_n = (1/(2n) - 1/(12n^2 + 6/5))/(H_n - \ln(n) - \gamma);$$

$${}_{2\text{-}\delta}s_1/\varepsilon_1 = (0.5/1 - 1/(12*1\hat{}2 + 6/5))/0.42278433509846713939348790991759756895784066406007640119423 3 = 1.003448777598672173523668806011857825049588636506410752175658464;$$

$${}_{2-\delta}s_2/\varepsilon_2 = (0.5/2 - 1/(12*2{}^\wedge 2 + 6/5))/0.2296371545385218299762557884594210008823405296998211470735529911 = 1.0001639203791794728303192089778248311498429101497622840208716966;$$

$${}_{2-\delta}s_3/\varepsilon_3 = (0.5/3 - 1/(12*3{}^\wedge 2 + 6/5))/0.1575053797636907813315760063284051976436834395706602827928720 = 1.0000239848662464461273368282433687939587632193263440741118910;$$

$${}_{2-\delta}s_4/\varepsilon_4 = (0.5/4 - 1/(12*4{}^\wedge 2 + 6/5))/0.1198233073119098538923570003345777661401737286728992262862063 14 = 1.0000059191425529408761917170464812906869792956851718764991977459;$$

$${}_{2-\delta}s_5/\varepsilon_5 = (0.5/5 - 1/(12*5{}^\wedge 2 + 6/5))/0.0966797559977000981260619100247432627655726431248920126149184 42 = 1.0000019743683462835368964567461565203409622938710376537096963869;$$

$${}_{2-\delta}s_6/\varepsilon_6 = (0.5/6 - 1/(12*6{}^\wedge 2 + 6/5))/0.0810248658704121385810105515368952962348499718770716953388586 57 = 1.0000008007111101282729676876819246572352681469769519591799346766;$$

$${}_{2-\delta}s_7/\varepsilon_7 = (0.5/7 - 1/(12*7\textasciicircum 2 + 6/5))/0.06973132890029669143099230933156069646361307733535806987769993 = 1.00000037233538316022715643943857895078057281381991870314193960 56;$$

$${}_{2-\delta}s_8/\varepsilon_8 = (0.5/8 - 1/(12*8\textasciicircum 2 + 6/5))/0.06119993627577406828464868840021072187419740383645349597505011 4 = 1.0000001915385302966765103365066378914155274702137462577205361914;$$

$${}_{2-\delta}s_9/\varepsilon_9 = (0.5/9 - 1/(12*9\textasciicircum 2 + 6/5))/0.05452801173050172485696569004080012791682780238283146597881258 7 = 1.0000001064800814643105801391619341836232909527733432057016454417;$$

$${}_{2-\delta}s_{10}/\varepsilon_{10} = (0.5/10 - 1/(12*10\textasciicircum 2 + 6/5))/0.04916749607267542362946470920148732961070742939955739341487335 3 = 1.0000000629445058437628013967445742597830418317692000282710653313;$$

$${}_{2-\delta}s_{11}/\varepsilon_{11} = (0.5/11 - 1/(12*11\textasciicircum 2 + 6/5))/0.04476640717744147267642167682981314648101115500000410332054263 6 = 1.0000000391100666092127676986518226771052329094697403066845062703;$$

$_{2-\delta}s_{12}/\varepsilon_{12}$ = (0.5/12 - 1/(12*12^2 + 6/5))/0.041088363521145039841989108289396938837560515727494651896389326 = 1.0000000253235192493767746771561322301072509848739704883268363361;

$_{2-\delta}s_{13}/\varepsilon_{13}$ = (0.5/13 - 1/(12*13^2 + 6/5))/0.037968732770685537095134223486034097907706474433624418530321244 = 1.0000000169752636723900004080228357928100034834791498901161457802;

$_{2-\delta}s_{14}/\varepsilon_{14}$ = (0.5/14 - 1/(12*14^2 + 6/5))/0.035289332045535087197465371578567833571818126680286520940725167 = 1.0000000117205021666983500818801579443902913079335263262680462906;

$_{2-\delta}s_{15}/\varepsilon_{15}$ = (0.5/15 - 1/(12*15^2 + 6/5))/0.032963127225250302390712332997877453777977745197802456540119768 = 1.0000000083013689276527058031081709761786456825025378703780074274;

$_{2-\delta}s_{16}/\varepsilon_{16}$ = (0.5/16 - 1/(12*16^2 + 6/5))/0.030924606087679130717788417313884525649069119848048613704741955 = 1.0000000060117795492609737146810075730087348281148166696178343924;

${}_{2-\delta}s_{17}/\varepsilon_{17} = (0.5/17 - 1/(12*17^2 + 6/5))/0.02912351368300899401953522644993485059816076235038366641963602 = 1.0000000044395600832322149951486227277491023979292317876965328543;$

${}_{2-\delta}s_{18}/\varepsilon_{18} = (0.5/18 - 1/(12*18^2 + 6/5))/0.027520655398615937616902804575388964371438080485929851682360637 = 1.0000000033357480219058658323811771146882897647027294709958422058;$

${}_{2-\delta}s_{19}/\varepsilon_{19} = (0.5/19 - 1/(12*19^2 + 6/5))/0.026085013075708590868229546938131825557171648139923611787100656 = 1.000000002545376774473898586877688926718396960418439137968362764;$

${}_{2-\delta}s_{20}/\varepsilon_{20} = (0.5/20 - 1/(12*20^2 + 6/5))/0.024791718688158057442033402683444587117949286450024200171052982 = 1.0000000019693819631266315447576753188837228930434153836536909839;$

${}_{2-\delta}s_{30}/\varepsilon_{30} = (0.5/30 - 1/(12*30^2 + 6/5))/0.016574084356702834482024882435084969384053413226008277017322114 = 1.0000000002590847067633199463838018695819137539525032221396185671;$

$${}_{2-\delta}s_{40}/\varepsilon_{40} = (0.5/40 - 1/(12*40\hat{}2 + 6/5))/0.012447919920906823057682941952498620878342968978008227607127422 = 1.0000000000614350944740723482826880483114917047124395844214903151;$$

$${}_{2-\delta}s_{50}/\varepsilon_{50} = (0.5/50 - 1/(12*50\hat{}2 + 6/5))/0.00996666799974613833520891497181481380173964513023953290715964 = 1.0000000000201201108244864615615111880478075004731332203956598118;$$

$${}_{2-\delta}s_{60}/\varepsilon_{60} = (0.5/60 - 1/(12*60\hat{}2 + 6/5))/0.00831018582810427175186590877706253030441007673840008824863578 = 1.0000000000080826026943927893737163867412048462385789432320693094;$$

$${}_{2-\delta}s_{70}/\varepsilon_{70} = (0.5/70 - 1/(12*70\hat{}2 + 6/5))/0.007125850687179938597493698465022484665422387615911652685299246 = 1.0000000000037384035060366157464315773213699534694014986652511718;$$

$${}_{2-\delta}s_{80}/\varepsilon_{80} = (0.5/80 - 1/(12*80\hat{}2 + 6/5))/0.006236979370102052295259621019270264208866968910507738470915928 = 1.0000000000019170081080328689824351436154716456547612018224462063;$$

${}_{2-\delta}s_{90}/\varepsilon_{90}$ = (0.5/90 - 1/(12*90^2 + 6/5))/0.0055452676167176267173959317694762650595263518405112404618665 79 = 1.0000000000010636020279065811919776247934928023474602954133927554;

${}_{2-\delta}s_{100}/\varepsilon_{100}$ = (0.5/100 - 1/(12*100^2 + 6/5))/0.0049916667499960321626226762071223116646098135109821023041111 55 = 1.0000000000006279490467273184808217939708033844106537473304508887;

${}_{2-\delta}s_{110}/\varepsilon_{110}$ = (0.5/110 - 1/(12*110^2 + 6/5))/0.0045385675500284958239273903469850763170033961945755977119703 41 = 1.0000000000003898565991035248727702686085875792080226511870829964;

${}_{2-\delta}s_{120}/\varepsilon_{120}$ = (0.5/120 - 1/(12*120^2 + 6/5))/0.0041608796698160579679419148330555344524046220196767450665970 81 = 1.0000000000002522984820350794752818622157048725461689414812169994;

${}_{2-\delta}s_{130}/\varepsilon_{130}$ = (0.5/130 - 1/(12*130^2 + 6/5))/0.0038412229088609124563564767197068535008798949965021099221031 6 = 1.0000000000001690687946418708492408413850770576981865727684814223;

$_{2-\delta}s_{140}/\varepsilon_{140}$ **= (0.5/140 - 1/(12*140^2 + 6/5))/0.003567176892440122732476086511515925893363437048386229994889716 = 1.0000000000001167091297709101281872685612773994636895254035954768;**

$_{2-\delta}s_{150}/\varepsilon_{150}$ **= (0.5/150 - 1/(12*150^2 + 6/5))/0.003329629646090186616731037024655393637187536367481519712318106 = 1.0000000000000826528677068536293018129868940832686474551351647914;**

$_{2-\delta}s_{200}/\varepsilon_{200}$ **= (0.5/200 - 1/(12*200^2 + 6/5))/0.002497916671874937997659276221554222517537798972518279471869134 = 1.0000000000001960895673340515706582041185293729555153345780708 64;**

$_{2-\delta}s_{250}/\varepsilon_{250}$ **= (0.5/250 - 1/(12*250^2 + 6/5))/0.001998666668799983746304804755008978683497694406532802487974115 = 1.00000000000000642446663252042787220297739377291239771914583638 44;**

$_{2-\delta}s_{300}/\varepsilon_{300}$ **= (0.5/300 - 1/(12*300^2 + 6/5))/0.001665740741769541881745304673632732343162511683625200115177161 = 1.0000000000000025815784600896069210840841211824335538719526204272;**

$${}_{2-\delta}s_{350}/\varepsilon_{350} = (0.5/350 - 1/(12*350\hat{}2 + 6/5))/0.001427891157017907045822088332117531620746900551797882052337767 = 1.0000000000000011943141083773013707294765213775166641043832923732;$$

$${}_{2-\delta}s_{400}/\varepsilon_{400} = (0.5/400 - 1/(12*400\hat{}2 + 6/5))/0.00124947916699218653119435378827527633707303216077631589217025 = 1.0000000000000006125394266294905708140509511208922548454299484235;$$

$${}_{2-\delta}s_{450}/\varepsilon_{450} = (0.5/450 - 1/(12*450\hat{}2 + 6/5))/0.001110699588680586830961598544994472489489894918447250235858364 = 1.00000000000000003399007034139092025937663656308749835982345497343;$$

$${}_{2-\delta}s_{500}/\varepsilon_{500} = (0.5/500 - 1/(12*500\hat{}2 + 6/5))/0.00099966666667999997460328126906552090498501469307918438580182057 = 1.00000000000000002007007755410899018201026873317169822740230781692.$$

Проведём далее вычисления, оценивающие качество приближения бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n вторым приближением ${}_2c_n$ приближающей

функции c_n в функциональных непрерывных, или цепных, дробях:

$${}_2c_n = 1/(2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5)),$$

$${}_2c_n/\varepsilon_n = 1/((2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5))\varepsilon_n) = 1/((2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5))(H_n - \ln(n) - \gamma));$$

$${}_2c_1/\varepsilon_1 = 1/((2*1 + 1/3 + 1/(18*1 + 39/5))*0.4227843350984671393934879099175975689578406640600764011194233) = 0.997124520596999869909023834545396536236250892999017407098921121;$$

$${}_2c_2/\varepsilon_2 = 1/((2*2 + 1/3 + 1/(18*2 + 39/5))*0.2296371545385218299762557884594210008823405296998211470735529 91) = 0.9996629199181446525901303698349072364773684521884249511018430414;$$

$${}_2c_3/\varepsilon_3 = 1/((2*3 + 1/3 + 1/(18*3 + 39/5))*0.1575053797636907813315760063284051976436834395706602827928 72) = 0.9999173042619295860413407393988794224211102682681697254801316 77;$$

$${}_2c_4/\varepsilon_4 = 1/((2*4 + 1/3 + 1/(18*4 + 39/5))*0.119823307311909853892357000334577766140173728672899226286206314) = 0.9999708947101505398625599550343262566099019395718445107221911776;$$

$${}_2c_5/\varepsilon_5 = 1/((2*5 + 1/3 + 1/(18*5 + 39/5))*0.096679755997700098126061910024743262765572643124892012614918442) = 0.9999873092891398336578801360636927993799076671118103399902430556;$$

$${}_2c_6/\varepsilon_6 = 1/((2*6 + 1/3 + 1/(18*6 + 39/5))*0.081024865870412138581010551536895296234849971877071695338858657) = 0.9999936243757694958221199983331214399097625008694148256072048734;$$

$${}_2c_7/\varepsilon_7 = 1/((2*7 + 1/3 + 1/(18*7 + 39/5))*0.069731328900296691430992309331560696463613077335358069877699993) = 0.9999964582047021198131450552337625942388203515476343132684319642;$$

$${}_2c_8/\varepsilon_8 = 1/((2*8 + 1/3 + 1/(18*8 + 39/5))*0.061199936275774068284648688400210721874197403836453495975050114) = 0.9999978791979760783970840515731450169581186580532955662624183279;$$

$${}_2c_9/\varepsilon_9 = 1/((2*9 + 1/3 + 1/(18*9 + 39/5))*0.054528011730501724856965690040800127916827802382831465978812587) = 0.99999865413147937861989505103322828137478887113545321624103937 34;$$

$${}_2c_{10}/\varepsilon_{10} = 1/((2*10 + 1/3 + 1/(18*10 + 39/5))*0.049167496072675423629464709201487329610707429399557393414873353) = 0.99999910543641766700250067270758309671311171736757861366782799 18;$$

$${}_2c_{11}/\varepsilon_{11} = 1/((2*11 + 1/3 + 1/(18*11 + 39/5))*0.044766407177441472676421676829813146481011155000004103320542636) = 0.99999938252645543227797396913381719518644369431501892153368681 85;$$

$${}_2c_{12}/\varepsilon_{12} = 1/((2*12 + 1/3 + 1/(18*12 + 39/5))*0.041088363521145039841989108289396938837560515727494651896389326) = 0.99999956020138733259491305527777508044433423789575965778594659 91;$$

$${}_2c_{13}/\varepsilon_{13} = 1/((2*13 + 1/3 + 1/(18*13 + 39/5))*0.037968732770685537095134223486034097907706474433624418530321244) = 0.99999967834239554620918567880256458982044213155625135113073607 56;$$

$${}_2c_{14}/\varepsilon_{14} = 1/((2*14 + 1/3 + 1/(18*14 + 39/5))*0.035289332045535087197465371578567833571818126680286520940725167) = 0.99999975935637310587510464598630350377229924555299034687618673 29;$$

$${}_2c_{15}/\varepsilon_{15} = 1/((2*15 + 1/3 + 1/(18*15 + 39/5))*0.032963127225250302390712332997877453777977745197802456540119768) = 0.999999816402051532446249455653388575001808509715687252378183518 2;$$

$${}_2c_{16}/\varepsilon_{16} = 1/((2*16 + 1/3 + 1/(18*16 + 39/5))*0.030924606087679130717788417313884525649069119848048613704741955) = 0.999999857505536122316137309755711705604675973001690586756102821 1;$$

$${}_2c_{17}/\varepsilon_{17} = 1/((2*17 + 1/3 + 1/(18*17 + 39/5))*0.029123513683008994019535226449934850598160762350383666419636 02) = 0.999999887725680837641149858975234089445716682085385239536909853 1;$$

$${}_2c_{18}/\varepsilon_{18} = 1/((2*18 + 1/3 + 1/(18*18 + 39/5))*0.027520655398615937616902804575388964371438080485929851682360637) = 0.999999910343970695574935260333349176519906514317463171585059398 5;$$

$${}_2c_{19}/\varepsilon_{19} = 1/((2*19 + 1/3 + 1/(18*19 + 39/5))*0.026085013075708590868229546938131825557171648139923611787100656) = 0.999999927543595291260414181080657231388963382491191334450093857;$$

$${}_2c_{20}/\varepsilon_{20} = 1/((2*20 + 1/3 + 1/(18*20 + 39/5))*0.024791718688158057442033402683444587117949286450024200171052982) = 0.9999999408101240119053822951584339082881310719042218844618973061;$$

$${}_2c_{30}/\varepsilon_{30} = 1/((2*30 + 1/3 + 1/(18*30 + 39/5))*0.016574084356702834482024882435084969384053413226008277017322114) = 0.9999999880905452236786824760347914087168326960630768426795677857;$$

$${}_2c_{40}/\varepsilon_{40} = 1/((2*40 + 1/3 + 1/(18*40 + 39/5))*0.012447919920906823057682941952498620878342968978008227607127422) = 0.9999999961972907979074464967832744832820602565566323787533661916;$$

$${}_2c_{50}/\varepsilon_{50} = 1/((2*50 + 1/3 + 1/(18*50 + 39/5))*0.00996666799974613833520891497181481380173964513023953290715964) = 0.9999999984339310823503084441212436527538558966012311554055860721;$$

$${}_2c_{60}/\varepsilon_{60} = 1/((2*60 + 1/3 + 1/(18*60 + 39/5))*0.008310185828104271751865908777062530304410076738400088248635788) = 0.9999999992420316878235077695074056241323050596463413803281114124;$$

$${}_2c_{70}/\varepsilon_{70} = 1/((2*70 + 1/3 + 1/(18*70 + 39/5))*0.007125850687179938597493698465022484665422387615911652685299246) = 0.999999999589816151346473018331604658587657909546586175913085248;$$

$${}_2c_{80}/\varepsilon_{80} = 1/((2*80 + 1/3 + 1/(18*80 + 39/5))*0.006236979370102052295259621019270264208866968910507738470915928) = 0.9999999997590954810759323193442695750681938503549709317075113265;$$

$${}_2c_{90}/\varepsilon_{90} = 1/((2*90 + 1/3 + 1/(18*90 + 39/5))*0.005545267616717626717395931769476265059526351840511240461866579) = 0.9999999998493800217775370838921073389954155317320632899011760576;$$

$${}_2c_{100}/\varepsilon_{100} = 1/((2*100 + 1/3 + 1/(18*100 + 39/5))*0.004991666749996032162622676207122311664609813510982102304111155) = 0.9999999999010604083894693963647755070691079632232352235844004062;$$

$${}_2c_{110}/\varepsilon_{110} = 1/((2*110 + 1/3 + 1/(18*110 + 39/5))*0.004538567550028495823927390346985076317003396194575597711970341) = 0.9999999999323570834307809906557172084732319361317028667263037075;$$

$${}_2c_{120}/\varepsilon_{120} = 1/((2*120 + 1/3 + 1/(18*120 + 39/5))*0.004160879669816057967941914833055534452404622019676745066597081) = 0.9999999999522008438796356756481590024494448401712974308223415831;$$

$${}_2c_{130}/\varepsilon_{130} = 1/((2*130 + 1/3 + 1/(18*130 + 39/5))*0.00384122290886091245635647671970685350087989499650210992210316) = 0.999999999965272817145097149298771595230050377783641654530342338;$$

$${}_2c_{140}/\varepsilon_{140} = 1/((2*140 + 1/3 + 1/(18*140 + 39/5))*0.003567176892440122732476086511515925893363437048386229994889716) = 0.9999999999741663440073248498731499748978101868925928446068813689;$$

$${}_2c_{150}/\varepsilon_{150} = 1/((2*150 + 1/3 + 1/(18*150 + 39/5))*0.003329629646090186616731037024655393637187536367481519712318106) = 0.9999999999803865540803873530175368021147403840661949775880365407;$$

$${}_2c_{200}/\varepsilon_{200} = 1/((2*200 + 1/3 + 1/(18*200 + 39/5))*0.0024979166718749379976592762215542225175377989725182794718691 34) = 0.99999999999378313693777427616453963461336928178375212102770174 39;$$

$${}_2c_{250}/\varepsilon_{250} = 1/((2*250 + 1/3 + 1/(18*250 + 39/5))*0.001998666668799983746304804755008978683497694406532802487974115) = 0.999999999997450858210809252961172619062247202022993247040743 4481;$$

$${}_2c_{300}/\varepsilon_{300} = 1/((2*300 + 1/3 + 1/(18*300 + 39/5))*0.001665740741769541881745304673632732343162511683625200115177161) = 0.9999999999998769795739623725771319547170642997306783419101679 6309;$$

$${}_2c_{350}/\varepsilon_{350} = 1/((2*350 + 1/3 + 1/(18*350 + 39/5))*0.001427891157017907045822088332117531620746900551797882052337767) = 0.9999999999999335629885667473958890993328536660072496039623462 3699;$$

$${}_2c_{400}/\varepsilon_{400} = 1/((2*400 + 1/3 + 1/(18*400 + 39/5))*0.001249479166992186531194353788275276337073032160776315892170 25) = 0.9999999999999610410502440655557838386108200199409850797035722 3426;$$

${}_2c_{450}/\varepsilon_{450}$ = 1/((2*450 + 1/3 + 1/(18*450 + 39/5))*0.001110699588680586830961598544994472489489894918447250235858364) = 0.9999999999999756709363872923269145055499781444002307184545419277;

${}_2c_{500}/\varepsilon_{500}$ = 1/((2*500 + 1/3 + 1/(18*500 + 39/5))*0.0009996666667999997460328126906552090498501469307918438580182057) = 0.9999999999999840339311313075172740238430690774073706066838937877 4.

Проведём далее вычисления, оценивающие качество приближения бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n третьим приближением ${}_3c_n$ приближающей функции c_n в функциональных непрерывных, или цепных, дробях:

$${}_3c_n = 1/(2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5 + 1/((25/162)n + 1/250))),$$

$${}_3c_n/\varepsilon_n = 1/((2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5 + 1/((25/162)n + 1/250)))\varepsilon_n) = 1/((2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5 + 1/((25/162)n + 1/250)))(H_n - \ln(n) - \gamma));$$

${}_3c_1/\varepsilon_1$ = 1/((2*1 + 1/3 + 1/(18*1 + 39/5 + 1/((25/162)*1 + 1/250)))*0.422784335098467139393487909917597568957840664060076401194233) = 1.000339158750880500969893322976934336271125794045443335160388378;

${}_3c_2/\varepsilon_2$ = 1/((2*2 + 1/3 + 1/(18*2 + 39/5 + 1/((25/162)*2 + 1/250)))*0.229637154538521829976255788459421000882340529699821147073552991) = 1.000019616077103561804308015938665963839772054821782247931957381;

${}_3c_3/\varepsilon_3$ = 1/((2*3 + 1/3 + 1/(18*3 + 39/5 + 1/((25/162)*3 + 1/250)))*0.157505379763690781331576006328405197643683439570660282792872) = 1.000002654928147818182514254604275688576358952184207825519115586;

${}_3c_4/\varepsilon_4$ = 1/((2*4 + 1/3 + 1/(18*4 + 39/5 + 1/((25/162)*4 + 1/250)))*0.119823307311909853892357000334577766140173728672899226286206314) = 1.0000005813078904916979740965501292545041210888070368672419378539;

${}_3c_5/\varepsilon_5$ = 1/((2*5 + 1/3 + 1/(18*5 + 39/5 + 1/((25/162)*5 + 1/250)))*0.096679755997700098126061910024743262765572643124892012614918442) = 1.0000001717438028761102563311969570149088722865259959745539243333;

$${}_3c_6/\varepsilon_6 = 1/((2*6 + 1/3 + 1/(18*6 + 39/5 + 1/((25/162)*6 + 1/250)))*0.081024865870412138581010551536895296234849971877071695338858657) = 1.000000062149710470579812990759343783524224669690989946705450751 8;$$

$${}_3c_7/\varepsilon_7 = 1/((2*7 + 1/3 + 1/(18*7 + 39/5 + 1/((25/162)*7 + 1/250)))*0.069731328900296691430992309331560696463613077335358069877699993) = 1.0000000260221181969340310019541286348189985463423007859566580482;$$

$${}_3c_8/\varepsilon_8 = 1/((2*8 + 1/3 + 1/(18*8 + 39/5 + 1/((25/162)*8 + 1/250)))*0.061199936275774068284648688400210721874197403836453495975050114) = 1.0000000121589728563231550153953859161294830951702788908089500426;$$

$${}_3c_9/\varepsilon_9 = 1/((2*9 + 1/3 + 1/(18*9 + 39/5 + 1/((25/162)*9 + 1/250)))*0.054528011730501724856965690040800127916827802382831465978812587) = 1.0000000061880484116820376414221809228595184527256350892692018014;$$

$${}_3c_{10}/\varepsilon_{10} = 1/((2*10 + 1/3 + 1/(18*10 + 39/5 + 1/((25/162)*10 + 1/250)))*0.049167496072675423629464709201487329610707429399557393414873353) = 1.0000000033720709737392659927282989527691952899729157420628048011;$$

${}_3c_{11}/\varepsilon_{11}$ = 1/((2*11 + 1/3 + 1/(18*11 + 39/5 + 1/((25/162)*11 + 1/250)))*0.044766407177441472676421676829813146481011155000004103320542636) = 1.0000000019432088719803129862427733619869491951299395465899084215;

${}_3c_{12}/\varepsilon_{12}$ = 1/((2*12 + 1/3 + 1/(18*12 + 39/5 + 1/((25/162)*12 + 1/250)))*0.041088363521145039841989108289396938837560515727494651896389326) = 1.000000001173174504231599288477075303693381339431390977343262549;

${}_3c_{13}/\varepsilon_{13}$ = 1/((2*13 + 1/3 + 1/(18*13 + 39/5 + 1/((25/162)*13 + 1/250)))*0.037968732770685537095134223486034097907706474433624418530321244) = 1.0000000007367195782101060166147053886948738068620849312803222752;

${}_3c_{14}/\varepsilon_{14}$ = 1/((2*14 + 1/3 + 1/(18*14 + 39/5 + 1/((25/162)*14 + 1/250)))*0.035289332045535087197465371578567833571818126680286520940725167) = 1.0000000004785021534917078147330703943346384423798983682450450729;

${}_3c_{15}/\varepsilon_{15}$ = 1/((2*15 + 1/3 + 1/(18*15 + 39/5 + 1/((25/162)*15 + 1/250)))*0.032963127225250302390712332997877453777977745197802456540119768) = 1.0000000003199961886940896252190617635145761753570225791957186786;

$${}_3c_{16}/\varepsilon_{16} = 1/((2*16 + 1/3 + 1/(18*16 + 39/5 + 1/((25/162)*16 + 1/250)))*0.030924606087679130717788417313884525649069119848048613704741955) = 1.0000000002195284908721903127787280414590429590912316246231410592;$$

$${}_3c_{17}/\varepsilon_{17} = 1/((2*17 + 1/3 + 1/(18*17 + 39/5 + 1/((25/162)*17 + 1/250)))*0.02912351368300899401953522644993485059816076235038366641963602) = 1.0000000001540317276166725777841933032265188952584880912143983004;$$

$${}_3c_{18}/\varepsilon_{18} = 1/((2*18 + 1/3 + 1/(18*18 + 39/5 + 1/((25/162)*18 + 1/250)))*0.027520655398615937616902804575388964371438080485929851682360637) = 1.0000000001102579945623802810080740931158017054167563448433097581;$$

$${}_3c_{19}/\varepsilon_{19} = 1/((2*19 + 1/3 + 1/(18*19 + 39/5 + 1/((25/162)*19 + 1/250)))*0.026085013075708590868229546938131825557171648139923611787100656) = 1.0000000000803472717326545380111833370338293591192072054230870106;$$

$${}_3c_{20}/\varepsilon_{20} = 1/((2*20 + 1/3 + 1/(18*20 + 39/5 + 1/((25/162)*20 + 1/250)))*0.024791718688158057442033402683444587117949286450024200171052982) = 1.0000000000594993621732855557238869896381768336750268988541264902;$$

$${}_3c_{30}/\varepsilon_{30} = 1/((2*30 + 1/3 + 1/(18*30 + 39/5 + 1/((25/162)*30 + 1/250)))*0.016574084356702834482024882435084969384053413226008277017322114) = 1.0000000000055193583797702855346696047056470473289729676528945683;$$

$${}_3c_{40}/\varepsilon_{40} = 1/((2*40 + 1/3 + 1/(18*40 + 39/5 + 1/((25/162)*40 + 1/250)))*0.012447919920906823057682941952498620878342968978008227607127422) = 1.0000000000010215596275285139760119656041760853924000614220092218;$$

$${}_3c_{50}/\varepsilon_{50} = 1/((2*50 + 1/3 + 1/(18*50 + 39/5 + 1/((25/162)*50 + 1/250)))*0.0099666679997461383352089149718148138017396451302395329071596 4) = 1.0000000000002766817949052734793760413525405939884505436203425128;$$

$${}_3c_{60}/\varepsilon_{60} = 1/((2*60 + 1/3 + 1/(18*60 + 39/5 + 1/((25/162)*60 + 1/250)))*0.0083101858281042717518659087770625303044100767384000882486357 8) = 1.0000000000000954030074649281291911010632297456205412053232359716;$$

$${}_3c_{70}/\varepsilon_{70} = 1/((2*70 + 1/3 + 1/(18*70 + 39/5 + 1/((25/162)*70 + 1/250)))*0.0071258506871799385974936984650224846654223876159116526852992 46) = 1.0000000000000388690042832500796034035082277787857593885238355102;$$

$_{3}c_{80}/\varepsilon_{80}$ = 1/((2*80 + 1/3 + 1/(18*80 + 39/5 + 1/((25/162)*80 + 1/250)))*0.0062369793701020522952596210192702642088669689105077384709l5928) = 1.000000000000017894042680428940800017401301823279771255963504375 7;

$_{3}c_{90}/\varepsilon_{90}$ = 1/((2*90 + 1/3 + 1/(18*90 + 39/5 + 1/((25/162)*90 + 1/250)))*0.0055452676167176267173959317694762650595263518405112404618665 79) = 1.00000000000000904364578977850985365753787256931009368969505747 96;

$_{3}c_{100}/\varepsilon_{100}$ = 1/((2*100 + 1/3 + 1/(18*100 + 39/5 + 1/((25/162)*100 + 1/250)))*0.0049916667499960321626226762071223116646098135109821023041111 55) = 1.00000000000000491971766845965635786871143320618232053951711794 35;

$_{3}c_{110}/\varepsilon_{110}$ = 1/((2*110 + 1/3 + 1/(18*110 + 39/5 + 1/((25/162)*110 + 1/250)))*0.0045385675500284958239273903469850763170033961945755977119703 41) = 1.00000000000000284041458967470397436242024764334201256931220982 94;

$_{3}c_{120}/\varepsilon_{120}$ = 1/((2*120 + 1/3 + 1/(18*120 + 39/5 + 1/((25/162)*120 + 1/250)))*0.0041608796698160579679419148330555344524046220196767450665970 81) = 1.00000000000000172246109797768348977586251888109575613382857773 75;

${}_3c_{130}/\varepsilon_{130}$ = 1/((2*130 + 1/3 + 1/(18*130 + 39/5 + 1/((25/162)*130 + 1/250)))*0.0038412229088609124563564767197068535008798949965021099 2210316) = 1.00000000000000108845501148990722514897226361665969719707375250 21;

${}_3c_{140}/\varepsilon_{140}$ = 1/((2*140 + 1/3 + 1/(18*140 + 39/5 + 1/((25/162)*140 + 1/250)))*0.0035671768924401227324760865115159258933634370483862299948 89716) = 1.0000000000000007123544536715117940043716054342096106233232291105;

${}_3c_{150}/\varepsilon_{150}$ = 1/((2*150 + 1/3 + 1/(18*150 + 39/5 + 1/((25/162)*150 + 1/250)))*0.0033296296460901866167310370246553936371875363674815197123 18106) = 1.0000000000000004804970418477063184822701950214173798770384721019;

${}_3c_{200}/\varepsilon_{200}$ = 1/((2*200 + 1/3 + 1/(18*200 + 39/5 + 1/((25/162)*200 + 1/250)))*0.0024979166718749379976592762215542225175377989725182794718 69134) = 1.0000000000000000939982962697483669585282399129534738828704896988;

${}_3c_{250}/\varepsilon_{250}$ = 1/((2*250 + 1/3 + 1/(18*250 + 39/5 + 1/((25/162)*250 + 1/250)))*0.0019986666687999837463048047550089786834976944065328024879 74115) = 1.0000000000000000268466008974646854445364579013005655147813065406;

${}_{3}c_{300}/\varepsilon_{300}$ = 1/((2*300 + 1/3 + 1/(18*300 + 39/5 + 1/((25/162)*300 + 1/250)))*0.001665740741769541881745304673632732343162511683625200115177161) = 1.0000000000000000097265665112768546474736360037324125515042961493;

${}_{3}c_{350}/\varepsilon_{350}$ = 1/((2*350 + 1/3 + 1/(18*350 + 39/5 + 1/((25/162)*350 + 1/250)))*0.001427891157017907045822088332117531620746900551797882052337767) = 1.0000000000000000041483503863544955861239200565989587381898594904;

${}_{3}c_{400}/\varepsilon_{400}$ = 1/((2*400 + 1/3 + 1/(18*400 + 39/5 + 1/((25/162)*400 + 1/250)))*0.001249479166992186531194353788275276337073032160776315892170 25) = 1.0000000000000000019922148575516422821383306459177045949817135065;

${}_{3}c_{450}/\varepsilon_{450}$ = 1/((2*450 + 1/3 + 1/(18*450 + 39/5 + 1/((25/162)*450 + 1/250)))*0.001110699588680586830961598544994472489489894918447250235858364) = 1.0000000000000000010469885194479785428490781537565081379799508284;

${}_{3}c_{500}/\varepsilon_{500}$ = 1/((2*500 + 1/3 + 1/(18*500 + 39/5 + 1/((25/162)*500 + 1/250)))*0.000999666666679999974603281269065520904985014693079184385801820 57) = 1.00000000000000000059055537937352980694206461802126977225438551 24.

Проведём теперь вычисления, оценивающие качество приближения бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n вторым приближением ${}_2s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей:

$${}_2s_n = 1/(2n + 1/3) - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n + 9.141),$$

$${}_2s_n/\varepsilon_n = (1/(2n + 1/3) - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n + 9.141))/\varepsilon_n = (1/(2n + 1/3) - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n + 9.141))/(H_n - \ln(n) - \gamma);$$

$${}_2s_1/\varepsilon_1 = (1/(2*1 + 1/3) - 1/(72*1^3 + 55.2*1^2 + 40.32*1 + 9.141))/0.422784335098467139393487909917597568957840664060076401194233 = 1.000299288641675540907164242778280963938369535971584864968967944;$$

$${}_2s_2/\varepsilon_2 = (1/(2*2 + 1/3) - 1/(72*2^3 + 55.2*2^2 + 40.32*2 + 9.141))/0.229637154538521829976255788459421000882340529699821147073552991 = 1.000018061995638613513286042193220694643388199332547519759656549;$$

${}_2s_3/\varepsilon_3$ = (1/(2*3 + 1/3) - 1/(72*3^3 + 55.2*3^2 + 40.32*3 + 9.141))/0.15750537976369078133157600632840519764368343957066028279 2872 =
1.0000024658593639085841835960794959507309481520373159249254 07755;

${}_2s_4/\varepsilon_4$ = (1/(2*4 + 1/3) - 1/(72*4^3 + 55.2*4^2 + 40.32*4 + 9.141))/0.11982330731190985389235700033457776614017372867289922628 6206314 =
1.00000054103272561546819102246734399182288586306856461672050 91045;

${}_2s_5/\varepsilon_5$ = (1/(2*5 + 1/3) - 1/(72*5^3 + 55.2*5^2 + 40.32*5 + 9.141))/0.09667975599770009812606191002474326276557264312489201261 4918442 =
1.00000015981869452074701882370608246511902564272558863004111 34491;

${}_2s_6/\varepsilon_6$ = (1/(2*6 + 1/3) - 1/(72*6^3 + 55.2*6^2 + 40.32*6 + 9.141))/0.08102486587041213858101055153689529623484997187707169533 8858657 =
1.00000005776805829495623739332411853957729676353139038610015 83862;

${}_2s_7/\varepsilon_7$ = (1/(2*7 + 1/3) - 1/(72*7^3 + 55.2*7^2 + 40.32*7 + 9.141))/0.06973132890029669143099230933156069646361307733535806987 7699993 =
1.00000002414765717400354435539641756068213684606814913937141 85023;

${}_2s_8/\varepsilon_8$ = (1/(2*8 + 1/3) - 1/(72*8^3 + 55.2*8^2 + 40.32*8 + 9.141))/0.061199936275774068284648688400210721874197403836453495975050114 = 1.0000000112613163249782168578175655193995345472883983227597681943;

${}_2s_9/\varepsilon_9$ = (1/(2*9 + 1/3) - 1/(72*9^3 + 55.2*9^2 + 40.32*9 + 9.141))/0.054528011730501724856965690040800127916827802382831465978812587 = 1.0000000057191367717439210349281152799897219503391337362594866764;

${}_2s_{10}/\varepsilon_{10}$ = (1/(2*10 + 1/3) - 1/(72*10^3 + 55.2*10^2 + 40.32*10 + 9.141))/0.049167496072675423629464709201487329610707429399557393414873353 = 1.0000000031096361495246466525227387993823421699643928809358159416;

${}_2s_{11}/\varepsilon_{11}$ = (1/(2*11 + 1/3) - 1/(72*11^3 + 55.2*11^2 + 40.32*11 + 9.141))/0.044766407177441472676421676829813146481011155000004103320542636 = 1.0000000017878707226869199904327997152534981613362584434032657451;

${}_2s_{12}/\varepsilon_{12}$ = (1/(2*12 + 1/3) - 1/(72*12^3 + 55.2*12^2 + 40.32*12 + 9.141))/0.041088363521145039841989108289396938837560515727494651896389326 = 1.0000000010768638426617288971856543915366522034586363115978741304;

${}_2s_{13}/\varepsilon_{13}$ = (1/(2*13 + 1/3) - 1/(72*13^3 + 55.2*13^2 + 40.32*13 + 9.141))/0.037968732770685537095134223486034097907706474433624418530321244 = 1.00000000067463114228264818689966913024430982597908632889379037 62;

${}_2s_{14}/\varepsilon_{14}$ = (1/(2*14 + 1/3) - 1/(72*14^3 + 55.2*14^2 + 40.32*14 + 9.141))/0.035289332045535087197465371578567833571818126680286520940725167 = 1.000000000437122378217419358717089798483178662130358943989745 7405;

${}_2s_{15}/\varepsilon_{15}$ = (1/(2*15 + 1/3) - 1/(72*15^3 + 55.2*15^2 + 40.32*15 + 9.141))/0.032963127225250302390712332997877453777977745197802456540119768 = 1.000000000291615816857510141141411712982408114790194217147773 8416;

${}_2s_{16}/\varepsilon_{16}$ = (1/(2*16 + 1/3) - 1/(72*16^3 + 55.2*16^2 + 40.32*16 + 9.141))/0.030924606087679130717788417313884525649069119848048613704741955 = 1.000000000199571598878808740154394508991999859675011181861197 7585;

${}_2s_{17}/\varepsilon_{17}$ = (1/(2*17 + 1/3) - 1/(72*17^3 + 55.2*17^2 + 40.32*17 + 9.141))/0.029123513683008994019535226449934850598160762350383666419636 02 = 1.000000000139686920386746183450148987539269494077467690630867647;

${}_2s_{18}/\varepsilon_{18}$ = (1/(2*18 + 1/3) - 1/(72*18^3 + 55.2*18^2 + 40.32*18 + 9.141))/0.027520655398615937616902804575388964371438080485929851682360637 = 1.0000000000997449142828022247937703951474113112848491017125900211;

${}_2s_{19}/\varepsilon_{19}$ = (1/(2*19 + 1/3) - 1/(72*19^3 + 55.2*19^2 + 40.32*19 + 9.141))/0.026085013075708590868229546938131825557171648139923611787100656 = 1.0000000000725078948036506582841887490250214325608170589818994992;

${}_2s_{20}/\varepsilon_{20}$ = (1/(2*20 + 1/3) - 1/(72*20^3 + 55.2*20^2 + 40.32*20 + 9.141))/0.024791718688158057442033402683444587117949286450024200171052982 = 1.0000000000535622835243452880994723041847056379355045183467098784;

${}_2s_{30}/\varepsilon_{30}$ = (1/(2*30 + 1/3) - 1/(72*30^3 + 55.2*30^2 + 40.32*30 + 9.141))/0.016574084356702834482024882435084969384053413226008277017322114 = 1.0000000000048484169596888559376653654435681738704407935582022861;

${}_2s_{40}/\varepsilon_{40}$ = (1/(2*40 + 1/3) - 1/(72*40^3 + 55.2*40^2 + 40.32*40 + 9.141))/0.012447919920906823057682941952498620878342968978008227607127422 = 1.0000000000008760299368982620412927558558103097884574501441603259;

${}_2s_{50}/\varepsilon_{50}$ = (1/(2*50 + 1/3) - 1/(72*50^3 + 55.2*50^2 + 40.32*50 + 9.141))/0.00996666799974613833520891497181481380173964513023953290715964 = 1.0000000000002317420070089102977755260576521497519838046819987892;

${}_2s_{60}/\varepsilon_{60}$ = (1/(2*60 + 1/3) - 1/(72*60^3 + 55.2*60^2 + 40.32*60 + 9.141))/0.00831018582810427175186590877706253030441007673840008824863578 = 1.0000000000000780882681565946432555851981653085056219936230054259;

${}_2s_{70}/\varepsilon_{70}$ = (1/(2*70 + 1/3) - 1/(72*70^3 + 55.2*70^2 + 40.32*70 + 9.141))/0.007125850687179938597493698465022484665422387615911652685299246 = 1.0000000000000311066349890858343326726431247448071652991747178566;

${}_2s_{80}/\varepsilon_{80}$ = (1/(2*80 + 1/3) - 1/(72*80^3 + 55.2*80^2 + 40.32*80 + 9.141))/0.006236979370102052295259621019270264208866968910507738470915928 = 1.0000000000000140088710805155202384619987873617080919483048769281;

${}_2s_{90}/\varepsilon_{90}$ = (1/(2*90 + 1/3) - 1/(72*90^3 + 55.2*90^2 + 40.32*90 + 9.141))/0.005545267616717626717395931769476265059526351840511240461866579 = 1.0000000000000069293798712003472247606843475241202926199831557055;

$${}_{2}s_{100}/\varepsilon_{100} = (1/(2*100 + 1/3) - 1/(72*100^3 + 55.2*100^2 + 40.32*100 + 9.141))/0.00499166674999603216262267620712231166460981351098210230411155 = 1.000000000000000369105141174981898238404384711094455165550716770 47;$$

$${}_{2}s_{110}/\varepsilon_{110} = (1/(2*110 + 1/3) - 1/(72*110^3 + 55.2*110^2 + 40.32*110 + 9.141))/0.00453856755002849582392739034698507631700339619457559771197034 1 = 1.000000000000000208759226890872760091232607939367392868252090829 23;$$

$${}_{2}s_{120}/\varepsilon_{120} = (1/(2*120 + 1/3) - 1/(72*120^3 + 55.2*120^2 + 40.32*120 + 9.141))/0.00416087966981605796794191483305553445240462201967674506659708 1 = 1.000000000000000124066536957888713686102462018087021574048862091;$$

$${}_{2}s_{130}/\varepsilon_{130} = (1/(2*130 + 1/3) - 1/(72*130^3 + 55.2*130^2 + 40.32*130 + 9.141))/0.00384122290886091245635647671970685350087989499650210992210316 = 1.0000000000000000768664721717184203957092471142200246506853761480 6;$$

$${}_{2}s_{140}/\varepsilon_{140} = (1/(2*140 + 1/3) - 1/(72*140^3 + 55.2*140^2 + 40.32*140 + 9.141))/0.00356717689244012273247608651151592589336343704838622999488971 6 = 1.0000000000000000493420072666420265745102055467225595797906312617 1;$$

${}_2s_{150}/\varepsilon_{150}$ = (1/(2*150 + 1/3) - 1/(72*150^3 + 55.2*150^2 + 40.32*150 + 9.141))/0.0033296296460901866167310370246553936371875363674815197123181 06 = 1.0000000000000003265667509549707918614160876249333416916250588439;

${}_2s_{200}/\varepsilon_{200}$ = (1/(2*200 + 1/3) - 1/(72*200^3 + 55.2*200^2 + 40.32*200 + 9.141))/0.0024979166718749379976592762215542225175377989725182794718691 34 = 1.0000000000000000584106530907618913653581780864793729654891702266;

${}_2s_{250}/\varepsilon_{250}$ = (1/(2*250 + 1/3) - 1/(72*250^3 + 55.2*250^2 + 40.32*250 + 9.141))/0.0019986666668799983746304804755008978683497694406532802487974115 = 1.000000000000000015370935562725111006651781584193427489864550386;

${}_2s_{300}/\varepsilon_{300}$ = (1/(2*300 + 1/3) - 1/(72*300^3 + 55.2*300^2 + 40.32*300 + 9.141))/0.0016657407417695418817453046736327323431625116836252001151771 61 = 1.00000000000000000516462831858065954431082649890057226801458453 34;

${}_2s_{350}/\varepsilon_{350}$ = (1/(2*350 + 1/3) - 1/(72*350^3 + 55.2*350^2 + 40.32*350 + 9.141))/0.0014278911570179070458220883321175316207469005517978820523377 67 = 1.00000000000000000205421437280918646972860482234428904150899576 89;

${}_2s_{400}/\varepsilon_{400}$ = (1/(2*400 + 1/3) - 1/(72*400^3 + 55.2*400^2 + 40.32*400 + 9.141))/0.0012494791669921865311943537882752763370730321607763158921702 5 =
1.000000000000000000924472833747054053040913151443971204912721455 1;

${}_2s_{450}/\varepsilon_{450}$ = (1/(2*450 + 1/3) - 1/(72*450^3 + 55.2*450^2 + 40.32*450 + 9.141))/0.0011106995886805868309615985449944724894898949184472502358583 64 =
1.000000000000000000457214778051732564957575003635774652241681085 9;

${}_2s_{500}/\varepsilon_{500}$ = (1/(2*500 + 1/3) - 1/(72*500^3 + 55.2*500^2 + 40.32*500 + 9.141))/0.0009996666666799999746032812690655209049850146930791843858018 2057 =
1.000000000000000000243598613745254861143196402089661800406315900 5.

Таблица. Избранные первые относительные, а именно делённые на соответствующие приближаемые элементы бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n, приближения этих элементов, даваемые первым приближением ${}_1s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей, почти, или не совсем полным, вторым приближением ${}_{2-\delta}s_n$ приближающей функции s_n в

рядах функциональных единичных дробей, вторым приближением $_2c_n$ и третьим приближением $_3c_n$ приближающей функции c_n в функциональных непрерывных, или цепных, дробях, а также вторым приближением $_2s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей.

n	$_1c_n/\varepsilon_n = {}_1s_n/\varepsilon_n = {}_1g_n/\varepsilon_n = 1/((2n + 1/3)\varepsilon_n)$	$_{2-\delta}s_n/\varepsilon_n = (1/(2n) - 1/(12n^2 + 6/5))/\varepsilon_n$	$_2c_n/\varepsilon_n = 1/((2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5))\varepsilon_n)$	$_3c_n/\varepsilon_n = 1/((2n + 1/3 + 1/(18n + 39/5 + 1/((25/162) n + 1/250)))\varepsilon_n)$	$_2s_n/\varepsilon_n = (1/(2n + 1/3) - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n + 9.141))/\varepsilon_n$
1	1.0136880508394	1.0034487775986	0.9971245205969	1.000339158750	1.0002992886416

2	**1.0049298478418**	**1.0001639203791**	**0.9996629199181**	**1.000019616077**	**1.0000180619956**
3	**1.0024720239968**	**1.0000239848662**	**0.9999173042619**	**1.000002654928**	**1.0000024658593**
4	**1.0014746103412**	**1.0000059191425**	**0.9999708947101**	**1.000000581307**	**1.0000005410327**
5	**1.0009768079130**	**1.0000019743683**	**0.9999873092891**	**1.000000171743**	**1.0000001598186**
6	**1.0006938019590**	**1.0000008007111**	**0.9999936243757**	**1.000000062149**	**1.0000000577680**
7	**1.0005178871640**	**1.0000003723353**	**0.9999964582047**	**1.000000026022**	**1.0000000241476**
8	**1.0004012017272**	**1.0000001915385**	**0.9999978791979**	**1.000000012158**	**1.0000000112613**
9	**1.0003198872359**	**1.0000001064800**	**0.9999986541314**	**1.000000006188**	**1.0000000057191**
10	**1.0002609812823**	**1.0000000629445**	**0.9999991054364**	**1.000000003372**	**1.0000000031096**
11	**1.0002169534290**	**1.0000000391100**	**0.9999993825264**	**1.000000001943**	**1.0000000017878**
12	**1.0001831878704**	**1.0000000253235**	**0.9999995602013**	**1.000000001173**	**1.0000000010768**

13	1.0001567282651	1.0000000169752	0.9999996783423	1.000000000736	1.0000000006746
14	1.0001356104308	1.0000000117205	0.9999997593563	1.000000000478	1.0000000004371
15	1.0001184882051	1.0000000083013	0.9999998164020	1.000000000319	1.0000000002916
16	1.0001044140662	1.0000000060117	0.9999998575055	1.000000000219	1.0000000001995
17	1.0000927054768	1.0000000044395	0.9999998877256	1.000000000154	1.0000000001396
18	1.0000828607156	1.0000000033357	0.9999999103439	1.000000000110	1.0000000000997
19	1.0000745043149	1.0000000025453	0.9999999275435	1.000000000080	1.0000000000725
20	1.0000673507801	1.0000000019693	0.9999999408101	1.000000000059	1.0000000000535
30	1.0000302447269	1.0000000002590	0.9999999880905	$1.0_{11}5519358379$	$1.0_{11}4848416959$
40	1.0000170999795	1.0000000000614	0.9999999961972	$1.0_{11}1021559627$	$1.0_{11}0876029936$
50	1.0000109774793	1.0000000000201	0.9999999984339	$1.0_{11}0276681794$	$1.0_{11}0231742007$

60	**1.0000076387431**	**$1.0_{11}8082602694$**	**0.9999999992420**	**$1.0_{11}0095403007$**	**$1.0_{11}0078088268$**
70	**1.0000056202640**	**$1.0_{11}3738403506$**	**0.9999999995898**	**$1.0_{11}0038869004$**	**$1.0_{11}00311066349$**
80	**1.0000043076788**	**$1.0_{11}1917008108$**	**0.9999999997590**	**$1.0_{11}0017894042$**	**$1.0_{11}0014008871$**
90	**1.0000034064635**	**$1.0_{11}1063602027$**	**0.9999999998493**	**$1.0_{11}0009043645$**	**$1.0_{11}0006929379$**
100	**1.0000027610917**	**$1.0_{11}0627949046$**	**0.9999999999010**	**$1.0_{11}0004919717$**	**$1.0_{11}0003691051$**
110	**1.0000022831489**	**$1.0_{11}0389856599$**	**0.9999999999323**	**$1.0_{11}0002840414$**	**$1.0_{11}0002087592$**
120	**1.0000019193578**	**$1.0_{11}0252298482$**	**0.9999999999522**	**$1.0_{11}0001722461$**	**$1.0_{11}0001240665$**
130	**1.0000016360625**	**$1.0_{11}0169068794$**	**0.9999999999652**	**$1.0_{11}0001088455$**	**$1.0_{11}0000768664$**
140	**1.0000014111546**	**$1.0_{11}01167091297$**	**0.9999999999741**	**$1.0_{11}0000712354$**	**$1.0_{11}0000493420$**
150	**1.0000012296257**	**$1.0_{11}0082652867$**	**0.9999999999803**	**$1.0_{11}0000480497$**	**$1.0_{11}0000326566$**
200	**1.0000006923598**	**$1.0_{11}0019608956$**	**$0.9_{11}37831369377$**	**$1.0_{11}0000093998$**	**$1.0_{11}0000058410$**
250	**1.0000004433772**	**$1.0_{11}0006424466$**	**$0.9_{11}74508582108$**	**$1.0_{11}0000026846$**	**$1.0_{11}0000015370$**
300	**1.0000003080244**	**$1.0_{11}0002581578$**	**$0.9_{11}87697957396$**	**$1.0_{11}0000009726$**	**$1.0_{11}0000005164$**
350	**1.0000002263685**	**$1.0_{11}00011943141$**	**$0.9_{11}93356298856$**	**$1.0_{11}0000004148$**	**$1.0_{11}0000002054$**

400	1.0000001733506	$1.0_{11}0000612539$	$0.9_{11}96104105024$	$1.0_{11}0000001992$	$1.0_{11}0000000924$
450	1.0000001369912	$1.0_{11}0000339900$	$0.9_{11}97567093638$	$1.0_{11}0000001046$	$1.0_{11}0000000457$
500	1.0000001109777	$1.0_{11}0000200700$	$0.9_{11}98403393113$	$1.0_{11}0000000590$	$1.0_{11}0000000243$

В этой таблице сопоставлены избранные первые относительные, а именно делённые на соответствующие приближаемые элементы бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n, приближения этих элементов, даваемые первым приближением ${}_1s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей, почти, или не совсем полным, вторым приближением ${}_{2-\delta}s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей, вторым приближением ${}_2c_n$ и третьим приближением ${}_3c_n$ приближающей функции c_n в функциональных непрерывных, или цепных, дробях, а также

вторым приближением $_2s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей.

Сравнительный анализ итогов этого сопоставления позволяет сделать следующие основные выводы:

1. Первое приближение $_1s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей, почти, или не совсем полное, второе приближение $_{2\text{-}\delta}s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей и второе приближение $_2c_n$ приближающей функции c_n в функциональных непрерывных, или цепных, дробях являются именно точно определёнными приближениями в смысле точности определения их коэффициентов. Абсолютные и относительные погрешности этих трёх приближений убывают вместе с ростом порядкового

номера соответствующего приближаемого элемента бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n.

2. Третье приближение $_3c_n$ приближающей функции c_n в функциональных непрерывных, или цепных, дробях и второе приближение $_2s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей являются именно приближённо определёнными приближениями в смысле приближённости определения их коэффициентов. Поэтому встречаются отдельные нарушения монотонности возрастания точности каждого из этих двух приближений вместе с ростом порядкового номера соответствующего приближаемого элемента бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n. Также встречаются переходы от приближений с избытком к приближениям с недостатком и наоборот. На участках таких

переходов встречается необычное местное повышение точности. Это наблюдается у третьего приближения $_3c_n$ приближающей функции c_n в функциональных непрерывных, или цепных, дробях на отрезке номеров от 4 до 9 включительно. Именно на этом единственном отрезке третье приближение $_3c_n$ приближающей функции c_n в функциональных непрерывных, или цепных, дробях оказывается точнее, чем в целом значительно более точное второе приближение $_2s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей.

3. Все пять указанных приближений осуществляют именно высокоточные приближения всех без исключения элементов бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n и, следовательно, всех без исключения гармонических чисел. Даже

на редкость простое первое приближение $_1s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей определяет первый элемент с относительной погрешностью менее 1.4 % и второй элемент с относительной погрешностью менее 0.5 % с быстрым снижением относительных погрешностей определения следующих элементов бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n вместе с ростом их номеров.

4. Общие функциональные метод и алгоритм построения рядов функциональных единичных дробей последовательным их выделением дают значительно лучшие итоги, чем итоги общих функциональных метода и алгоритма последовательного построения функциональных непрерывных, или цепных, дробей. Во-первых, итоги почти, или не совсем полного, второго

приближения $_{2\text{-}\delta}s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей намного лучше итогов второго приближения $_2c_n$ в функциональных непрерывных, или цепных, дробях. Во-вторых, итоги второго приближения $_2s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей, причём с упрощающими округлениями, лучше итогов даже третьего приближения $_3c_n$ в функциональных непрерывных, или цепных, дробях.

5. В таблице эффективно использовано предлагаемое сокращение записи повторения одной и той же цифры или группы цифр подряд с указанием кратности повторения правым нижним индексом, например:

$$e = 2.7(1828)_2459045...;$$

$$1/3 = 0.(3) = 0.3_\infty;$$

$$1/7 = 0.(142857) = 0.(142857)_\infty.$$

Такое сокращение записи чрезвычайно полезно для таблиц с жёстким ограничением количества цифр в столбце и для отношений высокоточных приближений к приближаемым предметам. Оба этих обстоятельства имеют место в данном случае, в котором кратко записываются достаточно длинные последовательности нулей и девяток. При этом в интересах наглядной сравнимости представляется целесообразной возможность кратко представить не всю последовательность повторений, а её целесообразную для сравнимости часть.

2.4.8.2. ВСЕОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИЗМЕНЕНИЕМ СИСТЕМЫ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ЭТОЙ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УТОЧНЕНИЮ ПРИБЛИЖЁННОЙ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной для частного случая функции f системы переменных $({}_{\omega\in\Omega}x_\omega)$ и системы $({}_{\omega\in\Omega}\Delta x_\omega)$ аддитивных изменений независимых переменных предусматривает замену

$$y = f({}_{\omega\in\Omega}x_\omega)$$

на

$$y = f(_{\omega\in\Omega}(x_\omega + \Delta x_\omega)).$$

Для частного случая функции f одной переменной x и аддитивного изменения Δx независимой переменной x предусматривается замена

$$y = f(x)$$

на

$$y = f(x + \Delta x).$$

Для частного случая простой последовательности Φ_n как функции Φ одной переменной, а именно номера n элемента последовательности, и аддитивного изменения Δn предусматривается замена

$$y = \Phi(n) = \Phi_n$$

на

$$y = \Phi(n + \Delta n) = \Phi(n + \alpha_n),$$

где α_n есть другое, более удобное обозначение последовательности Δn:

$$\alpha_n = \Delta n,$$

причём это приращение Δn н<u>о</u>мера n вообще не обязано быть именно целочисленным, а может быть любой действительной последовательностью α_n, так что лучше вест<u>и</u> речь об обобщённом номере или вообще об аргументе последовательности как функции этого обобщённого н<u>о</u>мера как аргумента.

Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением <u>системы значений системы независимых</u>

переменных этой зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j \approx E_n = \ln(n) + \gamma$$

использует взамен точной формулы Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$$

столь же точную формулу

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j = \ln(n + \nu_n) + \gamma,$$

где положительная последовательность ν_n отнюдь не обязана быть бесконечно малой. Тогда

$$\ln(n + \nu_n) = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j - \gamma,$$

$$\nu_n = \exp(\Sigma_{j=1}^{n} 1/j - \gamma) - n.$$

Опыт использования всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой

зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера позволяет предположить, что для приближения первого порядка можно попытаться вначале ограничиться гармоническими числами, имеющими номера не более 50, и вести вычисления с не самой высокой приводимой точностью.

Исследуем начало этой последовательности ν_n:

$$\nu_1 = \exp(1 - 0.57721566490153286) - 1 = 0.52620511159586;$$

$$\nu_2 = \exp(1 + 1/2 - 0.57721566490153286) - 2 = 0.51628683093936;$$

$$\nu_3 = \exp(1 + 1/2 + 1/3 - 0.57721566490153286) - 3 = 0.51176116633948;$$

$$\nu_4 = \exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 - 0.57721566490153286) - 4 = 0.50919059491687;$$

$$\nu_5 = \exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 - 0.57721566490153286) - 5 = 0.50753782970137;$$

$$\nu_6 = \exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 - 0.57721566490153286) - 6 = 0.50638716436917;$$

$$\nu_7 = \exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 - 0.57721566490153286) - 7 = 0.50554047605112;$$

$$\nu_8 = \exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 - 0.57721566490153286) - 8 = 0.50489157986777;$$

$$\nu_9 = \exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 - 0.57721566490153286) - 9 = 0.50437851808435;$$

$$\nu_{10} = \exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 - 0.57721566490153286) - 10 = 0.50396273256975;$$

$$\nu_{11} = \exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 - 0.57721566490153286) - 11 = 0.50361898229276;$$

$$\nu_{12} = \exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 - 0.57721566490153286) - 12 = 0.50333005600328;$$

$$\nu_{13} = \exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 - 0.57721566490153286) - 13 = 0.50308381680168;$$

$$\nu_{14} = \exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 - 0.57721566490153286) - 14 = 0.50287146167974;$$

$$\nu_{15} = \exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 - 0.57721566490153286) - 15 = 0.5026864510152;$$

$$\nu_{16} = \exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 - 0.57721566490153286) - 16 = 0.50252382544666;$$

ν_{17} = exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 - 0.57721566490153286) - 17 = 0.50237975596289;

ν_{18} = exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 - 0.57721566490153286) - 18 = 0.50225123935827;

ν_{19} = exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 - 0.57721566490153286) - 19 = 0.50213588707891;

ν_{20} = exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 - 0.57721566490153286) - 20 = 0.50203177568364;

ν_{30} = exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 +

1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 - 0.5772156649015328б) - 30 = 0.50136589395128;

ν_{40} = exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 - 0.57721566490153286) - 40 = 0.50102870991968;

ν_{50} = exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 - 0.57721566490153286) - 50 = 0.50082503264142.

Есть все основания предположить, что эта последовательность ν_n, строго монотонно убывая, при бесконечном возрастания числа n стремится к 1/2. Заметим, что прибавление 1/2 к номеру n как раз и перенацеливает приближение со среднего арифметического рассматриваемого и предыдущего гармонических чисел в приближенной формуле Эйлера именно на рассматриваемое гармоническое число. Поэтому вычтем 1/2 из ν_n и рассмотрим бесконечно малую последовательность λ_n как разность

$$\lambda_n = \nu_n - 1/2 = \exp(\Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma) - n - 1/2 = \exp(H_n - \gamma) - n - 1/2.$$

Рассмотрим обращение ${}_0\eta_n$ бесконечно малой последовательности λ_n:

$${}_0\eta_n = 1/\lambda_n = 1/(\nu_n - 1/2) = 1/(\exp(\Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma) - n - 1/2);$$

$${}_0\eta_1 = 1/(\exp(1 - 0.5772156649015328\underline{6}) - 1 - 1/2) = 38.160493854101;$$

$${}_0\eta_2 = 1/(\exp(1 + 1/2 - 0.57721566490153286) - 2 - 1/2) = 61.399298839844;$$

$${}_0\eta_3 = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 - 0.57721566490153286) - 3 - 1/2) = 85.025580893587;$$

$${}_0\eta_4 = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 - 0.57721566490153286) - 4 - 1/2) = 108.8068845428;$$

$${}_0\eta_5 = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 - 0.57721566490153286) - 5 - 1/2) = 132.66418048931;$$

$${}_0\eta_6 = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 - 0.57721566490153286) - 6 - 1/2) = 156.56399964071;$$

$${}_0\eta_7 = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 - 0.57721566490153286) - 7 - 1/2) = 180.48990570015;$$

$${}_0\eta_8 = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 - 0.57721566490153286) - 8 - 1/2) = 204.43292903956;$$

$${}_0\eta_9 = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 - 0.57721566490153286) - 9 - 1/2) = 228.38777429595;$$

$${}_0\eta_{10} = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 - 0.57721566490153286) - 10 - 1/2) = 252.35111943562;$$

$${}_0\eta_{11} = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 - 0.57721566490153286) - 11 - 1/2) = 276.32077725303;$$

$${}_0\eta_{12} = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 - 0.57721566490153286) - 12 - 1/2) = 300.29524999444;$$

$${}_0\eta_{13} = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 - 0.57721566490153286) - 13 - 1/2) = 324.27347806658;$$

$${}_0\eta_{14} = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 - 0.57721566490153286) - 14 - 1/2) = 348.25469100169;$$

$${}_0\eta_{15} = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 - 0.57721566490153286) - 15 - 1/2) = 372.23831528745;$$

$${}_0\eta_{16} = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 - 0.57721566490153286) - 16 - 1/2) = 396.22391529705;$$

$${}_0\eta_{17} = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 - 0.57721566490153286) - 17 - 1/2) = 420.21115424997;$$

$${}_0\eta_{18} = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 - 0.5772156649015328\mathbf{6}) - 18 - 1/2) = 444.19976770872;$$

$${}_0\eta_{19} = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 - 0.57721566490153286) - 19 - 1/2) = 468.1895451662 3;$$

$${}_0\eta_{20} = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 - 0.57721566490153286) - 20 - 1/2) = 492.18031697596;$$

$${}_0\eta_{30} = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 - 0.57721566490153286) - 30 - 1/2) = 732.12125953092;$$

$${}_0\eta_{40} = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 - 0.57721566490153286) - 40 - 1/2) = 972.09133582662;$$

$${}_0\eta_{50} = 1/(\exp(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 + 1/13 + 1/14 + 1/15 + 1/16 + 1/17 + 1/18 + 1/19 + 1/20 + 1/21 + 1/22 + 1/23 + 1/24 + 1/25 + 1/26 + 1/27 + 1/28 + 1/29 + 1/30 + 1/31 + 1/32 + 1/33 + 1/34 + 1/35 + 1/36 + 1/37 + 1/38 + 1/39 + 1/40 + 1/41 + 1/42 + 1/43 + 1/44 + 1/45 + 1/46 + 1/47 + 1/48 + 1/49 + 1/50 - 0.57721566490153286) - 50 - 1/2) = 1212.0732560158.$$

Всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения немедленно

приводят к целесообразности попытки представления знаменателя $_1z_n$ искомой первой др<u>о</u>би приближения первого порядка к бесконечно малой последовательности

$$\lambda_n = \nu_n - 1/2$$

многочленом первой степени относительно n, а именно

$$_1z_n = 24n + 12;$$

$$\lambda_n \approx {}_1w_n = 1/{}_1z_n = 1/(24n + 12);$$

$$\nu_n = 1/2 + \lambda_n \approx {}_1u_n = 1/2 + {}_1w_n = 1/2 + 1/(24n + 12);$$

$$\eta_n = 1/(\nu_n - 1/2) = 1/(\exp(\Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma) - n - 1/2);$$

$$H_n = \ln(n + \nu_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + \lambda_n) + \gamma \approx {}_1W_n = \ln(n + 1/2 + {}_1w_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67.$$

Причём 24n является бесконечной частью обращения бесконечно малой последовательности λ_n, а 12 есть конечная постоянная часть обращения бесконечно малой последовательности λ_n. Если в знаменателе искомой первой дроби ограничиться бесконечной частью 24n обращения бесконечно малой последовательности λ_n, то по аналогии с предыдущей всеобщей методологией изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной получается почти, или не совсем полное, приближение первого порядка

$$_{1-\delta}z_n = 24n;$$

$$\lambda_n \approx {}_{1-\delta}w_n = 1/{}_{1-\delta}z_n = 1/(24n);$$

$$\nu_n = 1/2 + \lambda_n \approx {}_{1-\delta}u_n = 1/2 + {}_{1-\delta}w_n = 1/2 + 1/(24n);$$

$$\eta_n = 1/(\nu_n - 1/2) = 1/(\exp(\Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma) - n - 1/2);$$

$$H_n = \ln(n + \nu_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + \lambda_n) + \gamma \approx {}_{1\text{-}\delta}W_n =$$
$$\ln(n + 1/2 + {}_{1\text{-}\delta}w_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/(24n)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767.$$

Кроме того, если взять именно нулевое по значению начальное приближение <u>половинного порядка</u>

$$\lambda_n \approx {}_{1/2}w_n = 0;$$
$$\nu_n = 1/2 + \lambda_n \approx {}_{1/2}u_n = 1/2 + {}_{1/2}w_n = 1/2,$$

то получаем для гармонических чисел H_n приближение <u>половинного порядка</u>

$$H_n = \ln(n + \nu_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + \lambda_n) + \gamma \approx {}_{1/2}W_n =$$
$$\ln(n + 1/2 + {}_{1/2}w_n) + \gamma = {}_{1/2}W_n = \ln(n + 1/2) + \gamma = \ln(n + 1/2) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767.$$

В данной всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением <u>системы значений системы</u>

независимых переменных этой зависимой переменной точная формула Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$$

заменена другой столь же точной формулой

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n + \nu_n) + \gamma.$$

Поэтому внутри данной всеобщей методологии, казалось бы, можно обойтись без вычислений приближений бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n. Тем не менее, для сопоставлений приближений по данной всеобщей методологии и по предыдущей всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной всё-таки

целесообразно вычислять приближение бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n:

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n;$$

$$\varepsilon_n = H_n - \ln(n) - \gamma = \ln(n + \nu_n) + \gamma - \ln(n) - \gamma =$$

$$\ln(n + \nu_n) - \ln(n) = \ln(1 + \nu_n/n);$$

$$\varepsilon_n \approx h_n = \ln(1 + u_n/n) = \ln(1 + (1/2 + w_n)/n).$$

В частности, для приближения <u>половинного порядка</u>

$$\lambda_n \approx {}_{1/2}w_n = 0;$$

$$\nu_n = 1/2 + \lambda_n \approx {}_{1/2}u_n = 1/2 + {}_{1/2}w_n = 1/2;$$

$$H_n \approx {}_{1/2}W_n = \ln(n + 1/2) + \gamma = \ln(n + 1/2) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672;$$

$$\varepsilon_n \approx {}_{1/2}h_n = \ln(1 + {}_{1/2}u_n/n) =$$

$$\ln(1 + (1/2)/n) = \ln(1 + 0.5/n) = \ln(1 + 1/(2n)).$$

Для почти, или не совсем полного, приближения первого порядка

$$\lambda_n \approx {}_{1-\delta}w_n = 1/(24n);$$

$$\nu_n = 1/2 + \lambda_n \approx {}_{1-\delta}u_n = 1/2 + {}_{1-\delta}w_n = 1/2 + 1/(24n);$$

$$H_n \approx {}_{1-\delta}W_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n)) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/(24n)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767;$$

$$\varepsilon_n \approx {}_{1-\delta}h_n = \ln(1 + {}_{1-\delta}u_n/n) = \ln(1 + (1/2)/n) = \ln(1 + 0.5/n) = \ln(1 + 1/(2n)).$$

А для приближения первого порядка

$$\lambda_n \approx {}_1w_n = 1/{}_1z_n = 1/(24n + 12);$$

$${}_1u_n = 1/2 + {}_1w_n = 1/2 + {}_1w_n = 1/2 + 1/{}_1z_n = 1/2 + 1/(24n + 12);$$

$$H_n \approx {}_1W_n = \ln(n + 1/2 + {}_1w_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/{}_1z_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12)) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767;$$

$$\varepsilon_n \approx {}_1h_n = \ln(1 + {}_1u_n/n) = \ln(1 + (1/2 + {}_1w_n)/n) =$$
$$\ln(1 + (1/2 + 1/(24n + 12))/n).$$

С учётом специфики данной всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением <u>системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной</u> начнём с именно высокоточных вычислений всех избранных первых элементов бесконечно малой последовательности λ_n:

$$\lambda_n = \nu_n - 1/2 = \exp(\Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma) - n - 1/2 = \exp(H_n - \gamma) - n - 1/2 =$$
$$\exp(\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n - \gamma) - n - 1/2 = \exp(\ln(n) + \varepsilon_n) - n - 1/2 =$$
$$n\exp(\varepsilon_n) - n - 1/2;$$
$$\lambda_n = n(\exp(\varepsilon_n) - 1) - 1/2;$$
$$\lambda_1 = 1*(\exp(0.42278433509846713939348790991759756895784066406007640119 4233) - 1) - 1/2 =$$
$$0.02620511159586388047488871503677561453444661116991470455 0938416;$$

$$\lambda_2 = 2*(\exp(0.22963715453852182997625578845942100088234052969982114707355 2991) - 1) - 1/2 = 0.0162868309393635802562371755911835363583100225910418369355462732;$$

$$\lambda_3 = 3*(\exp(0.15750537976369078133157600632840519764368343957066028279 2872) - 1) - 1/2 = 0.011761166339476181366818363142180183750235037743133430515262353;$$

$$\lambda_4 = 4*(\exp(0.11982330731190985389235700033457776614017372867289922628620 6314) - 1) - 1/2 = 0.0091905949168749372513380938181945388202525095967998860292835672;$$

$$\lambda_5 = 5*(\exp(0.09667975599770009812606191002474326276557264312489201261491 8442) - 1) - 1/2 = 0.0075378297013681378061569700319828770739071735235723379830 16969;$$

$$\lambda_6 = 6*(\exp(0.08102486587041213858101055153689529623484997187707169533885 8657) - 1) - 1/2 = 0.0063871643691720839016850254805715672208399391194427751426646352;$$

$$\lambda_7 = 7*(\exp(0.06973132890029669143099230933156069646361307733535806987769 9993) - 1) - 1/2 = 0.0055404760511186065992002805785699254564764530337307531467412798;$$

$$\lambda_8 = 8*(\exp(0.06119993627577406828464868840021072187419740383645349597505 0114) - 1) - 1/2 = 0.0048915798677762238129291764131998143361382015023508002288388384;$$

$$\lambda_9 = 9*(\exp(0.0545280117305017248569656900408001279168278023828314659788125 87) - 1) - 1/2 = 0.00437851808435474744372629150055559287873130989895605901535747 39;$$

$$\lambda_{10} = 10*(\exp(0.0491674960726754236294647092014873296107074293995573934148733 53) - 1) - 1/2 = 0.00396273256974959787454203619048576844631048695416287013086202 7;$$

$$\lambda_{11} = 11*(\exp(0.0447664071774414726764216768298131464810111550000041033205426 36) - 1) - 1/2 = 0.00361898229276074501367570810860195613971099960464394887025163 72;$$

$$\lambda_{12} = 12*(\exp(0.0410883635211450398419891082893969388375605157274946518963893 26) - 1) - 1/2 = 0.00333005600327949460229449966181250962257688746095953180087183 08;$$

$$\lambda_{13} = 13*(\exp(0.0379687327706855370951342234860340979077064744336244185303212 44) - 1) - 1/2 = 0.00308381680167445121245411649798760295896728278746128343552602 65;$$

$$\lambda_{14} = 14*(\exp(0.0352893320455350871974653715785678335718181266802865209407251 67) - 1) - 1/2 = 0.00287146167973144765229015413490177364514368287971785672546465 4;$$

$$\lambda_{15} = 15*(\exp(0.0329631272252503023907123329978774537779777451978024565401197 68) - 1) - 1/2 = 0.00268645101519105528318681149795840741785237991384062057896170 35;$$

$$\lambda_{16} = 16*(\exp(0.030924606087679130717788417313884525649069119848048613704741955) - 1) - 1/2$$
$$= 0.0025238254466462947890314519461180994483398092203504646782543872;$$

$$\lambda_{17} = 17*(\exp(0.029123513683008994019535226449934850598160762350383666641963602) - 1) - 1/2$$
$$= 0.0023797559628874897320979209405523530416269296563721078535452087;$$

$$\lambda_{18} = 18*(\exp(0.027520655398615937616902804575388964371438080485929851682360637) - 1) - 1/2$$
$$= 0.0022512393582650626862068513203312674376437184994132908910010032;$$

$$\lambda_{19} = 19*(\exp(0.026085013075708590868229546938131825557171648139923611787100656) - 1) - 1/2$$
$$= 0.0021358870789017373263434719845803057226562249281577510736727519;$$

$$\lambda_{20} = 20*(\exp(0.024791718688158057442033402683444587117949286450024200171052982) - 1) - 1/2$$
$$= 0.0020317756836411868647094818710809455280429755962145520943507 84;$$

$$\lambda_{30} = 30*(\exp(0.016574084356702834482024882435084969384053413226008277017322114) - 1) - 1/2$$
$$= 0.0013658939512943743549550294849030002470201543416827586203021 45;$$

$$\lambda_{40} = 40*(\exp(0.012447919920906823057682941952498620878342968978008227607127422) - 1) - 1/2$$
$$= 0.0010287099196823583260810678759047173097056432088160697081750 08;$$

$$\lambda_{50} = 50*(\exp(0.00996666799974613833520891497181481380173964513023953290715964) - 1) - 1/2 = 0.000825032641513049869533653870820394850155199754758682796218565;$$

$$\lambda_{60} = 60*(\exp(0.00831018582810427175186590877706253030441007673840008824863578) - 1) - 1/2 = 0.000688676230853210517264838077025921522124868688540518483260584;$$

$$\lambda_{70} = 70*(\exp(0.007125850687179938597493698465022484665422387615911652685299246) - 1) - 1/2 = 0.000590998218416537973116816825549181444179460753686395244227903;$$

$$\lambda_{80} = 80*(\exp(0.006236979370102052295259621019270264208866968910507738470915928) - 1) - 1/2 = 0.00051758603095006151422157591626231916190075879013362664435336;$$

$$\lambda_{90} = 90*(\exp(0.005545267616717626717395931769476265059526351840511240461866579) - 1) - 1/2 = 0.00046039649082716022666826763887996380945563673311672583847903;$$

$$\lambda_{100} = 100*(\exp(0.004991666749996032162622676207122311664609813510982102304111155) - 1) - 1/2 = 0.00041458737030973191961419610125606432427433661214280066212882;$$

$$\lambda_{110} = 110*(\exp(0.004538567550028495823927390346985076317003396194575597711970341) - 1) - 1/2 = 0.000377069145764594690480046269349948789839838518067182822400522;$$

$$\lambda_{120} = 120*(\exp(0.004160879669816057967941914833055534452404622019676745066597081) - 1) - 1/2 = \mathbf{0.00034577794968234133243130284919903646157567322356717117232004;}$$

$$\lambda_{130} = 130*(\exp(0.00384122290886091245635647671970685350087989499650210992210316) - 1) - 1/2 = \mathbf{0.000319281911805446330624306741975105236260770397721641027809211;}$$

$$\lambda_{140} = 140*(\exp(0.003567176892440122732476086511515925893363437048386229994889716) - 1) - 1/2 = \mathbf{0.000296557589103249558670839833625270136507878662448196309487688;}$$

$$\lambda_{150} = 150*(\exp(0.003329629646090186616731037024655393637187536367481519712318106) - 1) - 1/2 = \mathbf{0.000276853043678282175305629788258842500700663765940026654254195;}$$

$$\lambda_{200} = 200*(\exp(0.002497916671874937997659276221554222517537798972518279471869134) - 1) - 1/2 = \mathbf{0.0002078130018879670409912776407413161105550066447515114972284;}$$

$$\lambda_{250} = 250*(\exp(0.0019986666668799983746304804755008978683497694406532802487974115) - 1) - 1/2 = \mathbf{0.000166333590018651208487876625501423062170226641297517475765475;}$$

$$\lambda_{300} = 300*(\exp(0.001665740741769541881745304673632732343162511683625200115177161) - 1) - 1/2 = \mathbf{0.00013865755584347287989777767633007771730235460397184747595043;}$$

$$\lambda_{350} = 350*(\exp(0.0014278911570179070458220883321175316207469005517978820523377 67) - 1) - 1/2 = 0.00011887764444725170877262710874620651952360829287235341407918 5;$$

$$\lambda_{400} = 400*(\exp(0.00124947916699218653119435378827527633707303216077631589217025) - 1) - 1/2 = 0.00010403652089741908486760692576253836763417626131348932099488;$$

$$\lambda_{450} = 450*(\exp(0.00111069958868058683096159854499447248948989491844725023585836 4) - 1) - 1/2 = 0.00009248975586146848706704251562606315006400826528051377310064;$$

$$\lambda_{500} = 500*(\exp(0.00099966666679999974603281269065520904985014693079184385801820 57) - 1) - 1/2 = 0.00008325003201516631990152189082272178534392068267730618122 17.$$

Теперь подсчитаем относительные, а именно делённые на соответствующие элементы бесконечно малой последовательности λ_n, приближения этих элементов λ_n.

Для приближения <u>половинного порядка</u> приближения ${}_{1/2}w_n$ этих элементов λ_n являются нулевыми по значениям:

$$\lambda_n \approx {}_{1/2}w_n = 0.$$

Для почти, или не совсем полного, приближения первого порядка

$$\lambda_n \approx {}_{1-\delta}w_n = 1/(24n);$$

$${}_{1-\delta}w_n/\lambda_n = 1/(24n\lambda_n);$$

$${}_{1-\delta}w_1/\lambda_1 = 1/(24*1*0.026205111595863880474888715036775614534446611169914704550938416) = 1.590020577254217143710868625525131251389502217402374569316734 8203;$$

$${}_{1-\delta}w_2/\lambda_2 = 1/(24*2*0.016286830939363580256237175591183536358310022591041836935546 2732) = 1.279152059163414571494275168257126202241115936700253822043887 7092;$$

$${}_{1-\delta}w_3/\lambda_3 = 1/(24*3*0.011761166339476181366818363142180183750235037743133430515262 353) = 1.180910845744187646105171918243059538961889860687117121142189 6299;$$

$${}_{1-\delta}w_4/\lambda_4 = 1/(24*4*0.009190594916874937251338093818194538820252509596799886029283 5672) = 1.133405047320770020314875336833909305268665682746539278469664 219;$$

$${}_{1-\delta}w_5/\lambda_5 = 1/(24*5*0.007537829701368137806156970031982877073907173523572337983016 969) = 1.105534837410933988897074120229365605406330663802305541643545 0418;$$

$$_{1-\delta}w_6/\lambda_6 = 1/(24*6*0.0063871643691720839016850254805715672208399391194427751426646352)$$
$$= 1.0872499975046980386808958584480567882679345485558189841247201357;$$

$$_{1-\delta}w_7/\lambda_7 = 1/(24*7*0.0055404760511186065992002805785699254564764530337307531467412798)$$
$$= 1.0743446767862453508274969290882460224294339758908141818117454162;$$

$$_{1-\delta}w_8/\lambda_8 = 1/(24*8*0.0048915798677762238129291764131998143361382015023508002288388384)$$
$$= 1.0647548387472429820118396524060159642264260328110766283643443727;$$

$$_{1-\delta}w_9/\lambda_9 = 1/(24*9*0.0043785180843547474437262915005559287873130989895605901535747 39)$$
$$= 1.0573508069253270974387822685304562936679504267892413559056561513;$$

$$_{1-\delta}w_{10}/\lambda_{10} = 1/(24*10*0.0039627325697495978745420361904857684463104869541628701308620 27) =$$
$$1.0514629976480989823944018140075345461709991243153630447970857 67;$$

$$_{1-\delta}w_{11}/\lambda_{11} = 1/(24*11*0.0036189822927607450136757081086019561397109996046439488702516372)$$
$$= 1.0466696108063021136775129605630545731372868977545252539351274914;$$

$$_{1-\delta}w_{12}/\lambda_{12} = 1/(24*12*0.0033300560032794946022944996618125096225768874609595318008718308)$$
$$= 1.0426918402581578088293635324365373428326850058151096548870525 6;$$

$$_{1-\delta}w_{13}/\lambda_{13} = 1/(24*13*0.0030838168016744512124541164979876029589672827874612834355260265)$$
$$= 1.0393380707271210908269187742989522197544621318132996641350594608;$$

${}_{1-\delta}w_{14}/\lambda_{14} = 1/(24*14*0.0028714616797314476522901541349017736451436828797178567254646 54)$
$= 1.0364722946498882961031292933858327656223956953026365819965569498;$

${}_{1-\delta}w_{15}/\lambda_{15} = 1/(24*15*0.0026864510151910552831868114979584074178523799138406205789617035)$
$= 1.0339953202460412288791845052523510294039296879737604590555729512;$

${}_{1-\delta}w_{16}/\lambda_{16} = 1/(24*16*0.0025238254466462947890314519461180994483398092203504646782543872)$
$= 1.0318331127563242354052054862531845298707304114388279225475471 51;$

${}_{1-\delta}w_{17}/\lambda_{17} = 1/(24*17*0.0023797559628874897320979209405523530416269296563721078535452087)$
$= 1.0299292996341324291158320385773889079441452941848646156634130842;$

${}_{1-\delta}w_{18}/\lambda_{18} = 1/(24*18*0.0022512393582650626862068513203312674376437184994132908910010032)$
$= 1.0282402030314302565304678388544938193194483299159224171541290836;$

${}_{1-\delta}w_{19}/\lambda_{19} = 1/(24*19*0.0021358870789017373263434719845803057226562249281577510736727519)$
$= 1.0267314587005094455427255233050362425899602763880937513611077492;$

${}_{1-\delta}w_{20}/\lambda_{20} = 1/(24*20*0.0020317756836411868647094818710809455280429755962145520943507 84) =$
$1.0253756603680525142462428092056673965083653409872807816778480 26;$

${}_{1-\delta}w_{30}/\lambda_{30} = 1/(24*30*0.0013658939512943743549550294849030002470201543416827586203021 45)$
$= 1.0168350826744079470126930607636329204678721558662878780021564811;$

${}_{1-\delta}w_{40}/\lambda_{40} = 1/(24*40*0.0010287099196823583260810678759047173097056432088160697081750 08)$ $= 1.0125951414839171400328248159913221160772115315396444475862468724;$

${}_{1-\delta}w_{50}/\lambda_{50} = 1/(24*50*0.00082503264151304986953365387082039485015519975475868279621856 5)$ $= 1.0100610465606071035126329881216669191791805350806040035268630856;$

${}_{1-\delta}w_{60}/\lambda_{60} = 1/(24*60*0.00068867623085321051726483807702592152212486868854051848326058 4)$ $= 1.0083757988628235469944279133073130720012689286668417907437728198;$

${}_{1-\delta}w_{70}/\lambda_{70} = 1/(24*70*0.00059099821841653797311681682554918144417946075368639524422790 3) =$ $1.0071740940825797589296862268992416976133205713539319790607638796;$

${}_{1-\delta}w_{80}/\lambda_{80} = 1/(24*80*0.00051758603095006151422157591626231916190075879013362664435336) =$ $1.0062739374501881215721765853422243893707199034052264162725119336;$

${}_{1-\delta}w_{90}/\lambda_{90} = 1/(24*90*0.00046039649082716022666826763887996380945563673311672583847903) =$ $1.0055744824014443423927023268805524447094063915873642841740390356;$

${}_{1-\delta}w_{100}/\lambda_{100} = 1/(24*100*0.00041458737030973191961419610125606432427433661214280066212882)$ $= 1.0050153393611130420220866521985512783659148280111652839374176968;$

${}_{1-\delta}w_{110}/\lambda_{110} =$
$1/(24*110*0.00037706914576459469048004626934994878983983851806718282240052 2) =$
$1.0045581375262061541729343332967320790323549607233900353772448077;$

$${}_{1-\delta}w_{120}/\lambda_{120} = 1/(24*120*0.000345777949682341332431302849199036461575673223567171172320 04)$$
$$= 1.0041773279690235326497922864625516554303963097365998754434526962;$$

$${}_{1-\delta}w_{130}/\lambda_{130} = 1/(24*130*0.0003192819118054463306243067419751052362607703977216410278 09211)$$
$$= 1.0038552409700059471995652624308500240580459183661805895187621105;$$

$${}_{1-\delta}w_{140}/\lambda_{140} = 1/(24*140*0.000296557589103249558670839833625270136507878662448196309487688)$$
$$= 1.0035792660677063392733578709282147073182729125839151221096833922;$$

$${}_{1-\delta}w_{150}/\lambda_{150} = 1/(24*150*0.000276853043678282175305629788258842500700663765940026654254195)$$
$$= 1.0033401623013044863680451728719553516641060219058120166598592487;$$

$${}_{1-\delta}w_{200}/\lambda_{200} = 1/(24*200*0.000207813001887967040991277640741316110555006644751511497228 4) =$$
$$1.0025038445171337520652723762975541574183655875829646695734366576;$$

$${}_{1-\delta}w_{250}/\lambda_{250} = 1/(24*250*0.000166333590018651208487876625501423062170226641297517475765475)$$
$$= 1.0020024617275326640134493330638162742748881035474670296835139793;$$

$${}_{1-\delta}w_{300}/\lambda_{300} = 1/(24*300*0.000138657555843472879897776763300777173023546039718474759504 3)$$
$$= 1.0016683767718879683878192585738845361692088723687250475400836645;$$

$${}_{1-\delta}w_{350}/\lambda_{350} = 1/(24*350*0.000118877644447251708772627108746206519523608292872353414079185)$$
$$= 1.0014298281325952739344842633775235913315276806036592293837941199;$$

$${}_{1-\delta}w_{400}/\lambda_{400} = 1/(24*400*0.000104036520897419084867606925762538367634176261313489320994 88)$$
$$= 1.0012509623363502001409553184163598191192027426338859204137928136;$$

$${}_{1\text{-}\delta}w_{450}/\lambda_{450} = 1/(24*450*0.000092489755861468487067042515626063150064008265280513773100640) = 1.0011118715815201715736521837809673628417127317230034845298830865;$$

$${}_{1\text{-}\delta}w_{500}/\lambda_{500} = 1/(24*500*0.000083250032015166319901521890822721785343920682677306181221 7) = 1.0010006160496351252898506885115201445278089384089652662346470853.$$

Для приближения первого порядка

$$\lambda_n \approx {}_1w_n = 1/{}_1z_n = 1/(24n + 12);$$

$${}_1w_n/\lambda_n = 1/((24n + 12)\lambda_n);$$

$${}_1w_1/\lambda_1 = 1/((24*1 + 12)*0.026205111595863880474888715036775614534446611169914704550938416) = 1.0600137181694780958072457503500875009263348116015830462111565469;$$

$${}_1w_2/\lambda_2 = 1/((24*2 + 12)*0.016286830939363580256237175591183536358310022591041836935546273 2) = 1.0233216473307316571954201346057009617928927493602030576351101674;$$

$${}_1w_3/\lambda_3 = 1/((24*3 + 12)*0.011761166339476181366818363142180183750235037743133430515262353) = 1.0122092963521608395187187870654796048244770234461003895504482542;$$

$${}_1w_4/\lambda_4 = 1/((24*4 + 12)*0.00919059491687493725133809381819453882025250959679988602928356 72) = 1.0074711531740177958354447438523638269054806068858126919730348613;$$

$${}_1w_5/\lambda_5 = 1/((24*5 + 12)*0.0075378297013681378061569700319828770739071735235723379830169 69) = 1.0050316703735763535427946547539687321875733307293686742214045834;$$

$${}_1w_6/\lambda_6 = 1/((24*6 + 12)*0.0063871643691720839016850254805715672208399391194427751426646352) = 1.0036153823120289587823654077982062660934780448207559853458955099;$$

$${}_1w_7/\lambda_7 = 1/((24*7 + 12)*0.0055404760511186065992002805785699254564764530337307531467412798) = 1.0027216983338289941056638004823629542674717108314265696909623885;$$

$${}_1w_8/\lambda_8 = 1/((24*8 + 12)*0.0048915798677762238129291764131998143361382015023508002288388384) = 1.0021222011738757477758490846174267898601656779398368266958535273;$$

$${}_1w_9/\lambda_9 = 1/((24*9 + 12)*0.0043785180843547474437262915005559287873130989895605901535747 39) = 1.0017007644555730396788463596604322782117425095898076003316742486;$$

$${}_1w_{10}/\lambda_{10} = 1/((24*10 + 12)*0.0039627325697495978745420361904857684463104869541628701308620 27) = 1.0013933310934276022803826800071757582580944041098695664734150162;$$

$${}_1w_{11}/\lambda_{11} = 1/((24*11 + 12)*0.0036189822927607450136757081086019561397109996046439488702516372) = 1.0011622364234194130828384840168348090878396413304154602857741222;$$

$${}_1w_{12}/\lambda_{12} = 1/((24*12 + 12)*0.0033300560032794946022944996618125096225768874609595318008718308) = 1.0009841666478314964761889911390758491193776055825052686915704576;$$

$${}_1w_{13}/\lambda_{13} = 1/((24*13 + 12)*0.0030838168016744512124541164979876029589672827874612834355260265) = 1.0008440681075980874629588196952873227265190898942885654633905919;$$

${}_{1}w_{14}/\lambda_{14}$ = 1/((24*14 +
12)*0.002871461679731447652290154134901773645143682879717856725464654)
= 1.0007318706964438720995731108552868081871406713266835964104687791;

${}_{1}w_{15}/\lambda_{15}$ = 1/((24*15 +
12)*0.0026864510151910552831868114979584074178523799138406205789617035)
= 1.000640632496168931173404359921630028455415827071381089408618985;

${}_{1}w_{16}/\lambda_{16}$ = 1/((24*16 +
12)*0.0025238254466462947890314519461180994483398092203504646782543872)
= 1.0005654426727992585747447139424819683594961565467422279248942071;

${}_{1}w_{17}/\lambda_{17}$ = 1/((24*17 +
12)*0.0023797559628874897320979209405523530416269296563721078535452087)
= 1.0005027482160143597125225517608920820028840000652970552158869961;

${}_{1}w_{18}/\lambda_{18}$ = 1/((24*18 +
12)*0.0022512393582650626862068513203312674376437184994132908910010032)
= 1.0004499272738240333809957351016696620405443209992758653391526219;

$${}_1w_{19}/\lambda_{19} = 1/((24*19 + 12)*0.0021358870789017373263434719845803057226562249281577510736727519) = 1.0004050110415220238621428175792660825235510385319887833774896017;$$

$${}_1w_{20}/\lambda_{20} = 1/((24*20 + 12)*0.0020317756836411868647094818710809455280429755962145520943507 84) = 1.0003664979200512334109685943469925819593808204753958845637541717;$$

$${}_1w_{30}/\lambda_{30} = 1/((24*30 + 12)*0.0013658939512943743549550294849030002470201543416827586203021 45) = 1.0001656550895815872255997318986553316077431041307749619693342437;$$

$${}_1w_{40}/\lambda_{40} = 1/((24*40 + 12)*0.0010287099196823583260810678759047173097056432088160697081750 08) = 1.0000939668976959407731603120901946825453941052243401951469104913;$$

$${}_1w_{50}/\lambda_{50} = 1/((24*50 + 12)*0.0008250326415130498695336538708203948501551997547586827962185 65) = 1.0000604421392149539729039486353137813655252822580237658681812729;$$

$${}_1w_{60}/\lambda_{60} = 1/((24*60 + 12)*0.000688676230853210517264838077025921522124868688540518483260584) = 1.0000421145747010383415814016270873441334898466117439247045680857;$$

$${}_1w_{70}/\lambda_{70} = 1/((24*70 + 12)*0.000590998218416537973116816825549181444179460753686395244227903) = 1.0000310154011430230507522820276158699706729077273083480035953415;$$

$${}_1w_{80}/\lambda_{80} = 1/((24*80 + 12)*0.000517586030950061514221575916262319161900758790133626644435336) = 1.0000237887703732885189332525140118155236967984151318422583969526;$$

$${}_1w_{90}/\lambda_{90} = 1/((24*90 + 12)*0.000460396490827160226668267638879963809455636733116725838479 03) = 1.0000188222776794565231293858480632046833875717443401721067791514;$$

$${}_1w_{100}/\lambda_{100} = 1/((24*100 + 12)*0.000414587370309731919614196101256064324274336612142800662128 82) = 1.0000152630458836239025737832821405754884724656827515263058882555;$$

$${}_1w_{110}/\lambda_{110} = 1/((24*110 + 12)*0.00037706914576459469048004626934994878983983851806718282240052 2) = 1.000012625591698434018305671155117906729041137371700487705854559 7;$$

$${}_1w_{120}/\lambda_{120} = 1/((24*120 + 12)*0.000345777949682341332431302849199036461575673223567171172320 04) = 1.000010617064587750356639621373495424495000474426489502516301440 2;$$

$${}_1w_{130}/\lambda_{130} = 1/((24*130 + 12)*0.000319281911805446330624306741975105236260770397721641027809211) = 1.000009052307285617899950069854486614004183673468225874616391374 5;$$

$${}_1w_{140}/\lambda_{140} = 1/((24*140 + 12)*0.000296557589103249558670839833625270136507878662448196309487688) = 1.000007809604831939489466917650890099818919628197495495340609785 8;$$

$${}_1w_{150}/\lambda_{150} = 1/((24*150 + 12)*0.000276853043678282175305629788258842500700663765940026654254195) = 1.000006806280369919968151335088327593020703676318085066438397922 3;$$

${}_1w_{200}/\lambda_{200}$ = 1/((24*200 + 12)*0.0002078130018879670409912776407413161105550066447515114972284) = 1.0000038349298092289927904002968121271006140524518350818687647457;

${}_1w_{250}/\lambda_{250}$ = 1/((24*250 + 12)*0.000166333590018651208487876625501423062170226641297517475765475) = 1.0000024568139048543048396537563036669410060913647375545743652488;

${}_1w_{300}/\lambda_{300}$ = 1/((24*300 + 12)*0.00013865755584347287989777767633007771730235460397184747595043) = 1.0000017072597883211858428538175219995033699224978952221698006634;

${}_1w_{350}/\lambda_{350}$ = 1/((24*350 + 12)*0.000118877644447251708772627108746206519523608292872353414079185) = 1.0000012549112934261827945568677125733695711503888180607256146704;

${}_1w_{400}/\lambda_{400}$ = 1/((24*400 + 12)*0.00010403652089741908486760692576253836763417626131348932099488) = 1.0000009611349315357213036888053531277095657854021332538464847077;

$${}_1w_{450}/\lambda_{450} = 1/((24*450 + 12)*0.0000924897558614684870670425156260631500640082652805137731 0064) = 1.000000759626379749629619273477103914048325703163932448476020 8412;$$

$${}_1w_{500}/\lambda_{500} = 1/((24*500 + 12)*0.0000832500320151663199015218908227217853439206826773061812217) = 1.0000006154342009243654852033082119325952137246842809852493976876.$$

Для приближения <u>половинного порядка</u> применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера для гармонических чисел

$$H_n \approx {}_{1/2}W_n = \ln(n + 1/2) + \gamma = \ln(n + 1/2) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67;$$

$$H_1 \approx {}_{1/2}W_1 = \ln(1 + 1/2) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 0.9826807730096972425845252055467515676141497594024177964197 81324;$$

$$\mathbf{H_2 \approx {}_{1/2}W_2 = \ln(2 + 1/2) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 1.4935063967756879257900393018504135024922605558481860665977348 82;}$$

$$\mathbf{H_3 \approx {}_{1/2}W_3 = \ln(3 + 1/2) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 1.8299786333969008562946327120674055926037439311615295331444771 4;}$$

$$\mathbf{H_4 \approx {}_{1/2}W_4 = \ln(4 + 1/2) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 2.0812930616778069339797704424692772722616403172251672481544756 58;}$$

$$\mathbf{H_5 \approx {}_{1/2}W_5 = \ln(5 + 1/2) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 2.2819637571399580952512235465893551627883660555170855199036547;}$$

$$\mathbf{H_6 \approx {}_{1/2}W_6 = \ln(6 + 1/2) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 2.4490178418031242872427674101895444677719271463398754611041325 01;}$$

$$H_7 \approx {}_{1/2}W_7 = \ln(7 + 1/2) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$

$$2.592118685443797617185284538772939207139751113670935518332429216;$$

$$H_8 \approx {}_{1/2}W_8 = \ln(8 + 1/2) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$

$$2.717281828397803631438814586497352398554862214165413131982324728;$$

$$H_9 \approx {}_{1/2}W_9 = \ln(9 + 1/2) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$

$$2.828507463508028011198307400512079400204038462878797163223047227;$$

$$H_{10} \approx {}_{1/2}W_{10} = \ln(10 + 1/2) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$

$$2.928590922065010547689877948989931297251234488984278984879171474;$$

$$H_{11} \approx {}_{1/2}W_{11} = \ln(11 + 1/2) +$$

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$

$$3.019562700270737241996032800434421981409039516420104086683722368;$$

$$H_{12} \approx {}_{1/2}W_{12} = \ln(12 + 1/2) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 3.1029443092097883003907986350766011420178619101167037885103 82773;$$

$$H_{13} \approx {}_{1/2}W_{13} = \ln(13 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.17990535034591662537501567939180297690913087504791669988916 9991;$$

$$H_{14} \approx {}_{1/2}W_{14} = \ln(14 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.251364314328061578372552000986137468461172115502412423606757342;$$

$$H_{15} \approx {}_{1/2}W_{15} = \ln(15 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.318055688826733797118444293166583073416598132060260316441805063;$$

$$H_{16} \approx {}_{1/2}W_{16} = \ln(16 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.380576045808067786646468783511880867435856613339834971638349033;$$

$$H_{17} \approx {}_{1/2}W_{17} = \ln(17 + 1/2) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 3.4394165458310012308953920452935932321293452854300472550571 25032;$$

$$H_{18} \approx {}_{1/2}W_{18} = \ln(18 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.494986396985811995557375639655673026866736788747304508329999672;$$

$$H_{19} \approx {}_{1/2}W_{19} = \ln(19 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.547630130471233978638012647112070172419417704162624912838826835;$$

$$H_{20} \approx {}_{1/2}W_{20} = \ln(20 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.597640551045895355056043341661633451343069670978969978304349901;$$

$$H_{30} \approx {}_{1/2}W_{30} = \ln(30 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.994942348514898799940669072049840609282340944660929407622470637;$$

$$H_{40} \approx {}_{1/2}W_{40} = \ln(40 + 1/2) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$4.278517639014026316770260916314328681556621432870666151623864325;$$

$$H_{50} \approx {}_{1/2}W_{50} = \ln(50 + 1/2) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$4.499189001182847002073478235537215019857541788777273094616352352;$$

$$H_{60} \approx {}_{1/2}W_{60} = \ln(60 + 1/2) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$4.679859029938328639313167124554484462610072909454502695122222409;$$

$$H_{70} \approx {}_{1/2}W_{70} = \ln(70 + 1/2) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$4.832828374719755829405475875318925276510200261422641829620289671;$$

$$H_{80} \approx {}_{1/2}W_{80} = \ln(80 + 1/2) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$4.965472849326050547101385543877601711046124246001965275143112518;$$

$$H_{90} \approx {}_{1/2}W_{90} = \ln(90 + 1/2) +$$
$$0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 =$$
$$5.0825655156074132980283670072572347902069916430821471582678150 94;$$

$$H_{100} \approx {}_{1/2}W_{100} = \ln(100 + 1/2) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 =$$
$$5.18737339240066330225459720191047431818108266262431313355756 5455;$$

$$H_{110} \approx {}_{1/2}W_{110} = \ln(110 + 1/2) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 =$$
$$5.28223118585934036749230202806267100336013015892562024840137 0239;$$

$$H_{120} \approx {}_{1/2}W_{120} = \ln(120 + 1/2) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 =$$
$$5.36886541783224254665569128733504159798391896559591618235648 9252;$$

$$H_{130} \approx {}_{1/2}W_{130} = \ln(130 + 1/2) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 =$$
$$5.44858889166428096116304247483118887775615323114791132707614 6009;$$

$$H_{140} \approx {}_{1/2}W_{140} = \ln(140 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.522423153675333316295918293317397803786544967588597872302724358;$$

$$H_{150} \approx {}_{1/2}W_{150} = \ln(150 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.591178749090463279767475225413252628162880116043084948336162405;$$

$$H_{200} \approx {}_{1/2}W_{200} = \ln(200 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.878029911648156737039959055973575593844596522519450149774363404;$$

$$H_{250} \approx {}_{1/2}W_{250} = \ln(250 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.100674585426452349844275982291530933411472362013409396279466071;$$

$$H_{300} \approx {}_{1/2}W_{300} = \ln(300 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.282663418876795130462360475203371995082524453311065769285787475;$$

$$H_{350} \approx {}_{1/2}W_{350} = \ln(350 + 1/2) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 6.4365763713761776416896283926522264359510498372373261348203097 74;$$

$$H_{400} \approx {}_{1/2}W_{400} = \ln(400 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.56992943140994677229758598313912649166630070435812661226117323 5;$$

$$H_{450} \approx {}_{1/2}W_{450} = \ln(450 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.68757374194992546558328372552641016891483996707663073503045419 8;$$

$$H_{500} \approx {}_{1/2}W_{500} = \ln(500 + 1/2) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.79282326365680813641006373159785349723071872985915382478209036.$$

Для почти, или не совсем полного, приближения первого порядка

$$H_n \approx {}_{1-\delta}W_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n)) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/(24n)) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67;$$

$$H_1 \approx {}_{1-\delta}W_1 = \ln(1 + 1/2 + 1/(24{*}1)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$1.010079747197811685327666159816794186068245962204044548353945319;$$

$$H_2 \approx {}_{1-\delta}W_2 = \ln(2 + 1/2 + 1/(24{*}2)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$1.501805199590383019666225523257429053736081948550987481025488047;$$

$$H_3 \approx {}_{1-\delta}W_3 = \ln(3 + 1/2 + 1/(24{*}3)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$1.833939034612997784433021661638146735784764985991511850191541391;$$

$$H_4 \approx {}_{1-\delta}W_4 = \ln(4 + 1/2 + 1/(24{*}4)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$2.083605201436186468845390819841537855544179410016891034398633274;$$

$$H_5 \approx {}_{1-\delta}W_5 = \ln(5 + 1/2 + 1/(24*5)) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 =$$
$$2.2834777619711731521995007440378666590598343714874509274401427 16;$$

$$H_6 \approx {}_{1-\delta}W_6 = \ln(6 + 1/2 + 1/(24*6)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$2.450085647563954427943433727569973491160732346295290224826659708;$$

$$H_7 \approx {}_{1-\delta}W_7 = \ln(7 + 1/2 + 1/(24*7)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$2.592912021463193494024426808611447611145266492873535668644922367;$$

$$H_8 \approx {}_{1-\delta}W_8 = \ln(8 + 1/2 + 1/(24*8)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$2.717894385844216424844081488734047533143624813506644472467053789;$$

$$H_9 \approx {}_{1-\delta}W_9 = \ln(9 + 1/2 + 1/(24*9)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$2.828994674236301429501417647969763312963296012992553973016695619;$$

$$H_{10} \approx {}_{1-\delta}W_{10} = \ln(10 + 1/2 + 1/(24*10)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 2.9289876687474613818372954176146197711893685601150797771870569;$$

$$H_{11} \approx {}_{1-\delta}W_{11} = \ln(11 + 1/2 + 1/(24*11)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 3.0198920268009654642726702467195245124485859700930912849679367774;$$

$$H_{12} \approx {}_{1-\delta}W_{12} = \ln(12 + 1/2 + 1/(24*12)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 3.1032220484144621666527460000363976253379654410256264594854 67838;$$

$$H_{13} \approx {}_{1-\delta}W_{13} = \ln(13 + 1/2 + 1/(24*13)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 3.1801427390710670389610811623376279693659524224253961095680 34915;$$

$$H_{14} \approx {}_{1-\delta}W_{14} = \ln(14 + 1/2 + 1/(24*14)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 3.2515695477818348085849364596943957274470278622065460819451 62621;$$

$$H_{15} \approx {}_{1-\delta}W_{15} = \ln(15 + 1/2 + 1/(24*15)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.318234884239810746556228142788463709581269870757635593570799941;$$

$$H_{16} \approx {}_{1-\delta}W_{16} = \ln(16 + 1/2 + 1/(24*16)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.380733861637322972684412491774966774578236583613792664295776296;$$

$$H_{17} \approx {}_{1-\delta}W_{17} = \ln(17 + 1/2 + 1/(24*17)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.43955659204648115693306259532672641467011044219728533522612812;$$

$$H_{18} \approx {}_{1-\delta}W_{18} = \ln(18 + 1/2 + 1/(24*18)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.49511151428344158932405323370144943494306140333174093426270907;$$

$$H_{19} \approx {}_{1-\delta}W_{19} = \ln(19 + 1/2 + 1/(24*19)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.54774258478678684128522281918541800351935304674919354061085037;$$

$$H_{20} \approx {}_{1-\delta}W_{20} = \ln(20 + 1/2 + 1/(24*20)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 3.5977421718985817598601601261010664031623115542510264911585415 45;$$

$$H_{30} \approx {}_{1-\delta}W_{30} = \ln(30 + 1/2 + 1/(24*30)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.994987884818724887518236636911191807940473803024176522115964094;$$

$$H_{40} \approx {}_{1-\delta}W_{40} = \ln(40 + 1/2 + 1/(24*40)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.278543358847877607927039015724151403522433828756963290564936 2;$$

$$H_{50} \approx {}_{1-\delta}W_{50} = \ln(50 + 1/2 + 1/(24*50)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.499205502696861287296599005189598248606661342135230734036770307;$$

$$H_{60} \approx {}_{1-\delta}W_{60} = \ln(60 + 1/2 + 1/(24*60)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.679870508293021403695666510095975065575033103318585789548369833;$$

$$H_{70} \approx {}_{1-\delta}W_{70} = \ln(70 + 1/2 + 1/(24*70)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 4.8328368177776625922141060995421193764794795344299569831409415 67;$$

$$H_{80} \approx {}_{1-\delta}W_{80} = \ln(80 + 1/2 + 1/(24*80)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.965479319284416387586913463192951330888354865467008377414202334;$$

$$H_{90} \approx {}_{1-\delta}W_{90} = \ln(90 + 1/2 + 1/(24*90)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.082570631207179014715095761527356457790789822798479278010861376;$$

$$H_{100} \approx {}_{1-\delta}W_{100} = \ln(100 + 1/2 + 1/(24*100)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.187377538329050687158001283203513879587220493214448132546742177;$$

$$H_{110} \approx {}_{1-\delta}W_{110} = \ln(110 + 1/2 + 1/(24*110)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.282234613798069394006483676237782705713767334760332335166453602;$$

$$H_{120} \approx {}_{1-\delta}W_{120} = \ln(120 + 1/2 + 1/(24*120)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 5.3688682993403086101033985757705319550820251809102849471764 7929;$$

$$H_{130} \approx {}_{1-\delta}W_{130} = \ln(130 + 1/2 + 1/(24*130)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.448591347698203702938522215960658936932665716838007218676110042;$$

$$H_{140} \approx {}_{1-\delta}W_{140} = \ln(140 + 1/2 + 1/(24*140)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.522425271958126188219089939992230343750251467134854587895040214;$$

$$H_{150} \approx {}_{1-\delta}W_{150} = \ln(150 + 1/2 + 1/(24*150)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.591180594788280096628816935600294849725413724094387838237105115;$$

$$H_{200} \approx {}_{1-\delta}W_{200} = \ln(200 + 1/2 + 1/(24*200)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.878030950716611086440205562220544521729610676183054215817109277;$$

$$H_{250} \approx {}_{1-\delta}W_{250} = \ln(250 + 1/2 + 1/(24*250)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 6.100675250762225691261587092705212242031162615869476571744066082;$$

$$H_{300} \approx {}_{1-\delta}W_{300} = \ln(300 + 1/2 + 1/(24*300)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.282663881069330212617223088837669246079280284773490900006743707;$$

$$H_{350} \approx {}_{1-\delta}W_{350} = \ln(350 + 1/2 + 1/(24*350)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.436576711026958897928669706052586831477390649442797556600087633;$$

$$H_{400} \approx {}_{1-\delta}W_{400} = \ln(400 + 1/2 + 1/(24*400)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.569929691501465174879368132779594626522907790002996613067580487;$$

$$H_{450} \approx {}_{1-\delta}W_{450} = \ln(450 + 1/2 + 1/(24*450)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.687573947482851275083143051659853403164205803068953120355111493;$$

$$H_{500} \approx {}_{1-\delta}W_{500} = \ln(500 + 1/2 + 1/(24*500)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.792823430156960775425380195813221880153802824998856274490277844.$$

Для приближения <u>первого порядка</u>

$$H_n \approx {}_1W_n = \ln(n + 1/2 + {}_1w_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/{}_1z_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12)) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767;$$

$$H_1 \approx {}_1W_1 = \ln(1 + 1/2 + 1/(24*1 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 1.001029911677893777644260284512314824943486159779849084226233914;$$

$$H_2 \approx {}_1W_2 = \ln(2 + 1/2 + 1/(24*2 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 1.500150939494356504572279576501812240975803547707935792199758796;$$

$$H_3 \approx {}_1W_3 = \ln(3 + 1/2 + 1/(24*3 + 12)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 1.8333742223980390704882595737462291241955319234137747017950070 86;$$

$$H_4 \approx {}_1W_4 = \ln(4 + 1/2 + 1/(24*4 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 2.083348560859902958316222967649017686029180195889113574342688747;$$

$$H_5 \approx {}_1W_5 = \ln(5 + 1/2 + 1/(24*5 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 2.283340219848681372227312001121662179450581290700644177209916665;$$

$$H_6 \approx {}_1W_6 = \ln(6 + 1/2 + 1/(24*6 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 2.450003549127883521212699277709483960095599562409579511704375 53;$$

$$H_7 \approx {}_1W_7 = \ln(7 + 1/2 + 1/(24*7 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 2.592859151971521341341081836921048739897728819466243227811181111;$$

$$H_8 \approx {}_1W_8 = \ln(8 + 1/2 + 1/(24*8 + 12)) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 =$$
$$2.717858363438276037081704171982444228775245127493353148344990727;$$

$$H_9 \approx {}_1W_9 = \ln(9 + 1/2 + 1/(24*9 + 12)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$2.828969037483451141209516085483630327836640164392991701308924492;$$

$$H_{10} \approx {}_1W_{10} = \ln(10 + 1/2 + 1/(24*10 + 12)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$2.928968779617210822562824359741917536426011211467550850282196205;$$

$$H_{11} \approx {}_1W_{11} = \ln(11 + 1/2 + 1/(24*11 + 12)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$3.019877710511174881819009252601995145726400027019349103563638261;$$

$$H_{12} \approx {}_1W_{12} = \ln(12 + 1/2 + 1/(24*12 + 12)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$3.103210940327219135228335424263764121285818439215054517198270355;$$

$$H_{13} \approx {}_1W_{13} = \ln(13 + 1/2 + 1/(24*13 + 12)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 3.1801339479009182796994569758238767640406869825843473597356113 62;$$

$$H_{14} \approx {}_1W_{14} = \ln(14 + 1/2 + 1/(24*14 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.251562471467320904172838379821412264651586163008445099438053555;$$

$$H_{15} \approx {}_1W_{15} = \ln(15 + 1/2 + 1/(24*15 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.318229104243798927712692684621119872872023648210278957080864 55;$$

$$H_{16} \approx {}_1W_{16} = \ln(16 + 1/2 + 1/(24*16 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.3807290797053746371287268310739320788061892595901137292747428 19;$$

$$H_{17} \approx {}_1W_{17} = \ln(17 + 1/2 + 1/(24*17 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.4395525909982065036377701300001975507662562986372384767480827 01;$$

$H_{18} \approx {}_1W_{18} = \ln(18 + 1/2 + 1/(24*18 + 12)) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$3.4951081329406765606830997360096790466791089598893547719022954;$

$H_{19} \approx {}_1W_{19} = \ln(19 + 1/2 + 1/(24*19 + 12)) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$3.5477397015007634241219489889870318885674872328914823029420252 16;$

$H_{20} \approx {}_1W_{20} = \ln(20 + 1/2 + 1/(24*20 + 12)) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$3.5977396934640601398267595697839509244339596281572213408454030 51;$

$H_{30} \approx {}_1W_{30} = \ln(30 + 1/2 + 1/(24*30 + 12)) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$3.9949871383386583313208389106045164148283479341416765602778735 96;$

$H_{40} \approx {}_1W_{40} = \ln(40 + 1/2 + 1/(24*40 + 12)) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$4.2785430413230975771847972710394349592983752208324192701270092 87;$

$$H_{50} \approx {}_1W_{50} = \ln(50 + 1/2 + 1/(24*50 + 12)) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 4.499205339316869078888063998700090230941413061493895242302507166;$$

$$H_{60} \approx {}_1W_{60} = \ln(60 + 1/2 + 1/(24*60 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.679870413431125857172262501178303289571720912545441623262199001;$$

$$H_{70} \approx {}_1W_{70} = \ln(70 + 1/2 + 1/(24*70 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.832836757898070272837659911003536740968084466656659115853412273;$$

$$H_{80} \approx {}_1W_{80} = \ln(80 + 1/2 + 1/(24*80 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.965479279098468774510633780335408027294508217091777045467010 29;$$

$$H_{90} \approx {}_1W_{90} = \ln(90 + 1/2 + 1/(24*90 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.082570602944268775216746970732429920700520657839025521208583061;$$

$$H_{100} \approx {}_1W_{100} = \ln(100 + 1/2 + 1/(24*100 + 12)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.1873775177025838424141074789339526463071177140938448363435530 98;$$

$$H_{110} \approx {}_1W_{110} = \ln(110 + 1/2 + 1/(24*110 + 12)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.2822345982870608861485172668734320153341388995982570197323486 06;$$

$$H_{120} \approx {}_1W_{120} = \ln(120 + 1/2 + 1/(24*120 + 12)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.3688682873838607605210601728807474062448209705296764947038854 47;$$

$$H_{130} \approx {}_1W_{130} = \ln(130 + 1/2 + 1/(24*130 + 12)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.4485913382881235563919563954999910947071591020691318932901639 88;$$

$$H_{140} \approx {}_1W_{140} = \ln(140 + 1/2 + 1/(24*140 + 12)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.5224252644197612156329760422133498665627267346173494439803345 33;$$

$$H_{150} \approx {}_1W_{150} = \ln(150 + 1/2 + 1/(24*150 + 12)) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =$$
$$5.591180588656399302022544353690975051187676175820838370880906501;$$

$$H_{200} \approx {}_1W_{200} = \ln(200 + 1/2 + 1/(24*200 + 12)) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =$$
$$5.878030948125419276305110938394288067080811845380332228524028588;$$

$$H_{250} \approx {}_1W_{250} = \ln(250 + 1/2 + 1/(24*250 + 12)) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =$$
$$6.100675249434210616516260593194512198617615526466160814412488961;$$

$$H_{300} \approx {}_1W_{300} = \ln(300 + 1/2 + 1/(24*300 + 12)) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =$$
$$6.282663880300291230173090687989312444532624601152772675529172182;$$

$$H_{350} \approx {}_1W_{350} = \ln(350 + 1/2 + 1/(24*350 + 12)) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =$$
$$6.436576710542435754337794833028356594666469889856610446615088826;$$

$$H_{400} \approx {}_1W_{400} = \ln(400 + 1/2 + 1/(24*400 + 12)) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 6.56992969117675670469083792537318885720850815901089160873074403 2;$$

$$H_{450} \approx {}_1W_{450} = \ln(450 + 1/2 + 1/(24*450 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.687573947254734843661331479095792859685091189220935012093607379;$$

$$H_{500} \approx {}_1W_{500} = \ln(500 + 1/2 + 1/(24*500 + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.792823429990626970438653949900843126281107043682734330846750855.$$

Общие функциональные метод и алгоритм последовательного построения функциональных непрерывных, или цепных, дробей и общие функциональные метод и алгоритм построения рядов функциональных единичных дробей последовательным их выделением всегда дают совпадающие первые приближения

$${}_1C_n = {}_1D_n = {}_1S_n = {}_1T_n$$

соответственно, каждое из которых является суммой начального приближения нулевого порядка и первой единичной дроби, знаменателем которой является сумма бесконечно большой и конечной постоянной частей знаменателя обращения остатка нулевого порядка начального приближения нулевого порядка. Применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера всеобщей методологией изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной этими совпадающими первыми приближениями являются

$$\lambda_n \approx {}_1w_n = {}_1d_n = {}_1t_n = 1/{}_1z_n = 1/(24n + 12);$$

$$ {}_1u_n = 1/2 + {}_1w_n = 1/2 + {}_1d_n = 1/2 + {}_1t_n = 1/2 + 1/{}_1z_n = $$

$$ 1/2 + 1/(24n + 12);$$

$$H_n \approx {}_1W_n = \ln(n + 1/2 + {}_1w_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + {}_1d_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + {}_1t_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/{}_1z_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12)) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767;$$

$$\varepsilon_n \approx {}_1h_n = \ln(1 + {}_1u_n/n) = \ln(1 + (1/2 + {}_1w_n)/n) = \ln(1 + (1/2 + {}_1d_n)/n) = \ln(1 + (1/2 + {}_1t_n)/n) = \ln(1 + (1/2 + 1/(24n + 12))/n).$$

Различия итогов этих методов и алгоритмов начнутся во втором приближении.

Общие функциональные метод и алгоритм последовательного построения функциональных непрерывных, или цепных, дробей развивают первую функциональную единичную дробь

$$1/(24n + 12)$$

в функциональную непрерывную, или цепную, дробь определением

$$_1r_n = {}_0\eta_n - (24n + 12)$$

и обращением

$$_1\eta_n = 1/({}_0\eta_n - 24n - 12)$$

бесконечно малого остатка в знаменателе для избранных гармонических чисел.

С учётом специфики данной всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной начнём с именно высокоточных вычислений обращений $_0\eta_n$ всех избранных первых элементов бесконечно малой последовательности λ_n:

$${}_0\eta_n = 1/\lambda_n;$$

$${}_0\eta_1 = 1/\lambda_1 =$$

$$1/0.026205111595863880474888715036775614534446611169914704550938416 =$$

$$38.160493854101211449060847012603150033348053217656989663601635688 2;$$

$${}_0\eta_2 = 1/\lambda_2 =$$

$$1/0.016286830939363580256237175591183536358310022591041836935546273 2 =$$

$$61.399298839843899431725208076342057707573564961612183458106610042;$$

$${}_0\eta_3 = 1/\lambda_3 =$$

$$1/0.011761166339476181366818363142180183750235037743133430515262353 =$$

$$85.025580893581510519572378113500286805256069969472432722237653355 7;$$

$${}_0\eta_4 = 1/\lambda_4 =$$

$$1/0.009190594916874937251338093818194538820252509596799886029283567 2 =$$

$$108.806884542793921950228032336055293305791905543667770733087765023 5;$$

$${}_{0}\eta_{5} = 1/\lambda_{5} =$$
$$1/0.0075378297013681378061569700319828770739071735235723379830169 69 =$$
$$132.66418048931207866764889442752387264875967965627666499722540501 04;$$

$${}_{0}\eta_{6} = 1/\lambda_{6} =$$
$$1/0.0063871643691720839016850254805715672208399391194427751426646352 =$$
$$156.56399964067651757004900361652017751058257499203793371395969954 53;$$

$${}_{0}\eta_{7} = 1/\lambda_{7} =$$
$$1/0.0055404760511186065992002805785699254564764530337307531467412798 =$$
$$180.48990570008921893901948408682533176814490794965678254437322992 3;$$

$${}_{0}\eta_{8} = 1/\lambda_{8} =$$
$$1/0.0048915798677762238129291764131998143361382015023508002288388384 =$$
$$204.43292903947065254627321326195506513147379829972671264595411956 15;$$

$${}_{0}\eta_{9} = 1/\lambda_{9} =$$
$$1/0.0043785180843547474437262915005555928787313098989560590153574739 =$$
$$228.38777429587065304677697000257855943227729218647613287562172868 65;$$

$$_0\eta_{10} = 1/\lambda_{10} =$$
$$1/0.0039627325697495978745420361904857684463104869541628701308620270 =$$

$$_0\eta_{10} = 1/\lambda_{10} =$$
$$1/0.003962732569749597874542036190485768446310486954162870130862027 =$$
$$= 252.3511194355437557746564353618082910810397898356871307513005840847;$$

$$_0\eta_{11} = 1/\lambda_{11} =$$
$$1/0.0036189822927607450136757081086019561397109996046439488702516372 =$$
$$= 276.3207772528637580108634215886464073082437410071946670388736577277;$$

$$_0\eta_{12} = 1/\lambda_{12} =$$
$$1/0.0033300560032794946022944996618125096225768874609595318008718308 =$$
$$= 300.2952499943494489428566973417227547358132816747515806074711372811;$$

$$_0\eta_{13} = 1/\lambda_{13} =$$
$$1/0.0030838168016744512124541164979876029589672827874612834355260265 =$$
$$= 324.2734780668617803379986575812730925633921851257494952101385517605;$$

$$_0\eta_{14} = 1/\lambda_{14} =$$
$$1/0.0028714616797314476522901541349017736451436828797178567254646540 =$$
$$= 348.2546910023624674906514425776398092491249536216858915508431351280;$$

${}_0\eta_{15} = 1/\lambda_{15} =$

$1/0.0026864510151910552831868114979584074178523799138406205789617035 =$

$372.23831528857484239650642189084637058541468767055376526000626243;$

${}_0\eta_{16} = 1/\lambda_{16} =$

$1/0.0025238254466462947890314519461180994483398092203504646782543872 =$

$396.22391529842850639559890672122285947036047799250992225825810600003;$

${}_0\eta_{17} = 1/\lambda_{17} =$

$1/0.0023797559628874897320979209405523530416269296563721078535452087 =$

$420.21115425072603107925947173957467444121128002742476319067253834 22;$

${}_0\eta_{18} = 1/\lambda_{18} =$

$1/0.0022512393582650626862068513203312674376437184994132908910010032 =$

$444.19976770957787082116210638514132994600167852367848421058376413 01;$

${}_0\eta_{19} = 1/\lambda_{19} =$

$1/0.0021358870789017373263434719845803057226562249281577510736727519 =$

$468.18954516743230716748283862709652662102188603297075062066513361 34;$

$${}_0\eta_{20} = 1/\lambda_{20} =$$
$$1/0.0020317756836411868647094818710809455280429755962145520943507 84 =$$
$$492.18031697666520683819654841872035032401536367389477520536705248 03;$$

$${}_0\eta_{30} = 1/\lambda_{30} =$$
$$1/0.0013658939512943743549550294849030002470201543416827586203021 45 =$$
$$732.12125952557372184913900374981570273686795222372727216155266638 68;$$

$${}_0\eta_{40} = 1/\lambda_{40} =$$
$$1/0.0010287099196823583260810678759047173097056432088160697081750 08 =$$
$$972.09133582456045443151182335166923143412307027805866968279699752 01;$$

$${}_0\eta_{50} = 1/\lambda_{50} =$$
$$1/0.0008250326415130498695336538708203948501551997547586827962185 65 =$$
$$1212.0732558727285242151595857460003030150166420967248042322357027 199;$$

$${}_0\eta_{60} = 1/\lambda_{60} =$$
$$1/0.0006886762308532105172648380770259215221248686885405184832605 84 =$$
$$1452.0611503624659076719761951625308236818272572802521786710328604 523;$$

$${}_0\eta_{70} = 1/\lambda_{70} =$$
$$1/0.0005909982184165379731168168255491814441794607536863952442279 03 =$$

$${}_0\eta_{70} = 1/\lambda_{70} =$$
$$1/0.000590998218416537973116816825549181444179460753686395244227903 =$$
$$1692.052478058733995001872861190726051990378559874605724822083317 7509;$$

$${}_0\eta_{80} = 1/\lambda_{80} =$$
$$1/0.000517586030950061514221575916262319161900758790133626644353 36 =$$
$$1932.045959904361193418579043857070827591782214538034719243222912 4978;$$

$${}_0\eta_{90} = 1/\lambda_{90} =$$
$$1/0.000460396490827160226668267638879963809455636733116725838479 03 =$$
$$2172.040881987119779568237026061993280572317805828706853815924316 9279;$$

$${}_0\eta_{100} = 1/\lambda_{100} =$$
$$1/0.000414587370309731919614196101256064324274336612142800662128 82 =$$
$$2412.036814466671300853007965276523068078195587226796681449802472 2822;$$

$${}_0\eta_{110} = 1/\lambda_{110} =$$
$$1/0.000377069145764594690480046269349948789839838518067182822400 522 =$$
$$2652.033483069184247016546639903372688645417096309749693395926292 4263;$$

$${}_0\eta_{120} = 1/\lambda_{120} =$$

$$1/0.000345777949682341332431302849199036461575673223567171172320040 =$$

$$2892.030704550787774031401785012148767639541372041407641277143765073 4;$$

$${}_0\eta_{130} = 1/\lambda_{130} =$$

$$1/0.00031928191180544633062430674197510523626077039772164102780921 1 =$$

$$3132.028351826418555262643618784252075061103265302483439298537784899 9;$$

$${}_0\eta_{140} = 1/\lambda_{140} =$$

$$1/0.000296557589103249558670839833625270136507878662448196309487688 =$$

$$3372.02633398749329995848244631880141658939698628195481028853619775 55;$$

$${}_0\eta_{150} = 1/\lambda_{150} =$$

$$1/0.000276853043678282175305629788258842500700663765940026654254195 =$$

$$3612.02458428469615092496262233903926599078167886092325997549329529 57;$$

$${}_0\eta_{200} = 1/\lambda_{200} =$$

$$1/0.000207813001887967040991277640741316110555006644751511497228 4 =$$

$$4812.01845368224200991330740622825995560815482039823041395249595633 86;$$

$${}_0\eta_{250} = 1/\lambda_{250} =$$
$$1/0.000166333590018651208487876625501423062170226641297517475765475 =$$
$$6012.0147703651959840806959983828976456493286212848021781010838760769;$$

$${}_0\eta_{300} = 1/\lambda_{300} =$$
$$1/0.0001386575558434728798977767633007771730235460397184747595043 =$$
$$7212.012312757593372392298661731968660418303881054820342288602384087;$$

$${}_0\eta_{350} = 1/\lambda_{350} =$$
$$1/0.000118877644447251708772627108746206519523608292872353414079185 =$$
$$8412.0105563138003010496678123711981671848325170707375268238706072082;$$

$${}_0\eta_{400} = 1/\lambda_{400} =$$
$$1/0.00010403652089741908486760692576253836763417626131348932099488 =$$
$$9612.0092384289619213531710567970542635443463292853048359724110107589;$$

$${}_0\eta_{450} = 1/\lambda_{450} =$$
$$1/0.00009248975586146848706704251562606315006400826528051377310064 =$$
$$10812.0082130804178529954435848344475186904975026084376329227373345262;$$

$${}_0\eta_{500} = 1/\lambda_{500} =$$
$$1/0.000083250032015166319901521890822721785343920682677306181221\,7$$
$$= 12012.007392595621503478208262138241734333707260907583194815765023638\,2.$$

Теперь вычислим элементы последовательности обращений ${}_1\eta_n$ бесконечно малых остатков первого порядка

$${}_1r_n = {}_0\eta_n - (24n + 12)$$

в знаменателях элементов бесконечно малой последовательности λ_n как функциональных единичных дробей для избранных гармонических чисел H_n:

$${}_1\eta_n = 1/({}_0\eta_n - 24n - 12);$$

$${}_1\eta_1 = 1/{}_1r_1 =$$
$$1/(38.160493854101211449060847012603150033348053217656989663601635688\,2 - 24*1 - 12) = 0.462857137085451555488399152463415804559891116658292641122913010\,4;$$

$${}_1\eta_2 = 1/{}_1r_2 =$$
$$1/(61.399298839843899431725208076342057707573564961612183458106610042 - 24*2 -$$

12) =

0.7146436283128457938931718170202395510775359031509624375512381003;

${}_1\eta_3 = 1/{}_1r_3 =$

1/(85.0255808935815105195723781135002868052560699694724327222376533557 - 24*3 - 12) = 0.9750571663906710482752628080655460490226342789087454171317544578;

${}_1\eta_4 = 1/{}_1r_4 =$

1/(108.8068845427939219502280323360552933057919055436677707330877650235 - 24*4 - 12) = 1.2393346841636048972215758444708449761333528021090468556830703836;

${}_1\eta_5 = 1/{}_1r_5 =$

1/(132.6641804893120786676488944275238726487596796562766649972254050104 - 24*5 - 12) = 1.5056148382734707632750253586276991917380316538267383214308834505;

${}_1\eta_6 = 1/{}_1r_6 =$

1/(156.5639996406765175700490036165201775105825749920379337139596995453 - 24*6 - 12) = 1.77305077499783510167659316503154295574637547441071261264047639;

$${}_1\eta_7 = 1/{}_1r_7 =$$

$$1/(180.489905700089218939019484086825331768144907949656782544373229923 - 24*7 - 12) = 2.0412091547779204955032285935119607694101514919979871347528102525;$$

$${}_1\eta_8 = 1/{}_1r_8 =$$

$$1/(204.4329290394706525462732132619550651314737982997267126459541195615 - 24*8 - 12) = 2.3098473625671121989701471957434966936474845698199798768795992256;$$

$${}_1\eta_9 = 1/{}_1r_9 =$$

$$1/(228.387742958706530467769700025785594322772921864761328756217286865 - 24*9 - 12) = 2.5788197171623837422334725820602705273099030086327432891938825277;$$

$${}_1\eta_{10} = 1/{}_1r_{10} =$$

$$1/(252.3511194355437557746564353618082910810397898356871307513005840847 - 24*10 - 12) = 2.8480337422830644684114557567262708304336029148030002120173310276;$$

$${}_1\eta_{11} = 1/{}_1r_{11} =$$

$$1/(276.320777252863758010863421588646407308243741007194667038873657727 - 24*11 - 12) = 3.1174280316713248866964692939232621093814580306975163119094217025;$$

$${}_1\eta_{12} = 1/{}_1r_{12} =$$

$$1/(300.2952499943494489428566973417227547358132816747515806074711372811 - 24*12 - 12) = 3.3869602680379065980150951849981824016951007716013684313920651723;$$

$${}_1\eta_{13} = 1/{}_1r_{13} =$$

$$1/(324.27347806686178033799865758127309256339218512574949521013855176O5 - 24*13 - 12) = 3.6566003682679754606280136622564248108687868835577734479814972343;$$

$${}_1\eta_{14} = 1/{}_1r_{14} =$$

$$1/(348.2546910023624674906514425776398092491249536216858915508431351 28 - 24*14 - 12) = 3.9263263747999795118308733970914746836399724868508237920290671616;$$

$${}_1\eta_{15} = 1/{}_1r_{15} =$$

$$1/(372.2383152885748423965064218908463705854146876705537652600062624 3 - 24*15 - 12) = 4.1961218937321857193396883339355183572559815208027241301752550982;$$

$${}_1\eta_{16} = 1/{}_1r_{16} =$$

$$1/(396.2239152984285063955989067212228594703604779925099222582581060003 -$$

24*16 - 12) = 4.465974442203146785150390230123496938729142977096232459093234 3476;

${}_1\eta_{17} = 1/{}_1r_{17} =$

1/(420.21115425072603107925947173957467444121128002742476319067253834 22 - 24*17 - 12) = 4.73587435044100715051705516960884064168138134383687945994732 3586;

${}_1\eta_{18} = 1/{}_1r_{18} =$

1/(444.19976770957787082116210638514132994600167852367848421058376413 01 - 24*18 - 12) = 5.00581401325119139038509340682317385645003182516311756167719 71271;

${}_1\eta_{19} = 1/{}_1r_{19} =$

1/(468.18954516743230716748283862709652662102188603297075062066513361 34 - 24*19 - 12) = 5.27578736797461739928801610963168464649741786085011920639144 1697;

${}_1\eta_{20} = 1/{}_1r_{20} =$

1/(492.18031697666520683819654841872035032401536367389477520536705248 03 - 24*20 - 12) = 5.54578952295042307128422826199668683273052280568644585582039 94448;

${}_1\eta_{30} = 1/{}_1r_{30} =$
$1/(732.12125952557372184913900374981570273686795222372727216155266663868 -$
$24*30 - 12) =$
$8.2467748019682999020638215384909544144143232388705140149982006206;$

${}_1\eta_{40} = 1/{}_1r_{40} =$
$1/(972.0913358245604544315118233516692314341230702780586696827969975201 - 24*40$
$- 12) = 10.948606473006746874307876833486437129792667773364706240334272 6035;$

${}_1\eta_{50} = 1/{}_1r_{50} =$
$1/(1212.0732558727285242151595857460003030150166420967248042322357027199 -$
$24*50 - 12) =$
$13.650782698417326167675205216047449917391180108397437840130331 6516;$

${}_1\eta_{60} = 1/{}_1r_{60} =$
$1/(1452.0611503624659076719761951625308236818272572802521786710328604523 -$
$24*60 - 12) =$
$16.353132829875151903685861991043997312191166062043875889421034 9884;$

$${}_1\eta_{70} = 1/{}_1r_{70} =$$

$$1/(1692.0524780587339950018728611907260519903785598746057248220833177509 -$$

$$24*70 - 12) =$$

$$19.0555829259782702812310199474444806893826138777664786954394449739;$$

$${}_1\eta_{80} = 1/{}_1r_{80} =$$

$$1/(1932.0459599043611934185790438570708275917822145380347192432229124978 -$$

$$24*80 - 12) =$$

$$21.7580957554027748259850174011088339140384712939439774689146440017;$$

$${}_1\eta_{90} = 1/{}_1r_{90} =$$

$$1/(2172.0408819871197795682370260619932805723178058287068538159243169279 -$$

$$24*90 - 12) =$$

$$24.4606505322286277438734380048120166865985186568550299177625100642;$$

$${}_1\eta_{100} = 1/{}_1r_{100} =$$

$$1/(2412.0368144666713008530079652765230680781955872267966814498024722822 -$$

$$24*100 - 12) =$$

$$27.163234739444471337852108701105265182507332396827617462562474797;$$

$${}_1\eta_{110} = 1/{}_1r_{110} =$$

$$1/(2652.0334830691842470165466399033726886454170963097496933959262924263 -$$

$$24*110 - 12) =$$

$$29.865840389281759435393969897373906963466033328625218829823341334 4;$$

$${}_1\eta_{120} = 1/{}_1r_{120} =$$

$$1/(2892.0307045507877740314017850121487676395413720414076412771437650734 -$$

$$24*120 - 12) =$$

$$32.568462144646681998441869132059155252479497629039559932949105816 1;$$

$${}_1\eta_{130} = 1/{}_1r_{130} =$$

$$1/(3132.0283518264185552626436187842520750611032653024834392985377848999 -$$

$$24*130 - 12) =$$

$$35.271096303888752096512994437967327924310273424756540595731232461 6;$$

$${}_1\eta_{140} = 1/{}_1r_{140} =$$

$$1/(3372.0263339874932999584824463188014165893969862819548102885361977555 -$$

$$24*140 - 12) =$$

$$37.973740218963255604334582039490041725896833091431341909059472925;$$

$${}_1\eta_{150} = 1/{}_1r_{150} =$$

$$1/(3612.0245842846961509249626223390392659907816788609232599754932952957 -$$

$$24*150 - 12) =$$

$$40.6763919454840386243961925486663364374604954643488097312640533929;$$

$${}_1\eta_{200} = 1/{}_1r_{200} =$$

$$1/(4812.0184536822420099133074062282599556081548203982304139524959563386 -$$

$$24*200 - 12) =$$

$$54.1897268461409979760891703815000092509245157763307601595131995349;$$

$${}_1\eta_{250} = 1/{}_1r_{250} =$$

$$1/(6012.0147703651959840806959983828976456493286212848021781010838760769 -$$

$$24*250 - 12) =$$

$$67.7031330458836805836293115819649709137276046836437004915340378119;$$

$${}_1\eta_{300} = 1/{}_1r_{300} =$$

$$1/(7212.0123127575933723922986617319686604183038810548203422886023840087 -$$

$$24*300 - 12) =$$

$$81.2165749562284567070675076483023338597879099197951573727271065151;$$

$${}_1\eta_{350} = 1/{}_1r_{350} = 1/(8412.0105563138003010496678123711981671848325170707375268238706072082 - 24*350 - 12) = 94.7300372949771115879951963803945979693467096209475410890946864746;$$

$${}_1\eta_{400} = 1/{}_1r_{400} = 1/(9612.0092384289619213531710567970542635443463292853048359724110107589 - 24*400 - 12) = 108.2435124112299267149809432152603238150502976789813869211325566638;$$

$${}_1\eta_{450} = 1/{}_1r_{450} = 1/(10812.0082130804178529954435848344475186904975026084376329227373345262 - 24*450 - 12) = 121.7569960506258899259770188462917642958620130229347833997499673455;$$

$${}_1\eta_{500} = 1/{}_1r_{500} = 1/(12012.0073925956215034782082621382417343337072609075831948157650236382 - 24*500 - 12) = 135.2704856588143492408335646972063642851358536775015954057663317392.$$

По итогам проведённых математических экспериментов всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения позволяют

предложить уточняющее дополнение знаменателя (24n + 12) первой единичной дроби как приближению первого порядка функциональной непрерывной, или цепной, дробью к бесконечно малой последовательности λ_n

$$1/{}_2z_n = 1/(n/3.7) = 3.7/n,$$

являющееся второй единичной дробью в знаменателе (24n + 12) первой дроби как бесконечно малой частью её знаменателя

$$24n + 12 + 3.7/n.$$

В итоге получаем приближение второго порядка ${}_2d_n$ функциональной непрерывной, или цепной, дробью к бесконечно малой последовательности λ_n:

$$\lambda_n \approx {}_2d_n = 1/({}_1z_n + 1/{}_2z_n) = 1/(24n + 12 + 3.7/n);$$

$${}_2u_n = 1/2 + {}_2d_n = 1/2 + 1/({}_1z_n + 1/{}_2z_n) = 1/2 + 1/(24n + 12 + 3.7/n).$$

Соответствующие приближения второго порядка ${}_2D_n$ гармонических чисел H_n имеют вид:

$$H_n \approx {}_2D_n = \ln(n + 1/2 + {}_2d_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/({}_1z_n + 1/{}_2z_n)) + \gamma =$$
$$\ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12 + 3.7/n)) + \gamma =$$
$$\ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12 + 3.7/n)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767.$$

Соответствующее приближение второго порядка ${}_2b_n$ бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n имеет вид:

$$\varepsilon_n \approx {}_2b_n = \ln(1 + {}_2u_n/n) =$$
$$\ln(1 + (1/2 + {}_2d_n)/n) =$$
$$\ln(1 + (1/2 + 1/(24n + 12 + 3.7/n))/n).$$

Вычислим относительные, а именно делённые на элементы бесконечно малой последовательности λ_n, приближения

второго порядка ${}_2d_n$ функциональной непрерывной, или цепной, дробью к элементам бесконечно малой последовательности λ_n для избранных первых гармонических чисел H_n:

$$\lambda_n \approx {}_2d_n = 1/({}_1z_n + 1/{}_2z_n) = 1/(24n + 12 + 3.7/n);$$

$${}_2d_n/\lambda_n = 1/((24n + 12 + 3.7/n)\lambda_n);$$

$${}_2d_1/\lambda_1 = 1/((24*1 + 12 + 3.7/1)*0.026205111595863880474888715036775614534446611169914704550938416) = 0.96122150765998013725594073079604911922791066039438261117384472 77;$$

$${}_2d_2/\lambda_2 = 1/((24*2 + 12 + 3.7/2)*0.016286830939363580256237175591183536358310022591041836935546273 2) = 0.99271299660216490592926771344126204862689676574959067838490881 23;$$

$${}_2d_3/\lambda_3 = 1/((24*3 + 12 + 3.7/3)*0.011761166339476181366818363142180183750235037743133430515262353) = 0.99756254470373301352646513234454775289702076616510480315491967 18;$$

$$
{}_2d_4/\lambda_4 = 1/((24*4 + 12 + 3.7/4)*0.0091905949168749372513380938181945388202525095967998860292835672) = 0.9989156258232170938740237074689492155684361307658275945199703009;
$$

$$
{}_2d_5/\lambda_5 = 1/((24*5 + 12 + 3.7/5)*0.007537829701368137806156970031982877073907173523572337983016969) = 0.9994288118827186881697219709772779316615916803998543392890267065;
$$

$$
{}_2d_6/\lambda_6 = 1/((24*6 + 12 + 3.7/6)*0.0063871643691720839016850254805715672208399391194427751426646352) = 0.999663720170330004703941706607556736259971746251173355628134721;
$$

$$
{}_2d_7/\lambda_7 = 1/((24*7 + 12 + 3.7/7)*0.0055404760511186065992002805785699254564764530337307531467412798) = 0.9997858193405274452584762116070090388359692614129915943741494101;
$$

$$
{}_2d_8/\lambda_8 = 1/((24*8 + 12 + 3.7/8)*0.0048915798677762238129291764131998143361382015023508002288388384) = 0.9998553722050285629211870795962832555186100057454384674253426402;
$$

$${}_2d_9/\lambda_9 = 1/((24*9 + 12 + 3.7/9)*0.004378518084354747443726291500555928787313098989560590153574739) = 0.9998978297722604842248347181121793232915773846759182740091431426;$$

$${}_2d_{10}/\lambda_{10} = 1/((24*10 + 12 + 3.7/10)*0.003962732569749597874542036190485768446310486954162870130862027) = 0.9999251869697022458083624652764127712526837176989623598339762417;$$

$${}_2d_{11}/\lambda_{11} = 1/((24*11 + 12 + 3.7/11)*0.0036189822927607450136757081086019561397109996046439488702516372) = 0.9999435963356585643713187608892688358688953354209761941729809636;$$

$${}_2d_{12}/\lambda_{12} = 1/((24*12 + 12 + 3.7/12)*0.0033300560032794946022944996618125096225768874609595318008718308) = 0.9999564336465836188679080856066467954684794461517382044259104941;$$

$${}_2d_{13}/\lambda_{13} = 1/((24*13 + 12 + 3.7/13)*0.0030838168016744512124541164979876029589672827874612834355260265) = 0.9999656557319551069558987946382689003781337397430423032312074325;$$

$${}_2d_{14}/\lambda_{14} = 1/((24*14 + 12 + 3.7/14)*0.0028714616797314476522901541349017736451436828797178567254646 54) = 0.99997244991141262687801140268822063077870856506831890430334185 7;$$

$${}_2d_{15}/\lambda_{15} = 1/((24*15 + 12 + 3.7/15)*0.00268645101519105528318681149795840741785237991384062057896170 35) = 0.999977564935190399904650380278792836073073466529058953543366215 4;$$

$${}_2d_{16}/\lambda_{16} = 1/((24*16 + 12 + 3.7/16)*0.00252382544664629478903145194611809944833980922035046467825438 72) = 0.999981488836199836321842123056227542553396477416937513783322506 8;$$

$${}_2d_{17}/\lambda_{17} = 1/((24*17 + 12 + 3.7/17)*0.00237975596288748973209792094055235304162692965637210785354520 87) = 0.999984548939953039509975365647041374287916872274342563971252033 6;$$

$${}_2d_{18}/\lambda_{18} = 1/((24*18 + 12 + 3.7/18)*0.00225123935826506268620685132033126743764371849941329089100100 32) = 0.999986970343109630774155848134940522909567669300525621995636123 7;$$

$${}_2d_{19}/\lambda_{19} = 1/((24*19 + 12 + 3.7/19)*0.0021358870789017373263434719845803057226562249281577510736727519) = 0.99998891129210897806605145563753656326083566606635163750943012 23;$$

$${}_2d_{20}/\lambda_{20} = 1/((24*20 + 12 + 3.7/20)*0.0020317756836411868647094818710809455280429755962145520943507 84) = 0.99999048523759400802177341531887471240288786467262264231004003 07;$$

$${}_2d_{30}/\lambda_{30} = 1/((24*30 + 12 + 3.7/30)*0.0013658939512943743549550294849030002470201543416827586203021 45) = 0.99999716740654860772429827909206878085687013420834459425536589 89;$$

$${}_2d_{40}/\lambda_{40} = 1/((24*40 + 12 + 3.7/40)*0.0010287099196823583260810678759047173097056432088160697081750 08) = 0.99999880240261133012703196799858987846745352965696028894657349 74;$$

$${}_2d_{50}/\lambda_{50} = 1/((24*50 + 12 + 3.7/50)*0.0008250326415130498695336538708203948501551997547586827962185 65) = 0.99999938607108850137463520028150121445969193473065572253198707 57;$$

$${}_2d_{60}/\lambda_{60} = 1/((24*60 + 12 + 3.7/60)*0.000688676230853210517264838077025921522124868688540518483260584) = 0.9999996444336954750580906424974128672325628438279725346864512369;$$

$${}_2d_{70}/\lambda_{70} = 1/((24*70 + 12 + 3.7/70)*0.000590998218416537973116816825549181444179460753686395244227903) = 0.9999997759620087826548064631833590443335230087478050815496799935;$$

$${}_2d_{80}/\lambda_{80} = 1/((24*80 + 12 + 3.7/80)*0.00051758603095006151422157591626231916190075879013362664435336) = 0.9999998498505722590329186187220263632880332003118635070165752567;$$

$${}_2d_{90}/\lambda_{90} = 1/((24*90 + 12 + 3.7/90)*0.00046039649082716022666826763887996380945563673311672583847903) = 0.9999998945121295543369668793131058766102166192095996589149539759;$$

$${}_2d_{100}/\lambda_{100} = 1/((24*100 + 12 + 3.7/100)*0.00041458737030973191961419610125606432427433661214280066212882) = 0.9999999230802310664608411750219930573528497229631206658313294831;$$

$${}_2d_{110}/\lambda_{110} = 1/((24*110 + 12 + 3.7/110)*0.00037706914576459469048004626934994878983983851806718282240052 2) = 0.99999994219739523107591234578942676152467516555587518694419374 28;$$

$${}_2d_{120}/\lambda_{120} = 1/((24*120 + 12 + 3.7/120)*0.000345777794968234133243130284919903646157567322356717117232004) = 0.999999955469857349042118367806296014354229639221138193700843011 5;$$

$${}_2d_{130}/\lambda_{130} = 1/((24*130 + 12 + 3.7/130)*0.000319281911805446330624306741975105236260770397721641027809211) = 0.999999964970930395278713869733359751269436407246821971381068381 2;$$

$${}_2d_{140}/\lambda_{140} = 1/((24*140 + 12 + 3.7/140)*0.000296557589103249558670839833625270136507878662448196309487688) = 0.999999971950416974774150309541787183761090624563978111170529860 9;$$

$${}_2d_{150}/\lambda_{150} = 1/((24*150 + 12 + 3.7/150)*0.000276853043678282175305629788258842500700663765940026654254195) = 0.999999977192301238693542316803772085533224028977909322133318754 3;$$

$${}_2d_{200}/\lambda_{200} = 1/((24*200 + 12 + 3.7/200)*0.00020781300188796704099127764074131611055500664475151149722 84) = 0.99999999037456776400866027556383250721254600754303633993769890 04;$$

$${}_2d_{250}/\lambda_{250} = 1/((24*250 + 12 + 3.7/250)*0.000166333590018651208487876625501423062170226641297517475765475) = 0.99999999507073668283063707667234911757857426120853897067936091 51;$$

$${}_2d_{300}/\lambda_{300} = 1/((24*300 + 12 + 3.7/300)*0.000138657555843472879897777676330077717302354603971847475950 43) = 0.99999999714701819548454719250091437638301837083956091528526259 93;$$

$${}_2d_{350}/\lambda_{350} = 1/((24*350 + 12 + 3.7/350)*0.000118877644447251708772627108746206519523608292872353414079185) = 0.99999999820319161522940268512328795677917644793896500245154732 76;$$

$${}_2d_{400}/\lambda_{400} = 1/((24*400 + 12 + 3.7/400)*0.000104036520897419084867606925762538367634176261313489320994 88) = 0.99999999879618945657518703041167529708154893101931886259601872 64;$$

$${}_2d_{450}/\lambda_{450} = 1/((24*450 + 12 + 3.7/450)*0.00009248975586146848706704251562606315006400826528051377310064) = 0.9999999991544767464718188982294524467539505254566639423600618795;$$

$${}_2d_{500}/\lambda_{500} = 1/((24*500 + 12 + 3.7/500)*0.0000832500320151663199015218908227217853439206826773061812217) = 0.9999999993835852534921189161220664694507020750676180231803524384.$$

Вычислим соответствующие приближения второго порядка ${}_2D_n$ гармонических чисел H_n:

$$H_n \approx {}_2D_n = \ln(n + 1/2 + {}_2d_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/({}_1z_n + 1/{}_2z_n)) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12 + 3.7/n)) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12 + 3.7/n)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767;$$

$$H_1 \approx {}_2D_1 = \ln(1 + 1/2 + 1/(24*1 + 12 + 3.7/1)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 0.999333947207489390144701070331537778307309087750159677117312476;$$

$$H_2 \approx {}_2D_2 = \ln(2 + 1/2 + 1/(24*2 + 12 + 3.7/2)) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 =$$
$$1.4999528332820080158282910007827199177236295244973933814914 9156;$$

$$H_3 \approx {}_2D_3 = \ln(3 + 1/2 + 1/(24*3 + 12 + 3.7/3)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$1.833325170069137346956696090894827815973282208767150026925144264;$$

$$H_4 \approx {}_2D_4 = \ln(4 + 1/2 + 1/(24*4 + 12 + 3.7/4)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$2.083331123168426649159773303943222726380110931275605078577165238;$$

$$H_5 \approx {}_2D_5 = \ln(5 + 1/2 + 1/(24*5 + 12 + 3.7/5)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$2.283332551582835821814817330736333811338591183483319623367045582;$$

$$H_6 \approx {}_2D_6 = \ln(6 + 1/2 + 1/(24*6 + 12 + 3.7/6)) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$2.449999669882094870135006600295770009050268943150727790497983698;$$

$$H_7 \approx {}_2D_7 = \ln(7 + 1/2 + 1/(24*7 + 12 + 3.7/7)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 2.592856984752218632760242239747005634400472525566286176135341611;$$

$$H_8 \approx {}_2D_8 = \ln(8 + 1/2 + 1/(24*8 + 12 + 3.7/8)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 2.717857059674608078934665632188583614534741326501176336874036855;$$

$$H_9 \approx {}_2D_9 = \ln(9 + 1/2 + 1/(24*9 + 12 + 3.7/9)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 2.828968206900031725526812700821953577768000105994846562926538332;$$

$$H_{10} \approx {}_2D_{10} = \ln(10 + 1/2 + 1/(24*10 + 12 + 3.7/10)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 2.928968225744235706362394010563565047325575470957289474945747306;$$

$$H_{11} \approx {}_2D_{11} = \ln(11 + 1/2 + 1/(24*11 + 12 + 3.7/11)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 3.019877327133027665196391944342379903795722364596780542088479442;$$

$H_{12} \approx {}_2D_{12} = \ln(12 + 1/2 + 1/(24*12 + 12 + 3.7/12)) +$
$0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 =$
$3.1032106666074975438410269932642081279772431478953295752105 92836;$

$H_{13} \approx {}_2D_{13} = \ln(13 + 1/2 + 1/(24*13 + 12 + 3.7/13)) +$
$0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 =$
$3.1801337472902556272478625862082611430972603682176535773089 23968;$

$H_{14} \approx {}_2D_{14} = \ln(14 + 1/2 + 1/(24*14 + 12 + 3.7/14)) +$
$0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 =$
$3.2515623211076120199938037491351147382934986094157312382587 44446;$

$H_{15} \approx {}_2D_{15} = \ln(15 + 1/2 + 1/(24*15 + 12 + 3.7/15)) +$
$0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 =$
$3.3182289893412346175275723775309667520157988375993725419430 4872;$

$H_{16} \approx {}_2D_{16} = \ln(16 + 1/2 + 1/(24*16 + 12 + 3.7/16)) +$
$0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 =$
$3.3807289903979749674118099578334121359302366743890511658268 13206;$

$$H_{17} \approx {}_2D_{17} = \ln(17 + 1/2 + 1/(24*17 + 12 + 3.7/17)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 3.4395525205399149163264311309624105916150015653288840349137 7855;$$

$$H_{18} \approx {}_2D_{18} = \ln(18 + 1/2 + 1/(24*18 + 12 + 3.7/18)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.495108076610945523037897423984978058508826736008819463935398998;$$

$$H_{19} \approx {}_2D_{19} = \ln(19 + 1/2 + 1/(24*19 + 12 + 3.7/19)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.547739655929239141847291108931728001983811122297508667007060507;$$

$$H_{20} \approx {}_2D_{20} = \ln(20 + 1/2 + 1/(24*20 + 12 + 3.7/20)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.597739656200757663158266957949027972736159466361030604148217935;$$

$$H_{30} \approx {}_2D_{30} = \ln(30 + 1/2 + 1/(24*30 + 12 + 3.7/30)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.994987130793543562248203422123342152302967562312110186227262861;$$

$$H_{40} \approx {}_{2}D_{40} = \ln(40 + 1/2 + 1/(24*40 + 12 + 3.7/40)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 4.2785430389059574921531388522362405407507864420418153773002550 23;$$

$$H_{50} \approx {}_{2}D_{50} = \ln(50 + 1/2 + 1/(24*50 + 12 + 3.7/50)) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 4.49920533831939529287385339216307068363929996122238359247945878 8;$$

$$H_{60} \approx {}_{2}D_{60} = \ln(60 + 1/2 + 1/(24*60 + 12 + 3.7/60)) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 4.67987041294769042421238734781650426802282753327274392074695161 5;$$

$$H_{70} \approx {}_{2}D_{70} = \ln(70 + 1/2 + 1/(24*70 + 12 + 3.7/70)) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 4.83283675763619370401922636697873890844308040921932126627505341 2;$$

$$H_{80} \approx {}_{2}D_{80} = \ln(80 + 1/2 + 1/(24*80 + 12 + 3.7/80)) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 4.96547927894455112459163278063946666369591168456023610503399981 5;$$

$$H_{90} \approx {}_2D_{90} = \ln(90 + 1/2 + 1/(24*90 + 12 + 3.7/90)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.0825706028479789132670810534127952207039723502300437386226485 91;$$

$$H_{100} \approx {}_2D_{100} = \ln(100 + 1/2 + 1/(24*100 + 12 + 3.7/100)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.1873775176393029490322466329821991199082518738807723923673337 46;$$

$$H_{110} \approx {}_2D_{110} = \ln(110 + 1/2 + 1/(24*110 + 12 + 3.7/110)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.2822345982437803401264069341375872274588799501785846233755152 03;$$

$$H_{120} \approx {}_1W_{120} = \ln(120 + 1/2 + 1/(24*120 + 12 + 3.7/120)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.3688682873532671328192339231311864516893472057946633686576217 5;$$

$$H_{130} \approx {}_2D_{130} = \ln(130 + 1/2 + 1/(24*130 + 12 + 3.7/130)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.4485913382658904910581096148159880886218939960355358614435856 58;$$

$$H_{140} \approx {}_2D_{140} = \ln(140 + 1/2 + 1/(24*140 + 12 + 3.7/140)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.5224252644032180769033393883843176568248818247051343038802438 45;$$

$$H_{150} \approx {}_2D_{150} = \ln(150 + 1/2 + 1/(24*150 + 12 + 3.7/150)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.591180588643836841295672805837633700235627038175517467561348269;$$

$$H_{200} \approx {}_2D_{200} = \ln(200 + 1/2 + 1/(24*200 + 12 + 3.7/200)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.878030948121434499559161037866347617561301851852199199105123823;$$

$$H_{250} \approx {}_2D_{250} = \ln(250 + 1/2 + 1/(24*250 + 12 + 3.7/250)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 6.100675249432576004512369841467925203535182099168349122141378731;$$

$$H_{300} \approx {}_2D_{300} = \ln(300 + 1/2 + 1/(24*300 + 12 + 3.7/300)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 6.282663880299502145489198196596028598746846792264330255103121652;$$

$$H_{350} \approx {}_{2}D_{350} = \ln(350 + 1/2 + 1/(24*350 + 12 + 3.7/350)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 6.4365767105420095219605294111317107338295550674348842919573905 96;$$

$$H_{400} \approx {}_{2}D_{400} = \ln(400 + 1/2 + 1/(24*400 + 12 + 3.7/400)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 6.5699296911765067212984701396726604389633232256643680693290370 3;$$

$$H_{450} \approx {}_{2}D_{450} = \ln(450 + 1/2 + 1/(24*450 + 12 + 3.7/450)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 6.6875739472545787152568742428713166662551722848644324074211460 8;$$

$$H_{500} \approx {}_{2}D_{500} = \ln(500 + 1/2 + 1/(24*500 + 12 + 3.7/500)) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 6.7928234299905245004587400010514860694926439275470800219673931 67.$$

Общие функциональные метод и алгоритм построения рядов функциональных единичных дробей $1/_{m}z$ последовательным их выделением ведут к следующим

собственным приближениям приближающих функций T_n и t_n и тем самым к уточнениям, которые подлежат дополнительным исследованиям, полезным для показа сущности и возможностей этих метода и алгоритма.

Вторую функциональную единичную дробь $1/{}_2z_n$ разложения бесконечно малой последовательности λ_n вычислим по следующему алгоритму:

1. Вначале определим остатки первого порядка ${}_1r_n$ приближений первого порядка к избранным первым элементам бесконечно малой последовательности λ_n, даваемые приближающей функцией t_n в собственном первом приближении ${}_1t_n = {}_1w_n$:

$$\lambda_n \approx {}_1t_n = {}_1w_n = 1/{}_1z_n = 1/(24n + 12);$$

$${}_1r_n = \lambda_n - {}_1t_n = \lambda_n - {}_1w_n = \lambda_n - 1/(24n + 12).$$

2. Затем для избранных гармонических чисел выполним обращения ${}_1\eta_n$ этих остатков первого порядка ${}_1r_n$:

$${}_1\eta_n = 1/{}_1r_n = 1/(\lambda_n - {}_1t_n) = 1/(\lambda_n - {}_1w_n) = 1/(\lambda_n - 1/(24n + 12)).$$

3. После этого в обращениях ${}_1\eta_n$ этих остатков первого порядка ${}_1r_n$ выделяются бесконечно большая и конечная постоянная части и своей суммой составляют знаменатель ${}_2z_n$ искомой второй единичной дроби $1/{}_2z_n$.

4. Вторая единичная дробь $1/{}_2z_n$ прибавляется к первой единичной дроби $1/{}_1z_n$ как приближению ${}_1t_n = {}_1w_n$ первого порядка к бесконечно малой последовательности λ_n, и этой суммой составляется приближение ${}_2t_n$ второго порядка к бесконечно малой последовательности λ_n:

$$\lambda_n \approx {}_2t_n = 1/{}_1z_n + 1/{}_2z_n = 1/(24n + 12) + 1/{}_2z_n.$$

5. Вторая единичная дробь вычитается из остатка $_1r_n$ первого порядка, и этой разностью составляется остаток $_2r_n$ второго порядка:

$${}_2r_n = {}_1r_n - 1/{}_2z_n = \lambda_n - {}_2t_n = \lambda_n - (1/{}_1z_n + 1/{}_2z_n) = \lambda_n - 1/{}_1z_n - 1/{}_2z_n.$$

Объединим первые два шага этого алгоритма и сразу определим обращения остатков первого порядка:

$${}_1\eta_n = 1/{}_1r_n = 1/(\lambda_n - {}_1t_n) = 1/(\lambda_n - {}_1w_n) = 1/(\lambda_n - 1/(24n + 12)).$$

$${}_1\eta_1 = 1/{}_1r_1 =$$

$$1/(0.026205111595863880474888715036775614534446611169914704550938416 - 1/(24*1 + 12)) = -635.86284966274521591296530159258688270961888718914726289529525062;$$

$${}_1\eta_2 = 1/{}_1r_2 =$$

$$1/(0.0162868309393635802562371755911835363583100225910418369355462732 - 1/(24*2 + 12)) = -2632.7170619262448580154185412728623838791292513434647751844569299303;$$

$${}_1\eta_3 = 1/{}_1r_3 =$$

$$1/(0.0117611663394761813668183631421801837502350377431334305152 62353 - 1/(24*3 + 12)) = -6964.0033660525749166302543737104929219037074719801076632816596852038;$$

$${}_1\eta_4 = 1/{}_1r_4 = 1/$$

$$(0.0091905949168749372513380938181945388202525095967998860292835672 - 1/(24*4 + 12)) = -14563.599756084287521192460649907935801619427083799922524687324313 1639;$$

$${}_1\eta_5 = 1/{}_1r_5 = 1/$$

$$(0.0075378297013681378061569700319828770739071735235723379830169 69 - 1/(24*5 + 12)) = -26365.832942076954579304041848729030716843463536277088512611696 3878027;$$

$${}_1\eta_6 = 1/{}_1r_6 = 1/$$

$$(0.0063871643691720839016850254805715672208399391194427751426646352 - 1/(24*6 + 12)) = -43304.963660347315034401571264207629371043793545259102141218652 6601505;$$

$${}_1\eta_7 = 1/{}_1r_7 = 1/$$

$$(0.0055404760511186065992002805785699254564764530337307531467412798 - 1/(24*7 + 12)) = -66315.176614804624054304606429787528928888908340734783165990856 7265568;$$

${}_1\eta_8 = 1/{}_1r_8 = 1/$(0.004891579867776223812929176413199814336138201502350800228838384 - 1/(24*8 + 12)) = -96330.6078405929412723416456980613584028337178576282825562216379205394;

${}_1\eta_9 = 1/{}_1r_9 = 1/$(0.0043785180843547474437262915005555928787313098989560590153574739 - 1/(24*9 + 12)) = -134285.3641769693564562648387058211030916779980007645271454550107683933;

${}_1\eta_{10} = 1/{}_1r_{10} =$ 1/(0.003962732569749597874542036190485768446310486954162870130862027 - 1/(24*10 + 12)) = -181113.5347699437260020010863751451028158555195016497254639475482556194;

${}_1\eta_{11} = 1/{}_1r_{11} =$ 1/(0.0036189822927607450136757081086019561397109996046439488702516372 - 1/(24*11 + 12)) = -237749.1977405948445689902449338984144442419469464140025760116980135373;

${}_1\eta_{12} = 1/{}_1r_{12} =$ 1/(0.0033300560032794946022944996618125096225768874609595318008718308 - 1/(24*12 + 12)) = -305126.4241234115938213585666498364161525590694441231588252889689137398;

${}_1\eta_{13} = 1/{}_1r_{13} = 1/(0.0030838168016744512124541164979876029589672827874612834355260265 - 1/(24*13 + 12)) = -384179.280259298991954886362209030450945761771888360825475298729494174 8;$

${}_1\eta_{14} = 1/{}_1r_{14} = 1/(0.002871461679731447652290154134901773645143682879717856725464654 - 1/(24*14 + 12)) = -475841.82929377671880076609188136595008753522804758216450989543683315;$

${}_1\eta_{15} = 1/{}_1r_{15} = 1/(0.0026864510151910552831868114979584074178523799138406205789617035 - 1/(24*15 + 12)) = -581048.13214223478858510343040333277235051174677476417603016850820305 84;$

${}_1\eta_{16} = 1/{}_1r_{16} = 1/(0.0025238254466462947890314519461180994483398092203504646782543872 - 1/(24*16 + 12)) = -700732.24812852866626014359432704629594374928509632278930517703705006 63;$

${}_1\eta_{17} = 1/{}_1r_{17} = 1/(0.0023797559628874897320979209405523530416269296563721078535452087 - 1/(24*17 + 12)) = -835828.23541779366135120853191899948919259566905282553673469457362984 23;$

${}_1\eta_{18} = 1/{}_1r_{18} =$ 1/(0.0022512393582650626862068513203312674376437184994132908910010032 - 1/(24*18 + 12)) = -
987270.1513162868659349557738474932013651334738853563436387493930260399;

${}_1\eta_{19} = 1/{}_1r_{19} =$ 1/(0.0021358870789017373263434719845803057226562249281577510736727519 - 1/(24*19 + 12)) = -
1155992.0524832726012616584403959700980144504495548365090607282385705025;

${}_1\eta_{20} = 1/{}_1r_{20} =$ 1/(0.002031775683641186864709481871080945528042975596214552094350784 - 1/(24*20 + 12)) = -
1342927.9950834712103273454300119660014780812724356838296433678203617856;

${}_1\eta_{30} = 1/{}_1r_{30} =$ 1/(0.001365893951294374354955029484903000247020154341682758620302145 - 1/(24*30 + 12)) = -
4419551.8614898623267234451120403771581491403351445543015717340928266919;

${}_1\eta_{40} = 1/{}_1r_{40} =$ 1/(0.001028709919682358326081067875904717309705643208816069708175008 - 1/(24*40 + 12)) = -
10345040.217993206338896093106248650017234035829590600620566301850119459;

$${}_1\eta_{50} = 1/{}_1r_{50} = 1/(0.00082503264151304986953365387082039485015519975475868279621 8565 - 1/(24*50 + 12)) = -20053447.340143940770049486650881605271452269673149765930642496604822 1371;$$

$${}_1\eta_{60} = 1/{}_1r_{60} = 1/(0.000688676230853210517264838077025921522124868688540518483260584 - 1/(24*60 + 12)) = -34478827.3577571022591485175791660237092818884173271351713221341742 4607915;$$

$${}_1\eta_{70} = 1/{}_1r_{70} = 1/(0.000590998218416537973116816825549181444179460753686395244227903 - 1/(24*70 + 12)) = -54555234.3577978547704061626908206957643286674965580522639328114635509725;$$

$${}_1\eta_{80} = 1/{}_1r_{80} = 1/(0.000517586030950061514221575916262319161900758790133626644353 36 - 1/(24*80 + 12)) = -81216722.4109145269820674995917964600795539348750863449560174566238482657;$$

$${}_1\eta_{90} = 1/{}_1r_{90} = 1/(0.000460396490827160226668267638879963809455636733116725838479 03 - 1/(24*90 + 12)) = -115397345.580433258586453429156493092928430186039280779459994260902312 2277;$$

${}_1\eta_{100} = 1/{}_1r_{100} =$ 1/(0.00041458737030973191961419610125606432427433661214280066212882 - 1/(24*100 + 12)) = -158031157.9259946364589610782832029498839409380076494905266997606861277818;

${}_1\eta_{110} = 1/\lambda_{110} =$ 1/(0.000377069145764594690480046269349948789839838518067182822400522 - 1/(24*110 + 12)) = -210052213.5052190994121070712611000145603808128676873410516347766673005107;

${}_1\eta_{120} = 1/{}_1r_{120} =$ 1/(0.000345777794968234133243130284919903646157567322356717117232004 - 1/(24*120 + 12)) = -272394566.3745442469498163169525144026555736850580835219904457799055827948;

${}_1\eta_{130} = 1/{}_1r_{130} =$ 1/(0.000319281911805446330624306741975105236260770397721641027809211 - 1/(24*130 + 12)) = -345992270.5896776181455848839516632177565993795793690034745080972073142983;

${}_1\eta_{140} = 1/{}_1r_{140} =$ 1/(0.000296557589103249558670839833625270136507878662448196309487688 - 1/(24*140 + 12)) = -431779380.2058562981114362622685049385994697366334814671411223617875297998;

$_1\eta_{150} = 1/{}_1r_{150} =$

$1/(0.000276853043678282175305629788258842500700663765940026654254195 - 1/(24*150 + 12)) = -$
$-530689949.2780031112108843995186474996501316023374271775046309643860957075;$

$_1\eta_{200} = 1/{}_1r_{200} =$ $1/(0.0002078130018879670409912776407413161105550066447515114972284 -$
$1/(24*200 + 12)) = -$
$-1254786578.3884298806396485148582439502083394808343658092464911166395768329;$

$_1\eta_{250} = 1/{}_1r_{250} =$

$1/(0.000166333590018651208487876625501423062170226641297517475765475 - 1/(24*250 + 12)) = -$
$-2447077802.0615783582647018804394097116615821204606923550931360639968632717;$

$_1\eta_{300} = 1/{}_1r_{300} =$

$1/(0.00013865755584347287989777767633007771730235460397184747595043 - 1/(24*300 + 12)) = -$
$-4224320377.0701131699111266795307209861184524105353500116415115781932940074;$

$_1\eta_{350} = 1/{}_1r_{350} =$

$1/(0.000118877644447251708772627108746206519523608292872353414079185 - 1/(24*350 + 12)) = -$
$-6703271060.1776228560491495594992091604898317134398269392922699959553249805;$

$${}_1\eta_{400} = 1/{}_1r_{400} = 1/(0.00010403652089741908486760692576253836763417626131348932099488 - 1/(24*400 + 12)) = -10000686608.1442846382772222932910104188886523899230277016741399536775711744;$$

$${}_1\eta_{450} = 1/{}_1r_{450} = 1/(0.00009248975586146848706704251562606315006400826528051377310064 - 1/(24*450 + 12)) = -14233323777.7287573217629220622071440787888912369005331259010020605945354231;$$

$${}_1\eta_{500} = 1/{}_1r_{500} = 1/(0.0000832500320151663199015218908227217853439206826773061812217 - 1/(24*500 + 12)) = -19517939325.688939692527684063063828287690139114982279751756070816001388781.$$

Всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения немедленно приводят к целесообразности попытки представления знаменателя искомой второй дроби многочленом третьей

степени относительно номера n с искомыми коэффициентами:

$${}_2z_n = x_1n^3 + x_2n^2 + x_3n + x_4.$$

Действительно, сразу видно, что удвоения номера n от 250 до 500, от 200 до 400, от 150 до 300 и от 100 до 200 приводят к умножению соответствующих элементов последовательности ${}_1\eta_n$ примерно на 8.

Данные для ${}_1\eta_{500}$, ${}_1\eta_{450}$, ${}_1\eta_{400}$ и ${}_1\eta_{350}$ дают совокупность четырёх уравнений с этими четырьмя неизвестными:

$$125000000*x_1 + 250000*x_2 + 500*x_3 + x_4 = -19517939325.68893969252768406306382828287690139;$$

$$91125000*x_1 + 202500*x_2 + 450*x_3 + x_4 = -14233323777.72875732176292206220714407878889 12;$$

$64000000*x_1 + 160000*x_2 + 400*x_3 + x_4 = -10000686608.1442846382772222932910104188865238;$

$42875000*x_1 + 122500*x_2 + 350*x_3 + x_4 = -6703271060.177622856049149559499209160489831713.$

Решение этой совокупности уравнений:

$x_1 = -1156926842582279400/7431648120681743 = -155.675675677194010 9 \approx -155.(675) = -5760/37 = -(155 + 25/37);$

$x_2 = -924286253297876400/3958170341481641 = -233.513510929874030 7 \approx -233.(513) = -(155 + 25/37)*(3/2);$

$x_3 = -1167326745520503600/5754558720293839 = -202.8525213243279961 = -(155 +$

25/37)*1.3030457098958569194 ≈ - (155 + 25/37)*1.(30) = - (155 + 25/37)*(43/33) = -202.(850122)

x_4 = - 3973639153788851840/64042863708 10241 = - 62.0465563797983593 = - (155 + 25/37)*0.3985629489674547386 ≈ - (155 + 25/37)*0.4 = - (155 + 25/37)*(2/5) = - 62.(270) = - (62 + 10/37).

Проверка.

Данные для $_1\eta_{300}$, $_1\eta_{250}$, $_1\eta_{200}$ и $_1\eta_{150}$ дают совокупность четырёх уравнений с этими четырьмя неизвестными:

$$27000000*x_1 + 90000*x_2 + 300*x_3 + x_4 = -4224320377.0701131699111266795307209861184524 1;$$

$$15625000*x_1 + 62500*x_2 + 250*x_3 + x_4 = -2447077802.0615783582647018804394097116615821 2;$$

$$8000000*x_1 + 40000*x_2 + 200*x_3 + x_4 = -1254786578.38842988063964851485824395020833948;$$

$$3375000*x_1 + 22500*x_2 + 150*x_3 + x_4 = -530689949.2780031112108843995186474996501316.$$

Решение этой совокупности уравнений:

$$x_1 = -1021662425557005400/6562762107718561 = -155.6756756968857977 \approx -155 - 675/999 = -155 - 25/37 = -155.6757;$$

$$x_2 = -93071207371394850/398568860465151 = -233.5134944129248195 \approx -233.5135;$$

$$x_3 = -350786948004541700/1729230929055801 = -202.8572020719518748 \approx -202.86;$$

$$x_4 = - 50969501991221470/827475178348127 = - 61.5964119829804682 \approx - 61.6.$$

Дополнительной проверкой является попытка уточнения x_4 последовательностью последних рассмотренных значений

$${}_4x_n = {}_1\eta_n + (155 + 25/37)(n^3 + (3/2)n^2 + (43/33)n),$$

предположительно приближающейся к x_4:

$${}_4x_{150} = - 530689949.2780031112108843995186474996501316023374271775046309643860957075 + (155 + 25/37)*(150\hat{}3 + (3/2)*150\hat{}2 + (43/33)*150) = - 62.300116133323906512540760521763153715359540199617653077408126517;$$

$${}_4x_{200} = - 1254786578.38842988063964851485824395020833948083436580924649111663957683 29 + (155 + 25/37)*(200\hat{}3 + (3/2)*200\hat{}2 + (43/33)*200) = - 62.417913910123677998887727979692368964863849838730520600668865745 5;$$

${}_4x_{250} = -$

$2447077802.0615783582647018804394097116615821204606923550931360639968632717 +$

$(155 + 25/37)*(250\hat{}3 + (3/2)*250\hat{}2 + (43/33)*250) = -$

$62.5038388005251441408816701539220243809029527973535783244387425375;$

${}_4x_{300} = -$

$4224320377.0701131699111266795307209861184524105353500116415115781932940074 +$

$(155 + 25/37)*(300\hat{}3 + (3/2)*300\hat{}2 + (43/33)*300) = -$

$62.5737986735966303650344064898039560960390355153270152636963208763;$

${}_4x_{350} = -$

$6703271060.1776228560491495594992091604898317134398269392922699959553249805 +$

$(155 + 25/37)*(350\hat{}3 + (3/2)*350\hat{}2 + (43/33)*350) = -$

$62.6346253130516065619562116174922887158968293962947269984112817026;$

${}_4x_{400} = -$

$10000686608.144284638277222293291010418888652389923027701674139953677571174$

+ (155 + 25/37)*(400^3 + (3/2)*400^2 + (43/33)*400) = -62.6897391837317677478364649643431978444684822471286854082214649996;

$_4x_{450}$ = -14233323777.7287573217629220622071440787888912369005331259010020605945354231 + (155 + 25/37)*(450^3 + (3/2)*450^2 + (43/33)*450) = -62.7410423340479343472194290910739035219128181381860143456045986015;

$_4x_{500}$ = -19517939325.688939692527684063063828287690139114982279751756070816001388781 + (155 + 25/37)*(500^3 + (3/2)*500^2 + (43/33)*500) = -62.7896767932647848001645653884272398520830168524931715530990785625.

Всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения на основании строгого монотонного убывания последовательности $_4x_n$,

сгущения значений её элементов примерно по закону обращений их номеров и её стремления к пределу предлагают величину этого предела, проще всего определяемую для различных пар элементов последовательности с удвоением их номеров, причём три пары таких элементов обеспечивают возможность взаимной проверки:

$$x_4 = \lim_{n\to\infty} {}_4x_n = {}_4x_{500} + {}_4x_{500} - {}_4x_{250} = 2\,{}_4x_{500} - {}_4x_{250} = 2*(-62.789676793264784800164565388427239852083016852493171553099078562 5) - (-62.50383880052514414088167015392202438090295279735357832443874 25375) = - 63.0755147860044254594474606229324553232630809076327647817594145875;$$

$$x_4 = \lim_{n\to\infty} {}_4x_n = {}_4x_{400} + {}_4x_{400} - {}_4x_{200} = 2\,{}_4x_{400} - {}_4x_{200} = 2*(-62.68973918373176774783646496434319784446848224712868540822146499 96) - (-62.41791391012367799888772797969236896486384983873052060066886 57455) = -62.9615644573398574967852019489940267240731146555268502157740642537;$$

$$x_4 = \lim_{n\to\infty} {}_4x_n = {}_4x_{300} + {}_4x_{300} - {}_4x_{150} = 2\,{}_4x_{300} - {}_4x_{150} = 2*(-62.5737986735966303650344064898039560960390355153270152636963208763) - (-62.300116133323906512540760521763153715359540199617653077408126517) = -62.8474812138693542175280524578447584767185308310363774499845152356.$$

Эти три весьма близких между собой итога дают основание принять

$$x_4 = \lim_{n\to\infty} {}_4x_n \approx - 63.$$

К этому же можно прийти менее олимпиадным и более методологическим путём, который немедленно приводит к целесообразности попытки представления

$$- {}_4x_n = 62 + y_1 + y_2/n,$$

$$ny_1 + y_2 = - n({}_4x_n + 62)$$

с искомыми постоянными $y_1 > 0$ и $y_2 < 0$, причём искомый предел последовательности ${}_4x_n$ есть

$$x_4 = \lim_{n\to\infty} {}_4x_n \approx - 62 - y_1.$$

Определение этих двух коэффициентов y_1, y_2 соответственно достигается решением совокупности двух уравнений

$$500y_1 + y_2 = - 500({}_4x_{500} + 62) = - 500*(-$$
$$62.7896767932647848001645653884272398520830168524931715530990785625 +$$
$$62) =$$
$$394.838396632392400082282694213619926041508426246585776549539281 25;$$

$$450y_1 + y_2 = - 450({}_4x_{450} + 62) = - 450*(-$$
$$62.7410423340479343472194290910739035219128181381860143456045986015 +$$
$$62) =$$
$$333.469050321570456248743090983256584860768162183706455522069370675$$

для наибольших рассмотренных значений

$$n = 500, 450,$$

дающим

$$y_1 =$$
$$(394.83839663239240008228269421361992604150842624658577654953928125 -$$
$$- 333.46905032157045624874309098325658486076816218370645552206937067 5)/$$
$$(500 - 450) =$$
$$1.2273869262164388766707920646072668236148052812575864205493982115;$$

$$y_2 =$$
$$394.83839663239240008228269421361992604150842624658577654953928125 -$$
$$- 500 * 1.2273869262164388766707920646072668236148052812575864205493982115$$
$$= -218.85506647582703825311333809001348576589421438220743372515982 45.$$

<u>Проверка</u>.

Определение этих двух коэффициентов y_1, y_2 соответственно достигается решением совокупности двух уравнений

$$400y_1 + y_2 = - 400({}_4x_{400} + 62) = - 400*(-$$
$$62.689739183731767747836464964343197844468482247128685408221464 9996 +$$

62) =
275.89567349270709913458598573727913778739289885147416328858599984;

$350y_1 + y_2 = - 350({}_4x_{350} + 62) = - 350*(-$
62.634625313051606561956211617492288715896829396294726998411281 7026 +
62) =
222.11885956806229668467406612230105056389028870315444944394859591

для рассмотренных значений

n = 400, 350,

дающим

$y_1 =$
(275.89567349270709913458598573727913778739289885147416328858599984 -
222.11885956806229668467406612230105056389028870315444944394859591)/
(400 - 350) =
1.0755362784928960489982383922995617444700522029663942768927480786;

$y_2 =$
275.89567349270709913458598573727913778739289885147416328858599984 -

$$400 \cdot 1.0755362784928960489982383922995617444700522029663942768927480786 = -154.3188379044513204647093711825455600006279823350835474685132316.$$

Поэтому опять

$$x_4 = \lim_{n\to\infty} {}_4x_n \approx -62 - y_1 \approx -62 - 1 = -63.$$

Однако возможно и целесообразно дальнейшее уточнение полученного решения вынужденно за счёт уточнения не только x_4, но и x_3. К этому можно прийти менее олимпиадным и более методологическим путём, который немедленно приводит к попытке представления

$$-{}_4x_n = 62 + ny_1 + y_2 + y_3/n,$$

$$n^2y_1 + ny_2 + y_3 = -n({}_4x_n + 62)$$

с искомыми постоянными y_1, $y_2 > 0$ и $y_3 < 0$. При этом искомый предел последовательности ${}_4x_n$ есть

$$x_4 = \lim_{n\to\infty} {}_4x_n \approx -62 - y_2,$$

а y_1, умноженный на отрицательную единицу, есть уточняющее добавление к x_3. То есть вместо

$$x_3 = -116732674552050360 0/5754558720293839 = -202.8525213243279961 = -(155 + 25/37)*1.3030457098958569194 \approx -(155 + 25/37)*1.(30) = -(155 + 25/37)*(43/33) = -202.(850122)$$

следует принять

$$x_3 = -(155 + 25/37)*(43/33) - y_1 = -202.(850122) - y_1.$$

Определение этих трёх коэффициентов y_1, y_2, y_3 соответственно достигается решением совокупности трёх уравнений

$$250000y_1 + 500y_2 + y_3 = - 500({}_4x_{500} + 62) = - 500*(-62.789676793264784800164565388427239852083016852493171553099078562 5 + 62) = 394.838396632392400082282694213619926041508426246585776549539281 25;$$

$$202500y_1 + 450y_2 + y_3 = - 450({}_4x_{450} + 62) = - 450*(-62.7410423340479343472194290910739035219128181381860143456045986015 + 62) = 333.469050321570456248743090983256584860768162183706455522069370675;$$

$$160000y_1 + 400y_2 + y_3 = - 400({}_4x_{400} + 62) = - 400*(-62.6897391837317677478364649643431978444684822471286854082214649996 + 62) = 275.895673492707099134585985737279137787392898851474163288585999 84$$

для наибольших рассмотренных значений

$$n = 500, 450, 400,$$

дающим

$$y_1 = 2305585351784089/3036886048138654700 = 0.0007591938963917;$$

$$y_2 = 4046962195562254/7995535731643749 = 0.5061527246442892;$$

$$y_3 = - 35953810219852560/748469503126433 = - 48.0364397876865383.$$

Проверка.

Определение этих трёх коэффициентов y_1, y_2, y_3 соответственно достигается решением совокупности трёх уравнений

$$122500y_1 + 350y_2 + y_3 = - 350({}_4x_{350} + 62) = - 350*(- 62.634625313051606561956211617492288715896829396294726998411281702 6 +$$

$62) = 222.11885956806229668467406612230105056389028870315444944394859591;$

$90000y_1 + 300y_2 + y_3 = - 300({}_4x_{300} + 62) = - 300*(- 62.573798673596630365034406489803956096039035515327015263696320876 3 + 62) = 172.13960207898910951032194694118682881171065459810457910889626289;$

$62500y_1 + 250y_2 + y_3 = - 250({}_4x_{250} + 62) = - 250*(- 62.503838800525144140881670153922024380902952797353578324438742537 5 + 62) = 125.9597001312860352204175384805060952257381993383945811096856343 75$

для рассмотренных значений

$$n = 350, 300, 250,$$

дающим

$$y_1 = 293033900584260 3/3856363235731625500 = 0.000759871108274;$$

$$y_2 = 8556812684500523/16921768744219572 = 0.5056689294033466;$$

$$y_3 = - 113932447114780780/2376093660718835 = - 47.949476486673047.$$

Поэтому

$$x_1 \approx - 155.(675) = - 5760/37 = - (155 + 25/37);$$

$$x_2 \approx - 233.(513) = - (155 + 25/37)*(3/2);$$

$$x_3 \approx - (155 + 25/37)*(43/33) - y_1 = - 202.850123 - 0.000759 = - 202.850882 \approx - (155 + 25/37)*1.303035;$$

$$x_4 \approx - 62 - y_2 = - 62 - 0.506 = - 62.506 \approx - (155 + 25/37)*0.4015.$$

Принимаем приближение

$${}_2z_n = - (155 + 25/37)(n^3 + (3/2)n^2 + 1.303035n + 0.4015).$$

Общие функциональные метод и алгоритм построения рядов функциональных единичных дробей $1/_m z_n$ последовательным их выделением ведут ко вторым собственным приближениям $_2T_n$ и $_2t_n$ приближающих функций T_n и t_n и тем самым к уточнениям, которые подлежат дополнительным исследованиям, полезным для показа сущности и возможностей этих метода и алгоритма.

Вторая функциональная единичная дробь

$$1/_2z_n = - 1/((155 + 25/37)(n^3 + (3/2)n^2 + 1.303035n + 0.4015))$$

разложения бесконечно малой последовательности λ_n даёт приближения второго порядка к избранным первым элементам бесконечно малой последовательности λ_n,

даваемые приближающей функцией t_n в собственном втором приближении ${}_2t_n$:

$$\lambda_n \approx {}_2t_n = 1/{}_1z_n + 1/{}_2z_n = 1/(24n + 12) - 1/((155 + 25/37)(n^3 + (3/2)n^2 + 1.303035n + 0.4015)).$$

Соответствующее приближение второго порядка ${}_2f_n$ бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n имеет вид:

$$\varepsilon_n \approx {}_2f_n = \ln(1 + {}_2y_n/n) = \ln(1 + (1/2 + {}_2t_n)/n) = \ln(1 + (1/2 + 1/(24n + 12) - 1/((155 + 25/37)(n^3 + (3/2)n^2 + 1.303035n + 0.4015)))/n).$$

Вычислим относительные, а именно делённые на элементы бесконечно малой последовательности λ_n, приближения второго порядка ${}_2t_n$ рядом функциональных единичных дробей к элементам бесконечно малой последовательности λ_n для избранных первых гармонических чисел H_n:

$${}_2t_n/\lambda_n = (1/(24n + 12) - 1/((155 + 25/37)(n^3 + (3/2)n^2 + 1.303035n + 0.4015)))/\lambda_n;$$

$${}_2t_1/\lambda_1 = (1/(24*1 + 12) - 1/((155 + 25/37)(1\^{}3 + (3/2)*1\^{}2 + 1.303035*1 + 0.4015)))/ 0.026205111595863880474888715036775614534446611169914704550938416 = 1.001712818705758133990915150231772934728356931721200059879414761;$$

$${}_2t_2/\lambda_2 = (1/(24*2 + 12) - 1/((155 + 25/37)(2\^{}3 + (3/2)*2\^{}2 + 1.303035*2 + 0.4015)))/ 0.016286830939363580256237175591183536358310022591041836935546 2732 = 1.000131666737263405927853113358929833072504666456575735891702262;$$

$${}_2t_3/\lambda_3 = (1/(24*3 + 12) - 1/((155 + 25/37)(3\^{}3 + (3/2)*3\^{}2 + 1.303035*3 + 0.4015)))/ 0.011761166339476181366818363142180183750235037743133430515262353 = 1.000020858678608188615575613430858625331567386083074568575072836 8;$$

${}_2t_4/\lambda_4$ = (1/(24*4 + 12) - 1/((155 + 25/37)(4^3 + (3/2)*4^2 + 1.303035*4 + 0.4015)))/
0.0091905949168749372513380938181945388202525095967998860292835672 =
1.0000050070812638462415518048421129980207617008478994930518488788;

${}_2t_5/\lambda_5$ = (1/(24*5 + 12) - 1/((155 + 25/37)(5^3 + (3/2)*5^2 + 1.303035*5 + 0.4015)))/
0.007537829701368137806156970031982877073907173523572337983016969 =
1.00000156867999988033096454436089908509311005026018850730444143;

${}_2t_6/\lambda_6$ = (1/(24*6 + 12) - 1/((155 + 25/37)(6^3 + (3/2)*6^2 + 1.303035*6 + 0.4015)))/
0.0063871643691720839016850254805715672208399391194427751426646352 =
1.0000005907945917301770310529134842148443129894139548907709807239;

${}_2t_7/\lambda_7$ = (1/(24*7 + 12) - 1/((155 + 25/37)(7^3 + (3/2)*7^2 + 1.303035*7 + 0.4015)))/

0.0055404760511186065992002805785699254564764530337307531467412798 =
1.0000002545205450583514010233404811700780576827948511117979684981;

${}_2t_8/\lambda_8$ = (1/(24*8 + 12) - 1/((155 + 25/37)(8^3 + (3/2)*8^2 +
1.303035*8 + 0.4015)))/
0.0048915798677762238129291764131998143361382015023508002288388384 =
1.0000001214595255585979710466803182986422562924574366033109841609;

${}_2t_9/\lambda_9$ = (1/(24*9 + 12) - 1/((155 + 25/37)(9^3 + (3/2)*9^2 +
1.303035*9 + 0.4015)))/
0.0043785180843547474437262915005555928787313098989560590153574739 =
1.0000000628106727457468655338198463616521800038819846215904423128;

${}_2t_{10}/\lambda_{10}$ = (1/(24*10 + 12) - 1/((155 + 25/37)(10^3 + (3/2)*10^2 +
1.303035*10 + 0.4015)))/
0.003962732569749597874542036190485768446310486954162870130862027 =
1.0000000346534964744440668962650841043647612532969080239810646191;

$${}_2t_{11}/\lambda_{11} = (1/(24*11 + 12) - 1/((155 + 25/37)(11\text{\textasciicircum}3 + (3/2)*11\text{\textasciicircum}2 + 1.303035*11 + 0.4015)))/ 0.0036189822927607450136757081086019561397109996046439488702516372 = 1.0000000201642011370407014233103618947745018369117833851832826032;$$

$${}_2t_{12}/\lambda_{12} = (1/(24*12 + 12) - 1/((155 + 25/37)(12\text{\textasciicircum}3 + (3/2)*12\text{\textasciicircum}2 + 1.303035*12 + 0.4015)))/ 0.0033300560032794946022944996618125096225768874609595318008718308 = 1.0000000122675542047254588202988057822605484318791934711006641152;$$

$${}_2t_{13}/\lambda_{13} = (1/(24*13 + 12) - 1/((155 + 25/37)(13\text{\textasciicircum}3 + (3/2)*13\text{\textasciicircum}2 + 1.303035*13 + 0.4015)))/ 0.0030838168016744512124541164979876029589672827874612834355260265 = 1.0000000077509010172015844261240084083037602019108275372477896114;$$

$${}_2t_{14}/\lambda_{14} = (1/(24*14 + 12) - 1/((155 + 25/37)(14\text{\textasciicircum}3 + (3/2)*14\text{\textasciicircum}2 + 1.303035*14 + 0.4015)))/$$

0.002871461679731447652290154134901773645143682879717856725464654 =
1.0000000050588563746301379300646627674771194592361554513179782334;

$_2t_{15}/\lambda_{15}$ = (1/(24*15 + 12) - 1/((155 + 25/37)(15^3 + (3/2)*15^2 +
1.303035*15 + 0.4015)))/
0.0026864510151910552831868114979584074178523799138406205789617035 =
1.0000000033962638976004809467170190234926604380907593695165420352;

$_2t_{16}/\lambda_{16}$ = (1/(24*16 + 12) - 1/((155 + 25/37)(16^3 + (3/2)*16^2 +
1.303035*16 + 0.4015)))/
0.0025238254466462947890314519461180994483398092203504646782543872 =
1.0000000023371430490830197625706199064444079580590057399986304541;

$_2t_{17}/\lambda_{17}$ = (1/(24*17 + 12) - 1/((155 + 25/37)(17^3 + (3/2)*17^2 +
1.303035*17 + 0.4015)))/
0.0023797559628874897320979209405523530416269296563721078535452087 =
1.000000001643816829834806238520663594358129772232780249131501539;

${}_2t_{18}/\lambda_{18}$ = (1/(24*18 + 12) - 1/((155 + 25/37)(18^3 + (3/2)*18^2 + 1.303035*18 + 0.4015)))/
0.0022512393582650626862068513203312674376437184994132908910010032 =
1.0000000011788572245136567580736901231309141731587071949950647882;

${}_2t_{19}/\lambda_{19}$ = (1/(24*19 + 12) - 1/((155 + 25/37)(19^3 + (3/2)*19^2 + 1.303035*19 + 0.4015)))/
0.0021358870789017373263434719845803057226562249281577510736727519 =
1.0000000008602550284782743516953558736363126184920640460992969314;

${}_2t_{20}/\lambda_{20}$ = (1/(24*20 + 12) - 1/((155 + 25/37)(20^3 + (3/2)*20^2 + 1.303035*20 + 0.4015)))/
0.002031775683641186864709481871080945528042975596214552094350784 =
1.0000000006376772962421186284059469613720017371008257799063848546;

${}_{2}t_{30}/\lambda_{30}$ = (1/(24*30 + 12) - 1/((155 + 25/37)(30^3 + (3/2)*30^2 + 1.303035*30 + 0.4015)))/

0.001365893951294374354955029484903000247020154341682758620302145 = 1.0000000000589717098132282414682625628487550570294934147077309785;

${}_2t_{40}/\lambda_{40}$ = (1/(24*40 + 12) - 1/((155 + 25/37)(40^3 + (3/2)*40^2 + 1.303035*40 + 0.4015)))/

0.001028709919682358326081067875904717309705643208816069708175008 = 1.0000000000107620289076380112100483675429708818850725979178299695;

${}_2t_{50}/\lambda_{50}$ = (1/(24*50 + 12) - 1/((155 + 25/37)(50^3 + (3/2)*50^2 + 1.303035*50 + 0.4015)))/

0.000825032641513049869533653870820394850155199754758682796218565 = 1.000000000002862101102194850371849457172965047430237189385599702 9;

${}_2t_{60}/\lambda_{60}$ = (1/(24*60 + 12) - 1/((155 + 25/37)(60^3 + (3/2)*60^2 + 1.303035*60 + 0.4015)))/

0.000688676230853210517264838077025921522124868688540518483260584 = 1.0000000000000967232334842524964892125697408012568489873992983124 4;

${}_2t_{70}/\lambda_{70}$ = (1/(24*70 + 12) - 1/((155 + 25/37)(70^3 + (3/2)*70^2 +
1.303035*70 + 0.4015)))/
0.00059099821841653797311681682554918144417946075368639524422 7903 =
1.0000000000003858745482070326811939290041875724569082751796887624;

${}_2t_{80}/\lambda_{80}$ = (1/(24*80 + 12) - 1/((155 + 25/37)(80^3 + (3/2)*80^2 +
1.303035*80 + 0.4015)))/
0.00051758603095006151422157591626231916190075879013362664435336 =
1.0000000000001738759260622185092658072323749694722428798919167016;

${}_2t_{90}/\lambda_{90}$ = (1/(24*90 + 12) - 1/((155 + 25/37)(90^3 + (3/2)*90^2 +
1.303035*90 + 0.4015)))/
0.00046039649082716022666826763887996380945563673311672583847903 =
1.0000000000000859976725078349454111896995984185777603960660312548;

${}_2t_{100}/\lambda_{100}$ = (1/(24*100 + 12) - 1/((155 + 25/37)(100^3 +
(3/2)*100^2 + 1.303035*100 + 0.4015)))/

0.00041458737030973191961419610125606432427433661214280066212882 = 1.0000000000000457806276057184529373965091296287223965815389868134;

$${}_2t_{110}/\lambda_{110} = (1/(24*110 + 12) - 1/((155 + 25/37)(110^3 + (3/2)*110^2 + 1.303035*110 + 0.4015)))/$$

0.00037706914576459469048004626934994878983983851806718282240052 2 = 1.0000000000000258669211105960881479899515050835580328146290457 86;

$${}_2t_{120}/\lambda_{120} = (1/(24*120 + 12) - 1/((155 + 25/37)(120^3 + (3/2)*120^2 + 1.303035*120 + 0.4015)))/$$

0.00034577779496823413324313028491990364615756732235671711723200 4 = 1.0000000000000153524952983950949042405308615310592193284012114 381;

$${}_2t_{130}/\lambda_{130} = (1/(24*130 + 12) - 1/((155 + 25/37)(130^3 + (3/2)*130^2 + 1.303035*130 + 0.4015)))/$$

0.00031928191180544633062430674197510523626077039772164102780921 1 = 1.00000000000000949652804337006288100080361391079950582478342291 21;

$$ {}_2t_{140}/\lambda_{140} = (1/(24*140 + 12) - 1/((155 + 25/37)(140\text{^}3 + (3/2)*140\text{^}2 + 1.303035*140 + 0.4015)))/ 0.000296557589103249558670839833625270136507878662448196309487688 = 1.00000000000000608472822209346758075632474561213993656990242575 14; $$

$$ {}_2t_{150}/\lambda_{150} = (1/(24*150 + 12) - 1/((155 + 25/37)(150\text{^}3 + (3/2)*150\text{^}2 + 1.303035*150 + 0.4015)))/ 0.000276853043678282175305629788258842500700663765940026654254195 = 1.0000000000000040187985045869155729234792636991923009398574955379; $$

$$ {}_2t_{200}/\lambda_{200} = (1/(24*200 + 12) - 1/((155 + 25/37)(200\text{^}3 + (3/2)*200\text{^}2 + 1.303035*200 + 0.4015)))/ 0.0002078130018879670409912776407413161105550066447515114972284 = 1.0000000000000007093860452925092434914953666545126102529299456453; $$

$$ {}_2t_{250}/\lambda_{250} = (1/(24*250 + 12) - 1/((155 + 25/37)(250\text{^}3 + (3/2)*250\text{^}2 + 1.303035*250 + 0.4015)))/ $$

0.000166333590018651208487876625501423062170226641297517475765475 =
1.00000000000000183473051024180859753330094704344887207007662769 2;

${}_2t_{300}/\lambda_{300}$ = (1/(24*300 + 12) - 1/((155 + 25/37)(300^3 + (3/2)*300^2 + 1.303035*300 + 0.4015)))/
0.00013865755584347287989777767633007771730235460397184747595043 =
1.000000000000000603583279468660777371631225320787499353832524346;

${}_2t_{350}/\lambda_{350}$ = (1/(24*350 + 12) - 1/((155 + 25/37)(350^3 + (3/2)*350^2 + 1.303035*350 + 0.4015)))/
0.000118877644447251708772627108746206519523608292872353414079185 =
1.000000000000000234160472899735126882929183460450339566244836308;

${}_2t_{400}/\lambda_{400}$ = (1/(24*400 + 12) - 1/((155 + 25/37)(400^3 + (3/2)*400^2 + 1.303035*400 + 0.4015)))/
0.000104036520897419084867606925762538367634176261313489320994 88 =
1.000000000000000102378996118488566773025304222865041569826010944;

${}_2t_{450}/\lambda_{450}$ = (1/(24*450 + 12) - 1/((155 + 25/37)(450^3 + (3/2)*450^2 + 1.303035*450 + 0.4015)))/ 0.00009248975586146848706704251562606315006400826528051377310064 = 1.0000000000000000048984309842269661368534591934579073088926065072;

${}_2t_{500}/\lambda_{500}$ = (1/(24*500 + 12) - 1/((155 + 25/37)(500^3 + (3/2)*500^2 + 1.303035*500 + 0.4015)))/ 0.0000832500320151663199015218908227217853439206826773061812217 = 1.000000000000000002513360498669818449528387111914054875806758446.

Соответствующее приближение второго порядка ${}_2f_n$ бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n имеет вид:

$\varepsilon_n \approx {}_2f_n = \ln(1 + {}_2y_n/n) = \ln(1 + (1/2 + {}_2t_n)/n) = \ln(1 + (1/2 + 1/(24n + 12) - 1/((155 + 25/37)(n^3 + (3/2)n^2 + 1.303035n + 0.4015)))/n)$.

В<u>ы</u>числим относительные, а именно делённые на элементы бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n,

приближения второго порядка ${}_2f_n$ рядом функциональных единичных дробей к элементам бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n для избранных первых гармонических чисел H_n:

$${}_2f_n/\varepsilon_n = \ln(1 + {}_2y_n/n)/\varepsilon_n = \ln(1 + (1/2 + {}_2t_n)/n)/\varepsilon_n = \ln(1 + (1/2 + 1/(24n + 12) - 1/((155 + 25/37)(n^3 + (3/2)n^2 + 1.303035n + 0.4015)))/n)/\varepsilon_n;$$

$${}_2f_1/\varepsilon_1 = \ln(1 + (1/2 + 1/(24*1 + 12) - 1/((155 + 25/37)(1\hat{}3 + (3/2)*1\hat{}2 + 1.303035*1 + 0.4015)))/1)/$$
$$0.422784335098467139393487909917597568957840664060076401194233 =$$
$$1.000069559945549403835109414719866361041411959683245337534398325;$$

$${}_2f_2/\varepsilon_2 = \ln(1 + (1/2 + 1/(24*2 + 12) - 1/((155 + 25/37)(2\hat{}3 + (3/2)*2\hat{}2 + 1.303035*2 + 0.4015)))/2)/$$

0.229637154538521829976255788459421000882340529699821147073552991 =
1.0000037111642462132565312760345638864754384862516272412377869313;

${}_2f_3/\varepsilon_3$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*3 + 12) - 1/((155 + 25/37)(3^3 +
(3/2)*3^2 + 1.303035*3 + 0.4015)))/3)/
0.157505379763690781331576006328405197643683439570660282792872 =
1.000000443523673278599911575702830741094153159734313577600682792;

${}_2f_4/\varepsilon_4$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*4 + 12) - 1/((155 + 25/37)(4^3 +
(3/2)*4^2 + 1.303035*4 + 0.4015)))/4)/
0.119823307311909853892357000334577766140173728672899226286206314 =
1.00000008517033731317155755716148096448176833346439901263324797;

${}_2f_5/\varepsilon_5$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*5 + 12) - 1/((155 + 25/37)(5^3 +
(3/2)*5^2 + 1.303035*5 + 0.4015)))/5)/
0.096679755997700098126061910024743262765572643124892012614918442 =
1.0000000222068851201578246508138386712725876374852189030640990417;

${}_2f_6/\varepsilon_6$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*6 + 12) - 1/((155 + 25/37)(6^3 + (3/2)*6^2 + 1.303035*6 + 0.4015)))/6)/
0.081024865870412138581010551536895296234849971877071695338858657 =
1.000000071579124175789735167816954532760185622829470633686360577;

${}_2f_7/\varepsilon_7$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*7 + 12) - 1/((155 + 25/37)(7^3 + (3/2)*7^2 + 1.303035*7 + 0.4015)))/7)/
0.069731328900296691430992309331560696463613077335358069877699993 =
1.000000026943872414642396787985344850891862297088415511522247209;

${}_2f_8/\varepsilon_8$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*8 + 12) - 1/((155 + 25/37)(8^3 + (3/2)*8^2 + 1.303035*8 + 0.4015)))/8)/
0.061199936275774068284648688400210721874197403836453495975050114 =
1.000000011414607373101247554649325444445925001655610650909713256;

${}_2f_9/\varepsilon_9$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*9 + 12) - 1/((155 + 25/37)(9^3 + (3/2)*9^2 + 1.303035*9 + 0.4015)))/9)/

0.054528011730501724856965690040800127916827802382831465978812587 =
1.0000000005306610433700329027650926442406940096040048845458625601;

${}_2f_{10}/\varepsilon_{10} = \ln(1 + (1/2 + 1/(24*10 + 12) - 1/((155 + 25/37)(10^3 + (3/2)*10^2 + 1.303035*10 + 0.4015)))/10)/$

0.049167496072675423629464709201487329610707429399557393414873353 =
1.0000000002658952389638937199182167068046207507399968430301714017;

${}_2f_{11}/\varepsilon_{11} = \ln(1 + (1/2 + 1/(24*11 + 12) - 1/((155 + 25/37)(11^3 + (3/2)*11^2 + 1.303035*11 + 0.4015)))/11)/$

0.044766407177441472676421676829813146481011155000004103320542636 =
1.0000000001417035562736504672637333229305623366021727586338636531;

${}_2f_{12}/\varepsilon_{12} = \ln(1 + (1/2 + 1/(24*12 + 12) - 1/((155 + 25/37)(12^3 + (3/2)*12^2 + 1.303035*12 + 0.4015)))/12)/$

0.041088363521145039841989108289396938837560515727494651896389326 =
1.0000000000795179147825587509589113579342315920112708438309782608;

${}_2f_{13}/\varepsilon_{13}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*13 + 12) - 1/((155 + 25/37)(13^3 + (3/2)*13^2 + 1.303035*13 + 0.4015)))/13)/ 0.037968732770685537095134223486034097907706474433624418530321244 = 1.000000000466210118487462880691862646150755627390196679483846 64;

${}_2f_{14}/\varepsilon_{14}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*14 + 12) - 1/((155 + 25/37)(14^3 + (3/2)*14^2 + 1.303035*14 + 0.4015)))/14)/ 0.035289332045535087197465371578567833571818126680286520940725167 = 1.0000000002838297655680792656394954611070645555069187073387114 66;

${}_2f_{15}/\varepsilon_{15}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*15 + 12) - 1/((155 + 25/37)(15^3 + (3/2)*15^2 + 1.303035*15 + 0.4015)))/15)/ 0.032963127225250302390712332997877453777977745197802456540119768 = 1.0000000001785438866925884366503437698614405630914257991902905 83;

${}_2f_{16}/\varepsilon_{16}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*16 + 12) - 1/((155 + 25/37)(16^3 + (3/2)*16^2 + 1.303035*16 + 0.4015)))/16)/

0.030924606087679130717788417313884525649069119848048613704741955 = 1.0000000000115581962718795224555108586938481687649263739277949336;

$_2f_{17}/\varepsilon_{17}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*17 + 12) - 1/((155 + 25/37)(17^3 + (3/2)*17^2 + 1.303035*17 + 0.4015)))/17)/

0.029123513683008994019535226449934850598160762350383666641963602 = 1.0000000000076744095727149243086716344987822379263043187604832871;

$_2f_{18}/\varepsilon_{18}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*18 + 12) - 1/((155 + 25/37)(18^3 + (3/2)*18^2 + 1.303035*18 + 0.4015)))/18)/

0.027520655398615937616902804575388964371438080485929851682360637 = 1.0000000000052119415434253360407128389849851620959574029239949433;

$_2f_{19}/\varepsilon_{19}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*19 + 12) - 1/((155 + 25/37)(19^3 + (3/2)*19^2 + 1.303035*19 + 0.4015)))/19)/

0.026085013075708590868229546938131825557171648139923611787100656 = 1.0000000000036118713374428952700091675680682961549158071911853913;

${}_2f_{20}/\varepsilon_{20}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*20 + 12) - 1/((155 + 25/37)(20^3 + (3/2)*20^2 + 1.303035*20 + 0.4015)))/20)/

0.024791718688158057442033402683444587117949286450024200171052982 = 1.00000000000254901960355559429300209959653949428805914050668090 51;

${}_2f_{30}/\varepsilon_{30}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*30 + 12) - 1/((155 + 25/37)(30^3 + (3/2)*30^2 + 1.303035*30 + 0.4015)))/30)/

0.016574084356702834482024882435084969384053413226008277017322114 = 1.0000000000001593352509049668341842067408220462053924035260977625;

${}_2f_{40}/\varepsilon_{40}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*40 + 12) - 1/((155 + 25/37)(40^3 + (3/2)*40^2 + 1.303035*40 + 0.4015)))/40)/

0.012447919920906823057682941952498620878342968978008227607127422 = 1.0000000000000219595907389422496831392817042927049792489521912826;

${}_2f_{50}/\varepsilon_{50}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*50 + 12) - 1/((155 + 25/37)(50^3 + (3/2)*50^2 + 1.303035*50 + 0.4015)))/50)/

0.00996666799974613833520891497181481380173964513023953290715964 = 1.0000000000000046914558887960801972585372629296011473936136292556;

${}_2f_{60}/\varepsilon_{60}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*60 + 12) - 1/((155 + 25/37)(60^3 + (3/2)*60^2 + 1.303035*60 + 0.4015)))/60)/

0.00831018582810427175186590877706253030441007673840008824863578 = 1.0000000000000013248748224992898341977114751217297564339993489266;

${}_2f_{70}/\varepsilon_{70}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*70 + 12) - 1/((155 + 25/37)(70^3 + (3/2)*70^2 + 1.303035*70 + 0.4015)))/70)/

0.007125850687179938597493698465022484665422387615911652685299246 = 1.0000000000000004539445746936413664100521602935651739580880183335;

${}_2f_{80}/\varepsilon_{80}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*80 + 12) - 1/((155 + 25/37)(80^3 + (3/2)*80^2 + 1.303035*80 + 0.4015)))/80)/

0.006236979370102052295259621019270264208866968910507738470915928 = 1.0000000000000001792458141236499229825199337938839704056072418705;

${}_2f_{90}/\varepsilon_{90}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*90 + 12) - 1/((155 + 25/37)(90^3 + (3/2)*90^2 + 1.303035*90 + 0.4015)))/90)/
0.005545267616717626717395931769476265059526351840511240461866579 =
1.0000000000000000788942593414879281967914138654733427418577011019;

${}_2f_{100}/\varepsilon_{100}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*100 + 12) - 1/((155 + 25/37)(100^3 + (3/2)*100^2 + 1.303035*100 + 0.4015)))/100)/
0.004991666749996032162622676207122311664609813510982102304111155 =
1.0000000000000000378341841301173847819795151904064219016687790823;

${}_2f_{110}/\varepsilon_{110}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*110 + 12) - 1/((155 + 25/37)(110^3 + (3/2)*110^2 + 1.303035*110 + 0.4015)))/110)/
0.004538567550028495823927390346985076317003396194575597711970341 =
1.0000000000000000194483683750688576277122267755466171052727745247;

${}_2f_{120}/\varepsilon_{120}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*120 + 12) - 1/((155 + 25/37)(120^3 + (3/2)*120^2 + 1.303035*120 + 0.4015)))/120)/

0.004160879669816057967941914833055534452404622019676745066597081 =
1.0000000000000000105877243008490153565421725395698844093215428616;

${}_{2}f_{130}/\varepsilon_{130}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*130 + 12) - 1/((155 + 25/37)(130^3 + (3/2)*130^2 + 1.303035*130 + 0.4015)))/130)/

0.00384122290886091245635647671970685350087989499650210992210316 =
1.00000000000000000604864485570749601341448873990190255641547196 06;

${}_{2}f_{140}/\varepsilon_{140}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*140 + 12) - 1/((155 + 25/37)(140^3 + (3/2)*140^2 + 1.303035*140 + 0.4015)))/140)/

0.003567176892440122732476086511515925893363437048386229994889716 =
1.0000000000000000036003799987547274522443563308008121380242456057;

${}_{2}f_{150}/\varepsilon_{150}$ = ln(1 + (1/2 + 1/(24*150 + 12) - 1/((155 + 25/37)(150^3 + (3/2)*150^2 + 1.303035*150 + 0.4015)))/150)/

0.003329629646090186616731037024655393637187536367481519712318106 =
1.0000000000000000022203033074126730537134969613681205009323148 28;

$${}_2f_{200}/\varepsilon_{200} = \ln(1 + (1/2 + 1/(24*200 + 12) - 1/((155 + 25/37)(200\^3 + (3/2)*200\^2 + 1.303035*200 + 0.4015)))/200)/ 0.0024979166718749379976592762215542225175377989725182794718 69134 = 1.00000000000000000294349012471356661574836073217731277947928568;$$

$${}_2f_{250}/\varepsilon_{250} = \ln(1 + (1/2 + 1/(24*250 + 12) - 1/((155 + 25/37)(250\^3 + (3/2)*250\^2 + 1.303035*250 + 0.4015)))/250)/ 0.0019986666687999837463048047550089786834976944065328024879741 15 = 1.000000000000000000609542308684825398177496328008972565480005393;$$

$${}_2f_{300}/\varepsilon_{300} = \ln(1 + (1/2 + 1/(24*300 + 12) - 1/((155 + 25/37)(300\^3 + (3/2)*300\^2 + 1.303035*300 + 0.4015)))/300)/ 0.0016657407417695418817453046736327323431625116836252001151771 61 = 1.000000000000000000167197067513294727507162179686547686910328055;$$

$${}_2f_{350}/\varepsilon_{350} = \ln(1 + (1/2 + 1/(24*350 + 12) - 1/((155 + 25/37)(350\^3 + (3/2)*350\^2 + 1.303035*350 + 0.4015)))/350)/$$

0.0014278911570179070458220883321175316207469005517978820523337767 = 1.000000000000000055619938444704594079360405965796980839589133;

$${}_2f_{400}/\varepsilon_{400} = \ln(1 + (1/2 + 1/(24*400 + 12) - 1/((155 + 25/37)(400^3 + (3/2)*400^2 + 1.303035*400 + 0.4015)))/400)/$$

0.00124947916699218653119435378827527633707303216077631589217025 = 1.00000000000000000021284577536869299796862217326911047325920687;

$${}_2f_{450}/\varepsilon_{450} = \ln(1 + (1/2 + 1/(24*450 + 12) - 1/((155 + 25/37)(450^3 + (3/2)*450^2 + 1.303035*450 + 0.4015)))/450)/$$

0.001110699588680586830961598544994472489489894918447250235858364 = 1.00000000000000000009054388626313553754428139860548184918025743;

$${}_2f_{500}/\varepsilon_{500} = \ln(1 + (1/2 + 1/(24*500 + 12) - 1/((155 + 25/37)(500^3 + (3/2)*500^2 + 1.303035*500 + 0.4015)))/500)/$$

0.00099966666667999997460328126906552090498501469307918438580182057 = 1.00000000000000000004181959563919656103987122357166541990305372.

Вычислим соответствующие приближения второго порядка $_2T_n$ гармонических чисел H_n:

$$H_n \approx {}_2T_n = \ln(n + 1/2 + {}_2t_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/{}_1z_n + 1/{}_2z_n) + \gamma =$$
$$\ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12) - 1/((155 + 25/37)(n^3 + (3/2)n^2 + 1.303035n + 0.4015))) + \gamma =$$
$$\ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12) - 1/((155 + 25/37)(n^3 + (3/2)n^2 + 1.303035n + 0.4015))) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767;$$

$$H_1 \approx {}_2T_1 = \ln(1 + 1/2 + 1/(24*1 + 12) - 1/((155 + 25/37)(1\hat{}3 + (3/2)*1\hat{}2 + 1.303035*1 + 0.4015))) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$1.000029408855328590278927800130964979369399746981533917713621902;$$

$$H_2 \approx {}_2T_2 = \ln(2 + 1/2 + 1/(24*2 + 12) - 1/((155 + 25/37)(2\hat{}3 + (3/2)*2\hat{}2 + 1.303035*2 + 0.4015))) +$$

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
1.500000852221197525510468127355374214822799417329917649176665984;

$$H_3 \approx {}_2T_3 = \ln(3 + 1/2 + 1/(24*3 + 12) - 1/((155 + 25/37)(3^3 + (3/2)*3^2 + 1.303035*3 + 0.4015))) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 1.833333403190697927266325580615500236184217768954131205979519 4;$$

$$H_4 \approx {}_2T_4 = \ln(4 + 1/2 + 1/(24*4 + 12) - 1/((155 + 25/37)(4^3 + (3/2)*4^2 + 1.303035*4 + 0.4015))) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 2.083333343538724835068511485487365719216297767832696496618897314;$$

$$H_5 \approx {}_2T_5 = \ln(5 + 1/2 + 1/(24*5 + 12) - 1/((155 + 25/37)(5^3 + (3/2)*5^2 + 1.303035*5 + 0.4015))) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 2.283333335480289568219148845362621590212420937085909414663221374;$$

$H_6 \approx {}_2T_6$ = ln(6 + 1/2 + 1/(24*6 + 12) - 1/((155 + 25/37)(6^3 + (3/2)*6^2 + 1.303035*6 + 0.4015))) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 2.45000000579968893546493811196297872750488627356243040193704144;

$H_7 \approx {}_2T_7$ = ln(7 + 1/2 + 1/(24*7 + 12) - 1/((155 + 25/37)(7^3 + (3/2)*7^2 + 1.303035*7 + 0.4015))) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 2.59285714304502606006216315909419126832731186008659188544225484 2;

$H_8 \approx {}_2T_8$ = ln(8 + 1/2 + 1/(24*8 + 12) - 1/((155 + 25/37)(8^3 + (3/2)*8^2 + 1.303035*8 + 0.4015))) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 2.71785714292700018152753486135882016224491752496978377901044324 9;

$H_9 \approx {}_2T_9$ = ln(9 + 1/2 + 1/(24*9 + 12) - 1/((155 + 25/37)(9^3 + (3/2)*9^2 + 1.303035*9 + 0.4015))) +

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057670 =

2.8289682539971898598517696926567969829911396574998860716305098 87;

$H_{10} \approx {}_{2}T_{10}$ = ln(10 + 1/2 + 1/(24*10 + 12) - 1/((155 + 25/37)(10^3 + (3/2)*10^2 + 1.303035*10 + 0.4015))) +

0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 =

2.928968253981327371371468591719516735607484885654756205579398737;

$H_{11} \approx {}_{2}T_{11}$ = ln(11 + 1/2 + 1/(24*11 + 12) - 1/((155 + 25/37)(11^3 + (3/2)*11^2 + 1.303035*11 + 0.4015))) +

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 =

3.019877344883688436443515072779296070490784421816503625665668119;

$H_{12} \approx {}_{2}T_{12}$ = ln(12 + 1/2 + 1/(24*12 + 12) - 1/((155 + 25/37)(12^3 + (3/2)*12^2 + 1.303035*12 + 0.4015))) +

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 =

3.103210678213945471667239885106413033586907360815789712620180826;

$$H_{13} \approx {}_2T_{13} = \ln(13 + 1/2 + 1/(24*13 + 12) - 1/((155 + 25/37)(13\hat{}3 + (3/2)*13\hat{}2 + 1.303035*13 + 0.4015))) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 3.1801337551355252744955177670380185140521058249100818683652836 76;$$

$$H_{14} \approx {}_2T_{14} = \ln(14 + 1/2 + 1/(24*14 + 12) - 1/((155 + 25/37)(14\hat{}3 + (3/2)*14\hat{}2 + 1.303035*14 + 0.4015))) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.251562326563328178610716159655511261481187266124042816969237456;$$

$$H_{15} \approx {}_2T_{15} = \ln(15 + 1/2 + 1/(24*15 + 12) - 1/((155 + 25/37)(15\hat{}3 + (3/2)*15\hat{}2 + 1.303035*15 + 0.4015))) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.318228993229581765478462839935348765124125908677948845260755322;$$

$$H_{16} \approx {}_2T_{16} = \ln(16 + 1/2 + 1/(24*16 + 12) - 1/((155 + 25/37)(16\hat{}3 + (3/2)*16\hat{}2 + 1.303035*16 + 0.4015))) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 3.3807289932293506616600209489421820342297682212599144627479193 05;$$

$$H_{17} \approx {}_2T_{17} = \ln(17 + 1/2 + 1/(24*17 + 12) - 1/((155 + 25/37)(17{}^\wedge 3 + (3/2)*17{}^\wedge 2 + 1.303035*17 + 0.4015))) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.43955252264098144064778191271081534321830413622628819832504247;$$

$$H_{18} \approx {}_2T_{18} = \ln(18 + 1/2 + 1/(24*18 + 12) - 1/((155 + 25/37)(18{}^\wedge 3 + (3/2)*18{}^\wedge 2 + 1.303035*18 + 0.4015))) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.4951080781964569264783118291175918746506856829328935051856907 78;$$

$$H_{19} \approx {}_2T_{19} = \ln(19 + 1/2 + 1/(24*19 + 12) - 1/((155 + 25/37)(19{}^\wedge 3 + (3/2)*19{}^\wedge 2 + 1.303035*19 + 0.4015))) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.54773965714377612719483404390761877070415941784539557115325839 1;$$

$$H_{20} \approx {}_2T_{20} = \ln(20 + 1/2 + 1/(24*20 + 12) - 1/((155 + 25/37)(20^3 + (3/2)*20^2 + 1.303035*20 + 0.4015))) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 3.597739657143745106060711019378186791132334664144478419216933342;$$

$$H_{30} \approx {}_2T_{30} = \ln(30 + 1/2 + 1/(24*30 + 12) - 1/((155 + 25/37)(30^3 + (3/2)*30^2 + 1.303035*30 + 0.4015))) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.994987130920393711337663159456335002078815292467030829695719895;$$

$$H_{40} \approx {}_2T_{40} = \ln(40 + 1/2 + 1/(24*40 + 12) - 1/((155 + 25/37)(40^3 + (3/2)*40^2 + 1.303035*40 + 0.4015))) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.278543038936376259867877743875831175389382503069424760612715972;$$

$$H_{50} \approx {}_2T_{50} = \ln(50 + 1/2 + 1/(24*50 + 12) - 1/((155 + 25/37)(50^3 + (3/2)*50^2 + 1.303035*50 + 0.4015))) +$$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 4.4992053383294251043186550720492393171972404996441904608859 84983;$$

$$H_{60} \approx {}_{2}T_{60} = \ln(60 + 1/2 + 1/(24*60 + 12) - 1/((155 + 25/37)(60^3 + (3/2)*60^2 + 1.303035*60 + 0.4015))) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.679870412951737828198802785870292380629989128659266591065354 03;$$

$$H_{70} \approx {}_{2}T_{70} = \ln(70 + 1/2 + 1/(24*70 + 12) - 1/((155 + 25/37)(70^3 + (3/2)*70^2 + 1.303035*70 + 0.4015))) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.832836757638071791562091246197258148420704123924728024671783 42;$$

$$H_{80} \approx {}_{2}T_{80} = \ln(80 + 1/2 + 1/(24*80 + 12) - 1/((155 + 25/37)(80^3 + (3/2)*80^2 + 1.303035*80 + 0.4015))) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.965479278945516526289411975026918252569691763625839948543265 026;$$

**$H_{90} \approx {}_{2}T_{90}$ = ln(90 + 1/2 + 1/(24*90 + 12) - 1/((155 + 25/37)(90^3 +
(3/2)*90^2 + 1.303035*90 + 0.4015))) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
5.0825706028485155545698797318525694348349843019793592486787720 12;**

**$H_{100} \approx {}_{2}T_{100}$ = ln(100 + 1/2 + 1/(24*100 + 12) - 1/((155 + 25/37)
(100^3 + (3/2)*100^2 + 1.303035*100 + 0.4015))) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
5.1873775176396202609939733145937876612322032414354333979948830 72;**

**$H_{110} \approx {}_{2}T_{110}$ = ln(110 + 1/2 + 1/(24*110 + 12) - 1/((155 + 25/37)
(110^3 + (3/2)*110^2 + 1.303035*110 + 0.4015))) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
5.2822345982439775845986422466869689583075667567578465379248576 73;**

**$H_{120} \approx {}_{1}W_{120}$ = ln(120 + 1/2 + 1/(24*120 + 12) - 1/((155 + 25/37)
(120^3 + (3/2)*120^2 + 1.303035*120 + 0.4015))) +**

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 =

5.3688682873533949128662091862317211181079414634057035209266076 59;

$H_{130} \approx {}_{2}T_{130}$ = ln(130 + 1/2 + 1/(24*130 + 12) - 1/((155 + 25/37)

(130^3 + (3/2)*130^2 + 1.303035*130 + 0.4015))) +

0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 =

5.4485913382659761931575816562390994388838101808595782617941873 25;

$H_{140} \approx {}_{2}T_{140}$ = ln(140 + 1/2 + 1/(24*140 + 12) - 1/((155 + 25/37)

(140^3 + (3/2)*140^2 + 1.303035*140 + 0.4015))) +

0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 =

5.5224252644032772818924076885152003238756174065977818497723418 47;

$H_{150} \approx {}_{2}T_{150}$ = ln(150 + 1/2 + 1/(24*150 + 12) - 1/((155 + 25/37)

(150^3 + (3/2)*150^2 + 1.303035*150 + 0.4015))) +

0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 =

5.5911805886438787972446319396558087058527023635222597757718083 83;

$H_{200} \approx {}_2T_{200} = \ln(200 + 1/2 + 1/(24*200 + 12) - 1/((155 + 25/37)$
$(200\hat{}3 + (3/2)*200\hat{}2 + 1.303035*200 + 0.4015))) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$5.878030948121444476058121656436463762687919608793737058717773552;$

$H_{250} \approx {}_2T_{250} = \ln(250 + 1/2 + 1/(24*250 + 12) - 1/((155 + 25/37)$
$(250\hat{}3 + (3/2)*250\hat{}2 + 1.303035*250 + 0.4015))) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$6.100675249432579277572448843163710071515998243133058840034575859;$

$H_{300} \approx {}_2T_{300} = \ln(300 + 1/2 + 1/(24*300 + 12) - 1/((155 + 25/37)$
$(300\hat{}3 + (3/2)*300\hat{}2 + 1.303035*300 + 0.4015))) +$
$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$
$6.282663880299503461919513391744015412008285947802338886238173179;$

$H_{350} \approx {}_2T_{350} = \ln(350 + 1/2 + 1/(24*350 + 12) - 1/((155 + 25/37)$
$(350\hat{}3 + (3/2)*350\hat{}2 + 1.303035*350 + 0.4015))) +$

$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 =$$

$$6.4365767105420101313764456516900774468279087634046234537003956 78;$$

$$H_{400} \approx {}_2T_{400} = \ln(400 + 1/2 + 1/(24*400 + 12) - 1/((155 + 25/37)(400^3 + (3/2)*400^2 + 1.303035*400 + 0.4015))) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 6.5699296911765070340081562556193803135382471571773728266751011 17;$$

$$H_{450} \approx {}_2T_{450} = \ln(450 + 1/2 + 1/(24*450 + 12) - 1/((155 + 25/37)(450^3 + (3/2)*450^2 + 1.303035*450 + 0.4015))) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 6.6875739472545788888467159560535724600181107230682787860276287 07;$$

$$H_{500} \approx {}_2T_{500} = \ln(500 + 1/2 + 1/(24*500 + 12) - 1/((155 + 25/37)(500^3 + (3/2)*500^2 + 1.303035*500 + 0.4015))) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 6.7928234299905246029892875634245314904141236538540697989705213 23.$$

Таблица. Избранные первые относительные, а именно делённые на соответствующие приближаемые элементы бесконечно малой последовательности λ_n, приближения этих элементов, даваемые почти, или не совсем полным, приближением первого порядка ${}_{1-\delta}w_n$, приближением первого порядка ${}_1w_n$ приближающей функции w_n, приближением второго порядка ${}_2d_n$ функциональной непрерывной, или цепной, дробью, а также приближением второго порядка ${}_2t_n$ рядом функциональных единичных дробей к элементам бесконечно малой последовательности λ_n для избранных первых гармонических чисел H_n, сопоставленные с избранными первыми относительными, а именно делёнными на соответствующие приближаемые

элементы бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n, приближениями этих элементов, даваемыми вторым приближением ${}_2f_n$ приближающей функции f_n в рядах функциональных единичных дробей, по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной.

n	${}_{1-\delta}w_n/\lambda_n = 1/(24n\lambda_n)$	${}_1w_n/\lambda_n = 1/((24n + 12)\lambda_n)$	${}_2d_n/\lambda_n = 1/((24n + 12 + 3.7/n)\lambda_n)$	${}_2t_n/\lambda_n = (1/(24n + 12) - 1/((155 + 25/37)(n^3 +$	${}_2f_n/\varepsilon_n = \ln(1 + (1/2 + 1/(24n + 12) - 1/((155 + 25/37)(n^3 +$

				$(3/2)n^2 + 1.303035n + 0.4015)))/\lambda_n$	$(3/2)n^2 + 1.303035n + 0.4015)))/n)/\varepsilon_n$
1	1.5900205772542	1.0600137181694	0.9612215076599	1.001712818705	1.0000695599455
2	1.2791520591634	1.0233216473307	0.9927129966021	1.000131666737	1.0000037111642
3	1.1809108457441	1.0122092963521	0.9975625447037	1.000020858678	1.0000004435236
4	1.1334050473207	1.0074711531740	0.9989156258232	1.000005007081	1.0000000851703
5	1.1055348374109	1.0050316703735	0.9994288118827	1.000001568679	1.0000000222068
6	1.0872499975046	1.0036153823120	0.9996637201703	1.000000590794	1.0000000071579
7	1.0743446767862	1.0027216983338	0.9997858193405	1.000000254520	1.0000000026943
8	1.0647548387472	1.0021222011738	0.9998553722050	1.000000121459	1.0000000011414

9	**1.0573508069253**	**1.0017007644555**	**0.9998978297722**	**1.000000062810**	**1.0000000005306**
10	**1.0514629976480**	**1.0013933310934**	**0.9999251869697**	**1.000000034653**	**1.0000000002658**
11	**1.0466696108063**	**1.0011622364234**	**0.9999435963356**	**1.000000020164**	**1.0000000001417**
12	**1.0426918402581**	**1.0009841666478**	**0.9999564336465**	**1.000000012267**	**1.0000000000795**
13	**1.0393380707271**	**1.0008440681075**	**0.9999656557319**	**1.000000007750**	**1.0000000000466**
14	**1.0364722946498**	**1.0007318706964**	**0.9999724499114**	**1.000000005058**	**1.0000000000283**
15	**1.0339953202460**	**1.0006406324961**	**0.9999775649351**	**1.000000003396**	**1.0000000000178**
16	**1.0318331127563**	**1.0005654426727**	**0.9999814888361**	**1.000000002337**	**1.0000000000115**
17	**1.0299292996341**	**1.0005027482160**	**0.9999845489399**	**1.000000001643**	$\mathbf{1.0_{11}7674409572}$
18	**1.0282402030314**	**1.0004499272738**	**0.9999869703431**	**1.000000001178**	$\mathbf{1.0_{11}52119415434}$
19	**1.0267314587005**	**1.0004050110415**	**0.9999889112921**	**1.000000000860**	$\mathbf{1.0_{11}36118713374}$

20	1.0253756603680	1.0003664979200	0.9999904852375	1.000000000637	$1.0_{11}2549019603$
30	1.0168350826744	1.0001656550895	0.9999971674065	1.000000000058	$1.0_{11}0159335250$
40	1.0125951414839	1.0000939668976	0.9999988024026	1.000000000010	$1.0_{11}0021959590$
50	1.0100610465606	1.0000604421392	0.9999993860710	$1.0_{11}2862101102$	$1.0_{11}0004691455$
60	1.0083757988628	1.0000421145747	0.9999996444336	$1.0_{11}0967232334$	$1.0_{11}0001324874$
70	1.0071740940825	1.0000310154011	0.9999997759620	$1.0_{11}0385874548$	$1.0_{11}0000453944$
80	1.0062739374501	1.0000237887703	0.9999998498505	$1.0_{11}0173875926$	$1.0_{11}0000179245$
90	1.0055744824014	1.0000188222776	0.9999998945121	$1.0_{11}0085997672$	$1.0_{11}0000078894$
100	1.0050153393611	1.0000152630458	0.9999999230802	$1.0_{11}0045780627$	$1.0_{11}0000037834$
110	1.0045581375262	1.0000126255916	0.9999999421973	$1.0_{11}0025866921$	$1.0_{11}0000019448$
120	1.0041773279690	1.0000106170645	0.9999999554698	$1.0_{11}0015352495$	$1.0_{11}0000010587$

130	**1.0038552409700**	**1.0000090523072**	**0.9999999649709**	**$1.0_{11}0009496528$**	**$1.0_{11}0000006048$**
140	**1.0035792660677**	**1.0000078096048**	**0.9999999719504**	**$1.0_{11}0006084728$**	**$1.0_{11}0000003600$**
150	**1.0033401623013**	**1.0000068062803**	**0.9999999771923**	**$1.0_{11}0004018798$**	**$1.0_{11}0000002220$**
200	**1.0025038445171**	**1.0000038349298**	**0.9999999903745**	**$1.0_{11}0000709386$**	**$1.0_{11}0000000294$**
250	**1.0020024617275**	**1.0000024568139**	**0.9999999950707**	**$1.0_{11}0000183473$**	**$1.0_{11}0000000060$**
300	**1.0016683767718**	**1.0000017072597**	**0.9999999971470**	**$1.0_{11}0000060358$**	**$1.0_{11}0000000016$**
350	**1.0014298281325**	**1.0000012549112**	**0.9999999982031**	**$1.0_{11}0000023416$**	**$1.0_{20}5561993844$**
400	**1.0012509623363**	**1.0000009611349**	**0.9999999987961**	**$1.0_{11}0000010237$**	**$1.0_{20}2128457753$**
450	**1.0011118715815**	**1.0000007596263**	**0.9999999991544**	**$1.0_{11}0000004898$**	**$1.0_{20}0905438862$**
500	**1.0010006160496**	**1.0000006154342**	**0.9999999993835**	**$1.0_{11}0000002513$**	**$1.0_{20}0418195956$**

Сравнительный анализ итогов этого сопоставления позволяет сделать следующие основные выводы:

1. Простейшее почти, или не совсем полное, приближение первого порядка

$$_{1-\delta}w_n = 1/(24n),$$

не только ограничивающееся единственной функциональной единичной дробью 1/(24n), но и берущее её знаменателем 24n лишь бесконечно большую часть обращения $1/\lambda_n$ приближаемой с избытком бесконечно малой последовательности λ_n, даёт совершенно неприемлемые относительные погрешности от более чем 59 % до более чем 5 % приближений первой десятки элементов приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n.

Эта относительная погрешность снижается до приемлемого 1 % только для элементов приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n с номерами, превышающими 50.

2. Незначительно более сложное весьма простое приближение первого порядка

$$_1w_n = 1/(24n + 12),$$

тоже ограничивающееся единственной функциональной единичной дробью 1/(24n + 12), однако берущее её знаменателем (24n + 12) не только бесконечно большую часть 24n обращения $1/\lambda_n$ приближаемой с избытком бесконечно малой последовательности λ_n, но и конечную постоянную часть 12 этого обращения, даёт меньшие как минимум на порядок по сравнению с названными выше

относительные погрешности от 6 % до 1.22 % приближений первой тройки элементов приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n. Эта относительная погрешность меньше приемлемого 1 % для элементов приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n с номерами, превышающими 3.

3. Незначительно ещё более сложное весьма простое приближение второго порядка функциональной непрерывной, или цепной, дробью

$$ {}_2d_n = 1/(24n + 12 + 3.7/n), $$

берущее знаменателем (24n + 12 + 3.7/n) функциональной единичной непрерывной, или цепной, дроби 1/(24n + 12 + 3.7/n) не только бесконечно большую часть 24n обращения

$1/\lambda_n$ приближаемой с недостатком бесконечно малой последовательности λ_n и конечную постоянную часть 12 этого обращения, но и главную часть 3.7/n бесконечно малой части этого обращения, даёт ещё меньшие по сравнению с названными выше относительные погрешности. А именно, относительная погрешность приближения меньше 4 % для первого элемента λ_1 приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n и меньше приемлемого 1 % для элементов приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n с номерами, превышающими 1.

4. Из этих четырёх предложенных и указанных наилучшее, причём высокоточное, приближение именно всех элементов

приближаемой с избытком бесконечно малой последовательности λ_n даёт существенно более сложное приближение второго порядка

$$_2t_n = 1/(24n + 12) - 1/(155.6757n^3 + 233.5135n^2 + 202.86n + 61.6)$$

разностью двух функциональных единичных дробей ряда функциональных единичных дробей. А именно, относительная погрешность приближения меньше 0.17 % для первого элемента λ_1 приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n, более чем на порядок меньше для второго элемента λ_2 и быстро снижается на целые порядки для следующих элементов приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n. Ещё на порядок или даже на несколько порядков меньшими являются относительные

погрешности приближения элементов бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n, даваемые соответствующим вторым приближением

$$_2f_n = \ln(1 + (1/2 + 1/(24n + 12) - 1/(155.6757n^3 + 233.5135n^2 + 202.86n + 61.6))/n)$$

приближающей функции f_n в рядах функциональных единичных дробей по этой всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной.

5. Общие функциональные метод и алгоритм построения рядов функциональных единичных дробей последовательным их выделением дают значительно

лучшие итоги, чем итоги общих функциональных метода и алгоритма последовательного построения функциональных непрерывных, или цепных, дробей.

6. В таблице эффективно использовано предлагаемое сокращение записи повторения одной и той же цифры или группы цифр подряд с указанием кратности повторения правым нижним индексом, например:

$$e = 2.7(1828)_2 459045...;$$

$$1/3 = 0.(3) = 0.3_\infty;$$

$$1/7 = 0.(142857) = 0.(142857)_\infty.$$

Такое сокращение записи чрезвычайно полезно для таблиц с жёстким ограничением количества цифр в столбце и для отношений высокоточных приближений к приближаемым

предметам. Оба этих обстоятельства имеют место в данном случае, в котором кратко записываются достаточно длинные последовательности нулей и могут кратко записываться достаточно длинные последовательности девяток. При этом в интересах наглядной сравнимости представляется целесообразной возможность кратко представить не всю последовательность повторений, а её целесообразную для сравнимости часть.

7. Для углублённного сравнительного анализа приближений избранных первых гармонических чисел с целесообразными для табличного представления именно краткими и наглядными итогами полезна всеобщая математическая теория и методология деления

приближения к отклонению на ненулевое отклонение, дающая здесь кратно бесконечный математический микроскоп. Вместо последовательности гармонических чисел, стремящейся к плюс бесконечности, хотя и очень медленно, а именно асимптотически со скоростью натурального логарифма, рассматривается бесконечно малая последовательность λ_n, взаимно однозначно связанная с бесконечно малой последовательностью Эйлера ε_n разностей гармонических чисел и их приближений по приближённой формуле Эйлера. Для каждого номера гармонического числа составляется дробь, знаменателем которой является элемент бесконечно малой последовательности λ_n, имеющий этот номер, и числителем

которой является приближение этого элемента рассматриваемой приближающей функцией, а именно её приближением рассматриваемого порядка. Качество приближения выражается близостью этой др<u>о</u>би к единице. Разность этой др<u>о</u>би и единицы выражает относительное отклонение рассматриваемого приближения от соответствующего элемента бесконечно малой последовательности λ_n. Эта разность отрицательна для приближений с недостатком и положительна для приближений с избытком. Тогда каждому приближению соответствует последовательность дробей, по возможности близких к единице, с обеспечением краткости, наглядности и чрезвычайно удобной сопоставимости табличных итогов с

весьма ограниченным числом представляемых значащих цифр.

Теперь сопоставим избранные первые гармонические числа H_n с полученными их приближениями половинного, первого и второго порядков на основе приближающих бесконечно малую последовательность λ_n приближения половинного порядка $_{1/2}w_n$, почти, или не совсем полного, приближения первого порядка $_{1-\delta}w_n$, приближения первого порядка $_1w_n$, приближения второго порядка $_2d_n$ в функциональных непрерывных, или цепных, дробях, а также приближения второго порядка $_2t_n$ в рядах функциональных единичных дробей соответственно.

Таблица. Избранные первые гармонические числа H_n и их приближение половинного порядка ${}_{1/2}W_n$, почти, или не совсем полное, приближение первого порядка ${}_{1-\delta}W_n$, приближение первого порядка ${}_1W_n$, приближение второго порядка ${}_2D_n$ в функциональных непрерывных, или цепных, дробях, а также приближение второго порядка ${}_2T_n$ в рядах функциональных единичных дробей с подчёркиваниями первых верных цифр.

n	$H_n = \Sigma_{j=1}^n 1/j = {}_{1/2}W_n = \ln(n + 1/2 + \lambda_n) + \gamma$	${}_{1/2}W_n = \ln(n +$	${}_{1-\delta}W_n = \ln(n + 1/2 +$	${}_1W_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n$	${}_2D_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12 +$	${}_2T_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12) - 1/((155 + 25/37)(n^3 +$

		1/2) + γ	1/(24n)) + γ	+ 12)) + γ	3.7/n)) + γ	(3/2)n^2 + 1.303035n + 0.4015))) + γ
1	1	0.9826807	1.0100797471	1.0010299116778	0.9993339472074893	1.0000294088553285902789278
2	1.5	1.4935063	1.5018051995	1.5001509394943	1.4999528332820080	1.5000008522211975255104681
3	1.8333333333333333333333333	1.8299786	1.8339390346	1.8333742223980	1.8333251700691373	1.8333334031906979272663255
4	2.0833333333333333333333333	2.0812930	2.0836052014	2.0833485608599	2.0833311231684266	2.0833334353872483506851114
5	2.2833333333333333333333333	2.2819637	2.2834777619	2.2833402198486	2.2833325515828358	2.2833333354802895682191488
6	2.45	2.4490178	2.4500856475	2.4500035491278	2.4499996698820948	2.4500000005799688935464938
7	2.5928571428571428571428571	2.5921186	2.5929120214	2.5928591519715	2.5928569847522186	2.5928571430450260600621631
8	2.7178571428571428571428571	2.7172818	2.7178943858	2.7178583634382	2.7178570596746080	2.7178571429270001815275348
9	2.8289682539682539682539682	2.8285074	2.8289946742	2.8289690374834	2.8289682069000317	2.8289682539971898598517696
10	2.9289682539682539682539682	2.9285909	2.9289876687	2.9289687796172	2.9289682257442357	2.9289682539813273713714685
11	3.0198773448773448773448773	3.0195627	3.0198920268	3.0198777105111	3.0198773271330276	3.0198773448836884364435150

12	3.1032106782106782106782106	3.1029443	3.1032220484	3.1032109403272	3.1032106666074975	3.1032106782139454716672398
13	3.1801337551337551337551337	3.1799053	3.1801427390	3.1801339479009	3.1801337472902556	3.1801337551355252744955177
14	3.2515623265623265623265623	3.2513643	3.2515695477	3.2515624714673	3.2515623211076120	3.2515623265633281786107161
15	3.3182289932289932289932289	3.3180556	3.3182348842	3.3182291042437	3.3182289893412346	3.3182289932295817654784628
16	3.3807289932289932289932289	3.3805760	3.3807338616	3.3807290797053	3.3807289903979749	3.3807289932293506616600209
17	3.4395525226407579348755819	3.4394165	3.4395565920	3.4395525909982	3.4395525205399149	3.4395525226409814406477819
18	3.4951080781963134904311374	3.4949863	3.4951115142	3.4951081329406	3.4951080766109455	3.4951080781964569264783118
19	3.5477396571436819114837690	3.5476301	3.5477425847	3.5477397015007	3.5477396559292391	3.5477396571437761271948340
20	3.5977396571436819114837690	3.5976405	3.5977421718	3.5977396934640	3.5977396562007576	3.5977396571437451060607110
30	3.9949871309203910705017736	3.9949423	3.9949878848	3.9949871383386	3.9949871307935435	3.9949871309203937113376631
40	4.2785430389363759865166507	4.2785176	4.2785433588	4.2785430413230	4.2785430389059574	4.2785430389363762598678777
50	4.4992053383294250575604717	4.4991890	4.4992055026	4.4992053393168	4.4992053383193952	4.4992053383294251043186550
60	4.6798704129517378171888468	4.6798590	4.6798705082	4.6798704134311	4.6798704129476904	4.6798704129517378281988027
70	4.8328367576380717883273499	4.8328283	4.8328368177	4.8328367578980	4.8328367576361937	4.8328367576380717915620912
80	4.9654792789455165251714595	4.9654728	4.9654793192	4.9654792790984	4.9654792789445511	4.9654792789455165262894119

90	5.0825706028485155541323899	5.0825655	5.0825706312	5.0825706029442	5.0825706028479789	5.0825706028485155545698797
100	5.1873775176396202608051176	5.1873733	5.1873775383	5.1873775177025	5.1873775176393029	5.1873775176396202609939733
110	5.2822345982439775845103745	5.2822311	5.2822346137	5.2822345982870	5.2822345982437803	5.2822345982439775845986422
120	5.3688682873533949128221549	5.3688654	5.3688682993	5.3688682873838	5.3688682873532671	5.3688682873533949128662091
130	5.4485913382659761931343474	5.4485888	5.4485913476	5.4485913382881	5.4485913382658904	5.4485913382659761931575816
140	5.5224252644032772818795644	5.5224231	5.5224252719	5.5224252644197	5.5224252644032180	5.5224252644032772818924076
150	5.5911805886438787972372391	5.5911787	5.5911805947	5.5911805886563	5.5911805886438368	5.5911805886438787972446319
200	5.8780309481214444760573863	5.8780299	5.8780309507	5.8780309481254	5.8780309481214344	5.8780309481214444760581216
250	6.1006752494325792775723270	6.1006745	6.1006752507	6.1006752494342	6.1006752494325760	6.1006752494325792775724488
300	6.2826638802995034619194855	6.2826634	6.2826638810	6.2826638803002	6.2826638802995021	6.2826638802995034619195133
350	6.4365767105420101313764377	6.4365763	6.4365767110	6.4365767105424	6.4365767105420095	6.4365767105420101313764456
400	6.5699296911765070340081535	6.5699294	6.5699296915	6.5699296911767	6.5699296911765067	6.5699296911765070340081562
450	6.6875739472545788888467149	6.6875737	6.6875739474	6.6875739472547	6.6875739472545787	6.6875739472545788888467159
500	6.7928234299905246029892871	6.7928232	6.7928234301	6.7928234299906	6.7928234299905245	6.7928234299905246029892875

Анализ итогов сопоставления избранных первых гармонических чисел H_n с их приближением половинного

порядка $_{1/2}W_n$, почти, или не совсем полным, приближением первого порядка $_{1-\delta}W_n$, приближением первого порядка $_1W_n$, приближением второго порядка $_2D_n$ в функциональных непрерывных, или цепных, дробях, а также приближением второго порядка $_2T_n$ в рядах функциональных единичных дробей с подчёркиваниями первых верных цифр позволяет сделать следующие основные выводы:

1. Рассматриваемая всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной в данном случае последовательности гармонических чисел как функции одной независимой переменной, а именно номера гармонического числа,

изменяет каждое приближение как такую функцию путём изменения значений этой независимой переменной. Поскольку приближённая формула Эйлера даёт приближения гармонических чисел именно с недостатком и является строго монотонно возрастающей функцией номера гармонического числа под знаком натурального логарифма, то для каждого приближения, уточняющего приближённую формулу Эйлера, используется именно положительная последовательность таких изменений номера гармонического числа как аргумента такой функции, прибавляемая к этому аргументу.

2. Абсолютные и относительные погрешности этих пяти приближений убывают вместе с ростом порядкового номера

гармонического числа. Кроме того, сами эти пять приближений указаны в порядке повышения точности и соответственно снижения абсолютных и относительных погрешностей.

3. Количество первых верных цифр в отдельных случаях может отклоняться от правильного выражения действительных точности и погрешности, что должно замечаться и анализироваться дополнительно. Пример: число 999 не выражает верно ни одной цифры числа 1000, а несравненно более далёкое от числа 1000 число 1999 верно выражает одну первую цифру числа 1000. Тем не менее, вероятность правильного выражения действительных точности и погрешности количеством первых верных цифр

куда больше вероятности неправильного выражения, так что при достаточно большом количестве сравниваемых чисел общая картина даётся в основном правильно и к тому же весьма наглядно. Это позволяет легко заметить отклонения от общих закономерностей и проанализировать эти отклонения. Зато указание первых верных цифр позволяет избежать явного указания действительных погрешностей и тем самым серьёзного дополнительного загромождения, весьма вредного для восприятия и к тому же ограничивающего количество сопоставляемых объектов. А это мешает анализу и выявлению ключевых закономерностей.

4. Приближение половинного порядка

$$ {}_{1/2}W_n = \ln(n + 1/2) + \gamma $$

прибавлением 1/2 к аргументу n приближения как функции этого аргумента осуществляет именно перенацеливание приближаемого предмета со среднего арифметического рассматриваемого и предыдущего гармонических чисел, что на деле имеет место для приближённой формулы Эйлера как функции, на само рассматриваемое гармоническое число, что и требуется. Тем самым прибавление 1/2 к аргументу этой функции примерно равносильно прибавлению дроби 1/(2n) к значению этой функции, что осуществлялось почти, или не совсем полным, приближением первого порядка $_{1-\delta}G_n$ в предыдущей всеобщей методологии изменения зависимой

переменной изменением значения самой этой зависимой переменной. Это именно сущностная, качественная сторона прибавления 1/2 к аргументу этой функции. А количественная сторона этого заключается в сохранении общего характера приближения именно с недостатком и при этом в уменьшении абсолютной и относительной погрешностей приближения, даваемого приближённой формулой Эйлера, более чем на порядок. Так, уже для первого гармонического числа абсолютная и относительная погрешности снижаются с более чем 42 % до менее чем 1.75 %. А для следующих гармонических чисел относительные погрешности снижаются до менее чем 0.5 %. Поэтому вполне можно считать, что уже это простейшее

приближение половинного порядка является вполне приемлемым именно для всех гармонических чисел. Верны 7 первых цифр приближения гармонического числа H_{300}. Заметим, что выделение 1/2 выявилось сразу, немедленно, ещё до обращения остатка нулевого порядка.

5. Незначительно более сложное достаточно простое почти, или не совсем полное, приближение первого порядка

$${}_{1\text{-}\delta}W_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n)) + \gamma,$$

не только ограничивающееся единственной функциональной единичной дробью 1/(24n), но и берущее её знаменателем 24n лишь бесконечно большую часть обращения $1/\lambda_n$ приближаемой с избытком бесконечно малой последовательности λ_n, снижает относительные

погрешности до приемлемого 1 % уже для первого гармонического числа и до менее чем 0.1 % для следующих гармонических чисел. Поэтому вполне можно считать, что уже это достаточно простое почти, или не совсем полное, приближение первого порядка является достаточно качественным именно для всех гармонических чисел. Заметим, что это приближение гармонических чисел основано на почти, или не совсем полном, приближении первого порядка

$${}_{1-\delta}w_n = 1/(24n)$$

к бесконечно малой последовательности λ_n, дающем совершенно неприемлемые относительные погрешности от более чем 59 % до более чем 5 % приближений первой

десятки элементов приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n. Эта относительная погрешность снижается до приемлемого 1 % только для элементов приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n с номерами, превышающими 50. Именно поэтому качественно и количественно вполне ясны роль и значимость дополнительного рассмотрения точности приближения бесконечно малой последовательности λ_n как кратно бесконечного математического микроскопа для бесконечно большой последовательности гармонических чисел H_n. Верны 9 первых цифр приближения гармонического числа H_{300}.

6. Незначительно ещё более сложное весьма простое приближение первого порядка

$${}_1W_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12)) + \gamma,$$

тоже ограничивающееся единственной функциональной единичной дробью 1/(24n + 12), однако берущее её знаменателем (24n + 12) не только бесконечно большую часть 24n обращения $1/\lambda_n$ приближаемой с избытком бесконечно малой последовательности λ_n, но и конечную постоянную часть 12 этого обращения, даёт ещё меньшие как минимум на порядок по сравнению с названными выше относительные погрешности, снижая их до приемлемой 0.1 % уже для первого гармонического числа и до менее чем 0.01 % для следующих гармонических чисел.

Поэтому вполне можно считать, что уже это достаточно простое приближение первого порядка осуществляет именно высокоточные приближения всех без исключения гармонических чисел. Заметим, что это приближение гармонических чисел основано на приближении первого порядка

$$_1w_n = 1/(24n + 12)$$

к бесконечно малой последовательности λ_n, дающем куда менее приемлемые относительные погрешности от 6 % до 1.22 % приближений первой тройки элементов приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n. Эта относительная погрешность меньше приемлемого 1 % для элементов приближаемой бесконечно малой

последовательности λ_n с номерами, превышающими 3. Именно поэтому качественно и количественно вполне ясны роль и значимость дополнительного рассмотрения точности приближения бесконечно малой последовательности λ_n как кратно бесконечного математического микроскопа для бесконечно большой последовательности гармонических чисел H_n. Верны 12 первых цифр приближений гармонических чисел H_{200} и H_{250}.

7. Незначительно ещё более сложное весьма простое приближение второго порядка функциональной непрерывной, или цепной, дробью

$$_2D_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12 + 3.7/n)) + \gamma,$$

берущее знаменателем (24n + 12 + 3.7/n) функциональной единичной непрерывной, или цепной, дроби 1/(24n + 12 + 3.7/n) не только бесконечно большую часть 24n обращения 1/λ_n приближаемой с недостатком бесконечно малой последовательности λ_n и конечную постоянную часть 12 этого обращения, но и главную часть 3.7/n бесконечно малой части этого обращения, даёт ещё несколько меньшие по сравнению с названными выше относительные погрешности, снижая их до менее чем 0.07 % уже для первого гармонического числа и до менее чем 0.004 % для следующих гармонических чисел. Поэтому вполне можно считать, что уже это достаточно простое приближение второго порядка осуществляет именно высокоточные

приближения всех без исключения гармонических чисел. Заметим, что это приближение гармонических чисел основано на приближении второго порядка

$$ {}_2d_n = 1/(24n + 12 + 3.7/n) $$

к бесконечно малой последовательности λ_n, дающем куда менее приемлемые относительные погрешности от менее 4 % для первого элемента λ_1 приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n. Эта относительная погрешность меньше приемлемого 1 % для элементов приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n с номерами, превышающими 1. Именно поэтому качественно и количественно вполне ясны роль и значимость дополнительного рассмотрения точности приближения

бесконечно малой последовательности λ_n как кратно бесконечного математического микроскопа для бесконечно большой последовательности гармонических чисел H_n. Верны 15 первых цифр приближений гармонических чисел H_{250} и H_{300}.

8. Из этих пяти предложенных и указанных наилучшее, наиболее высокоточное, приближение именно всех без исключения гармонических чисел H_n и всех элементов приближаемой с избытком бесконечно малой последовательности λ_n даёт существенно более сложное приближение второго порядка

$$ {}_2T_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12) - 1/(155.6757n^3 + 233.5135n^2 + 202.86n + 61.6)) + \gamma $$

разностью двух функциональных единичных дробей ряда функциональных единичных дробей, но зато куда меньшие по сравнению с названными выше относительные погрешности, снижая их до 0.003 % уже для первого гармонического числа. А для следующих гармонических чисел относительные погрешности снижаются до менее чем 0.00006 %. Верна 21 первая цифра приближения гармонического числа H_{200}. Заметим, что это приближение гармонических чисел основано на приближении второго порядка

$$_2t_n = 1/(24n + 12) - 1/(155.6757n^3 + 233.5135n^2 + 202.86n + 61.6)$$

к бесконечно малой последовательности λ_n, дающем на порядки б<u>о</u>льшие относительные погрешности. А именно, относительная погрешность приближения меньше 0.17 % для первого элемента λ_1 приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n, более чем на порядок меньше для второго элемента λ_2 и быстро снижается на целые порядки для следующих элементов приближаемой бесконечно малой последовательности λ_n. Именно поэтому качественно и количественно вполне <u>я</u>сн<u>ы</u> роль и значимость дополнительного рассмотрения точности приближения бесконечно малой последовательности

λ_n как кратно бесконечного математического микроскопа для бесконечно большой последовательности гармонических чисел H_n. Верна 21 первая цифра приближения гармонического числа H_{200}.

9. Общие функциональные метод и алгоритм построения рядов функциональных единичных дробей последовательным их выделением дают значительно лучшие итоги, чем итоги общих функциональных метода и алгоритма последовательного построения функциональных непрерывных, или цепных, дробей.

2.4.8.3. ВСЕОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИЗМЕНЕНИЕМ И ЗНАЧЕНИЯ САМОЙ ЭТОЙ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, И СИСТЕМЫ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ЭТОЙ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УТОЧНЕНИЮ ПРИБЛИЖЁННОЙ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной есть синергичное соединение двух предыдущих всеобщих методологий, которыми являются:

2.4.8.1. Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной.

2.4.8.2. Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной.

Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной для частного случая функции f системы переменных ($_{\omega\in\Omega}x_\omega$) и аддитивного изменения $\Delta f(_{\omega\in\Omega}x_\omega)$ предусматривает замену

$$y = f(_{\omega\in\Omega}x_\omega)$$

на

$$y = f(_{\omega\in\Omega}x_\omega) + \Delta f(_{\omega\in\Omega}x_\omega).$$

Для частного случая функции f одной переменной x и аддитивного изменения Δf(x) предусматривается замена

$$y = f(x)$$

на

$$y = f(x) + \Delta f(x).$$

Для частного случая простой последовательности Φ_n как функции Φ одной переменной, а именно номера n элемента последовательности, и аддитивного изменения ΔΦ(n) предусматривается замена

$$y = \Phi(n) = \Phi_n$$

на

$$y = \Phi(n) + \Delta\Phi(n) = \Phi_n + \varphi_n,$$

где φ_n есть другое, более удобное обозначение последовательности $\Delta\Phi(n)$:

$$\varphi_n = \Delta\Phi(n).$$

Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением <u>системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной</u> для частного случая функции f системы переменных $({}_{\omega\in\Omega}x_\omega)$ и системы $({}_{\omega\in\Omega}\Delta x_\omega)$ аддитивных изменений независимых переменных предусматривает замену

$$y = f({}_{\omega\in\Omega}x_\omega)$$

на

$$y = f({}_{\omega\in\Omega}(x_\omega + \Delta x_\omega)).$$

Для частного случая функции f одной переменной x и аддитивного изменения Δx независимой переменной x предусматривается замена

$$y = f(x)$$

на

$$y = f(x + \Delta x).$$

Для частного случая простой последовательности Φ_n как функции Φ одной переменной, а именно номера n элемента последовательности, и аддитивного изменения Δn предусматривается замена

$$y = \Phi(n) = \Phi_n$$

на

$$y = \Phi(n + \Delta n) = \Phi(n + \alpha_n),$$

где α_n есть другое, более удобное обозначение последовательности Δn:

$$\alpha_n = \Delta n,$$

причём это приращение Δn н<u>о</u>мера n вообще не обязано быть именно целочисленным, а может быть любой действительной последовательностью α_n, так что лучше вест<u>и</u> речь об обобщённом номере или вообще об аргументе последовательности как функции этого обобщённого н<u>о</u>мера как аргумента.

Поэтому всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением и <u>значения самой этой зависимой переменной</u>, и <u>системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной</u> как синергичное

соединение двух предыдущих всеобщих методологий для частного случая функции f системы переменных $({}_{\omega\in\Omega}x_\omega)$, аддитивного изменения $\Delta f({}_{\omega\in\Omega}x_\omega)$ и системы $({}_{\omega\in\Omega}\Delta x_\omega)$ аддитивных изменений независимых переменных предусматривает замену

$$y = f({}_{\omega\in\Omega}x_\omega)$$

на

$$y = f({}_{\omega\in\Omega}(x_\omega + \Delta x_\omega)) + \Delta f({}_{\omega\in\Omega}(x_\omega + \Delta x_\omega)).$$

Для частного случая функции f одной переменной x и аддитивных изменений $\Delta f(x)$ и Δx предусматривается замена

$$y = f(x)$$

на

$$y = f(x + \Delta x) + \Delta f(x + \Delta x).$$

Для частного случая простой последовательности Φ_n как функции Φ одной переменной, а именно номера n элемента последовательности, и аддитивных изменений $\Delta\Phi(n)$ и Δn предусматривается замена

$$y = \Phi(n) = \Phi_n$$

на

$$y = \Phi(n + \Delta n) + \Delta\Phi(n + \Delta n) = \Phi(n + \alpha_n) + \Delta\Phi(n + \alpha_n) =$$
$$\Phi(n + \alpha_n) + \psi_n,$$

где

α_n есть другое, более удобное обозначение последовательности Δn:

$$\alpha_n = \Delta n,$$

причём это приращение Δn н<u>о</u>мера n вообще не обязано быть именно целочисленным, а может быть любой действительной последовательностью α_n, так что лучше вест<u>и</u> речь об обобщённом номере или вообще об аргументе последовательности как функции этого обобщённого н<u>о</u>мера как аргумента;

ψ_n есть другое, более удобное обозначение последовательности $\Delta\Phi(n + \alpha_n)$:

$$\psi_n = \Delta\Phi(n + \alpha_n).$$

При этом никаких априорных ограничений на конкретный характер синергии обобщающего объединения предыдущих двух всеобщих методологий рассматриваемой всеобщей методологией не накладывается.

Следствия:

1. Рассматриваемая всеобщая методология является обобщением двух предыдущих всеобщих методологий.

2. Предыдущие две всеобщие методологии являются чистыми, однородными, единообразными, а рассматриваемая всеобщая методология может быть смешанной, неоднородной, многообразной, если на деле так или иначе применяются обе предыдущие всеобщие методологии, но в двух узких частных случаях может быть чистой, однородной, единообразной, если в действительности применяется только одна из двух предыдущих всеобщих методологий.

В существенном для приложений частном случае для получения приближений высших порядков на каждом этапе наращивания порядка каждого из этих приближений допускается попеременное, причём не обязательно поочерёдное, использование любой из этих двух предыдущих всеобщих методологий.

Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера для последовательных гармонических чисел H_n как частичных сумм гармонического ряда берёт в качестве основы именно точную формулу Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$$

с бесконечно малой последовательностью ε_n, но не отбрасывает ε_n, как это сделал Эйлер при получении своей приближённой формулы

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j \approx E_n = \ln(n) + \gamma,$$

где

$$\gamma = 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767...$$

– постоянная Эйлера–Маскерони,

а приближает бесконечно малую последовательность ε_n аналитически.

Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением системы значений системы

независимых переменных этой зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^{n}1/j \approx E_n = \ln(n) + \gamma$$

использует взамен точной формулы Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^{n}1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$$

столь же точную формулу

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^{n}1/j = \ln(n + \nu_n) + \gamma,$$

где положительная последовательность ν_n отнюдь не обязана быть бесконечно малой. Тогда

$$\ln(n + \nu_n) = \Sigma_{j=1}{}^{n}1/j - \gamma,$$

$$\nu_n = \exp(\Sigma_{j=1}{}^{n}1/j - \gamma) - n.$$

Поэтому всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной как синергичное соединение двух предыдущих всеобщих методологий применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx E_n = \ln(n) + \gamma$$

использует взамен точной формулы Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$$

и столь же точной формулы

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n + \nu_n) + \gamma$$

столь же точную формулу

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n + \alpha_n) + \gamma + \psi_n,$$

где

последовательность ψ_n является бесконечно малой, как и последовательность Эйлера ε_n, однако при именно ненулевой последовательности α_n отличается от бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n;

последовательность α_n, как и последовательность ν_n, отнюдь не обязана быть бесконечно малой, однако при именно ненулевой последовательности ψ_n отличается от последовательности ν_n. Тогда

$$\ln(n + \alpha_n) = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma - \psi_n,$$

$$\alpha_n = \exp(\Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma - \psi_n) - n;$$

$$\psi_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \ln(n + \alpha_n) - \gamma.$$

Для показа сущности и оценки полезности рассматриваемой всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной как синергичного соединения двух предыдущих всеобщих методологий применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера представляется целесообразным и достаточным ограничиться тем, что взять приближение первого порядка по одной из двух предыдущих всеобщих методологий и достроить это приближение до приближения второго порядка по другой из двух предыдущих всеобщих методологий с переменой последовательности приложения

и тем самым ролей этих двух предыдущих всеобщих методологий.

Замечание. В классической математике сущность решений задач и доказательств теорем основана на линейной двоичной классической формальной логике. Однако изложение даже классических решений задач и доказательств теорем требует принятия решений, явно или неявно основанного на именно разветвлённых всеобщей логике и всеобщих математических теориях и методологиях уточняющего взвешивания логических доводов и противодоводов.

2.4.8.4. ВЗЯТИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПО ВСЕОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИИ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИЗМЕНЕНИЕМ ЗНАЧЕНИЯ САМОЙ ЭТОЙ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ДОСТРАИВАНИЕ ЭТОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДО ПРИБЛИЖЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ВСЕОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИИ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИЗМЕНЕНИЕМ СИСТЕМЫ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ЭТОЙ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера для последовательных гармонических чисел H_n как

частичных сумм гармонического ряда берёт в качестве основы именно точную формулу Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$$

с бесконечно малой последовательностью ε_n, но не отбрасывает ε_n, как это сделал Эйлер при получении своей приближённой формулы

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j \approx E_n = \ln(n) + \gamma,$$

где

$$\gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67...$$

– постоянная Эйлера–Маскерони,

а приближает бесконечно малую последовательность Эйлера ε_n аналитически.

Во всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной общие функциональные метод и алгоритм последовательного построения функциональных непрерывных, или цепных, дробей и общие функциональные метод и алгоритм построения рядов функциональных единичных дробей последовательным их выделением дают одно и то же приближение первого порядка к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n

$$\varepsilon_n = H_n - \ln(n) - \gamma = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \ln(n) - \gamma \approx {}_1c_n = {}_1s_n = {}_1g_n = 1/(2n + 1/3)$$

и одно и то же соответствующее приближение первого порядка к гармоническим числам H_n:

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx {}_1C_n = {}_1S_n = {}_1G_n = \ln(n) + \gamma + {}_1g_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3).$$

Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx E_n = \ln(n) + \gamma$$

использует взамен точной формулы Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$$

столь же точную формулу

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n + \nu_n) + \gamma,$$

где положительная последовательность ν_n отнюдь не обязана быть бесконечно малой. Тогда

$$\ln(n + \nu_n) = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma,$$

$$\nu_n = \exp(\Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma) - n.$$

Однако эти формулы чистой всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной имеют место только при именно нулевой бесконечно малой последовательности ψ_n в рассматриваемой смешанной всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной как синергичного соединения двух предыдущих всеобщих методологий применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера. А в данном случае

используется именно ненулевое приближение первого порядка

$$\varepsilon_n = H_n - \ln(n) - \gamma = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j - \ln(n) - \gamma \approx {}_1c_n = {}_1s_n = {}_1g_n = 1/(2n + 1/3)$$

к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n, которое как раз и играет роль в данном случае нененулевой бесконечно малой последовательности ψ_n:

$${}_1\psi_n = 1/(2n + 1/3).$$

Поэтому вместо формул чистой всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной необходимо применить более общие формулы рассматриваемой смешанной всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением

и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной как синергичного соединения двух предыдущих всеобщих методологий применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера:

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j = \ln(n + \alpha_n) + \gamma + \psi_n;$$

$$\ln(n + \alpha_n) = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j - \gamma - \psi_n,$$

$$\alpha_n = \exp(\Sigma_{j=1}^{n} 1/j - \gamma - \psi_n) - n;$$

$$= \Sigma_{j=1}^{n} 1/j - \ln(n + \alpha_n) - \gamma.$$

Искомое смешанное второе приближение формируется парой первых приближений, а именно уже избранного безусловного первого приближения

$${}_1\psi_n = 1/(2n + 1/3)$$

к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n и условного (эта условность подобна условности условной вероятности) искомого первого приближения ${}_1\alpha_n$ к бесконечно малой последовательности α_n при условии, что для бесконечно малой последовательности ψ_n взято приближение первого порядка

$$_1\psi_n = 1/(2n + 1/3).$$

Вообще говоря, как указано выше, последовательность α_n не обязана быть бесконечно малой. Более того, всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной показала, что при именно нулевой последовательности ψ_n становится бесконечно малой

разность этой последовательности и 1/2. Однако в данном случае используется не просто ненулевая последовательность ψ_n, а первое приближение ${}_1\psi_n$, определяемое при предварительном условии именно аннулирования последовательности α_n. Поэтому можно обоснованно предполагать, что в данном случае искомое первое приближение ${}_1\alpha_n$ к бесконечно малой последовательности α_n при условии, что для бесконечно малой последовательности ψ_n взято приближение первого порядка

$${}_1\psi_n = 1/(2n + 1/3),$$

всё-таки окажется именно бесконечно малой последовательностью.

Поэтому сразу вычисляем обращение искомой последовательности

$$\alpha_n = \exp(\Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma - {}_1\psi_n) - n;$$

$$1/\alpha_n = 1/(\exp(\Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma - {}_1\psi_n) - n);$$

$${}_0\eta_n = 1/\alpha_n = 1/(\exp(\varepsilon_n + \ln(n) - 1/(2n + 1/3)) - n);$$

$${}_0\eta_1 = 1/\alpha_1 = 1/(\exp(0.42278433509846713939348790991759756895784066406007640119423 3 + \ln(1) - 1/(2*1 + 1/3)) - 1) = -173.29879710628135321725686558238138018168481427676469092647438 6452;$$

$${}_0\eta_2 = 1/\alpha_2 = 1/(\exp(0.22963715453852182997625578845942100088234052969982114707355299 1 + \ln(2) - 1/(2*2 + 1/3)) - 2) = -441.91641771706681283772875692610223895035479569648724929092286 25865;$$

$${}_0\eta_3 = 1/\alpha_3 = 1/(\exp(0.15750537976369078133157600632840519764368343957066028279287 2 +$$

ln(3) - 1/(2*3 + 1/3)) - 3) = -
856.2788475516174640263892146870630023580492208253210870824250527222;

$_0\eta_4 = 1/\alpha_4 = 1/$
(exp(0.11982330731190985389235700033457776614017372867289922628620 6314 + ln(4) - 1/(2*4 + 1/3)) - 4) = -
1415.0109432308629619016152686029355818648729712419984625797471 47315;

$_0\eta_5 = 1/\alpha_5 = 1/$
(exp(0.096679755997700098126061910024743262765572643124892012614918442 + ln(5) - 1/(2*5 + 1/3)) - 5) = -
2117.9016445123150997631998989529348477101761915196545871342236077776;

$_0\eta_6 = 1/\alpha_6 = 1/$
(exp(0.081024865870412138581010551536895296234849971877071695338858657 + ln(6) - 1/(2*6 + 1/3)) - 6) = -
2964.8799555869755940889731268704075714036401674361237942090534351557;

$_0\eta_7 = 1/\alpha_7 = 1/$
(exp(0.069731328900296691430992309331560696463613077335358069877699993

+ ln(7) - 1/(2*7 + 1/3)) - 7) = -
3955.91282751536495442525804987347242570389154605940018565900301487O4;

$${}_0\eta_8 = 1/\alpha_8 = 1/$$

(exp(0.0611999362757740682846486884002107218741974038364534959750501 14
+ ln(8) - 1/(2*8 + 1/3)) - 8) = -
5090.98222440876131615850410380473311241442042836361412391775475582 58;

$${}_0\eta_9 = 1/\alpha_9 = 1/$$

(exp(0.0545280117305017248569656900408001279168278023828314659788125 87
+ ln(9) - 1/(2*9 + 1/3)) - 9) = -
6370.07733325956022584349524153534256765509989505010030515985463337 85;

$${}_0\eta_{10} = 1/\alpha_{10} = 1/$$

(exp(0.0491674960726754236294647092014873296107074293995573934148733 53
+ ln(10) - 1/(2*10 + 1/3)) - 10) = -
7793.19124240366272215791199206625750681599871615563879207535383475 43;

$${}_0\eta_{11} = 1/\alpha_{11} = 1/$$

(exp(0.0447664071774414726764216768298131464810111550000041033205426 36

**+ ln(11) - 1/(2*11 + 1/3)) - 11) = -
9360.3193177994855510288838754119352537457383254238272834120934014438;**

**${}_0\eta_{12} = 1/\alpha_{12} = 1/$
(exp(0.041088363521145039841989108289396938837560515727494651896389326
+ ln(12) - 1/(2*12 + 1/3)) - 12) = -
11071.458333379348045264012621111372398807001279217889539080840770З2;**

**${}_0\eta_{13} = 1/\alpha_{13} = 1/$
(exp(0.037968732770685537095134223486034097907706474433624418530321244
+ ln(13) - 1/(2*13 + 1/3)) - 13) = -
12926.605973241473391678935259105611868475621285508162028680346711495 8;**

**${}_0\eta_{14} = 1/\alpha_{14} = 1/$
(exp(0.035289332045535087197465371578567833571818126680286520940725167
+ ln(14) - 1/(2*14 + 1/3)) - 14) = -
14925.760531620753796994374548732757839862120975959503089474500621631 9;**

**${}_0\eta_{15} = 1/\alpha_{15} = 1/$
(exp(0.032963127225250302390712332997877453777977745197802456540119768**

+ ln(15) - 1/(2*15 + 1/3)) - 15) = -
17068.9207243653480195539088757035986547722792504503424943362494483556;

$_0\eta_{16} = 1/\alpha_{16} = 1/$
(exp(0.0309246060876791307177884173138884525649069119848048613704741955
+ ln(16) - 1/(2*16 + 1/3)) - 16) = -
19356.0855662936854295993664761865855184272955945785243390848190213382;

$_0\eta_{17} = 1/\alpha_{17} = 1/$
(exp(0.02912351368300899401953522644993485059816076235038366641963602 +
ln(17) - 1/(2*17 + 1/3)) - 17) = -
21787.254289018065933693127661546519185153794452226283065808242057996;

$_0\eta_{18} = 1/\alpha_{18} = 1/$
(exp(0.027520655398615937616902804575388964371438080485929851682360637
+ ln(18) - 1/(2*18 + 1/3)) - 18) = -
24362.4262844587514581411379367795292821503950902988512170944908890227;

$_0\eta_{19} = 1/\alpha_{19} = 1/$
(exp(0.026085013075708590868229546938131825557171648139923611787100656

+ ln(19) - 1/(2*19 + 1/3)) - 19) = -
27081.6010651395623132443962045789635458109115855896618105487769057224;

${}_0\eta_{20} = 1/\alpha_{20} = 1/$
(exp(0.0247917186881580574420334026834445871179492864500242001710529822
+ ln(20) - 1/(2*20 + 1/3)) - 20) = -
29944.7782357224646945257094154632007875496259813147351463471985191833;

${}_0\eta_{30} = 1/\alpha_{30} = 1/$
(exp(0.0165740843567028344820248824350849693840534132260082770173221114
+ ln(30) - 1/(2*30 + 1/3)) - 30) = -
66496.6307068474831005197266143303859034702710413426299106346959782866;

${}_0\eta_{40} = 1/\alpha_{40} = 1/$
(exp(0.0124479199209068230576829419524986208783429689780082276071274222
+ ln(40) - 1/(2*40 + 1/3)) - 40) = -
117448.555008125147488592527401894295042062657465391127184347727583289 4;

${}_0\eta_{50} = 1/\alpha_{50} = 1/$
(exp(0.0099666679997461383352089149718148138017396451302395329071596 4 +

**ln(50) - 1/(2*50 + 1/3)) - 50) = -
182800.5089609580272467320496162181810024886111910493080657199879365509;**

**${}_0\eta_{60} = 1/\alpha_{60} = 1/$
(exp(0.00831018582810427175186590877706253030441007673840008824863578 +
ln(60) - 1/(2*60 + 1/3)) - 60) = -
262552.4779993489621129439220197992365998679919208119746269530592224379;**

**${}_0\eta_{70} = 1/\alpha_{70} = 1/$
(exp(0.007125850687179938597493698465022484665422387615911652685299246
+ ln(70) - 1/(2*70 + 1/3)) - 70) = -
356704.4557543092105495530300364535644513658070028980278564956981957906;**

**${}_0\eta_{80} = 1/\alpha_{80} = 1/$
(exp(0.006236979370102052295259621019270264208866968910507738470915928
+ ln(80) - 1/(2*80 + 1/3)) - 80) = -
465256.4389994537637829569940340002594318304976896330967525753229070503;**

**${}_0\eta_{90} = 1/\alpha_{90} = 1/$
(exp(0.005545267616717626717395931769476265059526351840511240461866579**

$+ \ln(90) - 1/(2*90 + 1/3)) - 90) = -588208.425925696996788259035597550425040228540803804280893885327297 89;$

$${}_{0}\eta_{100} = 1/\alpha_{100} = 1/(\exp(0.0049916667499960321626226762071223116646098135109821023041111 55 + \ln(100) - 1/(2*100 + 1/3)) - 100) = -725560.41544006455784836871384737458913188820507780370207813049721 14933;$$

$${}_{0}\eta_{110} = 1/\alpha_{110} = 1/(\exp(0.0045385675500284958239273903469850763170033961945755977119703 41 + \ln(110) - 1/(2*110 + 1/3)) - 110) = -877312.40684328586307459100000369753197399354975426114576445684316 90025;$$

$${}_{0}\eta_{120} = 1/\alpha_{120} = 1/(\exp(0.0041608796698160579679419148330555344524046220196767450665970 81 + \ln(120) - 1/(2*120 + 1/3)) - 120) = -1043464.3996671754027255243642390193186688260549142578906894226753311149;$$

$${}_{0}\eta_{130} = 1/\alpha_{130} = 1/(\exp(0.0038412229088609124563564767197068535008798949965021099221031 6 +$$

ln(130) - 1/(2*130 + 1/3)) - 130) = -
1224016.393586463743265595188687684629651164230087174166633531545764;
$_0\eta_{140} = 1/\alpha_{140} = 1/$
(exp(0.0035671768924401227324760865115159258933634370483862299948897l6
+ ln(140) - 1/(2*140 + 1/3)) - 140) = -
1418968.3883681335035691121626251749706405211719384270369355923195802779;
$_0\eta_{150} = 1/\alpha_{150} = 1/$
(exp(0.00332962964609018661673103702465539363718753636748151971231 8106
+ ln(150) - 1/(2*150 + 1/3)) - 150) = -
1628320.38384088037802205589237803380009151669163760421137138315 0083893;
$_0\eta_{200} = 1/\alpha_{200} = 1/$
(exp(0.0024979166718749379976592762215542225175377989725182794718 69134
+ ln(200) - 1/(2*200 + 1/3)) - 200) = -
2891080.36796109520875336850916366098519709557734824717926626275 58761452;
$_0\eta_{250} = 1/\alpha_{250} = 1/$
(exp(0.00199866666687999837463048047550089786834976944065328024879 74115

+ ln(250) - 1/(2*250 + 1/3)) - 250) = -
4513840.3584075148718519025206250133695779923401883592908713830309620953;

$_{0}\eta_{300} = 1/\alpha_{300} = 1/$
(exp(0.001665740741769541881745304673632732343162511683625200115177161
+ ln(300) - 1/(2*300 + 1/3)) - 300) = -
6496600.3520277385394536128489079868646239093651160452334162830015478943;

$_{0}\eta_{350} = 1/\alpha_{350} = 1/$
(exp(0.001427891157017907045822088332117531620746900551797882052337767
+ ln(350) - 1/(2*350 + 1/3)) - 350) = -
8839360.3474655002090098399880115045407207261178473384245999856656551898;

$_{0}\eta_{400} = 1/\alpha_{400} = 1/$
(exp(0.00124947916699218653119435378827527633707303216077631589217025 +
ln(400) - 1/(2*400 + 1/3)) - 400) = -
11542120.3440409462721147750453504568237429148934751405607135849325479306;

$_{0}\eta_{450} = 1/\alpha_{450} = 1/$
(exp(0.001110699588680586830961598544994472489489894918447250235858364

+ ln(450) - 1/(2*450 + 1/3)) - 450) = -
14604880.34137569997026191828647609223239566465670496577699369445169336 87;

$${}_0\eta_{500} = 1/\alpha_{500} = 1/$$

(exp(0.000999666666679999974603281269065520904985014693079184385801820 57
+ ln(500) - 1/(2*500 + 1/3)) - 500) = -
18027640.33924242892962276987896484985103473772208057441854897738433260 72.

Всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения немедленно приводят к целесообразности попытки представления обращения последовательности α_n многочленом второй степени от номера n:

$$x_1n^2 + x_2n + x_3.$$

Действительно, сразу видно, что удвоения номера n от 250 до 500, от 200 до 400, от 150 до 300 и от 100 до 200 приводят к умножению обращений соответствующих элементов последовательности

$$_0\eta_n = 1/\alpha_n$$

примерно на 4.

Последняя тройка данных для $_0\eta_{500}$, $_0\eta_{450}$ и $_0\eta_{400}$ даёт совокупность трёх уравнений с этими тремя неизвестными:

$$250000*x_1 + 500*x_2 + x_3 = -18027640.3392424289296227698789648498510347377220805744185;$$

$$202500*x_1 + 450*x_2 + x_3 = -14604880.34137569997026191828647609223239566465670496577699;$$

$$160000*x_1 + 400*x_2 + x_3 = -11542120.3440409462721147750453504568237429148934751405607.$$

Решение этой совокупности уравнений:

$$x_1 = - 268715044697766980/3732153393092827 = - 72.0000001063952614;$$

$$x_2 = - 355180548779851600/6434446986835037 = - 55.1998562590624595;$$

$$x_3 = - 194444362388620080/4814824860968090 = - 40.3845140796097318.$$

Предпоследняя тройка данных для ${}_0\eta_{350}$, ${}_0\eta_{300}$ и ${}_0\eta_{250}$ даёт совокупность трёх уравнений с этими тремя неизвестными:

$$122500*x_1 + 350*x_2 + x_3 = - 8839360.3474655002090098399880115045407207261178473384 2;$$

$$90000*x_1 + 300*x_2 + x_3 = - 6496600.35202773853945361284890798686462390936511604523 34;$$

$$62500*x_1 + 250*x_2 + x_3 = -4513840.3584075148718519025206250133695779923401883592908713.$$

Решение этой совокупности уравнений:

$$x_1 = -362765311640122400/5038407080675317 = -72.0000003635076616;$$

$$x_2 = -400217134426883600/7250353425670489 = -55.1996724752590701;$$

$$x_3 = -19004249835142656/470197740328915 = -40.4175694716199851.$$

<u>Замечание</u>. Тройка данных для $_0\eta_{300}$, $_0\eta_{250}$ и $_0\eta_{200}$ даёт совокупность трёх уравнений с этими тремя неизвестными. Решение этой совокупности уравнений:

$$x_1 = -73804791871501570/1025066544733747 = -72.0000006347605327 \approx -72;$$

$$x_2 = - 551309446313016\!70/99875762233433\!5 = - 55.1995232861877848 \approx - 55.2;$$

$$x_3 = - 3664856905968298\!4/906292287222017 = - 40.4379134374174364 \approx - 40.$$

Проверка:

Передпредпоследняя тройка данных для $_0\eta_{200}$, $_0\eta_{150}$ и $_0\eta_{140}$ даёт совокупность трёх уравнений с этими тремя неизвестными:

$$40000*x_1 + 200*x_2 + x_3 = - 2891080.3679610952087533685091636609851970955773482471792\!66;$$

$$22500*x_1 + 150*x_2 + x_3 = - 1628320.3838408803780220558923780338000915166916376042113\!7;$$

$$19600*x_1 + 140*x_2 + x_3 = - 1418968.3883681335035691121626251749706405211719384270369\!3559.$$

Решение этой совокупности уравнений:

$$x_1 = - 362765321155924030/5038407080675317 = - 72.0000022521604595;$$

$$x_2 = - 37081933216188216/671787610756709 = - 55.1988941481351762;$$

$$x_3 = - 81434049496832000/2010764683385949 = - 40.4990450497192436.$$

Замечание. Тройка данных для ${}_0\eta_{150}$, ${}_0\eta_{140}$ и ${}_0\eta_{130}$ даёт совокупность трёх уравнений с этими тремя неизвестными. Решение этой совокупности уравнений:

$$x_1 = - 48011591293024680/666827624845523 = - 72.0000345538627;$$

$$x_2 = - 28984282190528130 0/5250914146170307 = - 55.1985452126797354;$$

$$x_3 = - 117432054878046720/2897817305224547 = - 40.5243127875334112.$$

Принимаем приближение

$$x_1 \approx - 72;$$

$$x_2 \approx - 55.2;$$

$$x_3 \approx - 40.32;$$

$${}_1\alpha_n = - 1/(72n^2 + 55.2n + 40.32).$$

Замечание. Эти же коэффициенты, однако для степеней n с на единицу большими показателями, использовались в приближении второго порядка рядом функциональных единичных дробей во всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной:

$${}_2S_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3) - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n + 9.141).$$

Замечание. Не вызывают ни малейших сомнений особенно

$$x_1 \approx -72,$$

да и

$$x_2 \approx -55.2.$$

А вот

$$x_3 \approx -40.32$$

в данном случае пока представляется лишь правдоподобным. Почему полезна и поучительна попытка уточнения этого последнего значения, к которому должна стремиться последовательность

$${}_3x_n = {}_0\eta_n + 72n^2 + 55.2n;$$

$${}_3x_{150} = -1628320.383840880378022055892378033800091516691637604211371383150083893$$

+ 72*150^2 + 55.2*150 = -
40.383840880378022055892378033800091516691637604211371383150083893;

${}_{3}x_{200} = -$
2891080.367961095208753368509163660985197095577348247179266262755876 1452
+ 72*200^2 + 55.2*200 = -
40.3679610952087533685091636609851970955773482471792662627558761452;

${}_{3}x_{250} = -$
4513840.3584075148718519025206250133695779923401883592908713830309620953
+ 72*250^2 + 55.2*250 = -
40.3584075148718519025206250133695779923401883592908713830309620953;

${}_{3}x_{300} = -$
6496600.3520277385394536128489079868646239093651160452334162830015478943
+ 72*300^2 + 55.2*300 = -
40.3520277385394536128489079868646239093651160452334162830015478943;

${}_{3}x_{350} = -$
8839360.3474655002090098399880115045407207261178473384245999856656551898

+ 72*350^2 + 55.2*350 = -40.3474655002090098399880115045407207261178473384245999856656551898;

$_3x_{400}$ = -11542120.3440409462721147750453504568237429148934751405607135849325479306 + 72*400^2 + 55.2*400 = -40.3440409462721147750453504568237429148934751405607135849325479306;

$_3x_{450}$ = -14604880.3413756999702619182864760922323956646567049657769936944516933687 + 72*450^2 + 55.2*450 = -40.3413756999702619182864760922323956646567049657769936944516933687;

$_3x_{500}$ = -18027640.3392424289296227698789648498510347377220805744185489773843326072 + 72*500^2 + 55.2*500 = -40.3392424289296227698789648498510347377220805744185489773843326072.

Всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического

взвешивания и последовательного выделения на основании строго монотонного убывания последовательности ${}_3x_n$, сгущения значений её элементов примерно по закону обращений их номеров и её стремления к пределу предлагают величину этого предела, проще всего определяемую для различных пар элементов последовательности с удвоением их номеров, причём три пары таких элементов обеспечивают возможность взаимной проверки:

$$x_3 = \lim_{n\to\infty} {}_3x_n = {}_3x_{500} + {}_3x_{500} - {}_3x_{250} = 2{}_3x_{500} - {}_3x_{250} = 2*(-40.339242428929622769878964849851034737722080574418548977384332 6072) - (-40.358407514871851902520625013369577992340188359290871383030962 0953) = -40.320077342987393637237304686332491483103972789546226571737703 1191;$$

$$x_3 = \lim_{n\to\infty} {}_3x_n = {}_3x_{400} + {}_3x_{400} - {}_3x_{200} = 2\,{}_3x_{400} - {}_3x_{200} = 2*(-40.3440409462721147750453504568237429148934751405607135849325479306) - (-40.3679610952087533685091636609851970955773482471792662627558761452) = -40.320120797335476181581537252662288734209602033942160907109219716;$$

$$x_3 = \lim_{n\to\infty} {}_3x_n = {}_3x_{300} + {}_3x_{300} - {}_3x_{150} = 2\,{}_3x_{300} - {}_3x_{150} = 2*(-40.3520277385394536128489079868646239093651160452334162830015478943) - (-40.383840880378022055892378033800091516691637604211371383150083893) = -40.3202145967008851698054379399291563020385944862554611828530118956.$$

Эти три весьма близких между собой итога дают основание принять

$$x_3 = \lim_{n\to\infty} {}_3x_n \approx -40.32.$$

К этому же можно прийти менее олимпиадным и более методологическим путём, который немедленно приводит к целесообразности попытки представления

$$-{}_3x_n = 40 + y_1 + y_2/n,$$

$$ny_1 + y_2 = - n({}_3x_n + 40)$$

с искомыми постоянными $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$, причём искомый предел последовательности ${}_3x_n$ есть

$$x_3 = \lim_{n\to\infty} {}_3x_n \approx - 40 - y_1.$$

Определение этих двух коэффициентов y_1, y_2 соответственно достигается решением совокупности двух уравнений

$$500y_1 + y_2 = - 500({}_3x_{500} + 40) = - 500*(-40.3392424289296227698789648498510347377220805744185489773843326072 + 40) = 169.6212144648113849394824249255173688610402872092744886921663036;$$

$$450y_1 + y_2 = - 450({}_3x_{450} + 40) = - 450*(-40.3413756999702619182864760922323956646567049657769936944516933687 + 40) = 153.619064986617863228914241504578049095517234599647162503262015915$$

для наибольших рассмотренных значений

$$n = 500, 450,$$

дающим

$$y_1 = (169.621214464811384939482424925517368861040287209274488692166303 6 - 153.619064986617863228914241504578049095517234599647162503262015915)/(500 - 450) = 0.320042989563870434211363668418786395310461052192546523778085753 7;$$

$$y_2 = 169.6212144648113849394824249255173688610402872092744886921663036 - 500* 0.3200429895638704342113636684187863953104610521925465237780857537 = 9.5997196828761678338005907161241712058097611130012268031234267 5.$$

<u>Проверка</u>.

Определение этих двух коэффициентов y_1, y_2 соответственно достигается решением совокупности двух уравнений

$$400y_1 + y_2 = - 400({}_3x_{400} + 40) = - 400*(- 40.34404094627211477504535045682374291489347514056071358493254793 06 + 40) = 137.6163785088459100181401827294971659573900562242854339730191722 4;$$

$$350y_1 + y_2 = - 350({}_3x_{350} + 40) = - 350*(-40.3474655002090098399880115045407207261178473384245999856656551898 + 40) = 121.6129250731534439958040265892522541412465684486099949829793164 3$$

для рассмотренных значений

$$n = 400, 350,$$

дающим

$$y_1 = (137.6163785088459100181401827294971659573900562242854339730191722 4 - 121.6129250731534439958040265892522541412465684486099949829793164 3)/(400 - 350) = 0.3200690687138493204467231228048982363228697555135087798007971162;$$

$$y_2 = 137.6163785088459100181401827294971659573900562242854339730191722 4 - 400* 0.3200690687138493204467231228048982363228697555135087798007971162 = -9.5887510233061818394509336075378714282421540188819220527003257 6.$$

Поэтому опять

$$x_3 = \lim_{n\to\infty}\ {}_3x_n \approx - 40 - y_1 \approx - 40 - 0.32 = - 40.32;$$

$${}_1\alpha_n = - 1/(72n^2 + 55.2n + 40.32).$$

В итоге всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением и <u>значения самой этой зависимой переменной</u>, и <u>системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной</u> как синергичное соединение двух предыдущих всеобщих методологий применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера даёт смешанное приближение второго порядка для гармонических чисел:

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n + \alpha_n) + \gamma + \psi_n;$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx {}_{1+1}C_n = {}_{1+1}S_n = {}_{1+1}G_n = \ln(n + {}_1\alpha_n) + \gamma + {}_1\psi_n;$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx {}_{1+1}C_n = {}_{1+1}S_n = {}_{1+1}G_n = \ln(n - 1/(72n^2 + 55.2n + 40.32)) + \gamma + 1/(2n + 1/3);$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx {}_{1+1}C_n = {}_{1+1}S_n = {}_{1+1}G_n = \ln(n - 1/(72n^2 + 55.2n + 40.32)) + 1/(2n + 1/3) + \gamma;$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx {}_{1+1}C_n = {}_{1+1}S_n = {}_{1+1}G_n = \ln(n - 1/(72n^2 + 55.2n + 40.32)) + 1/(2n + 1/3) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7.$$

Вычислим смешанные приближения второго порядка к избранным первым гармоническим числам H_n:

$${}_{1+1}S_1 = \ln(1 - 1/(72*1\hat{}2 + 55.2*1 + 40.32)) + 1/(2*1 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 0.99979976867750939625173238675951749820606735685064437661325 8958;$$

$${}_{1+1}S_2 = \ln(2 - 1/(72*2\hat{}2 + 55.2*2 + 40.32)) + 1/(2*2 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 1.49999174723629368209873428010201780776122862457028024345595 5526;$$

${}_{1+1}S_3$ = ln(3 - 1/(72*3^2 + 55.2*3 + 40.32)) + 1/(2*3 + 1/3) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
1.8333322575729484936920407811130595804129749834462186426969180 67;

${}_{1+1}S_4$ = ln(4 - 1/(72*4^2 + 55.2*4 + 40.32)) + 1/(2*4 + 1/3) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
2.0833330968740081205285716897706003469577716191521765730505086 5;

${}_{1+1}S_5$ = ln(5 - 1/(72*5^2 + 55.2*5 + 40.32)) + 1/(2*5 + 1/3) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
2.2833332627515251929512886105406740471954108053061138609857858 66;

${}_{1+1}S_6$ = ln(6 - 1/(72*6^2 + 55.2*6 + 40.32)) + 1/(2*6 + 1/3) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
2.4499997420218534701317203598147914835800695893782634076205528 4;

${}_{1+1}S_7$ = ln(7 - 1/(72*7^2 + 55.2*7 + 40.32)) + 1/(2*7 + 1/3) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
2.5928571319645106089170369494903127277829518518465046378705628 4;

$${}_{1+1}S_8 = \ln(8 - 1/(72*8\hat{}2 + 55.2*8 + 40.32)) + 1/(2*8 + 1/3) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 2.7178571377329623823636336072795356437043442722044764827377807 22;$$

$${}_{1+1}S_9 = \ln(9 - 1/(72*9\hat{}2 + 55.2*9 + 40.32)) + 1/(2*9 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 2.828968251346426690292877725260736722173622813055585270714824814;$$

$${}_{1+1}S_{10} = \ln(10 - 1/(72*10\hat{}2 + 55.2*10 + 40.32)) + 1/(2*10 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 2.928968252533549454049854776427189779971090707756660202500533325;$$

$${}_{1+1}S_{11} = \ln(11 - 1/(72*11\hat{}2 + 55.2*11 + 40.32)) + 1/(2*11 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.019877344047901438822836594266026566141353871139826546722449313;$$

$${}_{1+1}S_{12} = \ln(12 - 1/(72*12\hat{}2 + 55.2*12 + 40.32)) + 1/(2*12 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.103210677708689640061872612769459556143356907292253991486718511;$$

${}_{1+1}S_{13}$ = ln(13 - 1/(72*13^2 + 55.2*13 + 40.32)) + 1/(2*13 + 1/3) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 3.180133754817949093287400885532238625939506845635093090839914983;

${}_{1+1}S_{14}$ = ln(14 - 1/(72*14^2 + 55.2*14 + 40.32)) + 1/(2*14 + 1/3) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 3.251562326356945537897347615914493672290797784761844503734952829;

${}_{1+1}S_{15}$ = ln(15 - 1/(72*15^2 + 55.2*15 + 40.32)) + 1/(2*15 + 1/3) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 3.318228993091529270282448880617489783344715206080280364504815945;

${}_{1+1}S_{16}$ = ln(16 - 1/(72*16^2 + 55.2*16 + 40.32)) + 1/(2*16 + 1/3) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 3.380728993134643086227954288604131595521053845622549992030334599;

${}_{1+1}S_{17}$ = ln(17 - 1/(72*17^2 + 55.2*17 + 40.32)) + 1/(2*17 + 1/3) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 3.439552522574546325437881822174320266498164154104411644981198929;

$${}_{1+1}S_{18} = \ln(18 - 1/(72*18\text{\^{}}2 + 55.2*18 + 40.32)) + 1/(2*18 + 1/3) +$$
$$0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 =$$
$$3.4951080781489230188146276398502312760577450082138232578295407 59;$$

$${}_{1+1}S_{19} = \ln(19 - 1/(72*19\text{\^{}}2 + 55.2*19 + 40.32)) + 1/(2*19 + 1/3) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$3.5477396571091587808149722291974364612332857991796118703973462 37;$$

$${}_{1+1}S_{20} = \ln(20 - 1/(72*20\text{\^{}}2 + 55.2*20 + 40.32)) + 1/(2*20 + 1/3) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$3.59773965711812995757534441650567213849349550476310628867510678;$$

$${}_{1+1}S_{30} = \ln(30 - 1/(72*30\text{\^{}}2 + 55.2*30 + 40.32)) + 1/(2*30 + 1/3) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$3.99498713091804882434377207050482042677315329340529271118992545 4;$$

$${}_{1+1}S_{40} = \ln(40 - 1/(72*40\text{\^{}}2 + 55.2*40 + 40.32)) + 1/(2*40 + 1/3) +$$
$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 =$$
$$4.2785430389359500660672576453813010348259241022754365950833863 32;$$

$${}_{1+1}S_{50} = \ln(50 - 1/(72*50\hat{}2 + 55.2*50 + 40.32)) + 1/(2*50 + 1/3) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880 5767 = 4.499205338329311961422948699474527699789861885048100788179742273;$$

$${}_{1+1}S_{60} = \ln(60 - 1/(72*60\hat{}2 + 55.2*60 + 40.32)) + 1/(2*60 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.679870412951699616420964142569233840823737162571099846536949967;$$

$${}_{1+1}S_{70} = \ln(70 - 1/(72*70\hat{}2 + 55.2*70 + 40.32)) + 1/(2*70 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.832836757638056546441732279882855817488447798406703047256657042;$$

$${}_{1+1}S_{80} = \ln(80 - 1/(72*80\hat{}2 + 55.2*80 + 40.32)) + 1/(2*80 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 4.965479278945509653374499838710962838185185414529099956885543764;$$

$${}_{1+1}S_{90} = \ln(90 - 1/(72*90\hat{}2 + 55.2*90 + 40.32)) + 1/(2*90 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.082570602848512152429142581338438840769748432114312553702196375;$$

$_{1+1}S_{100} = \ln(100 - 1/(72*100^2 + 55.2*100 + 40.32)) + 1/(2*100 + 1/3) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 5.1873775176396184478643046285475958773395998977331259473193753 86;$

$_{1+1}S_{110} = \ln(110 - 1/(72*110^2 + 55.2*110 + 40.32)) + 1/(2*110 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.282234598243976558775627934240315662378093490289014699599898795;$

$_{1+1}S_{120} = \ln(120 - 1/(72*120^2 + 55.2*120 + 40.32)) + 1/(2*120 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.368868287353394303084611313409550419570848905089994685225459763;$

$_{1+1}S_{130} = \ln(130 - 1/(72*130^2 + 55.2*130 + 40.32)) + 1/(2*130 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.448591338265975815318525908987574044856692500299077010409675286;$

$_{1+1}S_{140} = \ln(140 - 1/(72*140^2 + 55.2*140 + 40.32)) + 1/(2*140 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.522425264403277039341297457267749640203966061308381510475280 08;$

$${}_{1+1}S_{150} = \ln(150 - 1/(72*150\hat{}2 + 55.2*150 + 40.32)) + 1/(2*150 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.591180588643878636717698585570228215493613761085198568992894549;$$

$${}_{1+1}S_{200} = \ln(200 - 1/(72*200\hat{}2 + 55.2*200 + 40.32)) + 1/(2*200 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.878030948121444447366842931266826924582522745167067903718204346;$$

$${}_{1+1}S_{250} = \ln(250 - 1/(72*250\hat{}2 + 55.2*250 + 40.32)) + 1/(2*250 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.100675249432579270032110577511567471785557691314647934210920812;$$

$${}_{1+1}S_{300} = \ln(300 - 1/(72*300\hat{}2 + 55.2*300 + 40.32)) + 1/(2*300 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.282663880299503459389996981767479737911662365182642838219451592;$$

$${}_{1+1}S_{350} = \ln(350 - 1/(72*350\hat{}2 + 55.2*350 + 40.32)) + 1/(2*350 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.436576710542010130372104571897324470012642384497467893974811228;$$

$${}_{1+1}S_{400} = \ln(400 - 1/(72*400^2 + 55.2*400 + 40.32)) + 1/(2*400 + 1/3) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 6.5699296911765070335570042095836494117687617193760877536752168 42;$$

$${}_{1+1}S_{450} = \ln(450 - 1/(72*450^2 + 55.2*450 + 40.32)) + 1/(2*450 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.687573947254578888624019253271951039461463532728480277575004188;$$

$${}_{1+1}S_{500} = \ln(500 - 1/(72*500^2 + 55.2*500 + 40.32)) + 1/(2*500 + 1/3) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.792823429990524602870870673567050748860603121463589253395433707.$$

В итоге всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной как синергичное соединение двух

предыдущих всеобщих методологий применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера даёт смешанное приближение второго порядка

$${}_{1+1}c_n = {}_{1+1}s_n = {}_{1+1}g_n$$

к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n:

$$\varepsilon_n = H_n - \ln(n) - \gamma = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \ln(n) - \gamma;$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n + \alpha_n) + \gamma + \psi_n;$$

$$\varepsilon_n = H_n - \ln(n) - \gamma = \ln(n + \alpha_n) + \psi_n - \ln(n) = \ln(1 + \alpha_n/n) + \psi_n;$$

$$\varepsilon_n = \ln(1 + \alpha_n/n) + \psi_n \approx {}_{1+1}c_n = {}_{1+1}s_n = {}_{1+1}g_n = {}_1\psi_n + \ln(1 + {}_1\alpha_n/n);$$

$$\varepsilon_n \approx {}_{1+1}c_n = {}_{1+1}s_n = {}_{1+1}g_n = {}_1\psi_n + \ln(1 + {}_1\alpha_n/n);$$

$$\varepsilon_n \approx {}_{1+1}c_n = {}_{1+1}s_n = {}_{1+1}g_n =$$

$$1/(2n + 1/3) + \ln(1 - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n)).$$

Проведём теперь вычисления, оценивающие качество приближения бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n относительным, а именно делённым на соответствующие приближаемые элементы бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n смешанным приближением второго порядка $_{1+1}s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей:

$$\varepsilon_n \approx {}_{1+1}c_n = {}_{1+1}s_n = {}_{1+1}g_n =$$

$$1/(2n + 1/3) + \ln(1 - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n));$$

$${}_{1+1}c_n/\varepsilon_n = {}_{1+1}s_n/\varepsilon_n = {}_{1+1}g_n/\varepsilon_n =$$

$$(1/(2n + 1/3) + \ln(1 - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n)))/\varepsilon_n;$$

$${}_{1+1}c_n/\varepsilon_n = {}_{1+1}s_n/\varepsilon_n = {}_{1+1}g_n/\varepsilon_n =$$

$$(1/(2n + 1/3) + \ln(1 - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n)))/(H_n - \ln(n) - \gamma);$$

$${}_{1+1}s_1/\varepsilon_1 = (1/(2*1 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*1\hat{}3 + 55.2*1\hat{}2 + 40.32*1)))/$$

$$0.4227843350984671393934879099175975689578406640600764011942 33 =$$

$$0.99952639843563747564816337242238503133831356548713590606105 7155;$$

$${}_{1+1}s_2/\varepsilon_2 = (1/(2*2 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*2\hat{}3 + 55.2*2\hat{}2 + 40.32*2)))/$$

$$0.2296371545385218299762557884594210008823405296998211470735 52991 =$$

$$0.99996406172283878612046085050937928920810231516058339469335 12605;$$

$${}_{1+1}s_3/\varepsilon_3 = (1/(2*3 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*3\hat{}3 + 55.2*3\hat{}2 + 40.32*3)))/$$

$$0.15750537976369078133157600632840519764368343957066028279287 2 =$$

$$0.99999317000862793619356242500714085412452165281903369680322 9343;$$

$${}_{1+1}s_4/\varepsilon_4 = (1/(2*4 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*4\hat{}3 + 55.2*4\hat{}2 + 40.32*4)))/$$

$$0.11982330731190985389235700033457776614017372867289922628620 6314 =$$

$$0.99999802659991184117603702275111709389766737923148169081989 50826;$$

**${}_{1+1}s_5/\varepsilon_5$ = (1/(2*5 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*5^3 + 55.2*5^2 + 40.32*5)))/
0.096679755997700098126061910024743262765572643124892012614918442 =
0.9999992699422189060850962262085348246818143860555885077288212254;**

**${}_{1+1}s_6/\varepsilon_6$ = (1/(2*6 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*6^3 + 55.2*6^2 + 40.32*6)))/
0.081024865870412138581010551536895296234849971877071695338858657 =
0.9999996816062035295831388639034238968472715512657623216206858486;**

**${}_{1+1}s_7/\varepsilon_7$ = (1/(2*7 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*7^3 + 55.2*7^2 + 40.32*7)))/
0.069731328900296691430992309331560696463613077335358069877699993 =
0.999999843791414562020853088604314796694198794092311427848146746;**

**${}_{1+1}s_8/\varepsilon_8$ = (1/(2*8 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*8^3 + 55.2*8^2 + 40.32*8)))/
0.061199936275774068284648688400210721874197403836453495975050114 =
0.9999999162714736876674641792532259362580429625327144042726323584;**

**${}_{1+1}s_9/\varepsilon_9$ = (1/(2*9 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*9^3 + 55.2*9^2 + 40.32*9)))/
0.054528011730501724856965690040800127916827802382831465978812587 =
0.9999999519177906042280979190247612069540835081189214495539785484;**

**${}_{1+1}s_{10}/\varepsilon_{10}$ = (1/(2*10 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*10^3 + 55.2*10^2 + 40.32*10)))/
0.049167496072675423629464709201487329610707429399557393414873353 =
0.99999997082006144702896641874654588358745659541775838433905067 63;**

**${}_{1+1}s_{11}/\varepsilon_{11}$ = (1/(2*11 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*11^3 + 55.2*11^2 + 40.32*11)))/
0.044766407177441472676421676829813146481011155000004103320542636 =
0.999999981471744309648085565813118904450227054020874883914102533 6;**

**${}_{1+1}s_{12}/\varepsilon_{12}$ = (1/(2*12 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*12^3 + 55.2*12^2 + 40.32*12)))/
0.041088363521145039841989108289396938837560515727494651896389326 =
0.999999987782707131716187212466905813927789949921569998169652330 8;**

**${}_{1+1}s_{13}/\varepsilon_{13}$ = (1/(2*13 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*13^3 + 55.2*13^2 + 40.32*13)))/
0.037968732770685537095134223486034097907706474433624418530321244 =
0.999999991682470880051157028648642368088023092117126761527982265;**

**${}_{1+1}s_{14}/\varepsilon_{14}$ = (1/(2*14 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*14^3 + 55.2*14^2 + 40.32*14)))/
0.035289332045535087197465371578567833571818126680286520940725167 =
0.999999994180081839911159844395033496740567412600399007305996188 7;**

$_{1+1}s_{15}/\varepsilon_{15}$ = (1/(2*15 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*15^3 + 55.2*15^2 + 40.32*15)))/
0.032963127225250302390712332997877453777977745197802456540119768 =
0.99999999582976585408800535808533350497460461137877389328129249 8;

$_{1+1}s_{16}/\varepsilon_{16}$ = (1/(2*16 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*16^3 + 55.2*16^2 + 40.32*16)))/
0.030924606087679130717788417313884525649069119848048613704741955 =
0.999999996949026852669746828023289092699409158111158796692284254 3;

$_{1+1}s_{17}/\varepsilon_{17}$ = (1/(2*17 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*17^3 + 55.2*17^2 + 40.32*17)))/
0.029123513683008994019535226449934850598160762350383666419636 02 =
0.99999999772652399849923477574458355474929488941188942823169579 19;

$_{1+1}s_{18}/\varepsilon_{18}$ = (1/(2*18 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*18^3 + 55.2*18^2 + 40.32*18)))/
0.027520655398615937616902804575388964371438080485929851682360637 =
0.99999999827800352389524848826127113818781640823818597158517176 57;

$_{1+1}s_{19}/\varepsilon_{19}$ = (1/(2*19 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*19^3 + 55.2*19^2 + 40.32*19)))/
0.026085013075708590868229546938131825557171648139923611787100656 =
0.99999999867651472634506125767762682881900932236004245580282447 45;

$$\begin{gathered}{}_{1+1}s_{20}/\varepsilon_{20} = (1/(2*20 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*20\hat{}3 + 55.2*20\hat{}2 + 40.32*20)))/\\ 0.024791718688158057442033402683444587117949286450024200171052982 =\\ 0.99999999896933511428436275473416696394255708142081054836068156666;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}{}_{1+1}s_{30}/\varepsilon_{30} = (1/(2*30 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*30\hat{}3 + 55.2*30\hat{}2 + 40.32*30)))/\\ 0.016574084356702834482024882435084969384053413226008277017322114 =\\ 0.9999999998586802077513047987426382920152763140937468695202164656;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}{}_{1+1}s_{40}/\varepsilon_{40} = (1/(2*40 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*40\hat{}3 + 55.2*40\hat{}2 + 40.32*40)))/\\ 0.012447919920906823057682941952498620878342968978008227607127422 =\\ 0.9999999999657838054792003979906921648313119430419328248293513975;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}{}_{1+1}s_{50}/\varepsilon_{50} = (1/(2*50 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*50\hat{}3 + 55.2*50\hat{}2 + 40.32*50)))/\\ 0.0099666679997461383352089149718148138017396451302395329071596 4 =\\ 0.9999999999886525629702951709140040529469809649682384407055617815;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}{}_{1+1}s_{60}/\varepsilon_{60} = (1/(2*60 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*60\hat{}3 + 55.2*60\hat{}2 + 40.32*60)))/\\ 0.0083101858281042717518659087770625303044100767384000882486357 8 =\\ 0.9999999999954031391508144223698853659780341162665314116902798706;\end{gathered}$$

${}_{1+1}s_{70}/\varepsilon_{70}$ = (1/(2*70 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*70^3 + 55.2*70^2 + 40.32*70)))/
0.00712585068717993859749369846502248466542238761591165268529 9246 =
0.999999999999786104336354839043573514101775453840747587627615011;

${}_{1+1}s_{80}/\varepsilon_{80}$ = (1/(2*80 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*80^3 + 55.2*80^2 + 40.32*80)))/
0.00623697937010205229525962101927026420886696891050773847091592 8 =
0.99999999999988982171413565201300053971885292199801830854463424887;

${}_{1+1}s_{90}/\varepsilon_{90}$ = (1/(2*90 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*90^3 + 55.2*90^2 + 40.32*90)))/
0.005545267616717626717395931769476265059526351840511240461866579 =
0.99999999999993865574247284767881130125011039944956413769519549254;

${}_{1+1}s_{100}/\varepsilon_{100}$ = (1/(2*100 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*100^3 + 55.2*100^2 + 40.32*100)))/
0.0049916667499960321626226762071223116646098135109821023041111 55 =
0.99999999999996368065209784784310888079156407540925301924276729958;

${}_{1+1}s_{110}/\varepsilon_{110}$ = (1/(2*110 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*110^3 + 55.2*110^2 + 40.32*110)))/
0.0045385675500284958239273903469850763170033961945755977119703 41 =
0.99999999999997739959281706849569497577632588974020359993396285368;

${}_{1+1}s_{120}/\varepsilon_{120}$ = (1/(2*120 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*120^3 + 55.2*120^2 + 40.32*120)))/
0.004160879669816057967941914833055534452404622019676745066597081 =
0.9999999999998534594624186802991935800320883710514681215169576387;

${}_{1+1}s_{130}/\varepsilon_{130}$ = (1/(2*130 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*130^3 + 55.2*130^2 + 40.32*130)))/
0.00384122290886091245635647671970685350087989499650210992210316 =
0.9999999999999016417868688326568777961751454625482530185001037707;

${}_{1+1}s_{140}/\varepsilon_{140}$ = (1/(2*140 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*140^3 + 55.2*140^2 + 40.32*140)))/
0.003567176892440122732476086511515925893363437048386229994889716 =
0.9999999999999320083431934871326692854978832088615721973680663936;

${}_{1+1}s_{150}/\varepsilon_{150}$ = (1/(2*150 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*150^3 + 55.2*150^2 + 40.32*150)))/
0.003329629646090186616731037024655393637187536367481519712318106 =
0.9999999999999517905720370853335565099054652376051731464197541654;

${}_{1+1}s_{200}/\varepsilon_{200}$ = (1/(2*200 + 1/3) + ln(1 - 1/(72*200^3 + 55.2*200^2 + 40.32*200)))/
0.002497916671874937997659276221554222517537798972518279471869134 =
0.9999999999999885142111468718879407479912386597908431602478749751;

$${}_{1+1}s_{250}/\varepsilon_{250} = (1/(2*250 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*250\hat{}3 + 55.2*250\hat{}2 + 40.32*250)))/$$
$$0.001998666668799983746304804755008978683497694406532802487974115 =$$
$$0.99999999999999962273767025945388379603491165917682392653107795803;$$

$${}_{1+1}s_{300}/\varepsilon_{300} = (1/(2*300 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*300\hat{}3 + 55.2*300\hat{}2 + 40.32*300)))/$$
$$0.001665740741769541881745304673632732343162511683625200115177161 =$$
$$0.999999999999999984814632338327180863570213990872825669023004175079;$$

$${}_{1+1}s_{350}/\varepsilon_{350} = (1/(2*350 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*350\hat{}3 + 55.2*350\hat{}2 + 40.32*350)))/$$
$$0.001427891157017907045822088332117531620746900551797882052337767 =$$
$$0.999999999999999992966318665573668623688398875119040986933093377131;$$

$${}_{1+1}s_{400}/\varepsilon_{400} = (1/(2*400 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*400\hat{}3 + 55.2*400\hat{}2 + 40.32*400)))/$$
$$0.00124947916699218653119435378827527633707303216077631589217025 =$$
$$0.999999999999999996389300450217662126146098388747655288868668034698;$$

$${}_{1+1}s_{450}/\varepsilon_{450} = (1/(2*450 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*450\hat{}3 + 55.2*450\hat{}2 + 40.32*450)))/$$
$$0.001110699588680586830961598544994472489489894918447250235858364 =$$
$$0.999999999999999997994996132342211711918151797241838191645016217196;$$

$$ {}_{1+1}s_{500} / \varepsilon_{500} = (1/(2*500 + 1/3) + \ln(1 - 1/(72*500^3 + 55.2*500^2 + 40.32*500)))/ 0.0009996666667999997460328126906552090498501469307918438580182057 = 0.999999999999999881544042895836430380878496734116658172839463512 8. $$

К таким основным итогам привели взятие приближения <u>первого порядка</u> по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением <u>значения самой этой зависимой переменной</u> и достраивание этого приближения до приближения <u>второго порядка</u> по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением <u>системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной</u>.

2.4.8.5. ВЗЯТИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПО ВСЕОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИИ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИЗМЕНЕНИЕМ СИСТЕМЫ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ЭТОЙ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ДОСТРАИВАНИЕ ЭТОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДО ПРИБЛИЖЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ВСЕОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИИ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИЗМЕНЕНИЕМ ЗНАЧЕНИЯ САМОЙ ЭТОЙ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых

переменных этой зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx E_n = \ln(n) + \gamma$$

использует взамен точной формулы Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$$

столь же точную формулу

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j = \ln(n + \nu_n) + \gamma,$$

где положительная последовательность ν_n отнюдь не обязана быть бесконечно малой. Тогда

$$\ln(n + \nu_n) = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma,$$

$$\nu_n = \exp(\Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma) - n.$$

Во всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых

переменных этой зависимой переменной общие функциональные метод и алгоритм последовательного построения функциональных непрерывных, или цепных, дробей и общие функциональные метод и алгоритм построения рядов функциональных единичных дробей последовательным их выделением дают одно и то же приближение первого порядка к стремящейся к 1/2 последовательности ν_n и к бесконечно малой последовательности λ_n как разности

$$\lambda_n = \nu_n - 1/2 = \exp(\Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma) - n - 1/2 = \exp(H_n - \gamma) - n - 1/2;$$

$$\lambda_n \approx {}_1w_n = 1/{}_1z_n = 1/(24n + 12);$$

$$\nu_n = 1/2 + \lambda_n \approx {}_1u_n = 1/2 + {}_1w_n = 1/2 + 1/(24n + 12);$$

$$\eta_n = 1/(\nu_n - 1/2) = 1/(\exp(\Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \gamma) - n - 1/2)$$

и одно и то же соответствующее приближение первого порядка к гармоническим числам H_n:

$$H_n = \ln(n + \nu_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + \lambda_n) + \gamma \approx {}_1D_n = {}_1T_n = {}_1W_n = \ln(n + 1/2 + {}_1w_n) + \gamma = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12)) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767.$$

Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением значения <u>самой этой зависимой переменной</u> применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера для последовательных гармонических чисел H_n как частичных сумм гармонического ряда берёт в качестве основы <u>именно точную</u> формулу Эйлера

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$$

с бесконечно малой последовательностью ε_n, но не отбрасывает ε_n, как это сделал Эйлер при получении своей приближённой формулы

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j \approx E_n = \ln(n) + \gamma,$$

где

$$\gamma = 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67...$$

– постоянная Эйлера–Маскерони,

а приближает бесконечно малую последовательность Эйлера ε_n аналитически.

Однако эти формулы чистой всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной имеют место только при именно нулевой последовательности α_n в рассматриваемой

смешанной всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной как синергичного соединения двух предыдущих всеобщих методологий применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера. А в данном случае используется именно ненулевое приближение первого порядка

$$\nu_n = 1/2 + \lambda_n \approx {}_1u_n = 1/2 + {}_1w_n = 1/2 + 1/(24n + 12)$$

к последовательности ν_n, которое как раз и играет роль в данном случае нененулевой последовательности α_n:

$${}_1\alpha_n = 1/2 + 1/(24n + 12).$$

Поэтому вместо формул чистой всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной необходимо применить более общие формулы рассматриваемой смешанной всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной как синергичного соединения двух предыдущих всеобщих методологий применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера:

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j = \ln(n + \alpha_n) + \gamma + \psi_n;$$

$$\ln(n + \alpha_n) = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j - \gamma - \psi_n,$$

$$\alpha_n = \exp(\Sigma_{j=1}^{n} 1/j - \gamma - \psi_n) - n;$$

$$\psi_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \ln(n + \alpha_n) - \gamma.$$

Искомое смешанное второе приближение формируется парой первых приближений, а именно уже избранного безусловного первого приближения

$$_1\alpha_n = 1/2 + 1/(24n + 12)$$

к последовательности α_n и условного (эта условность подобна условности условной вероятности) искомого первого приближения $_1\psi_n$ к бесконечно малой последовательности ψ_n при условии, что для последовательности α_n взято приближение первого порядка

$$_1\alpha_n = 1/2 + 1/(24n + 12).$$

Сразу вычисляем обращение $_0\eta_n$ искомой последовательности ψ_n:

$$\psi_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \ln(n + \alpha_n) - \gamma;$$

$${}_0\eta_n = 1/\psi_n = 1/(\Sigma_{j=1}{}^n 1/j - \ln(n + \alpha_n) - \gamma);$$

$${}_0\eta_n = 1/\psi_n = 1/(\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n - \ln(n + \alpha_n) - \gamma);$$

$${}_0\eta_n = 1/\psi_n = 1/(\varepsilon_n - \ln(1 + \alpha_n/n));$$

$${}_0\eta_n = 1/\psi_n \approx 1/(\varepsilon_n - \ln(1 + {}_1\alpha_n/n));$$

$${}_0\eta_n = 1/\psi_n \approx 1/(\varepsilon_n - \ln(1 + (1/2 + 1/(24n + 12))/n));$$

$${}_0\eta_n = 1/\psi_n \approx 1/(\varepsilon_n - \ln(1 + 0.5/n + 1/(24n^2 + 12n)));$$

$${}_0\eta_1 = 1/\psi_1 \approx$$

1/(0.422784335098467139393487909917597568957840664060076401194233 - ln(1 + 0.5/1 + 1/(24*1^2 + 12*1))) = -970.957045603222439338190170133299183143630956358281706113560575415;

$${}_0\eta_2 = 1/\psi_2 \approx$$

1/(0.229637154538521829976255788459421000882340529699821147073552991 -

ln(1 + 0.5/2 + 1/(24*2^2 + 12*2))) = -
6625.1712599360917010728860399938087182803605637752822653813929243767;

$$_0\eta_3 = 1/\psi_3 \approx$$

1/(0.157505379763690781331576006328405197643683439570660282792872 - ln(1
+ 0.5/3 + 1/(24*3^2 + 12*3))) = -
24456.41657975340651754453150898271134570569428496931570114904279947;

$$_0\eta_4 = 1/\psi_4 \approx$$

1/(0.119823307311909853892357000334577766140173728672899226286206314 -
ln(1 + 0.5/4 + 1/(24*4^2 + 12*4))) = -
65670.5470470000026268021585996918763325940115139879501039377750410168;

$$_0\eta_5 = 1/\psi_5 \approx$$

1/(0.096679755997700098126061910024743262765572643124892012614918442 -
ln(1 + 0.5/5 + 1/(24*5^2 + 12*5))) = -
145211.3223395014720479217459431660843900286261891989840274730825567995;

$$_0\eta_6 = 1/\psi_6 \approx$$

1/(0.081024865870412138581010551536895296234849971877071695338858657 -

ln(1 + 0.5/6 + 1/(24*6^2 + 12*6))) = -
281759.3597128614493425117227843638077735171821269812837474781462142375;

$_0\eta_7 = 1/\psi_7 \approx$

1/(0.069731328900296691430992309331560696463613077335358069877699993 -
ln(1 + 0.5/7 + 1/(24*7^2 + 12*7))) = -
497731.7422587272798982681241152248511480209534425256446870028749755329;

$_0\eta_8 = 1/\psi_8 \approx$

1/(0.061199936275774068284648688400210721874197403836453495975050114 -
ln(1 + 0.5/8 + 1/(24*8^2 + 12*8))) = -
819281.8755069019766090622394164842816841775244020245903143931213788879;

$_0\eta_9 = 1/\psi_9 \approx$

1/(0.054528011730501724856965690040800127916827802382831465978812587 -
ln(1 + 0.5/9 + 1/(24*9^2 + 12*9))) = -
1276299.4305766566168946474538264088389171954444670861319884404496214527;

$_0\eta_{10} = 1/\psi_{10} \approx$

1/(0.049167496072675423629464709201487329610707429399557393414873353 -

ln(1 + 0.5/10 + 1/(24*10^2 + 12*10))) = -
1902410.319587420651187313234920099222532098835790514613061535697574713 8;

$${}_0\eta_{11} = 1/\psi_{11} \approx$$

1/(0.044766407177441472676421676829813146481011155000004103320542636 -
ln(1 + 0.5/11 + 1/(24*11^2 + 12*11))) = -
2734976.6841535515287262823361551857360183005097602874774629977939832727;

$${}_0\eta_{12} = 1/\psi_{12} \approx$$

1/(0.041088363521145039841989108289396938837560515727494651896389326 -
ln(1 + 0.5/12 + 1/(24*12^2 + 12*12))) = -
3815096.889623034451701309565859737955234979233098059379049608944321333 3;

$${}_0\eta_{13} = 1/\psi_{13} \approx$$

1/(0.037968732770685537095134223486034097907706474433624418530321244 -
ln(1 + 0.5/13 + 1/(24*13^2 + 12*13))) = -
5187605.5220198391515099472042314958196141117734089956423772672838865666;

$${}_0\eta_{14} = 1/\psi_{14} \approx$$

1/(0.035289332045535087197465371578567833571818126680286520940725167 -

ln(1 + 0.5/14 + 1/(24*14^2 + 12*14))) = -
6901073.3863381807400650303223698822218181327184591695076702794648056859;

$$ {}_0\eta_{15} = 1/\psi_{15} \approx $$

1/(0.032963127225250302390712332997877453777977745197802456540119768 -
ln(1 + 0.5/15 + 1/(24*15^2 + 12*15))) = -
9007807.5055490983449228893086918079492735575249926074753563937824223111;

$$ {}_0\eta_{16} = 1/\psi_{16} \approx $$

1/(0.030924606087679130717788417313884525649069119848048613704741955 -
ln(1 + 0.5/16 + 1/(24*16^2 + 12*16))) = -
11563851.119999828233054171516303471140516249710735130003452990950141777 9;

$$ {}_0\eta_{17} = 1/\psi_{17} \approx $$

1/(0.029123513683008994019535226449934850598160762350383666641963602 -
ln(1 + 0.5/17 + 1/(24*17^2 + 12*17))) = -
14628983.687038568600195319074905154108597106296302640568266073776261173 4;

$$ {}_0\eta_{18} = 1/\psi_{18} \approx $$

1/(0.027520655398615937616902804575388964371438080485929851682360637 -

ln(1 + 0.5/18 + 1/(24*18^2 + 12*18))) = -
18266720.880773185986743756943321294412976907724878320683165187444895216 3;

$${}_0\eta_{19} = 1/\psi_{19} \approx$$

1/(0.026085013075708590868229546938131825557171648139923611787100656 -
ln(1 + 0.5/19 + 1/(24*19^2 + 12*19))) = -
22544314.591912024149121746992745852414817541037183274922956034913742746 7;

$${}_0\eta_{20} = 1/\psi_{20} \approx$$

1/(0.024791718688158057442033402683444587117949286450024200171052982 -
ln(1 + 0.5/20 + 1/(24*20^2 + 12*20))) = -
27532752.927656448393163467460301063539409879063311596345808419745546543 4;

$${}_0\eta_{30} = 1/\psi_{30} \approx$$

1/(0.016574084356702834482024882435084969384053413226008277017322114 -
ln(1 + 0.5/30 + 1/(24*30^2 + 12*30))) = -
134802368.914595841142404448233008908729157928109787886661871574081130645 6;

$${}_0\eta_{40} = 1/\psi_{40} \approx$$

1/(0.012447919920906823057682941952498620878342968978008227607127422 -

$\ln(1 + 0.5/40 + 1/(24 \ast 40\text{\textasciicircum}2 + 12 \ast 40))) = -$
$418984771.374216619084360132170340262750100307355262812871751685529674530 8;$

$_0\eta_{50} = 1/\psi_{50} \approx$
$1/(0.0099666679997461383352089149718148138017396451302395329071596 4 -$
$\ln(1 + 0.5/50 + 1/(24 \ast 50\text{\textasciicircum}2 + 12 \ast 50))) = -$
$1012715635.9258994906045272964409435652410332948044277235642966655551474309;$

$_0\eta_{60} = 1/\psi_{60} \approx$
$1/(0.0083101858281042717518659087770625303044100767384000882486357 8 -$
$\ln(1 + 0.5/60 + 1/(24 \ast 60\text{\textasciicircum}2 + 12 \ast 60))) = -$
$2085992800.3931736653591004620792041228579899866646731597172524259236737041;$

$_0\eta_{70} = 1/\psi_{70} \approx$
$1/(0.0071258506871799385974936984650224846654223876159116526852992 46 -$
$\ln(1 + 0.5/70 + 1/(24 \ast 70\text{\textasciicircum}2 + 12 \ast 70))) = -$
$3846176264.7710595165252837722127509670858079139057481598042358801936677826;$

$_0\eta_{80} = 1/\psi_{80} \approx$
$1/(0.0062369793701020522952596210192702642088669689105077384709159 28 -$

ln(1 + 0.5/80 + 1/(24*80^2 + 12*80))) = -
6537988191.2196188602046514994149694578233151978428073544505664685149585312;

$${}_0\eta_{90} = 1/\psi_{90} \approx$$

1/(0.005545267616717626717395931769476265059526351840511240461866579 -
ln(1 + 0.5/90 + 1/(24*90^2 + 12*90))) = -
10443512904.0621659026455155966796082766939150472435659035491190862621654097;

$${}_0\eta_{100} = 1/\psi_{100} \approx$$

1/(0.0049916667499960321626222676207122311664609813510982102304111155 -
ln(1 + 0.5/100 + 1/(24*100^2 + 12*100))) = -
15882196889.7846525041852083016140010456293765334402484449170104622729823726;

$${}_0\eta_{110} = 1/\psi_{110} \approx$$

1/(0.004538567550028495823927390346985076317003396194575597711970341 -
ln(1 + 0.5/110 + 1/(24*110^2 + 12*110))) = -
23210848797.0354228602602637640232075483738011281565607831541824137158346245;

$${}_0\eta_{120} = 1/\psi_{120} \approx$$

1/(0.004160879669816057967941914833055534452404622019676745066597081 -

ln(1 + 0.5/120 + 1/(24*120^2 + 12*120))) = -32823639436.6251040756546668660219399989534487267845149326648393210473130244;

$${}_0\eta_{130} = 1/\psi_{130} \approx$$

1/(0.00384122290886091245635647671970685350087989499650210992210316 - ln(1 + 0.5/130 + 1/(24*130^2 + 12*130))) = -45152101781.5265529475685480207858288865365947401589422380756278413176429852;

$${}_0\eta_{140} = 1/\psi_{140} \approx$$

1/(0.003567176892440122732476086511515925893363437048386229994889716 - ln(1 + 0.5/140 + 1/(24*140^2 + 12*140))) = -60665130966.8748282287533190037894634048100551436533925407692825684315035782;

$${}_0\eta_{150} = 1/\psi_{150} \approx$$

1/(0.003329629646090186616731037024655393637187536367481519712318106 - ln(1 + 0.5/150 + 1/(24*150^2 + 12*150))) = -79868984289.9671753255845700712051590466727816222572750918355380714796613774;

$${}_0\eta_{200} = 1/\psi_{200} \approx$$

1/(0.002497916671874937997659276221554222517537798972518279471869134 -

ln(1 + 0.5/200 + 1/(24*200^2 + 12*200))) = -
251584969728.345774698731456936811810749711295820293864013324821536868278 73;

${}_0\eta_{250} = 1/\psi_{250} \approx$
1/(0.0019986666687999837463048047550089786834976944065328024879741 15 -
ln(1 + 0.5/250 + 1/(24*250^2 + 12*250))) = -
612993396448.1612505979953538845813690798630910639155422136127632951136 60489;

${}_0\eta_{300} = 1/\psi_{300} \approx$
1/(0.0016657407417695418817453046736327323431625116836252001151771 61 -
ln(1 + 0.5/300 + 1/(24*300^2 + 12*300))) = -
1269408859044.00759187792327292249234878944824422617162483471064367737684 018;

${}_0\eta_{350} = 1/\psi_{350} \approx$
1/(0.0014278911570179070458220883321175316207469005517978820523377 67 -
ln(1 + 0.5/350 + 1/(24*350^2 + 12*350))) = -
2349497303461.83053639268956335148464953743912495057804909275434832387602 09501;

${}_0\eta_{400} = 1/\psi_{400} \approx$
1/(0.0012494791669921865311943537882752763370730321607763158921702 5 -

$$\ln(1 + 0.5/400 + 1/(24*400^2 + 12*400))) = -4005276026998.9272943720830920539856341530363399610967575205853966724553906373;$$

$$_0\eta_{450} = 1/\psi_{450} \approx 1/(0.0011106995886805868309615985449944724894898949184472502358583 64 - \ln(1 + 0.5/450 + 1/(24*450^2 + 12*450))) = -6412113678303.9464728213182556916116222235583363588009917360841603396514685005;$$

$$_0\eta_{500} = 1/\psi_{500} \approx 1/(0.00099966666679999974603281269065520904985014693079184385801820 57 - \ln(1 + 0.5/500 + 1/(24*500^2 + 12*500))) = -9768730257376.8880497880689459256044202647180143145598431247116858230477509674.$$

Всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения немедленно приводят к целесообразности попытки представления обращения последовательности α_n

$${}_0\eta_n = 1/\alpha_n$$

многочленом четвёртой степени от номера n:

$${}_0\eta_n = 1/\alpha_n \approx x_1n^4 + x_2n^3 + x_3n^2 + x_4n + x_5.$$

Действительно, сразу видно, что удвоения номера n от 100 до 200, от 150 до 300, от 200 до 400 и от 250 до 500 приводят к умножению обращения соответствующих элементов последовательности

$${}_0\eta_n = 1/\alpha_n$$

на

$${}_0\eta_{200}/{}_0\eta_{100} = -251584969728.34577469873145693681181074971129582029386401332482153686827873/(-15882196889.7846525041852083016140010456293765334402484449170104622729823726) = 15.840690773085928403239432978519691358980334231490576271837185562;$$

${}_0\eta_{300}/{}_0\eta_{150} = -$
1269408859044.0075918779232729224923487894482442261716248347106436773768401 8/
(-79868984289.967175325584570071205159046672781622257275091835538071479661377 4) =
15.893639694169313385995490464770891135311955732105579293039230 4315;

${}_0\eta_{400}/{}_0\eta_{200} = -$
4005276026998.927294372083092053985634153036339961096757520585396672455390 6373/
(-251584969728.345774698731456936811810749711295820293864013324821536868278 73)
= 15.920172144320502631378593296834021845304474409077322801299403 6501;

${}_0\eta_{500}/{}_0\eta_{250} = -$
9768730257376.888049788068945925604420264718014314559843124711685823047750967 4/(-
612993396448.161250597995353884581369079863091063915542213612763295113660489)
= 15.936110101641194543911863526598752574830936600759922185655082 4707,

то есть примерно на 15.84, 15.89, 15.920 и на 15.936 соответственно, так что сразу можно предположить стремление к

$$16 = 2^4.$$

Последняя пятёрка данных для ${}_0\eta_{500}$, ${}_0\eta_{450}$, ${}_0\eta_{400}$, ${}_0\eta_{350}$ и ${}_0\eta_{300}$ даёт совокупность пяти уравнений с этими пятью неизвестными:

$$62500000000*x_1 + 125000000*x_2 + 250000*x_3 + 500*x_4 + x_5 = -9768730257376.8880497880689459256044202647180143145598431247116858230477509674;$$

$$41006250000*x_1 + 91125000*x_2 + 202500*x_3 + 450*x_4 + x_5 = -6412113678303.9464728213182556916116222235583363588009917360841603396514685005;$$

$$25600000000*x_1 + 64000000*x_2 + 160000*x_3 + 400*x_4 + x_5 = -4005276026998.9272943720830920539856341530363399610967575205853966724553906373;$$

$$15006250000*x_1 + 42875000*x_2 + 122500*x_3 + 350*x_4 + x_5 = -2349497303461.8305363926895633514846495374391249505780490927543483238760209501;$$

$$8100000000*x_1 + 27000000*x_2 + 90000*x_3 + 300*x_4 + x_5 = -1269408859044.0075918779232729224923487894482442261716248347106436773768401 8.$$

Решение этой совокупности уравнений:

$$x_1 = -6116311342618420 0/392888054994547 = -155.675675675691131 6;$$

$$x_2 = -\ 18827475568467333300/60470190632758370 = -311.351351326284230 9;$$

$$x_3 = -\ 102071521783174360 0/3130124379670267 = -326.0941400479643557;$$

$$x_4 = -\ 61358659250583940 0/3600554083731557 = -170.4144912801665271;$$

$$x_5 = 134822637389260 80/1137547805503057 = 11.8520414471406128.$$

<u>Проверка</u>:

Предпоследняя пятёрка данных для ${}_0\eta_{250}$, ${}_0\eta_{200}$, ${}_0\eta_{150}$, ${}_0\eta_{140}$ и ${}_0\eta_{130}$ даёт совокупность пяти уравнений с этими пятью неизвестными:

$$3906250000*x_1 + 15625000*x_2 + 62500*x_3 + 250*x_4 + x_5 = -612993396448.16125059799535388458136907986309106391554221361276329511366048 9;$$

$$1600000000*x_1 + 8000000*x_2 + 40000*x_3 + 200*x_4 + x_5 = -251584969728.3457746987314569368118107497112958202938640133248215368682 7873;$$

$$506250000*x_1 + 3375000*x_2 + 22500*x_3 + 150*x_4 + x_5 = -79868984289.9671753255845700712051590466727816222572750918355380714796613774;$$

$$384160000*x_1 + 2744000*x_2 + 19600*x_3 + 140*x_4 + x_5 = -60665130966.874828228753319003789463404810055143653392540769282568431503 5782;$$

$$285610000*x_1 + 2197000*x_2 + 16900*x_3 + 130*x_4 + x_5 = -45152101781.5265529475685480207858288865365947401589422380756278413176429852.$$

Решение этой совокупности уравнений:

$$x_1 = - 19799051206872675 0/127181405321907 1 = -155.675675675697793 3;$$

$$x_2 = - 65590972640325950/210665450332893 = -311.35135133302240 4;$$

$$x_3 = - 109642021414020880 0/336228134890695 1 = -326.0941308485816226;$$

$$x_4 = -\ 893653393257835300/5243903774562349 = -\ 170.4175804279358129;$$

$$x_5 = 114370726736000/9386228522338 7 = 12.18495016009934 7.$$

<u>Проверка</u>:

Передпредпоследняя пятёрка данных для ${}_0\eta_{120}$, ${}_0\eta_{110}$, ${}_0\eta_{100}$, ${}_0\eta_{90}$ и ${}_0\eta_{80}$ даёт совокупность пяти уравнений с этими пятью неизвестными:

$$207360000*x_1 + 1728000*x_2 + 14400*x_3 + 120*x_4 + x_5 = -\ 32823639436.6251040756546668660219399989534487267845149326648393210473130244;$$

$$146410000*x_1 + 1331000*x_2 + 12100*x_3 + 110*x_4 + x_5 = -\ 23210848797.0354228602602637640232075483738011281565607831541824137158346245;$$

$$100000000*x_1 + 1000000*x_2 + 10000*x_3 + 100*x_4 + x_5 = -\ 15882196889.7846525041852083016140010456293765334402484449170104622729823726;$$

$$65610000*x_1 + 729000*x_2 + 8100*x_3 + 90*x_4 + x_5 = -\ 10443512904.0621659026455155966796082766939150472435659035491190862621654097;$$

$$40960000*x_1 + 512000*x_2 + 6400*x_3 + 80*x_4 + x_5 = -6537988191.2196188602046514994149694578233151978428073544505664685149585312.$$

Решение этой совокупности уравнений:

$$x_1 = -1522530461636135570/9780143590338849 = -155.675675676193327;$$

$$x_2 = -9675690303418888100/31076435895099931 = -311.351351103448689;$$

$$x_3 = -2881489676907547000/8836372838710579 = -326.094171160846996;$$

$$x_4 = -9716855105637696000/57018980481966685 = -170.414395759159607\,6;$$

$$x_5 = 1378640921305824\,0/114037960963933\,7 = 12.0893157826790755.$$

Принимаем приближение

$$x_1 \approx - 155 - 25/37;$$

$$x_2 \approx - 311 - 13/37;$$

$$x_3 \approx - 326.09414;$$

$$x_4 \approx - 170.41449;$$

$$x_5 = 12.18495;$$

$${}_1\psi_n = - 1/((155 + 25/37)(n^4 + 2n^3) + 326.09414n^2 + 170.41449n - 12.18495).$$

Замечание. Этот же коэффициент - (155 + 25/37) использовался в приближении **второго порядка** **рядом функциональных единичных дробей** во всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением **системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной**.

Замечание. Не вызывают ни малейших сомнений

$$x_1 \approx - 155 - 25/37;$$

$$x_2 \approx - 311 - 13/37.$$

А вот

$$x_3 \approx - 326.09414;$$

$$x_4 \approx - 170.41449;$$

$$x_5 = 12.18495$$

в данном случае пока представляются лишь правдоподобными. Поэтому полезна и поучительна попытка уточнения этого последнего значения

$$x_5 = 12.18495,$$

к которому должна стремиться последовательность

$${}_5x_n = {}_0\eta_n + (155 + 25/37)(n^4 + 2n^3) + 326.09414n^2 + 170.41449n;$$

${}_5x_{150}$ = -
79868984289.96717532558457007120515904667278162225727509183553807147966137744
+ (155 + 25/37)*(150^4 + 2*150^3) + 326.09414*150^2 + 170.41449*150 =
11.977946296037051550416462574948839999364346529786083550154438622 6;

${}_5x_{200}$ = -
251584969728.345774698731456936811810749711295820293864013324821536868278 73 +
(155 + 25/37)*(200^4 + 2*200^3) + 326.09414*200^2 + 170.41449*200 =
12.044117193160434955080081142180596071598027878567070355062921 27;

${}_5x_{250}$ = -
612993396448.161250597995353884581369079863091063915542213612763295113660489
+ (155 + 25/37)*(250^4 + 2*250^3) + 326.09414*250^2 + 170.41449*250 =
12.184222374977619088391603893109881909057430759360209677955089511;

${}_5x_{300}$ = -
1269408859044.007591877923272922492348789448244226171624834710643677376840 18
+ (155 + 25/37)*(300^4 + 2*300^3) + 326.09414*300^2 + 170.41449*300 =
12.398867581536186536967110670011215233287834624748815782280959 82;

${}_{5}x_{350}$ = -
2349497303461.8305363926895633514846495374391249505780490927543483238760209501
+ (155 + 25/37)*(350^4 + 2*350^3) + 326.09414*350^2 + 170.41449*350 =
12.688260904607733945812647759858172346719248204542948973788379049 9;

${}_{5}x_{400}$ = -
4005276026998.9272943720830920539856341530363399610967575205853966724553906373
+ (155 + 25/37)*(400^4 + 2*400^3) + 326.09414*400^2 + 170.41449*400 =
13.052489411700691729798149630747443822687026263198387111954209362 7;

${}_{5}x_{450}$ = -
6412113678303.9464728213182556916116222235583363588009917360841603396514685005
+ (155 + 25/37)*(450^4 + 2*450^3) + 326.09414*450^2 + 170.41449*450 =
13.491594746249311875955945344009231208766575831483407228917981499 5;

${}_{5}x_{500}$ = -
9768730257376.8880497880689459256044202647180143145598431247116858230477509674
+ (155 + 25/37)*(500^4 + 2*500^3) + 326.09414*500^2 + 170.41449*500 =
14.005598860579702723044228383930634334088805523936962827127249032 6.

Всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения показывают следующее:

1. Предложенное приближение к $_0\eta_n$ даже без свободного члена x_5 позволяет снизить погрешность приближения по сравнению с погрешностью нулевого приближения более чем на 10 порядков.

2. Учёт свободного члена в предложенном приближении даёт дополнительное снижение погрешности приближения не менее чем на порядок.

3. Является возможным и целесообразным дальнейшее снижение погрешности представления ${}_0\eta_n$ путём уточнения полученного приближения.

Целесообразна попытка представления

$${}_5x_n = y_1n^2 + y_2n + y_3 + y_4/n,$$

$$y_1n^3 + y_2n^2 + y_3n + y_4 = n{}_5x_n$$

с искомыми постоянными y_1, y_2, y_3 и y_4, причём сумма

$$y_1n^2 + y_2n + y_3 + y_4/n$$

подлежит подстановке вместо x_5 в приближение, y_1 сложится с x_3, y_2 сложится с x_4, x_5 заменится на y_3, y_4/n составит главную часть бесконечно малой части ${}_0\eta_n$:

$$3375000*y_1 + 22500*y_2 + 150*y_3 + y_4 = 150*$$

$$11.9779462960370515504164625749488399993643465297860835501544386226 =$$

$$1796.69194440555773256246938624232599990465197946791253252316579339;$$

$$8000000*y_1 + 40000*y_2 + 200*y_3 + y_4 = 200*$$
$$12.044117193160434955080081142180596071598027878567070355062921 27 =$$
$$2408.8234386320869910160162284361192143196055757134140710125842 54;$$

$$15625000*y_1 + 62500*y_2 + 250*y_3 + y_4 = 250*$$
$$12.184222374977619088391603893109881909057430759360209677955089511 =$$
$$3046.055593744404772097900973277470477264357689840052419488772377 75;$$

$$27000000*y_1 + 90000*y_2 + 300*y_3 + y_4 = 300*$$
$$12.398867581536186536967110670011215233287834624748815782280959 82 =$$
$$3719.660274460855961090133201003364569986350387424644734684287946;$$

$$42875000*y_1 + 122500*y_2 + 350*y_3 + y_4 = 350*$$
$$12.688260904607733945812647759858172346719248204542948973788379 0499 =$$
$$4440.891316612706881034426715950360321351736871590032140825932667465;$$

$$64000000*y_1 + 160000*y_2 + 400*y_3 + y_4 = 400*$$
$$13.052489411700691729798149630747443822687026263198387111954209 3627 =$$
$$5220.995764680276691919259852298977529074810505279354844781683745 08;$$

$$91125000*y_1 + 202500*y_2 + 450*y_3 + y_4 = 450*$$
$$13.491594746249311875955945344009231208766575831483407228917981499 5 =$$
$$6071.21763581219034418017540480415404394495912416753325301309167477 5;$$
$$125000000*y_1 + 250000*y_2 + 500*y_3 + y_4 = 500*$$
$$14.005598860579702723044228383930634334088805523936962827127249032 6 =$$
$$7002.79943028985136152211419196531716704440276196848141356362451 63.$$

Последняя четвёрка данных для ${}_0\eta_{500}$, ${}_0\eta_{450}$, ${}_0\eta_{400}$ и ${}_0\eta_{350}$ даёт совокупность четырёх уравнений с этими четырьмя неизвестными:

$$125000000*y_1 + 250000*y_2 + 500*y_3 + y_4 =$$
$$7002.7994302898513615221141919653171670444027619684814135636245163;$$
$$91125000*y_1 + 202500*y_2 + 450*y_3 + y_4 =$$
$$6071.2176358121903441801754048041540439449591241675332530130916747 75;$$
$$64000000*y_1 + 160000*y_2 + 400*y_3 + y_4 =$$
$$5220.9957646802766919192598522989775290748105052793548447816837450 8;$$

$$42875000*y_1 + 122500*y_2 + 350*y_3 + y_4 = 4440.891316612706881034426715950360321351736871590032140825932667465.$$

Решение этой совокупности уравнений:

$$y_1 = 269645916708323\,3/17988386254763704000\,0 = 0.000014990000375\,2;$$

$$y_2 = - 5597573823105279/1411918643462934800 = - 0.003964515837383\,1;$$

$$y_3 = 15341644302939628/1253176998390663 = 12.242200680862683;$$

$$y_4 = - 810000561844224/878527749640111 = - 0.9219976969151411.$$

Проверка:

Предпоследняя четвёрка данных для ${}_0\eta_{300}$, ${}_0\eta_{250}$, ${}_0\eta_{200}$ и ${}_0\eta_{150}$ даёт совокупность четырёх уравнений с этими четырьмя неизвестными:

$$27000000*y_1 + 90000*y_2 + 300*y_3 + y_4 =$$
$$3719.6602744608559610901332010033645699863503874246447346842879 46;$$

$$15625000*y_1 + 62500*y_2 + 250*y_3 + y_4 =$$
$$3046.0555937444047720979009732774704772643576898400524194887723 7775;$$

$$8000000*y_1 + 40000*y_2 + 200*y_3 + y_4 =$$
$$2408.8234386320869910160162284361192143196055757134140710125842 54;$$

$$3375000*y_1 + 22500*y_2 + 150*y_3 + y_4 =$$
$$1796.6919444055577325624693862423259999046519794679125325231657 9339.$$

Решение этой совокупности уравнений:

$$y_1 = 2251752021257251/14982561077001820000 0 =$$
$$0.000150291529578;$$

$$y_2 = - 1128849967452671/282398903554661380 = - 0.0039973595975176;$$

$$y_3 = 6925770236607967/565299358868140 = 12.2515090950659489;$$

$$y_4 = - 2050768636396544/1128519648316525 = - 1.8172201427381337.$$

Принимаем приближение

$$y_1 \approx 0.000015;$$

$$y_2 \approx - 0.00396;$$

$$y_3 \approx 12.2.$$

Ввиду отсутствия взаимной близости полученных значений

$$y_4 = - 810000561844224/878527749640111 = - 0.9219976969151411;$$

$$y_4 = - 2050768636396544/1128519648316525 = - 1.8172201427381337$$

считаем y_4 временно неопределённым и не учитываем, то есть формально принимаем

$$y_4 \approx 0.$$

Теперь в общее представление

$${}_0\eta_n = 1/\alpha_n \approx x_1n^4 + x_2n^3 + x_3n^2 + x_4n + x_5$$

вместо x_5 подставляем

$${}_5x_n = y_1n^2 + y_2n + y_3;$$

$${}_0\eta_n = 1/\alpha_n \approx x_1n^4 + x_2n^3 + x_3n^2 + x_4n + y_1n^2 + y_2n + y_3 = x_1n^4 + x_2n^3 + (x_3 + y_1)n^2 + (x_4 + y_2)n + y_3;$$

$${}_0\eta_n = 1/\alpha_n \approx (- 155 - 25/37)n^4 + (- 311 - 13/37)n^3 + (- 326.09414 + 0.000015)n^2 + (- 170.41449 - 0.00396)n + 12.2;$$

$${}_0\eta_n = 1/\alpha_n \approx - (155 + 25/37)(n^2 + n)^2 - 170.41845(n^2 + n) + 12.2.$$

Поэтому полезна и поучительна попытка уточнения этого последнего значения

$$x_5 = y_3 = 12.2,$$

к которому должна стремиться последовательность

$${}_5x_n = {}_0\eta_n + (155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.41845(n^2 + n);$$

$${}_5x_{150} = -$$

79868984289.96717532558457007120515904667278162225727509183553807147966137741 + (155 + 25/37)*(150^2 + 150)^2 + 170.41845*(150^2 + 150) = 12.2496489987397542531191652776515427020670492324887862528571418726;

$${}_5x_{200} = -$$

251584969728.3457746987314569368118107497112958202938640133248215368682787 3 + (155 + 25/37)*(200^2 + 200)^2 + 170.41845*(200^2 + 200) = 12.2631442201874619821071081692076230986250549055940973820899492 7;

${}_5x_{250}$ = -
612993396448.161250597995353884581369079863091063915542213612763295113660489
+ (155 + 25/37)*(250^2 + 250)^2 + 170.41845*(250^2 + 250) =
12.278952104707348818121333622839611638787160489089939407684820761;

${}_5x_{300}$ = -
1269408859044.00759187792327292249234878944824422617162483471064367737684018
+ (155 + 25/37)*(300^2 + 300)^2 + 170.41845*(300^2 + 300) =
12.29767839234699734777792148082202604409864543555962659309177282;

${}_5x_{350}$ = -
2349497303461.8305363926895633514846495374391249505780490927543483238760209501
+ (155 + 25/37)*(350^2 + 350)^2 + 170.41845*(350^2 + 350) =
12.3195311748780042160829180301284426169895184748132192440586522999;

${}_5x_{400}$ = -
4005276026998.9272943720830920539856341530363399610967575205853966724553906373
+ (155 + 25/37)*(400^2 + 400)^2 + 170.41845*(400^2 + 400) =
12.3445975198087998379062577388555519307951343713064952200623213627;

$${}_5x_{450} = -6412113678303.9464728213182556916116222235583363588009917360841603396514685005 + (155 + 25/37)*(450^2 + 450)^2 + 170.41845*(450^2 + 450) = 12.3729190705736362002802696683335555330909001558077315532423107495;$$

$${}_5x_{500} = -9768730257376.8880497880689459256044202647180143145598431247116858230477509674 + (155 + 25/37)*(500^2 + 500)^2 + 170.41845*(500^2 + 500) = 12.4045177794986216419631473028495532530077244428558817460461740326.$$

Всеобщие методологии именно систематических вычислительных экспериментов с синергией анализа и синтеза итогов этих экспериментов показывают следующее:

1. Предложенное приближение к ${}_0\eta_n$ даже без свободного члена x_5 позволяет снизить погрешность приближения по сравнению с погрешностью нулевого приближения более чем на 10 порядков.

2. Учёт свободного члена в предложенном приближении даёт дополнительное снижение погрешности приближения на два порядка.

3. Представляется возможным и целесообразным дальнейшее снижение погрешности представления $_0\eta_n$ путём уточнения полученного приближения.

Целесообразна попытка представления

$$_5x_n = y_1(n^2 + n) + y_2 + y_3/n,$$

$$y_1(n^3 + n^2) + y_2n + y_3 = n{}_5x_n$$

с искомыми постоянными y_1, y_2 и y_3, причём сумма

$$y_1(n^2 + n) + y_2 + y_3/n$$

подлежит постановке вместо x_5 в приближение, x_5 заменится на y_2, y_3/n составит главную часть бесконечно малой части ${}_0\eta_n$:

$$(3375000 + 22500)*y_1 + 150*y_2 + y_3 = 150*12.24964899873975425311916527765154270206704923248878625285714 18726 = 1837.4473498109631379678747916477314053100573848733179379285712 8089;$$

$$(8000000 + 40000)*y_1 + 200*y_2 + y_3 = 200*12.263144220187461982107108169207623098625054905594097382089949 27 = 2452.6288440374923964214216338415246197250109811188194764179898 54;$$

$$(15625000 + 62500)*y_1 + 250*y_2 + y_3 = 250*12.278952104707348818121333622839611638787160489089939407684820 761 = 3069.7380261768372045303334057099029096967901222724848519212051 9025;$$

$$(27000000 + 90000)*y_1 + 300*y_2 + y_3 = 300*12.297678392346997347777921480822026044098645435559626593091772 82 = 3689.3035177040992043333764442466078132295936306678879779275318 46;$$

$$(42875000 + 122500)*y_1 + 350*y_2 + y_3 = 350*12.31953117487800421608291803012844261698951847481321924405865229999 = 4311.8359112073014756290213105449549159463314661846267354205283049 65;$$

$$(64000000 + 160000)*y_1 + 400*y_2 + y_3 = 400*12.34459751980879983790625773885555193079513437130649522006232136 27 = 4937.839007923519935162503095542220772318053748522598088024928545 08;$$

$$(91125000 + 202500)*y_1 + 450*y_2 + y_3 = 450*12.37291907057363620028026966833355553309090015580773155324231074 95 = 5567.813581758136290126121350750099989890905070113479198959039837 275;$$

$$(125000000 + 250000)*y_1 + 500*y_2 + y_3 = 500*12.40451777949862164196314730284955325300772444285588174604617403 26 = 6202.258889749310820981573651424776626503862221427940873023087016 3.$$

Последняя тройка данных для ${}_0\eta_{500}$, ${}_0\eta_{450}$ и ${}_0\eta_{400}$ даёт совокупность трёх уравнений с этими тремя неизвестными:

$$125250000*y_1 + 500*y_2 + y_3 =$$
$$6202.2588897493108209815736514247766265038622214279408730230870163;$$
$$91327500*y_1 + 450*y_2 + y_3 =$$
$$5567.8135817581362901261213507500999898909050701134791989590398 37275;$$
$$64160000*y_1 + 400*y_2 + y_3 =$$
$$4937.8390079235199351625030955422207723180537485225980880249285 4508.$$

Решение этой совокупности уравнений:

$$y_1 = 3829989491095169/5786874841211466000000 =$$
$$0.0000006618407338;$$
$$y_2 = 4361982273152116 0/356374585473835 9 =$$
$$12.2398803140028105;$$
$$y_3 = - 2039637348437265/3536008345179691 = -$$
$$0.5768191557629414.$$

Проверка:

Предпоследняя тройка данных для ${}_0\eta_{350}$, ${}_0\eta_{300}$ и ${}_0\eta_{250}$ даёт совокупность трёх уравнений с этими тремя неизвестными:

$$42997500*y_1 + 350*y_2 + y_3 = 4311.835911207301475629021310544954915946331466184626735420528304965;$$

$$27090000*y_1 + 300*y_2 + y_3 = 3689.303517704099204333376444246607813229593630667887977927531846;$$

$$15687500*y_1 + 250*y_2 + y_3 = 3069.738026176837204530333405709902909696790122272484851921205190 25.$$

Решение этой совокупности уравнений:

$$y_1 = 4668169865637217/7088237297772546000000 = 0.000000658579 7949;$$

$$y_2 = 4648826614063440 0/3797713236258485 = 12.2411207083225527;$$

$$y_3 = - 6762605758300896/7740888077620525 = - 0.8736214360019085.$$

Принимаем приближение

$$y_1 \approx 0.000000662;$$

$$y_2 \approx 12.23.$$

Ввиду отсутствия взаимной близости полученных значений

$$y_3 = - 2039637348437265/3536008345179691 = - 0.5768191557629414;$$

$$y_3 = - 6762605758300896/7740888077620525 = - 0.8736214360019085$$

считаем y_3 временно неопределённым и не учитываем, то есть формально принимаем

$$y_3 \approx 0.$$

Теперь в общее представление

$${}_0\eta_n = 1/\alpha_n \approx - (155 + 25/37)(n^2 + n)^2 - 170.41845(n^2 + n) + 12.2$$

вместо

$$x_5 = 12.2$$

подставляем

$${}_5x_n = y_1(n^2 + n) + y_2 + y_3/n;$$

$${}_5x_n = 0.000000662(n^2 + n) + 12.23;$$

$${}_0\eta_n = 1/\alpha_n \approx - (155 + 25/37)(n^2 + n)^2 - 170.41845(n^2 + n) + 0.000000662(n^2 + n) + 12.23;$$

$${}_0\eta_n = 1/\alpha_n \approx - (155 + 25/37)(n^2 + n)^2 - 170.418449338(n^2 + n) + 12.23.$$

Поэтому полезна и поучительна попытка уточнения этого последнего значения

$$x_5 = y_3 = 12.23,$$

к которому должна стремиться последовательность

$${}_5x_n = {}_0\eta_n + (155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n);$$

$${}_5x_{150} = -$$

79868984289.96717532558457007120515904667278162225727509183553807147966137740 + (155 + 25/37)*(150^2 + 150)^2 + 170.418449338*(150^2 + 150) = 12.234654698739754253119165277651542702067049232488786252857141872 6;

$${}_5x_{200} = -$$

251584969728.345774698731456936811810749711295820293864013324821536868278 73 + (155 + 25/37)*(200^2 + 200)^2 + 170.418449338*(200^2 + 200) = 12.236531820187461982107108169207623098625054905594097382089949 27;

$${}_5x_{250} = -$$

612993396448.161250597995353884581369079863091063915542213612763295113660489 + (155 + 25/37)*(250^2 + 250)^2 + 170.418449338*(250^2 + 250) = 12.237411604707348818121333622839611638787160489089939407684820761;

${}_{5}x_{300}$ = -
1269408859044.0075918779232729224923487894482442261716248347106436773768401‌8
+ (155 + 25/37)*(300^2 + 300)^2 + 170.418449338*(300^2 + 300) =
12.237899792346997347777921480822026044098645435559626593091772‌82;

${}_{5}x_{350}$ = -
2349497303461.8305363926895633514846495374391249505780490927543483238760209501
+ (155 + 25/37)*(350^2 + 350)^2 + 170.418449338*(350^2 + 350) =
12.238204474878004216082918030128442616989518474813219244058652‌2999;

${}_{5}x_{400}$ = -
4005276026998.9272943720830920539856341530363399610967575205853966724553906373
+ (155 + 25/37)*(400^2 + 400)^2 + 170.418449338*(400^2 + 400) =
12.238412719808799837906257738855519307951343713064952200623213627;

${}_{5}x_{450}$ = -
6412113678303.9464728213182556916116222235583363588009917360841603396514685005
+ (155 + 25/37)*(450^2 + 450)^2 + 170.418449338*(450^2 + 450) =
12.238566170573636200280269668333555533090900155807731553242310‌7495;

$${}_5x_{500} = -9768730257376.8880497880689459256044202647180143145598431247116858230477509674 + (155 + 25/37)*(500^2 + 500)^2 + 170.418449338*(500^2 + 500) = 12.2386867794986216419631473028495532530077244428558817460461740326.$$

Всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего также логического взвешивания и последовательного выделения показывают следующее:

1. Предложенное приближение к ${}_0\eta_n$ даже без свободного члена x_5 позволяет снизить погрешность приближения по сравнению с погрешностью нулевого приближения более чем на 10 порядков.

2. Учёт свободного члена в предложенном приближении даёт дополнительное снижение погрешности приближения не менее чем на три порядка.

3. Представляется возможным и целесообразным принять

$$y_1 \approx 0.000000662;$$

$$x_5 = y_2 \approx 12.24;$$

$${}_5x_n = 0.000000662(n^2 + n) + 12.24;$$

$${}_0\eta_n = 1/\alpha_n \approx - (155 + 25/37)(n^2 + n)^2 - 170.41845(n^2 + n) + 0.000000662(n^2 + n) + 12.24;$$

$${}_0\eta_n = 1/\alpha_n \approx - (155 + 25/37)(n^2 + n)^2 - 170.418449338(n^2 + n) + 12.24.$$

$${}_1\psi_n = - 1/((155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24).$$

В итоге всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной как синергичное соединение двух предыдущих всеобщих методологий применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера даёт смешанное приближение второго порядка для гармонических чисел:

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j = \ln(n + \alpha_n) + \gamma + \psi_n;$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j \approx {}_{1+1}D_n = {}_{1+1}T_n = {}_{1+1}G_n = \ln(n + {}_1\alpha_n) + {}_1\psi_n + \gamma;$$

$${}_1\alpha_n = 1/2 + 1/(24n + 12);$$

$${}_1\psi_n = - 1/((155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24);$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx {}_{1+1}D_n = {}_{1+1}T_n = {}_{1+1}G_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12)) - 1/((155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24) + \gamma;$$

$$H_n = \Sigma_{j=1}{}^n 1/j \approx {}_{1+1}D_n = {}_{1+1}T_n = {}_{1+1}G_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12)) - 1/((155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767.$$

Вычислим смешанные приближения второго порядка к избранным первым гармоническим числам H_n:

${}_{1+1}T_1$ = ln(1 + 1/2 + 1/(24*1 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(1^2 + 1)^2 + 170.418449338*(1^2 + 1) - 12.24) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 0.999978718133241055600727776013377511261087045795277662215497869;

${}_{1+1}T_2$ = ln(2 + 1/2 + 1/(24*2 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(2^2 + 2)^2 + 170.418449338*(2^2 + 2) - 12.24) +

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =

1.4999997586591091283369358923509318323848437872605155947640575 51;

${}_{1+1}T_3$ = ln(3 + 1/2 + 1/(24*3 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(3^2 + 3)^2 + 170.418449338*(3^2 + 3) - 12.24) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =

1.8333333227341686451320471665558090243166627786328975923834264 06;

${}_{1+1}T_4$ = ln(4 + 1/2 + 1/(24*4 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(4^2 + 4)^2 + 170.418449338*(4^2 + 4) - 12.24) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =

2.0833333323714931428562916646700717183785773711613768917682 14;

${}_{1+1}T_5$ = ln(5 + 1/2 + 1/(24*5 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(5^2 + 5)^2 + 170.418449338*(5^2 + 5) - 12.24) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =

2.2833333331957650861983440423139922842537337733399988321976843;

${}_{1+1}T_{6}$ = ln(6 + 1/2 + 1/(24*6 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(6^2 + 6)^2
+ 170.418449338*(6^2 + 6) - 12.24) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
2.4499999997313251534558335914730561222253457572539563273322095 4;

${}_{1+1}T_{7}$ = ln(7 + 1/2 + 1/(24*7 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(7^2 + 7)^2
+ 170.418449338*(7^2 + 7) - 12.24) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
2.5928571428505625604513297048260609447308837825157971732351256 12;

${}_{1+1}T_{8}$ = ln(8 + 1/2 + 1/(24*8 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(8^2 + 8)^2
+ 170.418449338*(8^2 + 8) - 12.24) +
0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
2.7178571428552292542479429311274804717628001245228888829989927 51;

${}_{1+1}T_{9}$ = ln(9 + 1/2 + 1/(24*9 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(9^2 + 9)^2
+ 170.418449338*(9^2 + 9) - 12.24) +

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
2.8289682539676172572910709579507300355488847777083292616111223 51;

${}_{1+1}T_{10}$ = ln(10 + 1/2 + 1/(24*10 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(10^2 + 10)^2 + 170.418449338*(10^2 + 10) - 12.24) +
0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 =
2.92896825396801786823004243663027872691339449854938393205557 1354;

${}_{1+1}T_{11}$ = ln(11 + 1/2 + 1/(24*11+ 12)) - 1/((155 + 25/37)*(11^2 + 11)^2 + 170.418449338*(11^2 + 11) - 12.24) +
0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 =
3.01987734487724917429374931835764399539249496528211593567181893;

${}_{1+1}T_{12}$ = ln(12 + 1/2 + 1/(24*12 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(12^2 + 12)^2 + 170.418449338*(12^2 + 12) - 12.24) +
0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 =
3.10321067821063641853440266132934444859334546912948035483473 8304;

${}_{1+1}T_{13}$ = ln(13 + 1/2 + 1/(24*13 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(13^2 + 13)^2 + 170.418449338*(13^2 + 13) - 12.24) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 = 3.1801337551337356935851536488753456948208306522191562627309 01655;

${}_{1+1}T_{14}$ = ln(14 + 1/2 + 1/(24*14 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(14^2 + 14)^2 + 170.418449338*(14^2 + 14) - 12.24) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.251562326562317015204036859541512588736122616148312812504459303;

${}_{1+1}T_{15}$ = ln(15 + 1/2 + 1/(24*15 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(15^2 + 15)^2 + 170.418449338*(15^2 + 15) - 12.24) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.318228993228988314202156954314937793645989860187783648385514253;

${}_{1+1}T_{16}$ = ln(16 + 1/2 + 1/(24*16 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(16^2 + 16)^2 + 170.418449338*(16^2 + 16) - 12.24) +

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.380728993228990592261855451355541444072332816176955001284587952;$$

$${}_{1+1}T_{17} = \ln(17 + 1/2 + 1/(24*17 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(17^2 + 17)^2 + 170.418449338*(17^2 + 17) - 12.24) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.439552522640756467758433517574451748990235647366680361717104017;$$

$${}_{1+1}T_{18} = \ln(18 + 1/2 + 1/(24*18 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(18^2 + 18)^2 + 170.418449338*(18^2 + 18) - 12.24) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.495108078196312647181047627680012356757996623441806840075858041;$$

$${}_{1+1}T_{19} = \ln(19 + 1/2 + 1/(24*19 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(19^2 + 19)^2 + 170.418449338*(19^2 + 19) - 12.24) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 3.547739657143681412520748505001888932694946016922155023154507447;$$

${}_{1+1}T_{20}$ = ln(20 + 1/2 + 1/(24*20 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(20^2 + 20)^2 + 170.418449338*(20^2 + 20) - 12.24) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 3.5977396571436816084106889876258500002001415230246614882852049 91;

${}_{1+1}T_{30}$ = ln(30 + 1/2 + 1/(24*30 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(30^2 + 30)^2 + 170.418449338*(30^2 + 30) - 12.24) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 3.9949871309203910647334783258414765958517628070410111485918187 57;

${}_{1+1}T_{40}$ = ln(40 + 1/2 + 1/(24*40 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(40^2 + 40)^2 + 170.418449338*(40^2 + 40) - 12.24) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 4.2785430389363759861748358401253231018139985076569042716669883 98;

${}_{1+1}T_{50}$ = ln(50 + 1/2 + 1/(24*50 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(50^2 + 50)^2 + 170.418449338*(50^2 + 50) - 12.24) +

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057 67 =

4.4992053383294250575224386637655211334559362563256123232698889 32;

$_{1+1}T_{60}$ = ln(60 + 1/2 + 1/(24*60 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(60^2 + 60)^2 + 170.418449338*(60^2 + 60) - 12.24) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 4.6798704129517378171825233942872880191619954558877506525853447 87;

$_{1+1}T_{70}$ = ln(70 + 1/2 + 1/(24*70 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(70^2 + 70)^2 + 170.418449338*(70^2 + 70) - 12.24) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 4.8328367576380717883259606633874843691972424767277100715242301 9;

$_{1+1}T_{80}$ = ln(80 + 1/2 + 1/(24*80 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(80^2 + 80)^2 + 170.418449338*(80^2 + 80) - 12.24) + 0.57721566490153286060651209008240243104215933593992359880576 7 = 4.9654792789455165251710848285626366745161995910396367713727506 41;

${}_{1+1}T_{90}$ = ln(90 + 1/2 + 1/(24*90 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(90^2 + 90)^2 + 170.418449338*(90^2 + 90) - 12.24) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
5.082570602848515554132271688230720450083547053066844285077123337;

${}_{1+1}T_{100}$ = ln(100 + 1/2 + 1/(24*100 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(100^2 + 100)^2 + 170.418449338*(100^2 + 100) - 12.24) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
5.187377517639620260805075403013579471555853180130454501110641887;

${}_{1+1}T_{110}$ = ln(110 + 1/2 + 1/(24*110 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(110^2 + 110)^2 + 170.418449338*(110^2 + 110) - 12.24) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =
5.282234598243977584510357796626192750875211146871163426631348172;

${}_{1+1}T_{120}$ = ln(120 + 1/2 + 1/(24*120 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(120^2 + 120)^2 + 170.418449338*(120^2 + 120) - 12.24) +

$$0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.368868287353394912822147752316770904427541533710990674244882406;$$

$${}_{1+1}T_{130} = \ln(130 + 1/2 + 1/(24*130 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(130^2 + 130)^2 + 170.418449338*(130^2 + 130) - 12.24) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.448591338265976193134344147606048919049871141925907720394258464;$$

$${}_{1+1}T_{140} = \ln(140 + 1/2 + 1/(24*140 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(140^2 + 140)^2 + 170.418449338*(140^2 + 140) - 12.24) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.522425264403277281879562872057186779767574598157529521559950489;$$

$${}_{1+1}T_{150} = \ln(150 + 1/2 + 1/(24*150 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(150^2 + 150)^2 + 170.418449338*(150^2 + 150) - 12.24) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 5.591180588643878797237238313994459682963589083349609434406418814;$$

${}_{1+1}T_{200}$ = ln(200 + 1/2 + 1/(24*200 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(200^2 + 200)^2 + 170.418449338*(200^2 + 200) - 12.24) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 = 5.878030948121444476057386342336960423602955354449910706337997933;

${}_{1+1}T_{250}$ = ln(250 + 1/2 + 1/(24*250 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(250^2 + 250)^2 + 170.418449338*(250^2 + 250) - 12.24) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.100675249432579277572327009085740568203527128427782822077949018;

${}_{1+1}T_{300}$ = ln(300 + 1/2 + 1/(24*300 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(300^2 + 300)^2 + 170.418449338*(300^2 + 300) - 12.24) + 0.577215664901532860606512090082402431042159335939923598805767 = 6.282663880299503461919485539743944893264353082886688712386541714;

${}_{1+1}T_{350}$ = ln(350 + 1/2 + 1/(24*350 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(350^2 + 350)^2 + 170.418449338*(350^2 + 350) - 12.24) +

0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =

6.436576710542010131376437709442983356105549826400069450088739269;

$_{1+1}T_{400}$ = ln(400 + 1/2 + 1/(24*400 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(400^2 + 400)^2 + 170.418449338*(400^2 + 400) - 12.24) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =

6.569929691176507034008153596056815434067948046118730035881609224;

$_{1+1}T_{450}$ = ln(450 + 1/2 + 1/(24*450 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(450^2 + 450)^2 + 170.418449338*(450^2 + 450) - 12.24) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =

6.687573947254578888846714950348126698003195493094406415530234235;

$_{1+1}T_{500}$ = ln(500 + 1/2 + 1/(24*500 + 12)) - 1/((155 + 25/37)*(500^2 + 500)^2 + 170.418449338*(500^2 + 500) - 12.24) + 0.5772156649015328606065120900824024310421593359399235988057672 =

6.792823429990524602989287145354212332837197627414111509956704936.

В итоге всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной как синергичное соединение двух предыдущих всеобщих методологий применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера даёт смешанное приближение второго порядка

$$ {}_{1+1}d_n = {}_{1+1}t_n = {}_{1+1}g_n $$

к бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n:

$$ \varepsilon_n = H_n - \ln(n) - \gamma = \Sigma_{j=1}{}^{n}1/j - \ln(n) - \gamma; $$

$$ H_n = \Sigma_{j=1}{}^{n}1/j = \ln(n + \alpha_n) + \gamma + \psi_n; $$

$$ \varepsilon_n = H_n - \ln(n) - \gamma = \ln(n + \alpha_n) + \psi_n - \ln(n) = \ln(1 + \alpha_n/n) + \psi_n; $$

$$ \varepsilon_n = \ln(1 + \alpha_n/n) + \psi_n \approx {}_{1+1}d_n = {}_{1+1}t_n = {}_{1+1}g_n = {}_{1}\psi_n + \ln(1 + {}_{1}\alpha_n/n); $$

$$\varepsilon_n \approx {}_{1+1}d_n = {}_{1+1}t_n = {}_{1+1}g_n = {}_1\psi_n + \ln(1 + {}_1\alpha_n/n);$$

$${}_1\alpha_n = 1/2 + 1/(24n + 12);$$

$${}_1\psi_n = - 1/((155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24);$$

$$\varepsilon_n \approx {}_{1+1}d_n = {}_{1+1}t_n = {}_{1+1}g_n = - 1/((155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24) + \ln(1 + 0.5/n + 1/(24n^2 + 12n)).$$

Проведём теперь вычисления, оценивающие качество приближения бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n относительным, а именно делённым на соответствующие приближаемые элементы бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n, смешанным приближением второго порядка ${}_{1+1}t_n$ приближающей функции t_n в рядах функциональных единичных дробей по всеобщей методологии изменения зависимой переменной

изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной:

$$\varepsilon_n \approx {}_{1+1}d_n = {}_{1+1}t_n = {}_{1+1}g_n = - 1/((155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24) + \ln(1 + 0.5/n + 1/(24n^2 + 12n));$$

$${}_{1+1}d_n/\varepsilon_n = {}_{1+1}t_n/\varepsilon_n = {}_{1+1}g_n/\varepsilon_n = (- 1/((155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24) + \ln(1 + 0.5/n + 1/(24n^2 + 12n)))/\varepsilon_n;$$

$${}_{1+1}c_n/\varepsilon_n = {}_{1+1}s_n/\varepsilon_n = {}_{1+1}g_n/\varepsilon_n = (- 1/((155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24) + \ln(1 + 0.5/n + 1/(24n^2 + 12n)))/(H_n - \ln(n) - \gamma);$$

$${}_{1+1}t_1/\varepsilon_1 = (- 1/((155 + 25/37)*(1\hat{}2 + 1)\hat{}2 + 170.418449338*(1\hat{}2 + 1) - 12.24) + \ln(1 + 0.5/1 + 1/(24*1\hat{}2 + 12*1)))/ 0.42278433509846713939348790991759756895784066406007640119423 3 = 0.99994966259392276722151659071952085696802764676686764028134 7019;$$

${}_{1+1}t_2/\varepsilon_2$ = (- 1/((155 + 25/37)*(2^2 + 2)^2 + 170.418449338*(2^2 + 2) - 12.24) + ln(1 + 0.5/2 + 1/(24*2^2 + 12*2)))/ 0.229637154538521829976255788459421000882340529699821147073552991 = 0.999998949033786119406377221280346268045235316753076573436802463 8;

${}_{1+1}t_3/\varepsilon_3$ = (- 1/((155 + 25/37)*(3^2 + 3)^2 + 170.418449338*(3^2 + 3) - 12.24) + ln(1 + 0.5/3 + 1/(24*3^2 + 12*3)))/ 0.157505379763690781331576006328405197643683439570660282792872 = 0.999999932706014841502714252258949701224887056178035456073829918;

${}_{1+1}t_4/\varepsilon_4$ = (- 1/((155 + 25/37)*(4^2 + 4)^2 + 170.418449338*(4^2 + 4) - 12.24) + ln(1 + 0.5/4 + 1/(24*4^2 + 12*4)))/ 0.119823307311909853892357000334577766140173728672899226286206314 = 0.999999991972845583595075476668212953255525085576130149891036671 3;

${}_{1+1}t_5/\varepsilon_5$ = (- 1/((155 + 25/37)*(5^2 + 5)^2 + 170.418449338*(5^2 + 5) - 12.24) + ln(1 + 0.5/5 + 1/(24*5^2 + 12*5)))/

0.096679755997700098126061910024743262765572643124892012614918442 =
0.9999999985770728761638384381324961797456249011260975914163003869;

${}_{1+1}t_{6}/\varepsilon_{6}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(6^2 + 6)^2 + 170.418449338*(6^2 + 6) - 12.24) + ln(1 + 0.5/6 + 1/(24*6^2 + 12*6)))/0.081024865870412138581010551536895296234849971877071695338858657 =
0.9999999996684044537958581931952737955918314516428229962676227359;

${}_{1+1}t_{7}/\varepsilon_{7}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(7^2 + 7)^2 + 170.418449338*(7^2 + 7) - 12.24) + ln(1 + 0.5/7 + 1/(24*7^2 + 12*7)))/
0.069731328900296691430992309331560696463613077335358069877699993 =
0.9999999999056335682210203752563251549860119081675902237833260219;

${}_{1+1}t_{8}/\varepsilon_{8}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(8^2 + 8)^2 + 170.418449338*(8^2 + 8) - 12.24) + ln(1 + 0.5/8 + 1/(24*8^2 + 12*8)))/
0.061199936275774068284648688400210721874197403836453495975050114 =
0.9999999999687319462835501437626653804301806643548615484926375208;

$_{1+1}t_9/\varepsilon_9$ = (- 1/((155 + 25/37)*(9^2 + 9)^2 + 170.418449338*(9^2 + 9) - 12.24) + ln(1 + 0.5/9 + 1/(24*9^2 + 12*9)))/
0.054528011730501724856965690040800127916827802382831465978812587 =
0.999999999988323231625532855412231776895553894632426537807002154 9;

$_{1+1}t_{10}/\varepsilon_{10}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(10^2 + 10)^2 + 170.418449338*(10^2 + 10) - 12.24) + ln(1 + 0.5/10 + 1/(24*10^2 + 12*10)))/
0.049167496072675423629464709201487329610707429399557393414873353 =
0.999999999995198046620539037784759748350970341002692988862137096 5;

$_{1+1}t_{11}/\varepsilon_{11}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(11^2 + 11)^2 + 170.418449338*(11^2 + 11) - 12.24) + ln(1 + 0.5/11 + 1/(24*11^2 + 12*11)))/
0.044766407177441472676421676829813146481011155000004103320542636 =
0.999999999997862168148793212560297975061588876428248066322548308 9;

$_{1+1}t_{12}/\varepsilon_{12}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(12^2 + 12)^2 + 170.418449338*(12^2 + 12) - 12.24) + ln(1 + 0.5/12 + 1/(24*12^2 + 12*12)))/

0.041088363521145039841989108289396938837560515727494651896389326 =
0.99999999999898287154253515938700632099747455551875755584678705 26;

$_{1+1}t_{13}/\varepsilon_{13}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(13^2 + 13)^2 + 170.418449338*
(13^2 + 13) - 12.24) + ln(1 + 0.5/13 + 1/(24*13^2 + 12*13)))/
0.037968732770685537095134223486034097907706474433624418530321244 =
0.99999999999994879952908221524458211695592618910866533887648260522;

$_{1+1}t_{14}/\varepsilon_{14}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(14^2 + 14)^2 + 170.418449338*
(14^2 + 14) - 12.24) + ln(1 + 0.5/14 + 1/(24*14^2 + 12*14)))/
0.035289332045535087197465371578567833571818126680286520940725167 =
0.99999999999997294615122454562986967272334650857224119267786667 09;

$_{1+1}t_{15}/\varepsilon_{15}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(15^2 + 15)^2 + 170.418449338*
(15^2 + 15) - 12.24) + ln(1 + 0.5/15 + 1/(24*15^2 + 12*15)))/
0.032963127225250302390712332997877453777977745197802456540119768 =
0.99999999999998509003396900369772484362109634276531310714644513295;

${}_{1+1}t_{16}/\varepsilon_{16}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(16^2 + 16)^2 + 170.418449338*
(16^2 + 16) - 12.24) + ln(1 + 0.5/16 + 1/(24*16^2 + 12*16)))/
0.030924606087679130717788417313884525649069119848048613704741955 =
0.9999999999999147367838391839567300653353817003779847115571807448;

${}_{1+1}t_{17}/\varepsilon_{17}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(17^2 + 17)^2 + 170.418449338*
(17^2 + 17) - 12.24) + ln(1 + 0.5/17 + 1/(24*17^2 + 12*17)))/
0.029123513683008994019535226449934850598160762350383666641963602 =
0.9999999999999496243082347318314094099234534119784582815487416046;

${}_{1+1}t_{18}/\varepsilon_{18}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(18^2 + 18)^2 + 170.418449338*
(18^2 + 18) - 12.24) + ln(1 + 0.5/18 + 1/(24*18^2 + 12*18)))/
0.027520655398615937616902804575388964371438080485929851682360637 =
0.9999999999999693593747078897857978552231428374691180162425152594;

${}_{1+1}t_{19}/\varepsilon_{19}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(19^2 + 19)^2 + 170.418449338*
(19^2 + 19) - 12.24) + ln(1 + 0.5/19 + 1/(24*19^2 + 12*19)))/

Ph. D. & Dr. Sc. LEV GRIGOREVIC GELIMSON: СИНЕРГИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ВСЕОБЩИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ, МЕТОДОВ И (МЕТА)МЕТОДОЛОГИЙ (ЛОГИЧЕСКОГО) ВЗВЕШИВАНИЯ И О(БЕС)КОНЕЧИВАНИЯ, МНОГОПОРЯДКОВЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДЕЛОВ И ВЫСОКОТОЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 1289/2207

0.026085013075708590868229546938131825557171648139923611787100656 =
0.9999999999998087165917395836569932690234976834698188655174910 84;

$_{1+1}t_{20}/\varepsilon_{20}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(20^2 + 20)^2 + 170.418449338*
(20^2 + 20) - 12.24) + ln(1 + 0.5/20 + 1/(24*20^2 + 12*20)))/
0.024791718688158057442033402683444587117949286450024200171052982 =
0.99999999999998777522914431714764289669541750279854657204308696 86;

$_{1+1}t_{30}/\varepsilon_{30}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(30^2 + 30)^2 + 170.418449338*
(30^2 + 30) - 12.24) + ln(1 + 0.5/30 + 1/(24*30^2 + 12*30)))/
0.016574084356702834482024882435084969384053413226008277017322114 =
0.999999999999999651968988805700964459257952775471699212126880 1838;

$_{1+1}t_{40}/\varepsilon_{40}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(40^2 + 40)^2 + 170.418449338*
(40^2 + 40) - 12.24) + ln(1 + 0.5/40 + 1/(24*40^2 + 12*40)))/
0.012447919920906823057682941952498620878342968978008227607127422 =
0.9999999999999999725404009921205938860560349500184181825170101777;

${}_{1+1}t_{50}/\varepsilon_{50}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(50^2 + 50)^2 + 170.418449338*(50^2 + 50) - 12.24) + ln(1 + 0.5/50 + 1/(24*50^2 + 12*50)))/
0.00996666799974613833520891497181481380173964513023953290715964 =
0.999999999999999999618396748038394547877061641091570677105538180731;

${}_{1+1}t_{60}/\varepsilon_{60}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(60^2 + 60)^2 + 170.418449338*(60^2 + 60) - 12.24) + ln(1 + 0.5/60 + 1/(24*60^2 + 12*60)))/
0.00831018582810427175186590877706253030441007673840008824863578 =
0.999999999999999999239076265195151824010248125692287520136730962 1;

${}_{1+1}t_{70}/\varepsilon_{70}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(70^2 + 70)^2 + 170.418449338*(70^2 + 70) - 12.24) + ln(1 + 0.5/70 + 1/(24*70^2 + 12*70)))/
0.007125850687179938597493698465022484665422387615911652685299246 =
0.9999999999999999998050305362159770978852577911529680088541221886;

${}_{1+1}t_{80}/\varepsilon_{80}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(80^2 + 80)^2 + 170.418449338*(80^2 + 80) - 12.24) + ln(1 + 0.5/80 + 1/(24*80^2 + 12*80)))/

0.006236979370102052295259621019270264208866968910507738470915928 =
0.999999999999999999399225850054717233520127648677824295605556 8;

$_{1+1}t_{90}/\varepsilon_{90}$ **= (- 1/((155 + 25/37)*(90^2 + 90)^2 + 170.418449338***
(90^2 + 90) - 12.24) + ln(1 + 0.5/90 + 1/(24*90^2 + 12*90)))/
0.005545267616717626717395931769476265059526351840511240461866579 =
0.999999999999999999978673319531535064055652861837255946384066 3471;

$_{1+1}t_{100}/\varepsilon_{100}$ **= (- 1/((155 + 25/37)*(100^2 + 100)^2 + 170.418449338***
(100^2 + 100) - 12.24) + ln(1 + 0.5/100 + 1/(24*100^2 + 12*100)))/
0.004991666749996032162622676207122311664609813510982102304111155 =
0.99999999999999999999153135680106850976821188688189018969701 58765;

$_{1+1}t_{110}/\varepsilon_{110}$ **= (- 1/((155 + 25/37)*(110^2 + 110)^2 + 170.418449338***
(110^2 + 110) - 12.24) + ln(1 + 0.5/110 + 1/(24*110^2 + 12*110)))/
0.004538567550028495823927390346985076317003396194575597711970341 =
0.99999999999999999999631679984841055170878335849112811986838 58876;

$_{1+1}t_{120}/\varepsilon_{120}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(120^2 + 120)^2 + 170.418449338*(120^2 + 120) - 12.24) + ln(1 + 0.5/120 + 1/(24*120^2 + 12*120)))/
0.00416087966981605796794191483305553445240462201967674506659 7081 =
0.9999999999999999999982726917141472655923188616381066514817102075;

$_{1+1}t_{130}/\varepsilon_{130}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(130^2 + 130)^2 + 170.418449338*(130^2 + 130) - 12.24) + ln(1 + 0.5/130 + 1/(24*130^2 + 12*130)))/
0.00384122290886091245635647671970685350087989499650210992210316 =
0.9999999999999999999991368775460726720560379950511204016083785051;

$_{1+1}t_{140}/\varepsilon_{140}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(140^2 + 140)^2 + 170.418449338*(140^2 + 140) - 12.24) + ln(1 + 0.5/140 + 1/(24*140^2 + 12*140)))/
0.00356717689244012273247608651151592589336343704838622999488 9716 =
0.9999999999999999999995447036967736402959785837854468523994006093;

$_{1+1}t_{150}/\varepsilon_{150}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(150^2 + 150)^2 + 170.418449338*(150^2 + 150) - 12.24) + ln(1 + 0.5/150 + 1/(24*150^2 + 12*150)))/

0.0033296296460901866616731037024655393637187536367481519712318106 =
0.99999999999999999999997483366726153923465103647953848913680823246;

${}_{1+1}t_{200}/\varepsilon_{200}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(200^2 + 200)^2 + 170.418449338*(200^2 + 200) - 12.24) + ln(1 + 0.5/200 + 1/(24*200^2 + 12*200)))/
0.002497916671874937997659276221554222517537798972518279471869134 =
0.9999999999999999999999780641596934832480257213025962832078666481;

${}_{1+1}t_{250}/\varepsilon_{250}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(250^2 + 250)^2 + 170.418449338*(250^2 + 250) - 12.24) + ln(1 + 0.5/250 + 1/(24*250^2 + 12*250)))/
0.001998666668799983746304804755008978683497694406532802487974115 =
0.9999999999999999999999965534971710363822136247987429799139288792;

${}_{1+1}t_{300}$ /ε_{300} = (- 1/((155 + 25/37)*(300^2 + 300)^2 + 170.418449338*(300^2 + 300) - 12.24) + ln(1 + 0.5/300 + 1/(24*300^2 + 12*300)))/
0.001665740741769541881745304673632732343162511683625200115177161 =
0.9999999999999999999999992175586768766311085468538566634074093773;

$_{1+1}t_{350}/\varepsilon_{350}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(350^2 + 350)^2 + 170.418449338*(350^2 + 350) - 12.24) + ln(1 + 0.5/350 + 1/(24*350^2 + 12*350)))/0.0014278911570179070458220883321175316207469005517978820523377 67 = 0.99999999999999999999999977220379738155012221816174668715396108 43;

$_{1+1}t_{400}/\varepsilon_{400}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(400^2 + 400)^2 + 170.418449338*(400^2 + 400) - 12.24) + ln(1 + 0.5/400 + 1/(24*400^2 + 12*400)))/0.0012494791669921865311943537882752763370730321607763158921702 5 = 0.99999999999999999999999920811945266226034358947829632578120403 8;

$_{1+1}t_{450}/\varepsilon_{450}$ = (- 1/((155 + 25/37)*(450^2 + 450)^2 + 170.418449338*(450^2 + 450) - 12.24) + ln(1 + 0.5/450 + 1/(24*450^2 + 12*450)))/0.0011106995886805868309615985449944724894898949184472502358583 64 = 0.99999999999999999999999968602255456343245849439477290912808262 8;

$_{1+1}t_{500}$ /ε_{500} = (- 1/((155 + 25/37)*(500^2 + 500)^2 + 170.418449338*(500^2 + 500) - 12.24) + ln(1 + 0.5/500 + 1/(24*500^2 + 12*500)))/

0.0009996666667999997460328126906552090498501469307918438580182057 =
0.9999999999999999999999999999862340493690089392517820330322893549 69.

К таким основным итогам привели взятие приближения первого порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной и достраивание этого приближения до приближения второго порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной.

2.4.8.6. СРАВНЕНИЕ ИТОГОВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОБОИХ ПРЕДСТАВЛЕННЫХ ПОДХОДОВ ВСЕОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИИ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ИЗМЕНЕНИЕМ И ЗНАЧЕНИЯ САМОЙ ЭТОЙ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ, И СИСТЕМЫ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ЭТОЙ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УТОЧНЕНИЮ ПРИБЛИЖЁННОЙ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной применительно к уточнению

приближённой формулы Эйлера представлена двумя подходами:

2.4.8.4. Взятие приближения первого порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной и достраивание этого приближения до приближения второго порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной.

2.4.8.5. Взятие приближения первого порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной и достраивание этого приближения

до приближения второго порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной.

Сравним итоги использования обоих представленных подходов.

Вначале сопоставим избранные первые гармонические числа H_n с полученными их приближениями ${}_{1+1}S_n$ и ${}_{1+1}T_n$ смешанных вторых порядков в рядах функциональных единичных дробей по обоим представленным подходам всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной.

Таблица. Избранные первые гармонические числа H_n и их приближения ${}_{1+1}S_n$ и ${}_{1+1}T_n$ смешанных вторых порядков в рядах функциональных единичных дробей с подчёркиваниями первых верных цифр по обоим представленным подходам всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной.

n	$H_n = \Sigma_{j=1}^{n} 1/j = {}_{1/2}W_n = \ln(n + 1/2 + \lambda_n) + \gamma$	${}_{1+1}C_n = {}_{1+1}S_n = {}_{1+1}G_n = \ln(n - 1/(72n^2 +$	${}_{1+1}D_n = {}_{1+1}T_n = {}_{1+1}G_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12)) - 1/((155 + 25/37)$

		$55.2n + 40.32)) + 1/(2n + 1/3) + \gamma$	$(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24) + \gamma$
1	1	0.9997997686775093962	0.99997871813324105560072777601
2	1.5	1.4999917472362936820	1.49999975865910912833693589235
3	1.83333333333333333333333333333	1.8333322575729484936	1.83333332273416864513204716655
4	2.08333333333333333333333333333	2.0833330968740081205	2.08333333237149314285629166467
5	2.28333333333333333333333333333	2.2833332627515251929	2.28333333319576508619834404231
6	2.45	2.4499999742021853470	2.44999999997313251534558335914
7	2.59285714285714285714285714285	2.5928571319645106089	2.59285714285056256045132970482
8	2.71785714285714285714285714285	2.7178571377329623823	2.71785714285522925424794293112

9	2.82896825396825396825396825396	2.8289682513464266902	2.82896825396761725729107095795
10	2.92896825396825396825396825396	2.9289682525335494540	2.92896825396801786823004243663
11	3.01987734487734487734487734487	3.0198773440479014388	3.01987734487724917429374931835
12	3.10321067821067821067821067821	3.1032106777086896400	3.10321067821063641853440266132
13	3.18013375513375513375513375513	3.1801337548179490932	3.18013375513373569358515364887
14	3.25156232656232656232656232656	3.2515623263569455378	3.25156232656231701520403685954
15	3.31822899322899322899322899322	3.3182289930915292702	3.31822899322898831420215695431
16	3.38072899322899322899322899322	3.3807289931346430862	3.38072899322899059226185545135
17	3.43955252264075793487558193440	3.4395525225745463254	3.43955252264075646775843351757
18	3.49510807819631349043113748996	3.4951080781489230188	3.49510807819631264718104762768
19	3.54773965714368191148376906890	3.5477396571091587808	3.54773965714368141252074850500
20	3.59773965714368191148376906890	3.5977396571181299575	3.59773965714368160841068898762
30	3.99498713092039107050177366412	3.9949871309180488243	3.99498713092039106473347832584
40	4.27854303893637598651665072963	4.2785430389359500660	4.27854303893637598617483584012
50	4.49920533832942505756047179296	4.4992053383293119614	4.49920533832942505752243866376

60	4.67987041295173781718884681192	4.6798704129516996164	4.67987041295173781718252339428
70	4.83283675763807178832734998667	4.8328367576380565464	4.83283675763807178832596066338
80	4.96547927894551652517145953016	4.9654792789455096533	4.96547927894551652517108482856
90	5.08257060284851555413238995038	5.0825706028485121524	5.08257060284851555413227168823
100	5.18737751763962026080511767565	5.1873775176396184478	5.18737751763962026080507540301
110	5.28223459824397758451037451307	5.2822345982439765587	5.28223459824397758451035779662
120	5.36886828735339491282215493943	5.3688682873533943030	5.36886828735339491282214775231
130	5.44859133826597619313434746305	5.4485913382659758153	5.44859133826597619313434414760
140	5.52242526440327728187956449617	5.5224252644032770393	5.52242526440327728187956287205
150	5.59118058864387879723723915194	5.5911805886438786367	5.59118058864387879723723831399
200	5.87803094812144447605738639713	5.8780309481214444473	5.87803094812144447605738634233
250	6.10067524943257927757232701597	6.1006752494325792700	6.10067524943257927757232700908
300	6.28266388029950346191948554104	6.2826638802995034593	6.28266388029950346191948553974
350	6.43657671054201013137643770976	6.4365767105420101303	6.43657671054201013137643770944
400	6.56992969117650703400815359615	6.5699296911765070335	6.56992969117650703400815359605
450	6.68757394725457888884671495038	6.6875739472545788886	6.68757394725457888884671495034

500	**6.79282342999052460298928714536**	**6.7928234299905246028**	**6.79282342999052460298928714535**

Анализ итогов сопоставления избранных первых гармонических чисел H_n с полученными их приближениями $_{1+1}S_n$ и $_{1+1}T_n$ смешанных вторых порядков в рядах функциональных единичных дробей с подчёркиваниями первых верных цифр по обоим представленным подходам всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной позволяет сделать следующие основные выводы:

1. Рассматриваемая всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой

зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной в данном случае последовательности гармонических чисел как строго монотонно возрастающей функции одной независимой переменной, а именно номера гармонического числа, изменяет каждое приближение как такую функцию путём изменения и значения самой этой зависимой переменной, и значения этой независимой переменной.

2. Оба представленных подхода всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной при обеих возможностях поочерёдных

добавлений дают приближения гармонических чисел строго монотонно возрастающими функциями номера гармонического числа.

3. Приближённая формула Эйлера даёт приближения гармонических чисел именно с недостатком как строго монотонно возрастающие функции номера гармонического числа под знаком натурального логарифма. Поэтому каждый из обоих представленных подходов, поскольку он уточняет приближённую формулу Эйлера, беря её своим приближением нулевого порядка, даёт именно положительное первое из двух возможных добавлений. То есть для каждого приближения, уточняющего приближённую формулу Эйлера, используется именно

положительная последовательность таких изменений либо приближения как самой этой зависимой переменной, либо номера гармонического числа как аргумента такой функции, прибавляемая к этому приближению либо номеру соответственно. В итоге каждый из обоих представленных подходов даёт строго монотонно возрастающие приближения гармонических чисел первого порядка уже с избытком. Поэтому каждый из обоих представленных подходов, поскольку он уточняет приближённого формулу Эйлера, даёт именно отрицательное второе из двух возможных добавлений. В итоге каждый из обоих представленных подходов даёт строго монотонно

возрастающие приближения гармонических чисел второго порядка уже с недостатком.

4. Абсолютные и относительные погрешности обоих представленных подходов убывают вместе с ростом порядкового номера гармонического числа. Кроме того, сами эти оба представленных подхода указаны в порядке повышения точности и соответственно снижения абсолютных и относительных погрешностей.

5. Количество первых верных цифр в отдельных случаях может отклоняться от правильного выражения действительных точности и погрешности, что должно замечаться и анализироваться дополнительно. Пример: число 999 не выражает верно ни одной цифры числа 1000, а

несравненно более далёкое от числа 1000 число 1999 верно выражает одну первую цифру числа 1000. Тем не менее, вероятность правильного выражения действительных точности и погрешности количеством первых верных цифр куда больше вероятности неправильного выражения, так что при достаточно большом количестве сравниваемых чисел общая картина даётся в основном правильно и к тому же весьма наглядно. Это позволяет легко заметить отклонения от общих закономерностей и проанализировать эти отклонения. Зато указание первых верных цифр позволяет избежать явного указания действительных погрешностей и тем самым серьёзного дополнительного загромождения, весьма вредного для восприятия и к тому

же ограничивающего количество сопоставляемых объектов. А это мешает анализу и выявлению ключевых закономерностей.

6. Оба представленных подхода всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и <u>значения самой этой зависимой переменной</u>, и <u>системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной</u> дают высокоточные приближения именно всех гармонических чисел.

7. Взятие приближения <u>первого порядка</u> по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением <u>значения самой этой зависимой переменной</u> и достраивание этого приближения до приближения <u>второго порядка</u> по

всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной

$${}_{1+1}C_n = {}_{1+1}S_n = {}_{1+1}G_n = \ln(n - 1/(72n^2 + 55.2n + 40.32)) + 1/(2n + 1/3) + \gamma$$

уменьшает абсолютные и относительные погрешности приближения, даваемого приближённой формулой Эйлера, на несколько порядков. Так, уже для первого гармонического числа относительная погрешность снижается с более чем 42 % до 0.02 %. А для следующих гармонических чисел относительные погрешности снижаются до менее чем 0.001 %. Верны 17 первых цифр приближения гармонического числа H_{200}.

8. Взятие приближения первого порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной и достраивание этого приближения до приближения второго порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной

$${}_{1+1}D_n = {}_{1+1}T_n = {}_{1+1}G_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12)) - 1/((155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24) + \gamma$$

уменьшает абсолютные и относительные погрешности приближения, даваемого приближённой формулой Эйлера, ещё на несколько порядков. Так, уже для первого гармонического числа относительная погрешность

снижается с более чем 42 % до 0.002 %. А для следующих гармонических чисел относительные погрешности снижаются до менее чем 0.00002 %. Верны 26 первых цифр приближения гармонического числа H_{200}.

Теперь сопоставим избранные первые относительные, а именно делённые на соответствующие приближаемые элементы бесконечно малой последовательности ε_n, их приближения $_{1+1}s_n$ и $_{1+1}t_n$ смешанных вторых порядков в рядах функциональных единичных дробей по обоим представленным подходам всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной.

Таблица. Избранные первые относительные, а именно делённые на соответствующие приближаемые элементы бесконечно малой последовательности ε_n, их приближения ${}_{1+1}s_n$ и ${}_{1+1}t_n$ смешанных вторых порядков в рядах функциональных единичных дробей по обоим представленным подходам всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной.

n	${}_{1+1}s_n/\varepsilon_n = (1/(2n + 1/3) + \ln(1 - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n)))/\varepsilon_n$	${}_{1+1}t_n/\varepsilon_n = (- 1/((155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24) + \ln(1 + 0.5/n + 1/(24n^2 + 12n)))/\varepsilon_n$

1	**0.999526398435637475648163372422338**	**0.999949662593922767221516590719520856968027**
2	**0.999964061722838786120460850509037**	**0.999998949033786119406377221280346268045235**
3	**0.999993170008627936193562425000714**	**0.999999932706014841502714252258949701224887**
4	**0.999998026599911841176037022751111**	**0.999999991972845583595075476668212953255525**
5	**0.999999269942218906085096226200853**	**0.999999998577072876163838438132496179745624**
6	**0.999999681606203529583138863900342**	**0.999999999668404453795858193195273795591831**
7	**0.999999843791414562020853088600431**	**0.999999999905633568221020375256325154986011**
8	**0.999999916271473687667464179253222**	**0.999999999968731946283550143762665380430180**
9	**0.999999951917790604228097919024476**	**0.999999999988323231625532855412231776895553**
10	**0.999999970820061447028966418746654**	**0.999999999995198046620539037784759748350970**
11	**0.999999981471744309648085565813111**	**0.999999999997862168148793212560297975061588**

12	0.99999998778270713171618721246690	0.99999999999898287154253515938700632099747 4
13	0.99999999168247088005115702864864	0.999999999999487995290822152445821169559261
14	0.99999999418008183991115984439503	0.999999999999729461512245456298696727233465
15	0.99999999582976585408800535808533	0.999999999999850900339690036977248436210963
16	0.99999999694902685266974682802328	0.99999999999999147367838391839567300653538 1
17	0.99999999772652399849923477574458	0.99999999999999496243082347318314094099234 53
18	0.99999999827800352389524848826127	.9999999999999693593747078897857978552231428
19	0.99999999867651472634506125767762	0.999999999999980871659173958365699326902349
20	0.99999999896933511428436275473416	0.999999999999987775229144317147642896695417
30	0.99999999985868020775130479874263	0.999999999999999651968988805700964459257952
40	0.99999999996578380547920039799069	0.999999999999999997254040099212059388605603 4

50	**0.99999999998865256297029517091400**	**0.999999999999999996183967480383945478770616**
60	**0.99999999999540313915081442236988**	**0.999999999999999999239076265195151824010248**
70	**0.99999999999786104336354839043573**	**0.999999999999999999805030536215977097885257**
80	**0.99999999999889821714135652013000**	**0.999999999999999999939922585005471723352012**
90	**0.99999999999938655742472847678811**	**0.999999999999999999978673319531535064055652**
100	**0.99999999999963680652097847843108**	**0.999999999999999999991531356801068509768211**
110	**0.99999999999977399592817068495694**	**0.999999999999999999996316799848410551708783**
120	**0.99999999999985345946241868029919**	**0.999999999999999999998272691714147265592318**
130	**0.99999999999990164178686883265687**	**0.999999999999999999999136877546072672056037**
140	**0.99999999999993200834319348713266**	**0.999999999999999999999544703696773640295978**
150	**0.99999999999995179057203708533355**	**0.999999999999999999999748336672615392346510**
200	**0.99999999999998851421114687188794**	**0.999999999999999999999978064159693483248025**
250	**0.99999999999999622737670259453883**	**0.999999999999999999999996553497171036382213**
300	**0.99999999999999848146323383271808**	**0.999999999999999999999999217558676876631108**

350	0.99999999999999929663186655736686	0.999999999999999999999999772203797381550122
400	0.99999999999999963893004502176621	0.99999999999999999999999920811945266226034
450	0.99999999999999979949961323422117	0.99999999999999999999999968602255456343245
500	0.99999999999999988154404289583643	0.99999999999999999999999986234049369008939

Сравнительный анализ итогов сопоставления избранных первых относительных, а именно делённых на соответствующие приближаемые элементы бесконечно малой последовательности ε_n, их приближений $_{1+1}s_n$ и $_{1+1}t_n$ смешанных вторых порядков в рядах функциональных единичных дробей по обоим представленным подходам всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных

этой зависимой переменной позволяет сделать следующие основные выводы:

1. Рассматриваемая всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной в данном случае последовательности гармонических чисел как строго монотонно возрастающей функции одной независимой переменной, а именно номера гармонического числа, изменяет каждое приближение как такую функцию путём изменения и значения самой этой зависимой переменной, и значения этой независимой переменной.

2. Оба представленных подхода всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной при обеих возможностях поочерёдных добавлений дают приближения элементов бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n с недостатком строго монотонно убывающими функциями номера гармонического числа.

3. Абсолютные и относительные погрешности обоих представленных подходов убывают вместе с ростом порядкового номера гармонического числа. Кроме того, сами эти оба представленных подхода указаны в порядке

повышения точности и соответственно снижения абсолютных и относительных погрешностей.

4. Оба представленных подхода всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной дают высокоточные приближения именно всех элементов бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n.

5. Взятие приближения первого порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной и достраивание этого приближения до приближения второго порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной

изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной

$$_{1+1}s_n/\varepsilon_n = (1/(2n + 1/3) + \ln(1 - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n)))/\varepsilon_n$$

уже для первого элемента бесконечно малой последовательности Эйлера ε_1 даёт относительную погрешность менее чем 0.05 %. А для следующих элементов бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n относительные погрешности снижаются до менее чем 0.004 %. Отношение $_{1+1}s_{200}/\varepsilon_{200}$ есть правильная дробь с 13 девятками после десятичной точки.

6. Взятие приближения первого порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой

зависимой переменной и достраивание этого приближения до приближения второго порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной

$$_{1+1}t_n/\varepsilon_n = (- 1/((155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24) + \ln(1 + 0.5/n + 1/(24n^2 + 12n)))/\varepsilon_n$$

уже для первого элемента бесконечно малой последовательности Эйлера ε_1 даёт относительную погрешность 0.005 %. А для следующих элементов бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n относительные погрешности снижаются до менее чем 0.0001 %. Отношение $_{1+1}t_{200}/\varepsilon_{200}$ есть правильная дробь с 22 девятками после десятичной точки.

7. Для углублённого сравнительного анализа приближений избранных первых гармонических чисел с целесообразными для табличного представления именно краткими и наглядными итогами полезна всеобщая математическая теория и методология деления приближения к отклонению на ненулевое отклонение, дающая здесь кратно бесконечный математический микроскоп. Вместо последовательности гармонических чисел, стремящейся к плюс бесконечности, хотя и очень медленно, а именно асимптотически со скоростью натурального логарифма, рассматривается

бесконечно малая последовательность Эйлера ε_n разностей гармонических чисел и их приближений по приближённой формуле Эйлера. Для каждого номера гармонического числа составляется дробь, знаменателем которой является элемент бесконечно малой последовательности ε_n, имеющий этот номер, и числителем которой является приближение этого элемента рассматриваемой приближающей функцией, а именно её приближением рассматриваемого порядка. Качество приближения выражается близостью этой дроби к единице. Разность этой дроби и единицы выражает

относительное отклонение рассматриваемого приближения от соответствующего элемента бесконечно малой последовательности ε_n. Эта разность отрицательна для приближений с недостатком и положительна для приближений с избытком. Тогда каждому приближению соответствует последовательность дробей, по возможности близких к единице, с обеспечением краткости, наглядности и чрезвычайно удобной сопоставимости табличных итогов с весьма ограниченным числом представляемых значащих цифр.

2.4.8.7. СРАВНЕНИЕ ИТОГОВ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ ВСЕОБЩИХ МЕТОДОЛОГИЙ ИЗМЕНЕНИЯ ЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УТОЧНЕНИЮ ПРИБЛИЖЁННОЙ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА

С точки зрения научно-теоретического и практического интереса представляется целесообразным сопоставить наилучшие итоги приближений второго порядка по каждой из триады всеобщих методологий изменения зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера.

2.4.8.1. Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением <u>значения самой этой зависимой</u>

переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера.

Для гармонических чисел H_n наиболее точным является второе приближение ${}_2S_n$ приближающей функции S_n в рядах функциональных единичных дробей

$$ {}_2S_n = \ln(n) + \gamma + 1/(2n + 1/3) - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n + 9.141). $$

Итоги второго приближения ${}_2S_n$ приближающей функции S_n в рядах функциональных единичных дробей, причём с упрощающими округлениями, лучше итогов даже третьего приближения ${}_3C_n$ в функциональных непрерывных, или цепных, дробях.

Уже для первого гармонического числа относительная погрешность снижается с более чем 42 % для

приближённой формулы Эйлера до 0.01 %. А для следующих гармонических чисел относительные погрешности снижаются до менее чем 0.0003 %. Верны 19 первых цифр приближения гармонического числа H_{200}.

Для бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n наиболее точным является второе приближение ${}_2s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей:

$${}_2s_n = 1/(2n + 1/3) - 1/(72n^3 + 55.2n^2 + 40.32n + 9.141).$$

Итоги второго приближения ${}_2s_n$ приближающей функции s_n в рядах функциональных единичных дробей в целом лучше итогов даже третьего приближения ${}_3c_n$ в функциональных непрерывных, или цепных, дробях.

Уже для первого элемента бесконечно малой последовательности Эйлера ε_1 даётся относительная погрешность 0.03 %. А для следующих элементов бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n относительные погрешности снижаются до менее чем 0.002 %. Отношение ${}_2s_{200}/\varepsilon_{200}$ превышает единицу на правильную дробь с 16 нулями после десятичной точки.

2.4.8.2. Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера.

Для гармонических чисел H_n наиболее точным является второе приближение ${}_2T_n$ приближающей функции T_n в рядах функциональных единичных дробей

${}_2T_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12) - 1/(155.6757n^3 + 233.5135n^2 + 202.86n + 61.6)) + \gamma$.

Уже для первого гармонического числа относительная погрешность снижается с более чем 42 % для приближённой формулы Эйлера до 0.003 %. А для следующих гармонических чисел относительные погрешности снижаются до менее чем 0.00006 %. Верна 21 первая цифра приближения гармонического числа H_{200}.

Для бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n наиболее точным является второе приближение ${}_2f_n$

приближающей функции f_n в рядах функциональных единичных дробей

$$ {}_2f_n = \ln(1 + (1/2 + 1/(24n + 12) - 1/((155 + 25/37)(n^3 + (3/2)n^2 + 1.303035n + 0.4015)))/n), $$

выраженное через

$$ {}_2t_n = (1/(24n + 12) - 1/((155 + 25/37)(n^3 + (3/2)n^2 + 1.303035n + 0.4015))). $$

Уже для первого элемента бесконечно малой последовательности Эйлера ε_1 даётся относительная погрешность 0.007 %. А для следующих элементов бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n относительные погрешности снижаются до менее чем 0.0004

%. Отношение ${}_2s_{200}/\varepsilon_{200}$ превышает единицу на правильную дробь с 18 нулями после десятичной точки.

2.4.8.3. Всеобщая методология изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера.

Для гармонических чисел H_n наиболее точным является взятие приближения первого порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной и достраивание этого приближения до приближения второго порядка по всеобщей методологии

изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной

$$ {}_{1+1}D_n = {}_{1+1}T_n = {}_{1+1}G_n = \ln(n + 1/2 + 1/(24n + 12)) - 1/((155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24) + \gamma. $$

Уже для первого гармонического числа относительная погрешность снижается с более чем 42 % для приближённой формулы Эйлера до 0.002 %. А для следующих гармонических чисел относительные погрешности снижаются до менее чем 0.00002 %. Верны 26 первых цифр приближения гармонического числа H_{200}.

Для бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n наиболее точным является взятие приближения первого порядка по всеобщей методологии изменения зависимой

переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной и достраивание этого приближения до приближения второго порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной

$$ {}_{1+1}t_n = (- 1/((155 + 25/37)(n^2 + n)^2 + 170.418449338(n^2 + n) - 12.24) + \ln(1 + 0.5/n + 1/(24n^2 + 12n))). $$

Уже для первого элемента бесконечно малой последовательности Эйлера ε_1 даётся относительная погрешность 0.005 %. А для следующих элементов бесконечно малой последовательности Эйлера ε_n относительные погрешности снижаются до менее чем 0.0001

%. Отношение ${}_{1+1}t_{200}/\varepsilon_{200}$ есть правильная дробь с 22 девятками после десятичной точки.

С точки зрения научно-теоретического и практического интереса представляется целесообразным сопоставить наилучшие итоги приближений второго порядка по каждой из триады всеобщих методологий изменения зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера.

Следовательно, применительно к приближениям второго порядка гармонических чисел и элементов бесконечно малой последовательности Эйлера из всех исследованных подходов приведённой триады всеобщих методологий наилучшие итоги даёт взятие приближения первого

порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной и достраивание этого приближения до приближения второго порядка по всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением значения самой этой зависимой переменной во всеобщей методологии изменения зависимой переменной изменением и значения самой этой зависимой переменной, и системы значений системы независимых переменных этой зависимой переменной.

2.5. ОБЩИЕ МЕТАМЕТОДОЛОГИИ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Известная теория египетских дробей использует лишь конечные суммы непременно различных положительных единичных, или аликвотных, дробей (обыкновенных дробей с единичными числителями) для разложения только дробных частей исключительно положительных чисел и предварительно выделяет их целые части.

Если эти целые части превышают единицу, то единица как единичная дробь с единичным знаменателем при этом на деле повторяется, что нарушает принцип непременного различия единичных дробей в разложении.

Первоначальное целочисленное выделение чрезвычайно удобно и полезно для ускорения сходимости ряда единичных, или аликвотных, дробей, однако не является необходимым.

Гармонический ряд расходится к плюс бесконечности, хотя и весьма медленно. Поэтому с принципиальной точки зрения представляет

интерес возможность отказаться от выделения целой части и неуклонно соблюдать основополагающий принцип известной теории египетских дробей, требующий непременного различия всех единичных дробей в разложении действительного числа.

Принципиально возможны две общие метаметодологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел без целочисленных выделений и с целочисленными выделениями соответственно.

2.5.1. ОБЩАЯ МЕТАМЕТОДОЛОГИЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ БЕЗ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ВЫДЕЛЕНИЙ

Общая метаметодология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел без целочисленных выделений представляет скорее чисто научный, чем практический интерес. Однако эта общая метаметодология чрезвычайно важна с точки зрения именно принципиальной представимости любого действительного числа со сколь угодно большой абсолютной величиной целой части при непременном условии различия всех без исключения единичных, или

аликвотных, дробей знакопеременного ряда, представляющего это число. При этом соблюдается важнейший принцип непременной однозначности как алгоритма этой общей метаметодологии, так и самого разложения.

Сущность алгоритма общей метаметодологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел без целочисленных выделений заключается в следующем. Нуль представляется нулём как гармоническим числом нулевого порядка по нашему введённому естественному определению и как пустой суммой с полным отсутствием единичных, или аликвотных, дробей. Остаются ненулевые числа, то есть

или положительные, или отрицательные числа. Достаточно рассмотреть произвольное положительное число (для произвольного отрицательного числа достаточно в разложении противоположного ему положительного числа заменить знак каждого элемента разложения на противоположный). Поскольку гармонический ряд расходится к плюс бесконечности, то непременно существует наименьший возможный достаточно длинный начальный отрезок гармонического ряда как наименьшее гармоническое число, не меньшее требуемого действительного числа. Рассматривается предыдущее гармоническое число (необходимо меньшее требуемого действительного числа), берётся соответствующий

начальный отрезок гармонического ряда и добавляется наименьшая единичная дробь, не меньшая разности требуемого действительного числа и предыдущего гармонического числа, которая необходимо не превышает единичной дроби, следующей за этим отрезком гармонического ряда. Если здесь или в дальнейшем достигается равенство составленной алгебраической суммы единичных дробей требуемому положительному числу, то его разложение завершено, а при отсутствии такого равенства продолжается (конечно для рационального числа и бесконечно для иррационального числа). В частности, если сумма этих предыдущего гармонического числа и добавочной единичной дроби больше требуемого

положительного числа, то последнее вычитается из этой суммы, выбирается наименьшая единичная дробь, не меньшая этой разности, необходимо меньшая всех дробей этой суммы, вычитается из этой суммы, и полученная алгебраическая сумма необходимо не больше требуемого действительного числа. Это даёт начало и в дальнейшем именно знакочередующейся части ряда. Если полученная алгебраическая сумма меньше требуемого действительного числа, то вычитается из него, выбирается наименьшая единичная дробь, не меньшая этой разности, необходимо меньшая всех дробей этой алгебраической суммы, прибавляется к этой алгебраической сумме, и полученная алгебраическая сумма необходимо не меньше требуемого

действительного числа. При необходимости этот процесс продолжается в том же духе. В итоге ряд, полученный по однозначному алгоритму общей метаметодологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел без целочисленных выделений, может иметь не более чем конечный начальный знакопостоянный отрезок и в дальнейшем является непременно и исключительно знакочередующимся.

Таким образом, и по алгоритму общей метаметодологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел без целочисленных выделений, и по ходу разложения действительного числа, и по итогу разложения действительного числа, абсолютная

величина которого превышает единицу, можно выделить два этапа разложения. Первый этап разложения является знакопостоянным со знаком этого числа, а второй этап разложения является знакочередующимся. При этом трудоёмкость первого этапа разложения можно значительно сократить, если оценить, сколько именно начальных единичных дробей гармонического ряда следует брать для конкретных действительных чисел. А именно, взамен проверки всех начальных гармонических чисел для определения самого последнего из них, не большего абсолютной величины требуемого действительного числа, можно сразу воспользоваться приближённой формулой Леонарда Эйлера или несравненно более точными

приближёнными формулами полной системы всеобщих методологий изменения зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера для гармонических чисел. Если абсолютная величина требуемого действительного числа в точности равна одному из гармонических чисел, то требуемое действительное число рационально и его разложение знакопостоянно и даётся этим гармоническим числом со знаком требуемого действительного числа. Если превышающая единицу абсолютная величина требуемого действительного числа не равна ни одному гармоническому числу, то она находится строго между какими-то двумя соседними гармоническими числами. Указанные

приближённые формулы помогают сразу найти по этой абсолютной величине эти два соседних гармонических числа. При этом лучше пользоваться незначительно более сложными, но несравненно более точными, чем приближённая формула Эйлера, формулами полной системы всеобщих методологий изменения зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера для гармонических чисел. Однако в любом случае ввиду приближённости формул следует непременно по самим гармоническом числам произвести прямую проверку того, что указанная абсолютная величина действительно находится между двумя вычисленными по этим формулам соседними гармоническими числами. Далее

следует прибавить к меньшему из этих двух соседних гармонических чисел со знаком требуемого действительного числа имеющую тот же знак единичную дробь, по абсолютной величине меньшую всех ранее взятых дробей и вообще наименьшую возможную, однако превышающую предыдущий остаток с общим знаком требуемого действительного числа и взятого гармонического числа. То есть такая дробь обеспечивает смену знаков соседних остатков, в дальнейшем всегда повторяющуюся и тем самым обеспечивающую то, что тем самым начинается именно знакочередующийся остаток ряда разложения требуемого действительного числа. Такая дробь всегда существует потому, что следующее за

выбранным гармоническое число именно строго превышает абсолютную величину требуемого действительного числа. Если абсолютная величина требуемого действительного числа равна единице, то само это число представляется положительной или отрицательной единицей, дающей разложение требуемого действительного числа. Если абсолютная величина требуемого действительного числа меньше единицы, то его разложение является знакочередующимся с самого начала. При этом следует иметь в виду, что если дополнительно эта абсолютная величина превышает 1/2, то в качестве первой дроби берётся никоим образом не 1/2, а единица со знаком требуемого действительного числа, обеспечивающая смену знака остатка по сравнению с самим требуемым действительным числом.

Замечание. Итак, ввиду приближённости формулы Эйлера и формул полной системы всеобщих методологий изменения зависимой переменной применительно к уточнению приближённой формулы Эйлера для гармонических чисел необходима прямая проверка соседних меньшего и большего абсолютной величины требуемого действительного числа гармонических чисел именно по самим этим гармоническим числам. Кроме того, грубым нарушением было бы взятие большего из этих двух гармонических чисел, поскольку его последняя единичная дробь не только может не оказаться непременно наименьшей возможной, но и именно чаще всего не является таковой.

2.5.2. ТЕОРИЯ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ НАЧАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

2.5.2.1. НАЧАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА НА ЕГО ЦЕЛУЮ И ДРОБНУЮ ЧАСТИ

В настоящей научной монографии используются известные определения и обозначения целой и дробной частей действительного числа x.

Целая часть действительного числа x определяется как наибольшее целое число, не превосходящее этого действительного числа x, и обозначается взятием этого действительного числа x в квадратные скобки по Гауссу, иногда E(x) («entier», «антье» – «целый» по-французски):

$$[x] = E(x) = \mathrm{entier}(x).$$

Дробная часть действительного числа x определяется как разность между этим действительным числом x и его целой частью как наибольшим целым числом, не превосходящим этого действительного числа x, и обозначается взятием этого действительного числа x в фигурные скобки:

$$\{x\} = x - [x].$$

Целая часть действительного числа x иногда именуется калькой с английского “floor(x), the floor function” как пол (основание, этот смысл указывается ввиду омонимии) действительного числа x. Это название дважды неточно

даже на английском языке, поскольку не указываются ни целость, ни свойство быть наибольшим. На русском языке это название и вовсе не приемлемо ввиду омонимии слова «пол»: не только низ помещения, но ещё и биологический пол, да и половина, что вообще сбивает с толку.

Другими правильными названиями целой части действительного числа x представляются «точный целый низ», «наибольший целый низ» (“exact integer bottom”, “greatest integer bottom”) и «целая точная нижняя грань» (“integer infimum”, “int inf”, “greatest integer lower bound”). Для этой функции вводится дополнительное обозначение

$$[x] = \mathrm{int\ inf}(x).$$

2.5.2.2. НАЧАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА НА ЕГО ПОТОЛОК И ДОПОТОЛОЧНОСТЬ, ИЛИ ПОТОЛОЧНОЕ ДОПОЛНЕНИЕ

Известен также называемый калькой с английского “ceil(x), the ceiling function” потолок действительного числа x как наименьшее целое число, не меньшее действительного числа x, и обозначается взятием этого действительного числа x в вывернутые наружу квадратные скобки:

$$]x[= \mathrm{ceil}(x).$$

Это название дважды неточно как на английском языке, так и на русском языке, поскольку не указываются ни целость, ни свойство быть наименьшим.

Правильными названиями потолка действительного числа x представляются «точный целый верх», «наименьший целый верх» (“exact integer top”, “least integer top”) и «целая точная верхняя грань» (“integer supremum”, “int sup”, “least integer upper bound”). Для этой функции вводится дополнительное обозначение

$$]x[= \mathrm{ceil}(x) = \mathrm{int\ sup}(x).$$

Лемма.

Целая точная верхняя грань действительного числа x выражается двойным отрицанием целой части действительного числа x и самого этого числа:

$$]x[= - [- x].$$

Доказательство.

Действительное число x по определению

$$\{x\} = x - [x]$$

его дробной части {x} является суммой целой [x] и дробной {x} частей действительного числа x:

$$x = [x] + \{x\},$$

причём имеет место двойное неравенство

$$0 \le \{x\} < 1.$$

Поэтому две взаимно исключающие друг друга возможности

$$\{x\} = 0$$

и

$$0 < \{x\} < 1$$

образуют полную систему наличных возможностей. Если

$$\{x\} = 0,$$

то ввиду <u>целости</u> действительных чисел x и -x

$$]x[= x,$$

$$- [- x] = - (- x) = x,$$

$$]x[= - [- x].$$

Если

$$0 < \{x\} < 1,$$

то ввиду <u>нецелости</u> действительных чисел x и -x

$$]x[=][x] + \{x\}[= [x] +]\{x\}[= [x] + 1,$$

$$- [- x] = - [- ([x] + \{x\})] = - [- [x] - \{x\}] = - [- [x]] - [- \{x\}] =$$

$$- (- [x]) - (- 1) = [x] + 1,$$

$$]x[= - [- x].$$

Тем самым завершено доказательство данной леммы.

Тем не менее, ввиду краткости и общепринятости в дальнейшем используется понятие <u>потолка</u>.

2.6. ОБЩАЯ МЕТАМЕТОДОЛОГИЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ВЫДЕЛЕНИЯМИ. ТЕОРИЯ ПОДГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Теория гармонических разложения и приближения действительных чисел использует непременно различные произвольные слагаемые гармонического ряда, то есть единичные, или аликвотные, дроби. При этом общеприняты предварительное выделение целой части действительного числа и затем разложение его дробной части.

Общая метаметодология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел с целочисленными выделениями допускает кратное использование именно и только первой единичной, или аликвотной, дроби 1/1. Это допущение чрезвычайно полезно для упрощения гармонического разложения действительного числа с не меньшей двух целой частью. Однако с принципиальной точки зрения необходимости в таком допущении нет, поскольку гармонический ряд расходится к плюс бесконечности и поэтому позволяет выразить любое положительное число и без кратного использования своих единичных, или аликвотных, дробей.

Теория подгармонических разложения и приближения действительных чисел использует непременно различные произвольные слагаемые подгармонического ряда, или гармонического подряда, или подряда гармонического ряда. Такие подряды являются частными случаями рассмотренного выше подряда произвольного ряда вообще.

Подряды гармонического ряда в принципе могут выбираться произвольно. Однако наибольший интерес представляют те подряды гармонического ряда, которые позволяют разложить именно любое положительное число. И здесь особую роль играют два подхода к разложению действительных чисел.

Более простой и поэтому более полезный первый подход предусматривает предварительное выделение целой части действительного числа и затем разложение его дробной части. Иными словами, допускается кратное использование именно первой единичной, или аликвотной, дроби 1/1. Это допущение чрезвычайно полезно для упрощения гармонического разложения действительного числа с не меньшей двух целой частью.

Однако с принципиальной точки зрения необходимости в таком допущении нет, если гармонический подряд расходится к плюс бесконечности и поэтому позволяет выразить любое положительное число и без кратного использования своих единичных, или аликвотных, дробей.

Именно это и предусматривается вторым подходом, представляющим научный интерес как раз своей затруднительностью. То есть для первого подхода гармонический подряд должен обеспечить выражаемость лишь дробных частей в пределах от нуля включительно до единицы исключительно для любых действительных чисел. А для второго подхода гармонический подряд должен обеспечить выражаемость любых положительных действительных чисел, для чего необходимо, но, вообще говоря, недостаточно расхождение гармонического подряда к плюс бесконечности.

В любом случае гармонический подряд должен обеспечить всеобщую выражаемость хотя бы дробных частей

действительных чисел и поэтому обязан содержать непременно бесконечное множество единичных, или аликвотных, дробей. Ведь никакое именно конечное их множество не может выразить сколь угодно малые положительные числа.

Последовательность знаменателей единичных, или аликвотных, дробей гармонического подряда является подпоследовательностью ряда всех положительных целых чисел, то есть положительной целой последовательностью. Допустимо ввиду фактического использования только бесповторного неупорядоченного множества значений элементов этой последовательности и полезно для алгоритмичности порядка действий считать эту

последовательность именно строго монотонно возрастающей. Для выражаемости сколь угодно малых положительных чисел необходимы бесконечность этой последовательности и вытекающее из этой бесконечности ввиду соединения положительности и целости расхождение этой последовательности к плюс бесконечности.

Арифметические прогрессии вида

$$b_n = b_1 + (n - 1)d$$

с положительными целыми первым элементом b_1, разностью d и номером элемента n как последовательности знаменателей единичных, или аликвотных, дробей гармонических подрядов обеспечивают заведомую расходимость соответствующих гармонических подрядов к

плюс бесконечности. Действительно, для всех достаточно больших положительных целых чисел n, а именно для

$$n > b_1 - d,$$

выполняются равносильные неравенства

$$b_1 - d < n,$$

$$b_1 - d + nd < nd + n,$$

$$b_n = b_1 + (n - 1)d < n(d + 1),$$

$$1/b_n = 1/(b_1 + (n - 1)d) > 1/(n(d + 1)).$$

Ввиду положительного постоянства (d + 1) положительный ряд

$$\Sigma_{n=1}{}^{\infty}1/(n(d + 1))$$

как пропорциональный гармоническому ряду расходится к плюс бесконечности вместе с гармоническим рядом.

Поэтому из последнего неравенства следует, что и гармонический подряд

$$\Sigma_{n=1}{}^{\infty}1/(n(d + 1))$$

расходится к плюс бесконечности вместе с гармоническим рядом.

Если произвольная действительная (не обязательно целочисленная) именно возрастающая арифметическая прогрессия содержит хотя бы два положительных целых числа, то она включает свою арифметическую подпрогрессию, которая начинается с меньшего из этих двух чисел, имеет разностью разность большего и меньшего из этих двух чисел и представляет свой гармонический подряд.

Из именно возрастающих геометрических прогрессий вида

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

с положительными целыми первым элементом b_1, знаменателем q и номером элемента n как последовательностей знаменателей единичных, или аликвотных, дробей гармонических подрядов единственная возрастающая геометрическая прогрессия

$$2^n,\ n = 1, 2, 3, 4, \dots ,$$

которая может быть пополнена начальной единицей

$$2^n,\ n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

для целых частей действительных чисел, приводит к рассмотренной выше убывающей геометрической прогрессии самих единичных, или аликвотных, дробей

$$1/2^n,\ n = 1, 2, 3, 4, \ldots ,$$

и только целиком без изъятий, как установлено выше, обеспечивает выражаемость лишь дробных частей действительных чисел. На самом деле, в остальных случаях даже для наименьших возможных

$$b_1 = 1,$$

$$q = 3,$$

если оставить в стороне единицу для целых частей действительных чисел, имеет место равенство

$$\Sigma_{n=1}{}^{\infty}1/3^n = 1/2,$$

и этот гармонический подряд неспособен выразить даже дробные части, превышающие 1/2.

Последовательность знаменателей единичных, или аликвотных, дробей гармонического подряда как подпоследовательность ряда положительных целых чисел, то есть положительная целая последовательность, может быть получена из именно неограниченной положительной действительной последовательности. Допустимо ввиду фактического использования только бесповторного неупорядоченного множества значений элементов этой последовательности и полезно для алгоритмичности порядка действий считать эту последовательность именно строго монотонно возрастающей. Если по определению множества Кантора именно бесповторное множество целочисленных значений элементов неограниченной

положительной действительной последовательности бесконечно, то, как и выше в частном случае арифметической прогрессии, выбор всех или непременно бесконечной части непременно различных целочисленных элементов положительной действительной последовательности даёт её положительную целую подпоследовательность, ввиду этих бесконечности, различности, положительности и целости расходящуюся к плюс бесконечности. При этом выполнено условие, необходимое (но, вообще говоря, недостаточное) для выражаемости сколь угодно малых положительных чисел, а именно бесконечность этой подпоследовательности, необходимая (но, вообще говоря, недостаточная) для

выражаемости хотя бы дробных частей произвольных действительных чисел подрядами ряда (как гармонического подряда) обращений этой подпоследовательности.

В общем случае безотносительно наличия или отсутствия целочисленных элементов именно строго монотонно возрастающей с расхождением к плюс бесконечности положительной действительной последовательности возможны её преобразования в такую последовательность непременно целочисленных элементов, из которой можно выбрать именно строго монотонно возрастающую бесконечную положительную целую подпоследовательность, ввиду этих бесконечности,

положительности, целости и строго монотонного возрастания расходящуюся к плюс бесконечности.

Пусть

$$({}_{n=1}{}^{\infty}b_n) = (b_n \mid n = 1, 2, 3, 4, ...) = (b_1, b_2, b_3, b_4, ...)$$

– именно строго монотонно возрастающая с расхождением к плюс бесконечности положительная действительная последовательность.

Приведём примеры таких преобразований.

1. Целочастичность:

$$[]: ({}_{n=1}{}^{\infty}b_n) \Rightarrow [({}_{n=1}{}^{\infty}b_n)] = ({}_{n=1}{}^{\infty}[b_n]) = ([b_n] \mid n = 1, 2, 3, 4, ...) = ([b_1], [b_2], [b_3], [b_4], ...).$$

2. Потолочность:

$$][: ({}_{n=1}{}^{\infty}b_n) \Rightarrow]({}_{n=1}{}^{\infty}b_n)[= ({}_{n=1}{}^{\infty}]b_n[) = (]b_n[\mid n = 1, 2, 3, 4, ...) = (]b_1[,]b_2[,]b_3[,]b_4[, ...).$$

3. Замена произвольного действительного числа x ближайшим к нему целым числом, причём в случае дробной части

$$\{x\} = 1/2$$

берётся большее из двух равноудалённых целых чисел, то есть

$$]x[= [x] + 1,$$

а не

$$[x] =]x[- 1:$$

$$[]_{+1/2}: x \Rightarrow [x + 1/2].$$

4. Замена произвольного действительного числа x ближайшим к нему целым числом, причём в случае дробной части

$$\{x\} = 1/2$$

берётся меньшее из двух равноудалённых целых чисел, то есть

$$[x] =]x[- 1,$$

а не

$$]x[= [x] + 1:$$

$$][_{-1/2}: x \Rightarrow]x - 1/2[.$$

5. Введение дополнительных целочисленных отклонений в целочисленные образы, одинаковых

или различных для разных элементов положительной действительной последовательности, например:

$$[\,]_{+n}\colon ({}_{n=1}{}^{\infty}b_n) \Rightarrow [({}_{n=1}{}^{\infty}b_n)]_{+n} = ({}_{n=1}{}^{\infty}[b_n]_{+n}) = ({}_{n=1}{}^{\infty}[b_n + n]) = ([b_n]_{+n} \mid n = 1, 2, 3, 4, \ldots) = ([b_n] + n \mid n = 1, 2, 3, 4, \ldots) = ([b_1 + 1], [b_2 + 2], [b_3 + 3], [b_4 + 4], \ldots) = ([b_1] + 1, [b_2] + 2, [b_3] + 3, [b_4] + 4, \ldots).$$

6. Замена множества всех целых чисел его собственным подмножеством, например множеством всех целых чисел, обладающих дополнительными ограничивающими свойствами, то есть присущими не всем целым числам, например по следующим далее теории остаточно-модульной целой части и теории остаточно-модульного потолка:

6.1. Замена произвольного действительного числа x его чётной целой частью.

6.2. Замена произвольного действительного числа x его нечётной целой частью.

6.3. Замена произвольного действительного числа x его r\d-целой частью.

6.4. Замена произвольного действительного числа x его чётным потолком.

6.5. Замена произвольного действительного числа x его нечётным потолком.

6.6. Замена произвольного действительного числа x его r\d-потолком.

2.7. ТЕОРИЯ ОСТАТОЧНО-МОДУЛЬНОЙ ЦЕЛОЙ ЧАСТИ

Определение. Чётной целой частью $[x]_{0\backslash 2}$ произвольного действительного числа x называется наибольшее чётное число, не большее числа x.

Теорема. $[x]_{0\backslash 2} = 2[x/2]$.

Доказательство. По определению целой части числа x/2 выполняется неравенство

$$[x/2] + 1 > x/2,$$

доказываемое методом от противоречащего (это соответствует классической логике и куда лучше, чем используемое в классической математике в том же смысле противное с его нежелательной эмоциональной окраской

ввиду омонимии). Действительно, в противоречащем случае имеет место неравенство

$$[x/2] + 1 \leq x/2.$$

Но тогда не число [x/2], а число [x/2] + 1 было бы целой частью числ<u>а</u> x/2 вопреки определению числ<u>а</u> [x/2] как целой части числ<u>а</u> x/2.

[x/2] является <u>целым</u> числом по определению целой части действительного числ<u>а</u>. Поэтому 2[x/2] является <u>чётным</u> числом. Если его увеличить на 2, то

$$2[x/2] + 2 = 2([x/2] + 1) > 2(x/2) = x.$$

Поэтому 2[x/2] является именно <u>наибольшим</u> <u>чётным</u> числом, <u>не превышающим</u> числ<u>а</u> x, то есть по определению

чётной целой части $[x]_{0\backslash 2}$ произвольного действительного числа x

$$[x]_{0\backslash 2} = 2[x/2],$$

что и требовалось доказать.

Определение. Нечётной целой частью $[x]_{1\backslash 2}$ произвольного действительного числа x называется наибольшее нечётное число, не большее числа x.

Теорема. $[x]_{1\backslash 2} = 2[(x - 1)/2] + 1$.

Доказательство. По определению целой части числа $(x - 1)/2$ выполняется неравенство

$$[(x - 1)/2] + 1 > (x - 1)/2,$$

доказываемое методом от противоречащего. Действительно, в противоречащем случае имеет место неравенство

$$[(x - 1)/2] + 1 \leq (x - 1)/2.$$

Но тогда не число $[(x - 1)/2]$, а число $[(x - 1)/2] + 1$ было бы целой частью числа $(x - 1)/2$ вопреки определению числа $[(x - 1)/2]$ как целой части числа $(x - 1)/2$.

$[(x - 1)/2]$ является целым числом по определению целой части действительного числа. Поэтому $2[(x - 1)/2] + 1$ является нечётным числом. Если его увеличить на 2, то

$$2[(x - 1)/2] + 1 + 2 = 2([(x - 1)/2] + 1) + 1 > 2((x - 1)/2) + 1 = x.$$

Поэтому $2[(x - 1)/2] + 1$ является именно наибольшим нечётным числом, не превышающим числа x, то есть по определению нечётной целой части $[x]_{1\backslash 2}$ произвольного действительного числа x

$$[x]_{1\backslash 2} = 2[(x - 1)/2] + 1,$$

что и требовалось доказать.

Определение. r\d-целой частью $[x]_{r\backslash d}$ произвольного действительного числа x называется не большее числа x наибольшее целое число из дающих неотрицательный целый остаток r при делении на целое число d, большее числа r, то есть сравнимых с r по модулю d.

Теорема. $[x]_{r\backslash d} = d[(x - r)/d] + r$.

Доказательство. По определению целой части числа (x - r)/d выполняется неравенство

$$[(x - r)/d] + 1 > (x - r)/d,$$

доказываемое методом от противоречащего. Действительно, в противоречащем случае имеет место неравенство

$$[(x - r)/d] + 1 \leq (x - r)/d.$$

Но тогда не число $[(x - r)/d]$, а число $[(x - r)/d] + 1$ было бы целой частью числа $(x - r)/d$ вопреки определению числа $[(x - r)/d]$ как целой части числа $(x - r)/d$.

$[(x - r)/d]$ является целым числом по определению целой части действительного числа. Поэтому число $d[(x - r)/d] + r$ даёт неотрицательный целый остаток r при делении на целое число d, большее числа r, то есть сравнимо с r по модулю d.

Если число $d[(x - r)/d] + r$ увеличить на d, то

$$d[(x - r)/d] + r + d = d([(x - r)/d] + 1) + r > d((x - r)/d) + r = x.$$

Поэтому $d[(x - r)/d] + r$ является именно наибольшим не превышающим числа x целым числом из дающих неотрицательный целый остаток r при делении на целое

число d, большее числа r, то есть сравнимых с r по модулю d. Следовательно, по определению r\d-целой части $[x]_{r\backslash d}$ произвольного действительного числа x

$$[x]_{r\backslash d} = d[(x - r)/d] + r,$$

что и требовалось доказать.

2.8. ТЕОРИЯ ОСТАТОЧНО-МОДУЛЬНОГО ПОТОЛКА

Определение. Чётным потолком $]x[_{0\backslash 2}$ произвольного действительного числа x называется наименьшее чётное число, не меньшее числа x.

Теорема. $]x[_{0\backslash 2} = 2]x/2[$.

Доказательство. По определению потолка числа x/2 выполняется неравенство

$$]x/2[- 1 < x/2,$$

доказываемое методом от противоречащего. Действительно, в противоречащем случае имеет место неравенство

$$]x/2[- 1 \geq x/2.$$

Но тогда не число $]x/2[$, а число $]x/2[- 1$ было бы потолком числа $x/2$ вопреки определению числа $]x/2[$ как потолка числа $x/2$.

$]x/2[$ является целым числом по определению потолка действительного числа. Поэтому $2]x/2[$ является чётным числом. Если его уменьшить на 2, то

$$2]x/2[- 2 = 2(]x/2[- 1) < 2(x/2) = x.$$

Поэтому $2]x/2[$ является именно наименьшим чётным числом, не меньшим числа x, то есть по определению чётного потолка $]x[_{0\backslash 2}$ произвольного действительного числа x

$$]x[_{0\backslash 2} = 2]x/2[,$$

что и требовалось доказать.

Определение. **Нечётным** потолком $]x[_{1\backslash 2}$ произвольного действительного числа x называется **наименьшее** **нечётное** число, **не меньшее** числа x.

Теорема. $]x[_{1\backslash 2} = 2](x + 1)/2[- 1 = 2](x - 1)/2[+ 1$.

Доказательство. Прежде всего, докажем тождественность **второй** и **третьей** частей этого двойного равенства:

$$2](x + 1)/2[- 1 = 2](x + 1)/2 - 1 + 1[- 1 = 2](x - 1)/2 + 1[- 1 = 2(](x - 1)/2[+ 1) - 1 = 2](x - 1)/2[+ 1.$$

Теперь докажем эту теорему двумя слегка различными способами.

Первый способ доказательства теоремы доказывает равенство **первой** и **второй** частей требуемого двойного равенства:

$$]x[_{1\backslash 2} = 2](x + 1)/2[- 1.$$

По определению потолка числа $(x + 1)/2$ выполняется неравенство

$$](x + 1)/2[- 1 < (x + 1)/2,$$

доказываемое методом от противоречащего. Действительно, в противоречащем случае имеет место неравенство

$$](x + 1)/2[- 1 \geq (x + 1)/2.$$

Но тогда не число $](x + 1)/2[$, а число $](x + 1)/2[- 1$ было бы потолком числа $(x + 1)/2$ вопреки определению числа $](x + 1)/2[$ как потолка числа $(x + 1)/2$.

$](x + 1)/2[$ является целым числом по определению потолка действительного числа. Поэтому $2](x + 1)/2[- 1$ является нечётным числом. Если его уменьшить на 2, то

$$2](x + 1)/2[- 1 - 2 = 2(](x + 1)/2[- 1) - 1 < 2((x + 1)/2) - 1 = x.$$

Поэтому 2](x + 1)/2[- 1 является именно наименьшим нечётным числом, не меньшим числа x, то есть по определению нечётного потолка $]x[_{1\backslash 2}$ произвольного действительного числа x

$$]x[_{1\backslash 2} = 2](x + 1)/2[- 1,$$

что и требовалось доказать.

Второй способ доказательства теоремы доказывает равенство первой и третьей частей требуемого двойного равенства:

$$]x[_{1\backslash 2} = 2](x - 1)/2[+ 1.$$

По определению потолка числа (x - 1)/2 выполняется неравенство

$$](x - 1)/2[- 1 < (x - 1)/2,$$

доказываемое методом от противоречащего. Действительно, в противоречащем случае имеет место неравенство

$$](x - 1)/2[- 1 \geq (x - 1)/2.$$

Но тогда не число $](x - 1)/2[$, а число $](x - 1)/2[- 1$ было бы потолком числа $(x - 1)/2$ вопреки определению числа $](x - 1)/2[$ как потолка числа $(x - 1)/2$.

$](x - 1)/2[$ является целым числом по определению потолка действительного числа. Поэтому число $2](x - 1)/2[+ 1$ является нечётным числом. Если его уменьшить на 2, то

$$2](x - 1)/2[+ 1 - 2 = 2(](x - 1)/2[- 1) + 1 < 2((x - 1)/2) + 1 = x.$$

Поэтому $2](x - 1)/2[+ 1$ является именно наименьшим нечётным числом, не меньшим числа x, то есть по

определению нечётного потолка $]x[_{1\backslash 2}$ произвольного действительного числа x

$$]x[_{1\backslash 2} = 2](x - 1)/2[+ 1,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Применительно к нечётным числам модуль 2 ровно вдвое больше остатка 1, и тождественные вторая и третья части требуемого двойного равенства одинаково просты и одинаково удобны. Поэтому одинаково целесообразны и оба приведённых способа доказательства теоремы соответственно. Однако в общем случае произвольных модуля и остатка третья часть требуемого двойного равенства более проста и более удобна, чем вторая часть. Поэтому в предстоящем общем случае ограничимся

третьей частью требуемого двойного равенства и соответствующим вторым способом доказательства общей теоремы.

Определение. r\d-потолком $]x[_{r\backslash d}$ произвольного действительного числа x называется не меньшее числа x наименьшее целое число из дающих неотрицательный целый остаток r при делении на целое число d, большее числа r, то есть сравнимых с r по модулю d.

Теорема. $]x[_{r\backslash d} = d](x - r)/d[+ r$.

Доказательство. По определению потолка числа (x - r)/d выполняется неравенство

$$](x - r)/d[- 1 < (x - r)/d,$$

доказываемое методом от противоречащего. Действительно, в противоречащем случае имеет место неравенство

$$](x - r)/d[- 1 \geq (x - r)/d.$$

Но тогда не число](x - r)/d[, а число](x - r)/d[- 1 было бы потолком числа (x - r)/d вопреки определению числа](x - r)/d[как потолка числа (x - r)/d.

](x - r)/d[является целым числом по определению потолка действительного числа. Поэтому число d](x - r)/d[+ r даёт неотрицательный целый остаток r при делении на целое число d, большее числа r, то есть сравнимо с r по модулю d.

Если число $d](x - r)/d[+ r$ уменьшить на d, то

$$d](x - r)/d[+ r - d = d(](x - r)/d[- 1) + r < d((x - r)/d) + r = x.$$

Поэтому $d](x - r)/d[+ r$ является именно наименьшим не меньшим числа x целым числом из дающих неотрицательный целый остаток r при делении на целое число d, большее числа r, то есть сравнимых с r по модулю d. Следовательно, по определению $r\backslash d$-потолка $]x[_{r\backslash d}$ произвольного действительного числа x

$$]x[_{r\backslash d} = d](x - r)/d[+ r,$$

что и требовалось доказать.

2.9. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ СУММАМИ И ЗНАКОПЕРЕМЕННЫМИ РЯДАМИ ЕДИНИЧНЫХ, ИЛИ АЛИКВОТНЫХ, ДРОБЕЙ

Общая теория рациональных разложения и приближения действительных чисел предусматривает представление действительных чисел не только в виде сумм и рядов единичных, или аликвотных, дробей, но и в обобщённом виде алгебраических сумм и знакопеременных рядов единичных, или аликвотных, дробей, которые, следовательно, могут использоваться и с отрицательными знаками. При этом для простоты промежуточных

вычислений таких дробей весьма удобно отрицательные знаки перед такими дробями переносить в знаменатели этих дробей, причём сами такие др<u>о</u>би после этого приобретут положительные знаки, то есть будут просто складываться, а <u>знакопеременность</u> алгебраических сумм и рядов будет выражаться возможностью наличия <u>отрицательных знаменателей</u>. Причём и с отрицательными знаменателями такие др<u>о</u>би сохраняют равные положительной единице числители и вполне могут считаться единичными в естественно обобщённом понимании, при котором знаменатели могут быть любыми ненулевыми целыми числами, то есть и положительными, и отрицательными. Такое обобщение тем более естественно,

что для представлений иррациональных чисел непременно бесконечными суммами единичных, или аликвотных, дробей всё равно приходится заведомо выходить бесконечно далеко за пределы теории египетских дробей как непременно конечных сумм единичных, или аликвотных, дробей с непременно положительными целыми знаменателями, а в теории знакопеременных, в частности знакочередующихся, рядов широко используются такие дроби как с положительными, так и с отрицательными знаками перед этими дробями.

Хорошо известны, в частности, следующие разложения действительных чисел в знакопеременные ряды, а именно в знакочередующиеся ряды, сходящиеся по признаку Лейбница:

ряд Меркатора для $\ln(1 + x)$ при $x = 1$

$$\ln 2 = \Sigma_{n=1}{}^{\infty}(-1)^{n-1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots + (-1)^{n-1}/n + \ldots;$$

ряд Тейлора для arctg x при $x = 1$

$$\pi/4 = \Sigma_{n=1}{}^{\infty}(-1)^{n-1}/(2n - 1) = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots + (-1)^{n-1}/n + \ldots;$$

ряд Тейлора для e^x при $x = -1$

$$1/e = \Sigma_{n=0}{}^{\infty}(-1)^{n}/n! = 1/0! - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! - \ldots + (-1)^{n}/n! + \ldots .$$

Знакочередующийся ряд Меркатора

$$\ln 2 = \Sigma_{n=1}{}^{\infty}(-1)^{n-1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots + (-1)^{n-1}/n + \ldots$$

имеет монотонно убывающую бесконечно малую абсолютную величину $1/n$ общего члена $(-1)^{n-1}/n$ и поэтому по признаку Лейбница сходится, однако лишь условно, поскольку ряд абсолютных величин $1/n$ является гармоническим рядом, расходящимся к плюс

бесконечности. Поэтому нельзя произвольно менять порядок элементов такого ряда. Выдвижением вперёд именно положительных элементов этого ряда в достаточно больших количествах, перемежаемых одиночными отрицательными элементами этого ряда, при сохранении относительного порядка положительных элементов ряда и относительного порядка отрицательных элементов ряда отдельно по этим знакопостоянным группам можно добиться расхождения этого ряда к плюс бесконечности. Выдвижением вперёд именно отрицательных элементов этого ряда в достаточно больших количествах, перемежаемых одиночными положительными элементами этого ряда, при сохранении относительного порядка положительных элементов ряда и относительного порядка отрицательных элементов ряда отдельно по этим знакопостоянным группам можно добиться расхождения этого ряда к минус бесконечности. Однако при полном сохранении общего порядка всех элементов этого ряда можно их произвольно группировать. Два примера:

$$\ln 2 = \Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ... + (-1)^{n-1}/n + ... = (1 - 1/2) + (1/3 - 1/4) + (1/5 - 1/6) + (1/7 - 1/8) + ... = 1/(1 * 2) + 1/(3 * 4) + 1/(5 * 6) + 1/(7 * 8) + ... + 1/((2k - 1)2k) + ...;$$

$$\ln 2 = \Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ... + (-1)^{n-1}/n + ... = 1 + (- 1/2 + 1/3) + (- 1/4 + 1/5) + (- 1/6\ 1/7) + (- 1/8 + 1/9) + ... = 1 - 1/(2 * 3) - 1/(4 * 5) - 1/(6 * 7) - 1/(8 * 9) - ... - 1/((2k - 2)(2k - 1)) + ...$$

Первый из этих двух рядов является положительным, а второй ряд начинается положительным первым элементом, тогда как все дальнейшие элементы являются отрицательными. Оба этих ряда сходятся абсолютно, однако чрезвычайно медленно, к

$$\ln 2 = 0.69314718055994530941723212... .$$

Общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях в теории рациональных разложения и приближения действительных чисел даёт

$$\ln 2 = 1/2 + 1/6 + 1/38 + 1/6071 + 1/144715221 + ...$$

Пятое (показанное правым нижним индексом 5, ввиду допустимой здесь слитности написания можно опустить скобки) приближение по общему методу гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях в теории рациональных разложения и приближения действительных чисел

$$\ln 2_5 = 1/2 + 1/6 + 1/38 + 1/6071 + 1/144715221 =$$
$$23141073551959/33385512054258 = \underline{0.693147180559945}29235...$$

с недостатком имеет абсолютную погрешность

$$\ln 2 - \ln 2_5 = \underline{0.693147180559945}30941... -$$
$$\underline{0.693147180559945}29235... = 1.706 * 10^{-17}$$

и даёт 15 верных цифр после десятичного разделителя.

Сравним с погрешностями пятых приближений к ln2, даваемых приведёнными ранее рядами для

$$\ln 2 = \Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ... + (-1)^{n-1}/n + ... $$

Вначале рассмотрим этот ряд непосредственно без его допустимых преобразований.

Пятое приближение

$$\ln 2_5 = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 = 47/60 = \underline{0}.78333...$$

с избытком имеет абсолютную погрешность 0.09 и не даёт ни единой верной цифры после десятичного разделителя.

Рассмотрим первое из допустимых преобразований этого ряда

$$\ln 2 = 1/(1 * 2) + 1/(3 * 4) + 1/(5 * 6) + 1/(7 * 8) + 1/(9 * 10) + ... + 1/((2k - 1)2k) + ... $$

Пятое приближение

$$\ln 2_5 = 1/2 + 1/12 + 1/30 + 1/56 + 1/90 = 1627/2520 = \underline{0.6}456...$$

с недостатком имеет абсолютную погрешность 0.05 и даёт одну верную цифру после десятичного разделителя.

Рассмотрим второе из допустимых преобразований этого ряда

$$\ln 2 = 1 - 1/(2 * 3) - 1/(4 * 5) - 1/(6 * 7) - 1/(8 * 9) - ... - 1/((2k - 2)(2k - 1)) + ...$$

Пятое приближение

$$\ln 2_5 = 1 - 1/6 - 1/20 - 1/42 - 1/72 = 1879/2520 = \underline{0}.7456...$$

с избытком имеет абсолютную погрешность 0.05 и не даёт ни единой верной цифры после десятичного разделителя.

Для обращения числа Эйлера e как основания натуральных логарифмов

$$1/e = 0.36787944117144232159552377016...$$

общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях в теории рациональных разложения и приближения действительных чисел даёт

$$1/e = 1/3 + 1/29 + 1/15786 + 1/513429610 + ...$$

Четвёртое приближение по общему методу гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков

дробной части в знаменателях в теории рациональных разложения и приближения действительных чисел

$$(1/e)_4 = 1/3 + 1/29 + 1/15786 + 1/513429610 =$$

$$216170553416 81/587612487200 85 = \underline{0.3678794411714423}1865...$$

с недостатком имеет абсолютную погрешность

$$1/e - (1/e)_4 = \underline{0.3678794411714423}2159... -$$

$$\underline{0.3678794411714423}1865... = 2.94 * 10^{-18}$$

и даёт 16 верных цифр после десятичного разделителя. Сравним с погрешностью четвёртого приближения к 1/e, даваемого приведённым ранее самим известным рядом

$$1/e = \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n/n! = 1/0! - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! - ... + (-1)^n/n! + ...$$

Четвёртое приближение

$$(1/e)_4 = 1/0! - 1/1! + 1/2! - 1/3! = 1/3 = \underline{0.3}33...$$

с недостатком имеет абсолютную погрешность 0.03 и даёт одну верную цифру после десятичного разделителя.

По итогам сопоставлений с известными лишь условно и абсолютно сходящимися знакочередующимися рядами для ln2 и 1/e соответственно можно сделать следующие выводы:

1. Общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях в теории рациональных разложения и приближения действительных чисел даёт частичными суммами чрезвычайно высокоточные и высокоскоростные последовательные приближения к действительным числам

по сравнению не только с положительными, но и с известными знакопеременными рядами, в том числе и с убыванием абсолютной величины общего члена ряда по закону обратного факториала.

2. Подтверждена предсказуемая весьма медленная сходимость последовательных приближений лишь условно сходящегося знакочередующегося ряда

$$\ln 2 = \Sigma_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + ... + (-1)^{n-1}/n + ...$$

3. Подтверждено и предсказуемое небольшое ускорение сходимости знакочередующегося ряда

$$1/e = \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}/n! = 1/0! - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! - ... + (-1)^{n}/n! + ...$$

целесообразными частично самовозмещающимися группировками, а именно спариваниями соседних элементов с противоположными знаками, и за счёт замены полной последовательности частичных сумм ряда её подпоследовательностью.

4. Оказалась неожиданной довольно медленная сходимость последовательных приближений, даваемых частичными суммами абсолютно сходящегося знакочередующегося ряда

$$1/e = \Sigma_{n=0}^{\infty}(-1)^n/n! = 1/0! - 1/1! + 1/2! - 1/3! + 1/4! - ... + (-1)^n/n! + ...$$

с убыванием абсолютной величины общего члена ряда по закону обратного факториала.

Тем не менее, и для методов общей теории рациональных разложения и приближения действительных чисел возможность использования единичных, или аликвотных, дробей не только с положительными, но и с отрицательными знаками является беспроигрышным и часто выигрышным средством дополнительного ускорения сходимости последовательных приближений, даваемых частичными суммами.

Ограничение лишь положительными единичными, или аликвотными, дробями обеспечивает только одностороннюю сходимость таких приближений к действительному числу, а именно снизу. При использовании также отрицательных единичных, или аликвотных, дробей

возникает дополнительная возможность ещё и двусторонней сходимости снизу и сверху, как у знакопеременных рядов, в том числе именно чередования приближений снизу и приближений сверху, как у знакочередующихся рядов и у метода непрерывных, или цепных, дробей.

Мы ещё встретимся с задачей приближения к числу π, дробная часть которого незначительно меньше дроби 1/7. Метод непрерывных, или цепных, дробей воспользовался именно этой дробью и по итогам тем самым временно – во втором приближении значительно, а в третьем приближении незначительно – сумел опередить общий метод гармонических разложения и приближения

действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях. При том приближении к числу π этот метод ограничивался только положительными единичными, или аликвотными, дробями и поэтому был вынужден вместо наилучшей единичной, или аликвотной, дроби 1/7 взять непременно меньшую дробь, в данном случае 1/8, что и привело к временному отставанию этого общего метода от метода непрерывных, или цепных, дробей по итогам. Однако уже в четвёртом и особенно в пятом приближениях общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях именно закономерно как

наиболее высокоточный и высокоскоростной для рядов непременно положительных единичных, или аликвотных, дробей уверенно и более чем убедительно обогнал метод непрерывных, или цепных, дробей по итогам.

Однако нет никакого смысла вначале создавать дополнительные трудности рукотворными самоограничениями и затем героически преодолевать эти самодельные трудности. Поэтому крайне полезно для именно дополнительного ускорения последовательных приближений к действительным числам допустить дополнительную возможность наряду с положительными также отрицательных единичных, или аликвотных, дробей.

Это хорошо видно на простом примере последовательных приближений к числу 0.499. Поскольку общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях ограничивается только положительными единичными, или аликвотными, дробями, то даёт

$$0.499 = 499/1000 = 1/3 + 1/7 + 1/44 + 1/12158 + 1/1404249000$$

и последовательные приближения к числу 0.499

$$0.499_1 = 1/3 = 0.333...;$$

$$0.499_2 = 1/3 + 1/7 = 10/21 = 0.47619...;$$

$$0.499_3 = 1/3 + 1/7 + 1/44 = 461/924 = 0.4989177...;$$

$$0.499_4 = 1/3 + 1/7 + 1/44 + 1/12158 = 2802881/5616996 = 0.4989999992878...;$$

$$0.499_5 = 1/3 + 1/7 + 1/44 + 1/12158 + 1/1404249000 = 499/1000 = 0.499.$$

Если теперь методы общей теории рациональных разложения и приближения действительных чисел для именно <u>дополнительного ускорения</u> последовательных приближений к действительным числам допускают дополнительную возможность наряду с <u>положительными</u> также <u>отрицательных</u> единичных, или аликвотных, дробей, то дают

0.499 = 499/1000 = 1/2 - 1/1000

и последовательные приближения к числу 0.499

$$0.499_1 = 1/2 = 0.5;$$

$$0.499_2 = 1/2 - 1/1000 = 499/1000 = 0.499.$$

Выигрыш как кардинальное упрощение и резкое ускорение последовательных приближений к числу 0.499 при допущении общей теорией рациональных разложения и приближения действительных чисел дополнительной возможности наряду с положительными также отрицательных единичных, или аликвотных, дробей более чем очевиден.

2.10. СИСТЕМА ОБЩИХ МЕТОДОЛОГИЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ И МЕТАМЕТОДОЛОГИЯ РАЗЛИЧЕНИЯ ЭТИХ ОБЩИХ МЕТОДОЛОГИЙ

В общей теории рациональных разложения и приближения действительных чисел создана целостная система общих методологий знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел. Эта система включает восемь общих методологий, естественно образующих четыре пары. Для ускорения сходимости последовательных приближений и для удобства их сравнительного анализа во всех этих общих методологиях в

качестве нулевого по счёту, или порядку, приближения может браться одно и то же ближайшее к требуемому действительному числу a целое число как целая часть увеличенного на 1/2 этого действительного числа. Общие методологии различаются способами составления рядов именно нецелых единичных, или аликвотных, дробей. Целесообразны вначале простые и наглядные представления идей и сущностей этих общих методологий, затем формальные изложения содержаний всех этих общих методологий.

Все эти восемь общих методологий представляют последовательные ненулевые остатки частичных сумм, вообще говоря, знакопеременных рядов единичных, или

аликвотных, дробей в виде отношений положительных или отрицательных единиц к действительным делителям этих единиц. При этом для единообразия каждой из этих общих методологий представляется полезным неуклонное следование одному из таких двух принципиально различных возможных и априорно целесообразных путей:

1. Эта единица берётся всегда положительной независимо от знака соответствующего остатка r_{j-1} частичной суммы знакопеременного ряда единичных, или аликвотных, дробей. При этом знак соответствующего остатка частичной суммы знакопеременного ряда единичных, или

аликвотных, дробей придаётся именно делителю положительной единицы, который может быть или положительным, или отрицательным действительным числом.

2. Эта единица берётся как функция знака соответствующего остатка r_{j-1} частичной суммы знакопеременного ряда единичных, или аликвотных, дробей, то есть или как положительная, или как отрицательная единица. При этом делитель такой единицы является непременно положительным действительным числом.

Различие между этими двумя возможностями особенно принципиально для первых двух пар общих методологий, предусматривающих выделение целых частей или потолков действительных делителей указанных единиц соответственно. Ведь при изменении знака действительного числа дробная его часть остаётся неотрицательной и строго меньшей, чем единица, однако изменяется, если первоначально не равнялась ни нулю, ни 1/2, а именно заменяется разностью между положительной единицей и собой первоначальной. Поэтому изменение знака действительного числа приводит к простому изменению знака целой части или потолка этого действительного числа только в том единственном случае, когда это

действительное число является именно целым числом, то есть имеет непременно нулевую дробную часть. А третья и четвёртая пары общих методологий предусматривают последовательное выделение целых чисел, именно ближайших к действительному делителю соответствующей единицы, поэтому изменение её знака приводит к соответствующему изменению знака целого числа, ближайшего к требуемому действительному числу как делителю такой единицы. Такое целое число единственно тогда и только тогда, когда дробная часть этого действительного числа отличается от 1/2. Если же дробная часть этого действительного числа равняется именно 1/2, то в этом и только в этом случае таких ближайших целых

чисел оказывается ровно два, одно из которых превышает это действительное число на 1/2, а другое меньше этого действительного числа на 1/2. При изменении знака этого действительного числа соответственно изменяются знаки этих двух ближайших чисел, причём по алгебраическим величинам меньшее из этих двух ближайших чисел становится больше другого, а большее число становится меньше другого.

Представляется полезным сопоставить все эти восемь общих методологий

$$1.\ [a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}];$$

$$2.\ [a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/[1/|r_{j-1}|];$$

$$3.\ [a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}[;$$

$$4.\ [a+1/2]+\Sigma_{j=1}{}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/]1/|r_{j-1}|[;$$

$$5.\ [a+1/2]+\Sigma_{j=1}{}^{k}1/[1/r_{j-1}+1/2];$$

$$6.\ [a+1/2]+\Sigma_{j=1}{}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/[1/|r_{j-1}|+1/2];$$

$$7.\ [a+1/2]+\Sigma_{j=1}{}^{k}1/]1/r_{j-1}-1/2[;$$

$$8.\ [a+1/2]+\Sigma_{j=1}{}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/]1/|r_{j-1}|-1/2[$$

на простом и наглядном примере представления одного и того же действительного числа 0.69 соответствующими алгебраическими суммами единичных, или аликвотных, дробей, которыми становятся даваемые этими общими методологиями знакопеременные ряды, коль скоро это действительное число рационально.

Замечание. Методологии, как и методы, могут отличаться друг от друга методологически, методически,

алгоритмически, аналитически и/или итогово (результативно).

Определение. Методологии, как и методы, называются равносильными, или эквивалентными, если решают одно и то же множество задач и в каждой задаче дают один и тот же соответствующий этой задаче итог (результат).

Определение. Задача называется различающей методологии, как и методы, если отсутствует совпадение итогов (результатов) решения этой задачи этими методологиями или методами соответственно.

Определение. Система задач называется различающей методологии, как и методы, если отсутствует совпадение систем итогов (результатов) решения этой системы задач этими методологиями или методами соответственно.

Первая пара общих методологий осуществляет последовательное выделение целых частей необязательно целых делителей единиц.

Первой в первой паре общих методологий является использующая именно первую указанную всеобщую возможность непременно положительных единиц, не учитывающих специфику знакопеременности

соответствующего ряда, общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков. Перед каждым взятием целой части делителя единицы требуется добиться непременной положительности этой единицы, причём делитель такой единицы имеет знак остатка, то есть может быть или положительным, или отрицательным действительным числом, а целая часть берётся от этого делителя именно при условии совпадения знака этого делителя со знаком остатка:

0.69 = 69/100 = [69/100 + 1/2] - [69/100 + 1/2] + 69/100 = 1 - 1 + 69/100 = 1 + (- 1 + 69/100) = 1 + (-31)/100 = 1 + 1/(100/(-31)) = 1

+ 1/(-(3 + 7/31)) = 1 + 1/[-(3 + 7/31)] - 1/[-(3 + 7/31)] - 31/100 = 1 + 1/(-4) - 1/(-4) - 31/100 = 1 - 1/4 + (1/4 - 31/100) = 1 - 1/4 + (25 - 31)/100 = 1 - 1/4 + 1/(100/(-6)) = 1 - 1/4 + 1/(-(16 + 2/3)) = 1 - 1/4 + 1/[-(16 + 2/3)] - 1/[-(16 + 2/3)] - 6/100 = 1 - 1/4 + 1/(-17) - 1/(-17) - 6/100 = 1 - 1/4 - 1/17 + (1/17 - 3/50) = 1 - 1/4 - 1/17 + (50 - 51)/850 = 1 - 1/4 - 1/17 - 1/850.

Второй в первой паре общих методологий является использующая именно вторую указанную всеобщую возможность единиц со знаками остатков с учётом специфики знакопеременности соответствующего ряда общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных

величин последовательных остатков (целыми частями делителей единиц со знаками обращаемых остатков). Перед каждым взятием целой части делителя единицы требуется непременно придать этой единице знак остатка, соответствующего частичной сумме ряда, и тем самым добиться именно положительного знака делителя такой единицы, причём целая часть берётся от этого делителя именно при условии положительности такого делителя:

$$0.69 = 69/100 = [69/100 + 1/2] - [69/100 + 1/2] + 69/100 = 1 - 1 + 69/100 = 1 + (- 1 + 69/100) = 1 -31/100 = 1 - 1/(100/31) = 1 - 1/(3 + 7/31) = 1 - 1/[3 + 7/31] + 1/[3 + 7/31] - 31/100 = 1 - 1/3 + 1/3 - 31/100 = 1 - 1/3 + (1/3 - 31/100) = 1 - 1/3 + (100 - 93)/300 = 1 - 1/3 + 1/(300/7) = 1$$

- 1/3 + 1/(42 + 6/7) = 1 - 1/3 + 1/[42 + 6/7] - 1/[42 + 6/7] + 7/300 = 1 - 1/3 + 1/42 - 1/42 + 7/300 = 1 - 1/3 + 1/42 + (- 1/42 + 7/300) = 1 - 1/3 + 1/42 + (- 50 + 49)/2100 = 1 - 1/3 + 1/42 - 1/2100.

Вторая пара общих методологий осуществляет последовательное выделение потолков необязательно целых делителей единиц.

Первой во второй паре общих методологий является использующая именно первую указанную всеобщую возможность непременно положительных единиц, не учитывающих специфику знакопеременности соответствующего ряда, общая методология знакопеременных гармонических разложения и

приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков. Перед каждым взятием потолка делителя единицы требуется добиться непременной положительности этой единицы, причём делитель такой единицы имеет знак остатка, то есть может быть или положительным, или отрицательным действительным числом, а потолок берётся от этого делителя именно при условии совпадения знака этого делителя со знаком остатка:

$$0.69 = 69/100 = [69/100 + 1/2] - [69/100 + 1/2] + 69/100 = 1 - 1 + 69/100 = 1 + (- 1 + 69/100) = 1 + (-31)/100 = 1 + 1/(100/(-31)) = 1 + 1/(-(3 + 7/31)) = 1 + 1/]-(3 + 7/31)[- 1/]-(3 + 7/31)[- 31/100 = 1 + 1/(-3) - 1/(-3) - 31/100 = 1 - 1/3 + (1/3 - 31/100) = 1 - 1/3 + (100 -$$

93)/300 = 1 - 1/3 + 1/(300/7) = 1 - 1/3 + 1/(42 + 6/7) = 1 - 1/3 + 1/]42 + 6/7[- 1/]42 + 6/7[+ 7/300 = 1 - 1/3 + 1/43 - 1/43 + 7/300 = 1 - 1/3 + 1/43 + (- 1/43 + 7/300) = 1 - 1/3 + 1/43 + (- 300 + 301)/12900 = 1 - 1/3 + 1/43 + 1/12900.

<u>Второй</u> во <u>второй паре</u> общих методологий является использующая именно <u>вторую</u> указанную всеобщую возможность <u>единиц со знаками остатков</u> <u>с учётом</u> специфики знакопеременности соответствующего ряда общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением <u>потолков</u> из обращений <u>абсолютных величин</u> последовательных остатков (<u>потолками</u> делителей <u>единиц со знаками обращаемых остатков</u>). Перед каждым взятием

потолка делителя единицы требуется непременно придать этой единице знак остатка, соответствующего частичной сумме ряда, и тем самым добиться именно положительного знака делителя такой единицы, причём потолок берётся от этого делителя именно при условии положительности такого делителя:

$$0.69 = 69/100 = [69/100 + 1/2] - [69/100 + 1/2] + 69/100 = 1 - 1 + 69/100 = 1 + (- 1 + 69/100) = 1 - 31/100 = 1 - 1/(100/31) = 1 - 1/(3 + 7/31) = 1 - 1/]3 + 7/31[+ 1/]3 + 7/31[- 31/100 = 1 - 1/4 + 1/4 - 31/100 = 1 - 1/4 + (1/4 - 31/100) = 1 - 1/4 + (25 - 31)/100 = 1 - 1/4 - 1/(100/6) = 1 - 1/4 - 1/(16 + 2/3) = 1 - 1/4 - 1/]16 + 2/3[+ 1/]16 + 2/3[-$$

$$6/100 = 1 - 1/4 - 1/17 + 1/17 - 6/100 = 1 - 1/4 - 1/17 + (1/17 - 3/50) = 1 - 1/4 - 1/17 + (50 - 51)/850 = 1 - 1/4 - 1/17 - 1/850.$$

Следствие. Задача разложения числа 0.69 соответствующими алгебраическими суммами единичных, или аликвотных, дробей не является итогово (результативно) различающей первую в первой паре и вторую во второй паре общие методологии, однако отличает от названных двух и различает между собой остальные две общие методологии. Поэтому данная задача не образует различающей системы задач для всех этих четырёх общих методологий, является частичной, недостаточной и неполной и нуждается в достаточном пополнении.

Разумеется, вполне достаточно просто указать задачу, которая дополняет предыдущую задачу до системы задач, различающей подсистему всех этих четырёх общих методологий. Однако несравненно полезнее и поучительнее методология построения такой дополнительной задачи. Во-первых, целая часть разлагаемого действительного числа не вносит различий при пока что принятом единообразии приближения нулевого порядка целой частью увеличенного на 1/2 разлагаемого числа, так что можно ограничиться дробной частью в пределах от нуля включительно до единицы исключительно. Во-вторых, для простоты целесообразно попытаться ограничиться конечными разложениями, то есть рациональными числами, которые

представимы алгебраическими суммами единичных, или аликвотных, дробей. В-третьих, с целью различения общих методологий целесообразно наличие различных знаков таких дробей. В-четвёртых, если, как всегда, упорядочивать такие дроби в порядке возрастания абсолютных величин знаменателей, то для простоты для первой дроби, для определённости положительной, целесообразно испытать наименьший возможный знаменатель, но всё-таки больше 2, поскольку дробь 1/2 равноудалена от нуля и единицы, тогда как полезна определённость направления близости к ближайшему целому числу, то есть в качестве первой положительной дроби испытываем 1/3. Для выхода на предначертанные знаменатели единичных дробей при

взятиях целых частей и потолков следует обеспечить минимально достаточный рост знаменателей. Поскольку в рассмотренном ранее общем методе гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях знаменатель каждой следующей дроби не мог быть меньше, чем знаменатель предыдущей дроби, умноженный на себя за вычетом единицы, то испытаем именно знакочередующуюся алгебраическую сумму с превышением последовательного возведения знаменателей единичных, или аликвотных, дробей в квадрат.

Рассмотрим простую задачу разложения действительного числа

$$a = 1/3 - 1/13 = 10/39.$$

Первая в первой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков даёт:

$$10/39 = [10/39 + 1/2] - [10/39 + 1/2] + 10/39 = 0 - 0 + 10/39 = 1/(39/10) = 1/(3 + 9/10) = 1/[3 + 9/10] + 10/39 - 1/[3 + 9/10] = 1/3 + (10/39 - 1/3) = 1/3 + (10 - 13)/39 = 1/3 - 1/13.$$

Вторая в первой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$10/39 = [10/39 + 1/2] - [10/39 + 1/2] + 10/39 = 0 - 0 + 10/39 = 1/(39/10) = 1/(3 + 9/10) = 1/[3 + 9/10] + 10/39 - 1/[3 + 9/10] = 1/3 + (10/39 - 1/3) = 1/3 + (10 - 13)/39 = 1/3 - 1/13.$$

Первая во второй паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков даёт:

$$10/39 = [10/39 + 1/2] - [10/39 + 1/2] + 10/39 = 0 - 0 + 10/39 = 1/(39/10) = 1/(3 + 9/10) = 1/]3 + 9/10[+ 10/39 - 1/]3 + 9/10[= 1/4 + (10/39 - 1/4) = 1/4 + (40 - 39)/156 = 1/4 + 1/156.$$

Вторая во второй паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков

из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$10/39 = [10/39 + 1/2] - [10/39 + 1/2] + 10/39 = 0 - 0 + 10/39 = 1/(39/10) = 1/(3 + 9/10) = 1/]3 + 9/10[+ 10/39 - 1/]3 + 9/10[= 1/4 + (10/39 - 1/4) = 1/4 + (40 - 39)/156 = 1/4 + 1/156.$$

Теперь испытаем для первых двух пар общих методологий рассмотренную далее пару задач, различающую общие методологии третьей и четвёртой пар.

Вначале испытаем простую задачу, состоящую из суммы первой дроби 1/3 и отношения единицы к превышающему квадрат знаменателя первой дроби полуцелому числу, то есть имеющему дробную часть, равную 1/2, или, равносильно, отношения

двух к превышающему удвоенный квадрат знаменателя первой др*о*би <u>нечётному</u> числу:

a = 1/3 + 1/34.5 = 1/3 + 2/69 = (23 + 2)/69 = 25/69.

<u>Первая</u> в <u>первой паре</u> общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением <u>целых частей</u> из обращений последовательных остатков даёт:

25/69 = [25/69 + 1/2] - [25/69 + 1/2] + 25/69 = 0 - 0 + 25/69 = 1/(69/25) = 1/(2 + 19/25) = 1/[2 + 19/25] + 25/69 - 1/[2 + 19/25] = 1/2 + (25/69 - 1/2) = 1/2 + (50 - 69)/138 = 1/2 - 19/138 = 1/2 + 1/(- 138/19) = 1/2 + 1/(- 7 - 5/19) = 1/2 + 1/[- 7 - 5/19] - 19/138 - 1/[- 7 - 5/19] = 1/2 - 1/8 + (- 19/138 + 1/8) = 1/2 - 1/8 + (- 76 + 69)/552 = 1/2 - 1/8 + (- 7)/552 = 1/2 - 1/8 + (- 7)/552 = 1/2 - 1/8 + 1/(- 552/7)

= 1/2 - 1/8 + 1/(- 78 - 6/7) = 1/2 - 1/8 + 1/[- 78 - 6/7] - 7/552 - 1/[- 78 - 6/7] = 1/2 - 1/8 - 1/79 + (- 7/552 + 1/79) = 1/2 - 1/8 - 1/79 - 1/43608.

Вторая в первой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

25/69 = [25/69 + 1/2] - [25/69 + 1/2] + 25/69 = 0 - 0 + 25/69 = 1/(69/25) = 1/(2 + 19/25) = 1/[2 + 19/25] + 25/69 - 1/[2 + 19/25] = 1/2 + (25/69 - 1/2) = 1/2 + (50 - 69)/138 = 1/2 - 19/138 = 1/2 - 1/(138/19) = 1/2 - 1/(7 + 5/19) = 1/2 - 1/[7 + 5/19] - 19/138 + 1/[7 + 5/19] = 1/2 - 1/7 + (- 19/138 + 1/7) = 1/2 - 1/7 + (- 133 + 138)/966 = 1/2 - 1/7 + 5/966 = 1/2 - 1/7 + 1/(966/5) = 1/2 - 1/7 + 1/(193 + 1/5)

= 1/2 - 1/7 + 1/[193 + 1/5] + 5/966 - 1/[193 + 1/5] = 1/2 - 1/7 + 1/193 + (5/966 - 1/193) = 1/2 - 1/7 + 1/193 - 1/186438.

Первая во второй паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков даёт:

25/69 = [25/69 + 1/2] - [25/69 + 1/2] + 25/69 = 0 - 0 + 25/69 = 1/(69/25) = 1/(2 + 19/25) = 1/]2 + 19/25[+ 25/69 - 1/]2 + 19/25[= 1/3 + (25/69 - 1/3) = 1/3 + (25 - 23)/69 =

1/3 + 2/69 = 1/3 + 1/34.5 = 1/3 + 1/]34.5[+ 2/69 - 1/]34.5[= 1/3 + 1/35 + (2/69 - 1/35) = 1/3 + 1/35 + 1/2415.

Вторая во второй паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

25/69 = [25/69 + 1/2] - [25/69 + 1/2] + 25/69 = 0 - 0 + 25/69 = 1/(69/25) = 1/(2 + 19/25) = 1/]2 + 19/25[+ 25/69 - 1/]2 + 19/25[= 1/3 + (25/69 - 1/3) = 1/3 + (25 - 23)/69 = 1/3 + 2/69 = 1/3 + 1/34.5 = 1/3 + 1/]34.5[+ 2/69 - 1/]34.5[= 1/3 + 1/35 + (2/69 - 1/35) = 1/3 + 1/35 + 1/2415.

Теперь испытаем простую задачу, состоящую из разности первой дроби 1/3 и отношения единицы к превышающему квадрат знаменателя первой дроби полуцелому числу, то есть имеющему дробную часть, равную 1/2, или, равносильно, отношения двух к превышающему удвоенный квадрат знаменателя первой дроби нечётному числу:

$$a = 1/3 - 1/34.5 = 1/3 - 2/69 = (23 - 2)/69 = 21/69 = 7/23.$$

Первая в первой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков даёт:

$$7/23 = [7/23 + 1/2] - [7/23 + 1/2] + 7/23 = 0 - 0 + 7/23 = 1/(23/7) =$$

$$1/(3 + 2/7) = 1/[3 + 2/7] + 7/23 - 1/[3 + 2/7] = 1/3 + (7/23 - 1/3) =$$

$$1/3 + (21 - 23)/69 = 1/3 - 2/69 = 1/3 + 1/(-34.5) = 1/3 + 1/[-34.5] - 2/69 - 1/[-34.5] = 1/3 - 1/35 + (- 2/69 + 1/35) = 1/3 - 1/35 - 1/2415.$$

Вторая в первой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$7/23 = [7/23 + 1/2] - [7/23 + 1/2] + 7/23 = 0 - 0 + 7/23 = 1/(23/7) = 1/(3 + 2/7) = 1/[3 + 2/7] + 7/23 - 1/[3 + 2/7] = 1/3 + (7/23 - 1/3) = 1/3 + (21 - 23)/69 = 1/3 - 2/69 = 1/3 - 1/34.5 = 1/3 - 1/[34.5] - 2/69 +$$

1/[34.5] = 1/3 - 1/34 + (- 2/69 + 1/34) = 1/3 - 1/34 + 1/2346.

Первая во второй паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков даёт:

7/23 = [7/23 + 1/2] - [7/23 + 1/2] + 7/23 = 0 - 0 + 7/23 = 1/(23/7) = 1/(3 + 2/7) = 1/]3 + 2/7[+ 7/23 - 1/]3 + 2/7[= 1/4 + (7/23 - 1/4) = 1/4 + (28 - 23)/92 = 1/4 + 5/92 = 1/4 + 1/(92/5) = 1/4 + 1/(18 + 2/5) = 1/4 + 1/]18 + 2/5[+ 5/92 - 1/]18 + 2/5[= 1/4 + 1/19 + (5/92 - 1/19) = 1/4 + 1/19 + 3/1748 = 1/4 + 1/19 + 1/(1748/3) = 1/4 + 1/19 + 1/(582 + 2/3) = 1/4 + 1/19 + 1/]582 + 2/3[+ 3/1748 - 1/]582 +

2/3[= 1/4 + 1/19 + 1/583 + (3/1748 - 1/583) = 1/4 + 1/19 + 1/583 + 1/1019084.

Вторая во второй паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

7/23 = [7/23 + 1/2] - [7/23 + 1/2] + 7/23 = 0 - 0 + 7/23 = 1/(23/7) = 1/(3 + 2/7) = 1/]3 + 2/7[+ 7/23 - 1/]3 + 2/7[= 1/4 + (7/23 - 1/4) = 1/4 + (28 - 23)/92 = 1/4 + 5/92 = 1/4 + 1/(92/5) = 1/4 + 1/(18 + 2/5) = 1/4 + 1/]18 + 2/5[+ 5/92 - 1/]18 + 2/5[= 1/4 + 1/19 + (5/92 - 1/19) = 1/4 + 1/19 + 3/1748 = 1/4 + 1/19 + 1/(1748/3) = 1/4 + 1/19 + 1/(582 + 2/3) = 1/4 + 1/19 + 1/]582 + 2/3[+ 3/1748 - 1/]582 +

2/3[= 1/4 + 1/19 + 1/583 + (3/1748 - 1/583) = 1/4 + 1/19 + 1/583 + 1/1019084.

Теперь испытаем для первых двух пар общих методологий пару задач, различающую общие методологии третьей и четвёртой пар, противоположную предыдущей паре задач в смысле разложения пары чисел, попарно противоположных паре чисел в предыдущей паре задач. Это достигается заменой первой дроби 1/3 на противоположную дробь -1/3.

Вначале испытаем простую задачу, состоящую из разности первой дроби -1/3 и отношения единицы к превышающему квадрат знаменателя первой дроби полуцелому числу, то есть имеющему дробную часть, равную 1/2, или,

равносильно, отношения двух к превышающему удвоенный квадрат знаменателя первой др<u>о</u>би <u>нечётному</u> числу:

a = - 1/3 - 1/34.5 = - 1/3 - 2/69 = - (23 + 2)/69 = - 25/69.

<u>Первая</u> в <u>первой паре</u> общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением <u>целых частей</u> из обращений последовательных остатков даёт:

- 25/69 = [- 25/69 + 1/2] - [- 25/69 + 1/2] - 25/69 = 0 - 0 - 25/69 = 1/(- 69/25) = 1/(- 2 - 19/25) = 1/[- 2 - 19/25] - 25/69 - 1/[- 2 - 19/25] = 1/(- 3) + (- 25/69 - 1/(- 3)) = - 1/3 + (- 25/69 + 1/3) = - 1/3 + (- 25 + 23)/69 = - 1/3 + (- 2)/69 = - 1/3 + 1/(- 69/2) = - 1/3 + 1/(- 34 - 1/2)

= - 1/3 + 1/[- 34 - 1/2] - 2/69 - 1/[- 34 - 1/2] = - 1/3 - 1/35 + (- 2/69 + 1/35) = - 1/3 - 1/35 + (- 70 + 69)/2415 = - 1/3 - 1/35 - 1/2415.

Вторая в первой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

- 25/69 = [- 25/69 + 1/2] - [- 25/69 + 1/2] - 25/69 = 0 - 0 - 25/69 = - 1/(69/25) = - 1/(2 + 19/25) = - 1/[2 + 19/25] - 25/69 + 1/[2 + 19/25] = - 1/2 + (- 25/69 + 1/2) = - 1/2 + (- 50 + 69)/138 = - 1/2 + 19/138 = - 1/2 + 1/(138/19) = - 1/2 + 1/(7 + 5/19) = - 1/2 + 1/[7 + 5/19] + 19/138 - 1/[7 + 5/19] = - 1/2 + 1/7 + (19/138 - 1/7) = - 1/2 + 1/7 + (133 - 138)/966 = - 1/2 + 1/7 - 5/966 = - 1/2 + 1/7 - 1/(966/5) = - 1/2 + 1/7 - 1/(193 + 1/5) = - 1/2 + 1/7 - 1/[193 + 1/5] - 5/966 + 1/[193 +

1/5] = - 1/2 + 1/7 - 1/193 + (- 5/966 + 1/193) = - 1/2 + 1/7 - 1/193 + 1/186438.

Первая во второй паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков даёт:

- 25/69 = [- 25/69 + 1/2] - [- 25/69 + 1/2] - 25/69 = 0 - 0 - 25/69 = 1/(- 69/25) = 1/(- 2 - 19/25) = 1/]- 2 - 19/25[- 25/69 - 1/]- 2 - 19/25[= 1/(- 2) + (- 25/69 - 1/(- 2)) = - 1/2 + (- 25/69 + 1/2) = - 1/2 + (- 50 + 69)/138 = - 1/2 + 19/138 = - 1/2 + 1/(138/19) = - 1/2 + 1/(7 + 5/19) = - 1/2 + 1/]7 + 5/19[+ 19/138 - 1/]7 + 5/19[= - 1/2 + 1/8 + (19/138 - 1/8) = - 1/2 + 1/8 + (76 - 69)/552 = - 1/2 + 1/8 + 7/552 = - 1/2 + 1/8 + 1/(552/7) = - 1/2 + 1/8 + 1/(78 + 6/7) = - 1/2 + 1/8 +

1/]78 + 6/7[+ 7/552 - 1/]78 + 6/7[= - 1/2 + 1/8 + 1/79 + (7/552 - 1/79) = - 1/2 + 1/8 + 1/79 + (7/552 - 1/79) = - 1/2 + 1/8 + 1/79 + 1/43608.

Вторая во второй паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

- 25/69 = [- 25/69 + 1/2] - [- 25/69 + 1/2] - 25/69 = 0 - 0 - 25/69 = - 1/(69/25) = - 1/(2 + 19/25) = - 1/]2 + 19/25[- 25/69 + 1/]2 + 19/25[= - 1/3 + (- 25/69 + 1/3) = - 1/3 + (- 25 + 23)/69 = - 1/3 - 2/69 = - 1/3 - 1/34.5 = - 1/3 - 1/]34.5[-

2/69 + 1/]34.5[= - 1/3 - 1/35 + (- 2/69 + 1/35) = - 1/3 - 1/35 - 1/2415.

Теперь испытаем простую задачу, состоящую из суммы первой дроби -1/3 и отношения единицы к превышающему квадрат знаменателя первой дроби полуцелому числу, то есть имеющему дробную часть, равную 1/2, или, равносильно, отношения двух к превышающему удвоенный квадрат знаменателя первой дроби нечётному числу:

a = - 1/3 + 1/34.5 = - 1/3 + 2/69 = (- 23 + 2)/69 = - 21/69 = - 7/23.

Первая в первой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков даёт:

- 7/23 = [- 7/23 + 1/2] - [- 7/23 + 1/2] - 7/23 = 0 - 0 - 7/23 = 1/(- 23/7) = 1/(- 3 - 2/7) = 1/[- 3 - 2/7] - 7/23 - 1/[- 3 - 2/7] = 1/(- 4) + (- 7/23 - 1/(- 4)) = - 1/4 + (- 7/23 + 1/4) = - 1/4 + (- 28 + 23)/92 = - 1/4 + (- 5)/92 = - 1/4 + 1/(- 92/5) = - 1/4 + 1/(- 18 - 2/5) = - 1/4 + 1/[- 18 - 2/5] - 5/92 - 1/[- 18 - 2/5] = - 1/4 - 1/19 + (- 5/92 + 1/19) = - 1/4 - 1/19 + (- 3)/1748 = - 1/4 - 1/19 + 1/(- 1748/3) = - 1/4 - 1/19 + 1/(- 582 - 2/3) = - 1/4 - 1/19 + 1/[- 582 - 2/3] - 3/1748 - 1/[- 582 - 2/3] = - 1/4

- 1/19 - 1/583 + (- 3/1748 + 1/583) = - 1/4 - 1/19 - 1/583 - 1/1019084.

Вторая в первой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

- 7/23 = [- 7/23 + 1/2] - [- 7/23 + 1/2] - 7/23 = 0 - 0 - 7/23 = - 1/(23/7) = - 1/(3 + 2/7) = - 1/[3 + 2/7] - 7/23 + 1/[3 + 2/7] = - 1/3 + (- 7/23 + 1/3) = - 1/3 + (- 21 + 23)/69 = - 1/3 + 2/69 = - 1/3 + 1/34.5 = - 1/3 + 1/[34.5] + 2/69 - 1/[34.5] = - 1/3 + 1/34 + (2/69 - 1/34) = - 1/3 + 1/34 - 1/2346.

Первая во второй паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков даёт:

$$- 7/23 = [- 7/23 + 1/2] - [- 7/23 + 1/2] - 7/23 = 0 - 0 - 7/23 = 1/(- 23/7) = 1/(- 3 - 2/7) = 1/]- 3 - 2/7[- 7/23 - 1/]- 3 - 2/7[= 1/(- 3) + (- 7/23 - 1/(- 3)) = - 1/3 + (- 7/23 + 1/3) = - 1/3 + (- 21 + 23)/69 = - 1/3 + 2/69 = - 1/3 + 1/34.5 = - 1/3 + 1/[34.5] + 2/69 - 1/[34.5] = - 1/3 + 1/34 + (2/69 - 1/34) = - 1/3 + 1/34 - 1/2346.$$

Вторая во второй паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

- 7/23 = [- 7/23 + 1/2] - [- 7/23 + 1/2] - 7/23 = 0 - 0 - 7/23 = - 1/(23/7) = - 1/(3 + 2/7) = - 1/]3 + 2/7[- 7/23 + 1/]3 + 2/7[= - 1/4 + (- 7/23 + 1/4) = - 1/4 + (- 28 + 23)/92 = - 1/4 - 5/92 = - 1/4 - 1/(92/5) = - 1/4 - 1/(18 + 2/5) = - 1/4 - 1/]18 + 2/5[- 5/92 + 1/]18 + 2/5[= - 1/4 - 1/19 + (- 5/92 + 1/19) = - 1/4 - 1/19 - 3/1748 = - 1/4 - 1/19 - 1/(1748/3) = - 1/4 - 1/19 - 1/(582 + 2/3) = - 1/4 - 1/19 - 1/]582 + 2/3[- 3/1748 + 1/]582 + 2/3[= - 1/4 - 1/19 - 1/583 + (- 3/1748 + 1/583) = - 1/4 - 1/19 - 1/583 - 1/1019084.

Теперь испытаем ещё более простую задачу, состоящую из единственного отношения единицы к превышающему единицу полуцелому числу, то есть имеющему дробную часть, равную 1/2, или, равносильно, из единственного отношения двух к превышающему 2 нечётному числу:

$$a = 1/2.5 = 2/5.$$

Первая в первой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков даёт:

$$2/5 = [2/5 + 1/2] - [2/5 + 1/2] + 2/5 = 0 - 0 + 2/5 = 1/(5/2) = 1/(2 + 1/2) = 1/[2 + 1/2] + 2/5 - 1/[2 + 1/2] = 1/2 + (2/5 - 1/2) = 1/2 + (4 - 5)/10 = 1/2 - 1/10.$$

Вторая в первой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$2/5 = [2/5 + 1/2] - [2/5 + 1/2] + 2/5 = 0 - 0 + 2/5 = 1/(5/2) = 1/(2 + 1/2) = 1/[2 + 1/2] + 2/5 - 1/[2 + 1/2] = 1/2 + (2/5 - 1/2) = 1/2 + (4 - 5)/10 = 1/2 - 1/10.$$

Первая во второй паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением

потолков из обращений последовательных остатков даёт:

$$2/5 = [2/5 + 1/2] - [2/5 + 1/2] + 2/5 = 0 - 0 + 2/5 = 1/(5/2) = 1/(2 + 1/2) = 1/]2 + 1/2[+ 2/5 - 1/]2 + 1/2[= 1/3 + (2/5 - 1/3) = 1/3 + (6 - 5)/15 = 1/3 + 1/15.$$

Вторая во второй паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$2/5 = [2/5 + 1/2] - [2/5 + 1/2] + 2/5 = 0 - 0 + 2/5 = 1/(5/2) = 1/(2 + 1/2) = 1/]2 + 1/2[+ 2/5 - 1/]2 + 1/2[= 1/3 + (2/5 - 1/3) = 1/3 + (6 - 5)/15 = 1/3 + 1/15.$$

Теперь испытаем простую задачу, противоположную предыдущей задаче, или полученную умножением разлагаемого действительного числа a в предыдущей задаче на отрицательную единицу, то есть задачу, состоящую из единственного отношения единицы к превышающему по абсолютной величине единицу непременно отрицательному полуцелому числу, то есть имеющему дробную часть, равную 1/2, или, равносильно, из единственного отношения двух к непременно отрицательному нечётному числу, не большему -3:

$$a = - 1/2.5 = - 2/5.$$

Первая в первой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных

чисел выделением <u>целых частей</u> из обращений последовательных остатков даёт:

- 2/5 = [- 2/5 + 1/2] - [- 2/5 + 1/2] - 2/5 = 0 - 0 - 2/5 = 1/(- 5/2) = 1/(- 2 - 1/2) = 1/[- 2 - 1/2] - 2/5 - 1/[- 2 - 1/2] = - 1/3 + (- 2/5 + 1/3) = - 1/3 + (- 6 + 5)/15 = - 1/3 - 1/15.

<u>Вторая</u> в <u>первой паре</u> общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением <u>целых частей</u> из обращений <u>абсолютных величин</u> последовательных остатков даёт:

- 2/5 = [- 2/5 + 1/2] - [- 2/5 + 1/2] - 2/5 = 0 - 0 - 2/5 = 1/(- 5/2) = - 1/(2 + 1/2) = - 1/[2 + 1/2] - 2/5 + 1/[2 + 1/2] = - 1/2 + (- 2/5 + 1/2) = = - 1/2 + (- 4 + 5)/10 = - 1/2 + 1/10.

Первая во второй паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков даёт:

$$- 2/5 = [- 2/5 + 1/2] - [- 2/5 + 1/2] - 2/5 = 0 - 0 - 2/5 = 1/(- 5/2) = 1/(- 2 - 1/2) = 1/]- 2 - 1/2[- 2/5 - 1/]- 2 - 1/2[= - 1/2 + (- 2/5 + 1/2) = = - 1/2 + (- 4 + 5)/10 = - 1/2 + 1/10.$$

Вторая во второй паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

- 2/5 = [- 2/5 + 1/2] - [- 2/5 + 1/2] - 2/5 = 0 - 0 - 2/5 = - 1/(5/2) = - 1/]2 + 1/2[- 2/5 + 1/]2 + 1/2[= - 1/3 + (- 2/5 + 1/3) = - 1/3 + (- 6 + 5)/15 = - 1/3 - 1/15.

Третья пара общих методологий предусматривает последовательное выделение целых чисел, именно ближайших к действительному делителю соответствующей единицы, целыми частями обращённых и затем предварительно увеличенных на 1/2 последовательных остатков в знаменателях.

Первой в третьей паре общих методологий является использующая именно первую указанную всеобщую возможность непременно положительных единиц, не учитывающих специфику знакопеременности соответствующего ряда, общая методология знакопеременных гармонических разложения и

приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков. Перед каждым взятием целой части предварительно увеличенного на 1/2 делителя единицы требуется добиться непременной положительности этой единицы, причём делитель такой единицы имеет знак остатка, то есть может быть или положительным, или отрицательным действительным числом, а целая часть берётся от этого делителя, предварительно увеличенного на 1/2, именно при условии совпадения знака этого делителя со знаком остатка:

$$0.69 = 69/100 = [69/100 + 1/2] - [69/100 + 1/2] + 69/100 = 1 - 1 + 69/100 = 1 + (- 1 + 69/100) = 1 + (-31)/100 = 1 + 1/(100/(-31)) = 1 + 1/(-(3 + 7/31)) = 1 + 1/[-(3 + 7/31) + 1/2] - 1/[-(3 + 7/31) + 1/2] - 31/100 = 1 + 1/(-3) - 1/(-3) - 31/100 = 1 - 1/3 + (1/3 - 31/100) = 1 - 1/3 + (100 - 93)/300 = 1 - 1/3 + 1/(300/7) = 1 - 1/3 + 1/(42 + 6/7) = 1 - 1/3 + 1/[42 + 6/7 + 1/2] - 1/[42 + 6/7 + 1/2] + 7/300 = 1 - 1/3 + 1/43 - 1/43 + 7/300 = 1 - 1/3 + 1/43 + (- 1/43 + 7/300) = 1 - 1/3 + 1/43 + (- 300 + 301)/12900 = 1 - 1/3 + 1/43 + 1/12900.$$

Второй в третьей паре общих методологий является использующая именно вторую указанную всеобщую возможность единиц со знаками остатков с учётом специфики знакопеременности соответствующего ряда общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков. Перед каждым взятием целой части предварительно увеличенного на 1/2 делителя единицы требуется непременно придать этой единице знак остатка, соответствующего частичной сумме ряда, и тем самым добиться именно положительного знака делителя такой единицы, причём целая часть берётся от этого делителя, предварительно увеличенного на 1/2, именно при условии положительности такого делителя:

$$0.69 = 69/100 = [69/100 + 1/2] - [69/100 + 1/2] + 69/100 = 1 - 1 + 69/100 = 1 + (- 1 + 69/100) = 1 + (-31)/100 = 1 + 1/(100/(-31)) = 1 + 1/(-(3 + 7/31)) = 1 + 1/[-(3 + 7/31) + 1/2] - 1/[-(3 + 7/31) + 1/2] - 31/100 = 1 + 1/(-3) - 1/(-3) - 31/100 = 1 - 1/3 + (1/3 - 31/100) = 1 - 1/3 + (100 - 93)/300 = 1 - 1/3 + 1/(300/7) = 1 - 1/3 + 1/(42 + 6/7) = 1 - 1/3 + 1/[42 + 6/7 + 1/2] - 1/[42 + 6/7 + 1/2] + 7/300 = 1 - 1/3 + 1/43 - 1/43 + 7/300 = 1 - 1/3 + 1/43 + (- 1/43 + 7/300) = 1 - 1/3 + 1/43 + (- 300 + 301)/12900 = 1 - 1/3 + 1/43 + 1/12900.$$

Четвёртая пара общих методологий предусматривает последовательное выделение целых чисел, именно ближайших к действительному делителю соответствующей единицы, потолками обращённых и затем

предварительно уменьшенных на 1/2 последовательных остатков в знаменателях.

Первой в четвёртой паре общих методологий является использующая именно первую указанную всеобщую возможность непременно положительных единиц, не учитывающих специфику знакопеременности соответствующего ряда, общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков. Перед каждым взятием

потолка предварительно уменьшенного на 1/2 делителя единицы требуется добиться непременной положительности этой единицы, причём делитель такой единицы имеет знак остатка, то есть может быть или положительным, или отрицательным действительным числом, а потолок берётся от этого делителя, предварительно уменьшенного на 1/2, именно при условии совпадения знака этого делителя со знаком остатка:

$$0.69 = 69/100 = [69/100 + 1/2] - [69/100 + 1/2] + 69/100 = 1 - 1 + 69/100 = 1 + (- 1 + 69/100) = 1 + (-31)/100 = 1 + 1/(100/(-31)) = 1 + 1/(-(3 + 7/31)) = 1 + 1/]-(3 + 7/31) - 1/2[- 1/]-(3 + 7/31) - 1/2[-$$

$$31/100 = 1 + 1/(-3) - 1/(-3) - 31/100 = 1 - 1/3 + (1/3 - 31/100) = 1 - 1/3 + (100 - 93)/300 = 1 - 1/3 + 1/(300/7) = 1 - 1/3 + 1/(42 + 6/7) = 1 - 1/3 + 1/]42 + 6/7 - 1/2[- 1/]42 + 6/7 - 1/2[+ 7/300 = 1 - 1/3 + 1/43 - 1/43 + 7/300 = 1 - 1/3 + 1/43 + (- 1/43 + 7/300) = 1 - 1/3 + 1/43 + (- 300 + 301)/12900 = 1 - 1/3 + 1/43 + 1/12900.$$

Второй в четвёртой паре общих методологий является использующая именно вторую указанную всеобщую возможность единиц со знаками остатков с учётом специфики знакопеременности соответствующего ряда общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков. Перед каждым взятием потолка предварительно уменьшенного на 1/2 делителя единицы требуется непременно придать этой единице знак остатка, соответствующего частичной сумме ряда, и тем самым добиться именно положительного знака делителя такой единицы, причём потолок берётся от этого делителя, предварительно уменьшенного на 1/2, именно при условии положительности такого делителя:

$$0.69 = 69/100 = [69/100 + 1/2] - [69/100 + 1/2] + 69/100 = 1 - 1 + 69/100 = 1 + (- 1 + 69/100) = 1 + (-31)/100 = 1 + 1/(100/(-31)) = 1 + 1/(-(3 + 7/31)) = 1 + 1/]-(3 + 7/31) - 1/2[- 1/]-(3 + 7/31) - 1/2[- 31/100 = 1 + 1/(-3) - 1/(-3) - 31/100 = 1 - 1/3 + (1/3 - 31/100) = 1 -$$

$$1/3 + (100 - 93)/300 = 1 - 1/3 + 1/(300/7) = 1 - 1/3 + 1/(42 + 6/7) = 1 - 1/3 + 1/]42 + 6/7 - 1/2[- 1/]42 + 6/7 - 1/2[+ 7/300 = 1 - 1/3 + 1/43 - 1/43 + 7/300 = 1 - 1/3 + 1/43 + (- 1/43 + 7/300) = 1 - 1/3 + 1/43 + (- 300 + 301)/12900 = 1 - 1/3 + 1/43 + 1/12900.$$

Следствие. Задача разложения числа 0.69 соответствующими алгебраическими суммами единичных, или аликвотных, дробей не является итогово (результативно) различающей общие методологии в третьей паре и в четвёртой паре между собой. Поэтому данная задача вообще ничего не даёт для различающей системы задач для всех этих четырёх общих методологий. Так что здесь ещё более действенны соображения, вновь приводимые ниже.

Разумеется, вполне достаточно просто указать задачу, которая дополняет предыдущую задачу до системы задач, различающей подсистему всех этих четырёх общих методологий. Однако несравненно полезнее и поучительнее методология построения такой дополнительной задачи. Во-первых, целая часть разлагаемого действительного числа не вносит различий при пока что принятом единообразии приближения нулевого порядка целой частью увеличенного на 1/2 разлагаемого числа, так что можно ограничиться дробной частью в пределах от нуля включительно до единицы исключительно. Во-вторых, для простоты целесообразно попытаться ограничиться конечными разложениями, то есть рациональными числами, которые

представимы алгебраическими суммами единичных, или аликвотных, дробей. В-третьих, с целью различения общих методологий целесообразно наличие различных знаков таких дробей. В-четвёртых, если, как всегда, упорядочивать такие дроби в порядке возрастания абсолютных величин знаменателей, то для простоты для первой дроби, для определённости положительной, целесообразно испытать наименьший возможный знаменатель, но всё-таки больше 2, поскольку дробь 1/2 равноудалена от нуля и единицы, тогда как полезна определённость направления близости к ближайшему целому числу, то есть в качестве первой положительной дроби испытываем 1/3. Для выхода на предначертанные знаменатели единичных дробей при

взятиях целых частей и потолков следует обеспечить минимально достаточный рост знаменателей. Поскольку в рассмотренном ранее общем методе гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях знаменатель каждой следующей др<u>о</u>би не мог быть меньше, чем знаменатель предыдущей др<u>о</u>би, умноженный на себя за вычетом единицы, то испытаем именно <u>знакочередующуюся</u> алгебраическую сумму с превышением последовательного возведения знаменателей единичных, или аликвотных, дробей в квадрат. Кроме того, с учётом специфики этих общих методологий заменяем последнюю единичную дробь

отношением единицы к превышающему по абсолютной величине квадрат знаменателя первой дроби положительному или отрицательному непременно полуцелому числу, то есть имеющему дробную часть, равную 1/2, или, равносильно, отношением двух к превышающему по абсолютной величине удвоенный квадрат знаменателя первой дроби положительному или отрицательному непременно нечётному числу.

Вначале испытаем простую задачу, состоящую из суммы первой дроби 1/3 и отношения единицы к превышающему квадрат знаменателя первой дроби полуцелому числу, то есть имеющему дробную часть, равную 1/2, или, равносильно, отношения

двух к превышающему удвоенный квадрат знаменателя первой дроби нечётному числу:

$$a = 1/3 + 1/34.5 = 1/3 + 2/69 = (23 + 2)/69 = 25/69.$$

Первая в третьей паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт:

$$25/69 = [25/69 + 1/2] - [25/69 + 1/2] + 25/69 = 0 - 0 + 25/69 = 1/(69/25) = 1/(2 + 19/25) = 1/[2 + 19/25 + 1/2] + 25/69 - 1/[2 + 19/25 + 1/2] = 1/3 + (25/69 - 1/3) = 1/3 + (25 - 23)/69 = 1/3 + 2/69$$

$$= 1/3 + 1/34.5 = 1/3 + 1/[34.5 + 1/2] + 2/69 - 1/[34.5 + 1/2] = 1/3 + 1/35 + (2/69 - 1/35) = 1/3 + 1/35 + 1/2415.$$

Вторая в третьей паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$25/69 = [25/69 + 1/2] - [25/69 + 1/2] + 25/69 = 0 - 0 + 25/69 = 1/(69/25) = 1/(2 + 19/25) = 1/[2 + 19/25 + 1/2] + 25/69 - 1/[2 + 19/25 + 1/2] = 1/3 + (25/69 - 1/3) = 1/3 + (25 - 23)/69 = 1/3 + 2/69$$

= 1/3 + 1/34.5 = 1/3 + 1/[34.5 + 1/2] + 2/69 - 1/[34.5 + 1/2] = 1/3 + 1/35 + (2/69 - 1/35) = 1/3 + 1/35 + 1/2415.

Первая в четвёртой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт:

25/69 = [25/69 + 1/2] - [25/69 + 1/2] + 25/69 = 0 - 0 + 25/69 = 1/(69/25) = 1/(2 + 19/25) = 1/]2 + 19/25 - 1/2[+ 25/69 - 1/]2 + 19/25 - 1/2[= 1/3 + (25/69 - 1/3) = 1/3 + (25 - 23)/69 = 1/3 + 2/69 = 1/3 + 1/34.5 = 1/3 + 1/]34.5 - 1/2[+ 2/69 - 1/]34.5 - 1/2[= 1/3 + 1/34 + (2/69 - 1/34) = 1/3 + 1/34 - 1/2346.

Вторая в четвёртой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

25/69 = [25/69 + 1/2] - [25/69 + 1/2] + 25/69 = 0 - 0 + 25/69 = 1/(69/25) = 1/(2 + 19/25) = 1/]2 + 19/25 - 1/2[+ 25/69 - 1/]2 + 19/25 - 1/2[= 1/3 + (25/69 - 1/3) = 1/3 + (25 - 23)/69 = 1/3 + 2/69 = 1/3 + 1/34.5 = 1/3 + 1/]34.5 - 1/2[+ 2/69 - 1/]34.5 - 1/2[= 1/3 + 1/34 + (2/69 - 1/34)= 1/3 + 1/34 - 1/2346.

Теперь испытаем простую задачу, состоящую из разности первой дроби 1/3 и отношения единицы к превышающему квадрат знаменателя первой дроби полуцелому числу, то есть имеющему дробную часть, равную 1/2, или, равносильно, отношения двух к превышающему удвоенный квадрат знаменателя первой дроби нечётному числу:

$$a = 1/3 - 1/34.5 = 1/3 - 2/69 = (23 - 2)/69 = 21/69 = 7/23.$$

Первая в третьей паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт:

$$7/23 = [7/23 + 1/2] - [7/23 + 1/2] + 7/23 = 0 - 0 + 7/23 = 1/(23/7) = 1/(3 + 2/7) = 1/[3 + 2/7 + 1/2] + 7/23 - 1/[3 + 2/7 + 1/2] = 1/3 + (7/23 - 1/3) = 1/3 + (21 - 23)/69 = 1/3 - 2/69 = 1/3 + 1/(-34.5) = 1/3 + 1/[-34.5 + 1/2] - 2/69 - 1/[-34.5 + 1/2] = 1/3 - 1/34 + (- 2/69 + 1/34) = 1/3 - 1/34 + 1/2346.$$

Вторая в третьей паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$7/23 = [7/23 + 1/2] - [7/23 + 1/2] + 7/23 = 0 - 0 + 7/23 = 1/(23/7) = 1/(3 + 2/7) = 1/[3 + 2/7 + 1/2] + 7/23 - 1/[3 + 2/7 + 1/2] = 1/3 + (7/23 - 1/3) = 1/3 + (21 - 23)/69 = 1/3 - 2/69 = 1/3 - 1/34.5 = 1/3 - 1/[34.5 + 1/2] - 2/69 + 1/[34.5 + 1/2] = 1/3 - 1/35 + (- 2/69 + 1/35) = 1/3 - 1/35 - 1/2415.$$

Первая в четвёртой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт:

7/23 = [7/23 + 1/2] - [7/23 + 1/2] + 7/23 = 0 - 0 + 7/23 = 1/(23/7) = 1/(3 + 2/7) = 1/]3 + 2/7 - 1/2[+ 7/23 - 1/]3 + 2/7 - 1/2[= 1/3 + (7/23 - 1/3) = 1/3 + (21 - 23)/69 = 1/3 - 2/69 = 1/3 + 1/(-34.5) = 1/3 + 1/]-34.5 - 1/2[- 2/69 - 1/]-34.5 - 1/2[= 1/3 - 1/35 + (- 2/69 + 1/35) = 1/3 - 1/35 - 1/2415.

Вторая в четвёртой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$7/23 = [7/23 + 1/2] - [7/23 + 1/2] + 7/23 = 0 - 0 + 7/23 = 1/(23/7) = 1/(3 + 2/7) = 1/]3 + 2/7 - 1/2[+ 7/23 - 1/]3 + 2/7 - 1/2[= 1/3 + (7/23 - 1/3) = 1/3 + (21 - 23)/69 = 1/3 - 2/69 = 1/3 - 1/34.5 = 1/3 - 1/]34.5 - 1/2[- 2/69 + 1/]34.5 - 1/2[= 1/3 - 1/34 + (- 2/69 + 1/34) = 1/3 - 1/34 + 1/2346.$$

Теперь испытаем пару задач, противоположную паре предыдущих двух задач в смысле разложения пары чисел, попарно противоположных паре чисел в паре предыдущих двух задач. Это достигается заменой первой дроби 1/3 на противоположную дробь -1/3.

Вначале испытаем простую задачу, состоящую из разности первой дроби -1/3 и отношения единицы к превышающему квадрат знаменателя первой дроби полуцелому числу, то есть имеющему дробную часть, равную 1/2, или, равносильно, отношения двух к превышающему удвоенный квадрат знаменателя первой дроби нечётному числу:

$$a = - 1/3 - 1/34.5 = - 1/3 - 2/69 = - (23 + 2)/69 = - 25/69.$$

Первая в третьей паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт:

$$- 25/69 = [- 25/69 + 1/2] - [- 25/69 + 1/2] - 25/69 = 0 - 0 - 25/69 = 1/(- 69/25) = 1/(- 2 - 19/25) = 1/[- 2 - 19/25 + 1/2] - 25/69 - 1/[- 2 - 19/25 + 1/2] = 1/(- 3) + (- 25/69 - 1/(- 3)) = - 1/3 + (- 25/69 + 1/3) = - 1/3 + (- 25 + 23)/69 = - 1/3 - 2/69 = - 1/3 + 1/(- 34.5) = - 1/3 + 1/[- 34.5 + 1/2] - 2/69 - 1/[- 34.5 + 1/2] = - 1/3 - 1/34 + (- 2/69 + 1/34) = - 1/3 - 1/34 + 1/2346.$$

Вторая в третьей паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$- 25/69 = [- 25/69 + 1/2] - [- 25/69 + 1/2] - 25/69 = 0 - 0 - 25/69 = - 1/(69/25) = - 1/(2 + 19/25) = - 1/[2 + 19/25 + 1/2] - 25/69 + 1/[2 + 19/25 + 1/2] = - 1/3 + (- 25/69 + 1/3) = - 1/3 + (- 25 + 23)/69 = - 1/3 - 2/69 = - 1/3 - 1/34.5 = - 1/3 - 1/[34.5 + 1/2] - 2/69 + 1/[34.5 + 1/2] = - 1/3 - 1/35 + (- 2/69 + 1/35) = - 1/3 - 1/35 - 1/2415.$$

Первая в четвёртой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт:

- 25/69 = [- 25/69 + 1/2] - [- 25/69 + 1/2] - 25/69 = 0 - 0 - 25/69 = 1/(- 69/25) = 1/(- 2 - 19/25) = 1/]- 2 - 19/25 - 1/2[- 25/69 - 1/]- 2 - 19/25 - 1/2[= - 1/3 + (- 25/69 + 1/3) = - 1/3 + (- 25 + 23)/69 = - 1/3 + (- 2)/69 = - 1/3 + 1/(- 69/2) = - 1/3 + 1/(- 34.5) = - 1/3 + 1/]- 34.5 - 1/2[- 2/69 - 1/]- 34.5 - 1/2[= - 1/3 - 1/35 + (- 2/69 + 1/35) = - 1/3 - 1/35 - 1/2415.

Вторая в четвёртой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$- 25/69 = [- 25/69 + 1/2] - [- 25/69 + 1/2] - 25/69 = 0 - 0 - 25/69 = - 1/(69/25) = - 1/(2 + 19/25) = - 1/]2 + 19/25 - 1/2[- 25/69 + 1/]2 + 19/25 - 1/2[= - 1/3 + (- 25/69 + 1/3) = - 1/3 + (- 25 + 23)/69 = - 1/3 - 2/69 = - 1/3 - 1/34.5 = - 1/3 - 1/]34.5 - 1/2[- 2/69 + 1/]34.5 - 1/2[= - 1/3 - 1/34 + (- 2/69 + 1/34) = - 1/3 - 1/34 + 1/2346.$$

Теперь испытаем простую задачу, состоящую из суммы первой дроби -1/3 и отношения единицы к превышающему квадрат знаменателя первой дроби полуцелому числу, то есть имеющему дробную часть, равную 1/2, или, равносильно, отношения двух к превышающему удвоенный квадрат знаменателя первой дроби нечётному числу:

$$a = - 1/3 + 1/34.5 = - 1/3 + 2/69 = (- 23 + 2)/69 = - 21/69 = - 7/23.$$

Первая в третьей паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт:

$$- 7/23 = [- 7/23 + 1/2] - [- 7/23 + 1/2] - 7/23 = 0 - 0 - 7/23 = 1/(- 23/7) = 1/(- 3 - 2/7) = 1/[- 3 - 2/7 + 1/2] - 7/23 - 1/[- 3 - 2/7 + 1/2] = - 1/3 + (- 7/23 + 1/3) = - 1/3 + (- 21 + 23)/69 = - 1/3 + 2/69 = - 1/3 + 1/34.5 = - 1/3 + 1/[34.5 + 1/2] + 2/69 - 1/[34.5 + 1/2] = - 1/3 + 1/35 + (2/69 - 1/35) = - 1/3 + 1/35 + 1/2415.$$

Вторая в третьей паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$- 7/23 = [- 7/23 + 1/2] - [- 7/23 + 1/2] - 7/23 = 0 - 0 - 7/23 = - 1/(23/7) = - 1/(3 + 2/7) = - 1/[3 + 2/7 + 1/2] - 7/23 + 1/[3 + 2/7 + 1/2] = - 1/3 + (- 7/23 + 1/3) = - 1/3 + (- 21 + 23)/69 = - 1/3 + 2/69 = - 1/3 + 1/34.5 = - 1/3 + 1/[34.5 + 1/2] + 2/69 - 1/[34.5 + 1/2] = - 1/3 + 1/35 + (2/69 - 1/35) = - 1/3 + 1/35 + 1/2415.$$

Первая в четвёртой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт:

- 7/23 = [- 7/23 + 1/2] - [- 7/23 + 1/2] - 7/23 = 0 - 0 - 7/23 = 1/(- 23/7) = 1/(- 3 - 2/7) = 1/]- 3 - 2/7 - 1/2[- 7/23 - 1/]- 3 - 2/7 - 1/2[= - 1/3 + (- 7/23 + 1/3) = - 1/3 + (- 21 + 23)/69 = - 1/3 + 2/69 = - 1/3 + 1/34.5 = - 1/3 + 1/]34.5 - 1/2[+ 2/69 - 1/]34.5 - 1/2[= - 1/3 + 1/34 + (2/69 - 1/34) = - 1/3 + 1/34 - 1/2346.

Вторая в четвёртой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$- 7/23 = [- 7/23 + 1/2] - [- 7/23 + 1/2] - 7/23 = 0 - 0 - 7/23 = - 1/(23/7) = - 1/(3 + 2/7) = - 1/]3 + 2/7 - 1/2[- 7/23 + 1/]3 + 2/7 - 1/2[= - 1/3 + (- 7/23 + 1/3) = - 1/3 + (- 21 + 23)/69 = - 1/3 + 2/69 = - 1/3 + 1/34.5 = - 1/3 + 1/]34.5 - 1/2[+ 2/69 - 1/]34.5 - 1/2[= - 1/3 + 1/34 + (2/69 - 1/34) = - 1/3 + 1/34 - 1/2346.$$

Теперь испытаем ещё более простую задачу, состоящую из единственного отношения единицы к превышающему единицу полуцелому числу, то есть имеющему дробную часть, равную 1/2, или, равносильно, из единственного отношения двух к превышающему 2 нечётному числу:

$$a = 1/2.5 = 2/5.$$

Первая в третьей паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт:

$$2/5 = [2/5 + 1/2] - [2/5 + 1/2] + 2/5 = 0 - 0 + 2/5 = 1/(5/2) = 1/(2 + 1/2) = 1/[2 + 1/2 + 1/2] + 2/5 - 1/[2 + 1/2 + 1/2] = 1/3 + (2/5 - 1/3) = 1/3 + (6 - 5)/15 = 1/3 + 1/15.$$

Вторая в третьей паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$2/5 = [2/5 + 1/2] - [2/5 + 1/2] + 2/5 = 0 - 0 + 2/5 = 1/(5/2) = 1/(2 + 1/2) = 1/[2 + 1/2 + 1/2] + 2/5 - 1/[2 + 1/2 + 1/2] = 1/3 + (2/5 - 1/3) = 1/3 + (6 - 5)/15 = 1/3 + 1/15.$$

Первая в четвёртой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт:

$$2/5 = [2/5 + 1/2] - [2/5 + 1/2] + 2/5 = 0 - 0 + 2/5 = 1/(5/2) = 1/(2 + 1/2) = 1/]2 + 1/2 - 1/2[+ 2/5 - 1/]2 + 1/2 - 1/2[= 1/2 + (2/5 - 1/2) = 1/2 + (4 - 5)/10 = 1/2 - 1/10.$$

Вторая в четвёртой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$2/5 = [2/5 + 1/2] - [2/5 + 1/2] + 2/5 = 0 - 0 + 2/5 = 1/(5/2) = 1/(2 + 1/2) = 1/]2 + 1/2 - 1/2[+ 2/5 - 1/]2 + 1/2 - 1/2[= 1/2 + (2/5 - 1/2) = 1/2 + (4 - 5)/10 = 1/2 - 1/10.$$

Теперь испытаем простую задачу, противоположную предыдущей задаче, или полученную умножением разлагаемого действительного числа а в предыдущей задаче на отрицательную единицу, то есть задачу, состоящую из единственного отношения единицы к превышающему по абсолютной величине единицу непременно отрицательному полуцелому числу, то есть имеющему дробную часть, равную 1/2, или, равносильно, из единственного отношения двух к превышающему по абсолютной величине 2 непременно отрицательному нечётному числу:

$$a = - 1/2.5 = - 2/5.$$

Первая в третьей паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт:

$$- 2/5 = [- 2/5 + 1/2] - [- 2/5 + 1/2] - 2/5 = 0 - 0 - 2/5 = 1/(- 5/2) = 1/(- 2 - 1/2) = 1/[- 2 - 1/2 + 1/2] - 2/5 - 1/[- 2 - 1/2 + 1/2] = - 1/2 + (- 2/5 + 1/2) = - 1/2 + (- 4 + 5)/10 = - 1/2 + 1/10.$$

Вторая в третьей паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$- 2/5 = [- 2/5 + 1/2] - [- 2/5 + 1/2] - 2/5 = 0 - 0 - 2/5 = 1/(- 5/2) = - 1/(2 + 1/2) = - 1/[2 + 1/2 + 1/2] - 2/5 + 1/[2 + 1/2 + 1/2] = - 1/3 + (- 2/5 + 1/3) = - 1/3 + (- 6 + 5)/15 = - 1/3 - 1/15.$$

Первая в четвёртой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт:

$$- 2/5 = [- 2/5 + 1/2] - [- 2/5 + 1/2] - 2/5 = 0 - 0 - 2/5 = 1/(- 5/2) = 1/(- 2 - 1/2) = 1/]- 2 - 1/2 - 1/2[- 2/5 - 1/]- 2 - 1/2 - 1/2[= - 1/3 + (- 2/5 + 1/3) = - 1/3 + (- 6 + 5)/15 = - 1/3 - 1/15.$$

Вторая в четвёртой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$- 2/5 = [- 2/5 + 1/2] - [- 2/5 + 1/2] - 2/5 = 0 - 0 - 2/5 = - 1/(5/2) = - 1/]2 + 1/2 - 1/2[- 2/5 + 1/]2 + 1/2 - 1/2[= - 1/2 + (- 2/5 + 1/2) = = - 1/2 + (- 4 + 5)/10 = - 1/2 + 1/10.$$

Теперь испытаем для третьей и четвёртой пар общих методологий вторую из пары задач, различающей общие методологии первых двух пар.

Рассмотрим простую задачу разложения действительного числа

$$a = 1/3 - 1/13 = 10/39.$$

Первая в третьей паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт:

$$10/39 = [10/39 + 1/2] - [10/39 + 1/2] + 10/39 = 0 - 0 + 10/39 = 1/(39/10) = 1/(3 + 9/10) = 1/[3 + 9/10 + 1/2] + 10/39 - 1/[3 + 9/10 + 1/2] = 1/4 + (10/39 - 1/4) = 1/4 + (40 - 39)/156 = 1/4 + 1/156.$$

Вторая в третьей паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$10/39 = [10/39 + 1/2] - [10/39 + 1/2] + 10/39 = 0 - 0 + 10/39 = 1/(39/10) = 1/(3 + 9/10) = 1/[3 + 9/10 + 1/2] + 10/39 - 1/[3 + 9/10 + 1/2] = 1/4 + (10/39 - 1/4) = 1/4 + (40 - 39)/156 = 1/4 + 1/156.$$

Первая в четвёртой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт:

$$10/39 = [10/39 + 1/2] - [10/39 + 1/2] + 10/39 = 0 - 0 + 10/39 = 1/(39/10) = 1/(3 + 9/10) = 1/]3 + 9/10 - 1/2[+ 10/39 - 1/]3 + 9/10[= 1/4 + (10/39 - 1/4) = 1/4 + (40 - 39)/156 = 1/4 + 1/156.$$

Вторая в четвёртой паре общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт:

$$10/39 = [10/39 + 1/2] - [10/39 + 1/2] + 10/39 = 0 - 0 + 10/39 = 1/(39/10) = 1/(3 + 9/10) = 1/]3 + 9/10[+ 10/39 - 1/]3 + 9/10 - 1/2[= 1/4 + (10/39 - 1/4) = 1/4 + (40 - 39)/156 = 1/4 + 1/156.$$

Таблица. Метаметодология различения восьми общих методологий различающей системой задач, в данном случае различающей парой задач, на разложение действительных чисел 25/69 и 7/23

Общая методология	Разложение числа 25/69 = 1/3 + 1/34.5	Разложение числа 7/23 = 1/3 - 1/34.5
1. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}]$	1/2 - 1/8 - 1/79 - 1/43608	1/3 - 1/35 - 1/2415
2. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}°/[1/\lvert r_{j-1}\rvert]$	1/2 - 1/7 + 1/193 - 1/186438	1/3 - 1/34 + 1/2346
3. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}[$	1/3 + 1/35 + 1/2415	1/4 + 1/19 + 1/583 + 1/1019084
4. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}°/]1/\lvert r_{j-1}\rvert[$	1/3 + 1/35 + 1/2415	1/4 + 1/19 + 1/583 + 1/1019084
5. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}+1/2]$	1/3 + 1/35 + 1/2415	1/3 - 1/34 + 1/2346
6. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}°/[1/\lvert r_{j-1}\rvert+1/2]$	1/3 + 1/35 + 1/2415	1/3 - 1/35 - 1/2415
7. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}-1/2[$	1/3 + 1/34 - 1/2346	1/3 - 1/35 - 1/2415
8. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}°/]1/\lvert r_{j-1}\rvert-1/2[$	1/3 + 1/34 - 1/2346	1/3 - 1/34 + 1/2346

Замечание. Особая значимость этой таблицы заключается в том, что указанная различающая система задач, в данном случае различающая пара задач, именно итогово различает общие методологии 5, 6, 7 и 8. Эти четыре общие методологии могут давать различные итоги только при обращениях полуцелых чисел, что и использовано в указанной различающей паре задач. Во всех остальных случаях все эти четыре методологии дают непременно совпадающие четвёрки итогов, разумеется, вообще говоря, различные для разных задач. Кроме того, эта таблица подтверждает априорно очевидное утверждение о том, что именно общая методология 6 во всех случаях является наиболее высокоточной и высокоскоростной.

Ведь единственная общая методология 6 всегда выбирает целое число, не только ближайшее к требуемому действительному числу, но и в случае наличия именно двух целых чисел, равноудалённых от требуемого действительного числа, непременно берёт из такой пары целых чисел именно то число, абсолютная величина которого больше, чем у другого числа. Указанной парой задач на разложение действительных чисел не удалось различить только вторую пару общих методологий 3 и 4. Причина этой неразличимости заключается в том, что эти две общие методологии дают в обеих задачах чисто положительные разложения указанных действительных чисел.

Итоговые различия между этими двумя общими методологиями возникают тогда и только тогда, когда ими даются именно знакопеременные разложения действительных чисел. Различающие системы задач для пары общих методологий 3 и 4 могут состоять из единственных задач на разложение действительных чисел. Ранее указанные такие единственные различающие задач приведены в таблицах ниже.

Таблица. Метаметодология различения восьми общих методологий различающей системой задач, в данном случае различающей парой задач, на разложение действительных чисел -25/69 и -7/23

Общая методология	Разложение числа -25/69 = -1/3 - 1/34.5	Разложение числа -7/23 = -1/3 + 1/34.5
1. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}]$	- 1/3 - 1/35 - 1/2415	- 1/4 - 1/19 - 1/583 - 1/1019084
2. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}^{\circ}/[1/\lvert r_{j-1}\rvert]$	- 1/2 + 1/7 - 1/193 + 1/186438	- 1/3 + 1/34 - 1/2346
3. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}[$	- 1/2 + 1/8 + 1/79 + 1/43608	- 1/3 + 1/34 - 1/2346
4. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}^{\circ}/]1/\lvert r_{j-1}\rvert[$	- 1/3 - 1/35 - 1/2415	- 1/4 - 1/19 - 1/583 - 1/1019084
5. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}+1/2]$	- 1/3 - 1/34 + 1/2346	- 1/3 + 1/35 + 1/2415
6. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}^{\circ}/[1/\lvert r_{j-1}\rvert+1/2]$	- 1/3 - 1/35 - 1/2415	- 1/3 + 1/35 + 1/2415
7. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}-1/2[$	- 1/3 - 1/35 - 1/2415	- 1/3 + 1/34 - 1/2346
8. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}^{\circ}/]1/\lvert r_{j-1}\rvert-1/2[$	- 1/3 - 1/34 + 1/2346	- 1/3 + 1/34 - 1/2346

Таблица. Метаметодология различения восьми общих методологий различающей системой задач, в данном случае различающими двумя парами задач на разложение действительных чисел 25/69 и 7/23, -25/69 и -7/23

ОМ	25/69 = 1/3 + 1/34.5	7/23 = 1/3 - 1/34.5	-25/69 = -1/3 - 1/34.5	-7/23 = -1/3 + 1/34.5
1.	1/2 - 1/8 - 1/79 - 1/43608	1/3 - 1/35 - 1/2415	- 1/3 - 1/35 - 1/2415	- 1/4 - 1/19 - 1/583 - 1/1019084
2.	1/2 - 1/7 + 1/193 - 1/186438	1/3 - 1/34 + 1/2346	- 1/2 + 1/7 - 1/193 + 1/186438	- 1/3 + 1/34 - 1/2346
3.	1/3 + 1/35 + 1/2415	1/4 + 1/19 + 1/583 + 1/1019084	- 1/2 + 1/8 + 1/79 + 1/43608	- 1/3 + 1/34 - 1/2346
4.	1/3 + 1/35 + 1/2415	1/4 + 1/19 + 1/583 + 1/1019084	- 1/3 - 1/35 - 1/2415	- 1/4 - 1/19 - 1/583 - 1/1019084
5.	1/3 + 1/35 + 1/2415	1/3 - 1/34 + 1/2346	- 1/3 - 1/34 + 1/2346	- 1/3 + 1/35 + 1/2415
6.	1/3 + 1/35 + 1/2415	1/3 - 1/35 - 1/2415	- 1/3 - 1/35 - 1/2415	- 1/3 + 1/35 + 1/2415
7.	1/3 + 1/34 - 1/2346	1/3 - 1/35 - 1/2415	- 1/3 - 1/35 - 1/2415	- 1/3 + 1/34 - 1/2346
8.	1/3 + 1/34 - 1/2346	1/3 - 1/34 + 1/2346	- 1/3 - 1/34 + 1/2346	- 1/3 + 1/34 - 1/2346

Теперь испытаем ещё более простую пару задач, состоящих из единственного отношения единицы к превышающему по абсолютной величине единицу положительному или отрицательному полуцелому числу, то есть имеющему дробную часть, равную 1/2, или, равносильно, из единственного отношения двух к превышающему по абсолютной величине 2 положительному или отрицательному нечётному числу:

$$a = 1/2.5 = 2/5;$$

$$a = - 1/2.5 = - 2/5.$$

Таблица. Метаметодология различения восьми общих методологий различающей системой задач, в данном случае различающей парой задач, на разложение действительных чисел 2/5 и - 2/5

Общая методология	Разложение числа a a = 1/2.5 = 2/5	Разложение числа a a = - 1/2.5 = - 2/5
1. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}]$	1/2 - 1/10	- 1/3 - 1/15
2. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}^{\circ}/[1/\lvert r_{j-1}\rvert]$	1/2 - 1/10	- 1/2 + 1/10
3. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}[$	1/3 + 1/15	- 1/2 + 1/10
4. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}^{\circ}/]1/\lvert r_{j-1}\rvert[$	1/3 + 1/15	- 1/3 - 1/15
5. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}+1/2]$	1/3 + 1/15	- 1/2 + 1/10
6. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}^{\circ}/[1/\lvert r_{j-1}\rvert+1/2]$	1/3 + 1/15	- 1/3 - 1/15
7. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}-1/2[$	1/2 - 1/10	- 1/3 - 1/15
8. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}^{\circ}/]1/\lvert r_{j-1}\rvert-1/2[$	1/2 - 1/10	- 1/2 + 1/10

Замечание. Особая значимость и этой таблицы заключается в том, что указанная различающая система задач, в данном случае различающая пара задач, именно итогово различает общие методологии 5, 6, 7 и 8. Эти четыре общие методологии могут давать различные итоги только при обращениях полуцелых чисел, что и использовано в указанной различающей паре задач. Во всех остальных случаях все эти четыре методологии дают непременно совпадающие четвёрки итогов, разумеется, вообще говоря, различные для разных задач. Кроме того, эта таблица подтверждает априорно очевидное утверждение о том, что именно общая методология 6 во всех случаях является наиболее высокоточной и высокоскоростной.

Ведь единственная общая методология 6 всегда выбирает целое число, не только ближайшее к требуемому действительному числу, но и в случае наличия именно двух целых чисел, равноудалённых от требуемого действительного числа, непременно берёт из такой пары целых чисел именно то число, абсолютная величина которого больше, чем у другого числа. Указанной парой задач на разложение действительных чисел не удалось различить общие методологии

1 и 7;
2 и 8;
3 и 5;
4 и 6.

Причина этой неразличимости заключается в том, что каждая из этих двух задач даёт всего два различных разложения, соответственно пара этих задач даёт всего четыре различные пары разложений. А общих методологий восемь. Поэтому естественно наличие четырёх пар общих методологий с одинаковыми в каждой из этих пар парами разложений. Однако это разбиение общих методологий на пары по совпадению пар разложений совсем иное, чем при естественном упорядочении всех этих восьми общих методологий в метаметодологии их различения. Немаловажно и то, что эта пара задач является различающей не только отдельно для второй четвёрки общих методологий, но и отдельно для первой четвёрки

общих методологий. А в каждой из указанных выше четырёх пар общих методологий с одинаковыми в каждой из этих пар парами разложений есть ровно одна общая методология из первой четвёрки общих методологий и ровно одна общая методология из второй четвёрки общих методологий.

В таблице метаметодологии различения восьми общих методологий различающей системой задач, в данном случае различающей парой задач, на разложение действительных чисел 25/69 и 7/23, две общие методологии 3 и 4 дают в обеих задачах чисто положительные разложения указанных действительных чисел. Итоговые различия между этими двумя общими методологиями возникают тогда и только

тогда, когда ими даются именно знакопеременные разложения действительных чисел. Различающие системы задач для пары общих методологий 3 и 4 могут состоять из единственных задач на разложение действительных чисел. Ранее указанные такие единственные различающие задачи приведены в таблице ниже.

Таблица. Метаметодология различения восьми общих методологий различающей системой задач, в данном случае различающей парой задач, на разложение действительных чисел 69/100 и 10/39

Общая методология	Разложение числа a = 69/100	Разложение a = 1/3 - 1/13 = 10/39

1. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}]$	1 - 1/4 - 1/17 - 1/850	1/3 - 1/13
2. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/[1/\lvert r_{j-1}\rvert]$	1 - 1/3 + 1/42 - 1/2100	1/3 - 1/13
3. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}[$	1 - 1/3 + 1/43 + 1/12900	1/4 + 1/156
4. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/]1/\lvert r_{j-1}\rvert[$	1 - 1/4 - 1/17 - 1/850	1/4 + 1/156
5. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}+1/2]$	1 - 1/3 + 1/43 + 1/12900	1/4 + 1/156
6. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/[1/\lvert r_{j-1}\rvert+1/2]$	1 - 1/3 + 1/43 + 1/12900	1/4 + 1/156
7. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}-1/2[$	1 - 1/3 + 1/43 + 1/12900	1/4 + 1/156

8. $[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k} r_{j-1}°/]1/\lvert r_{j-1}\rvert -1/2[$	1 - 1/3 + 1/43 + 1/12900	1/4 + 1/156

Замечание. Эта таблица отражает достаточно типичную картину полного совпадения итогов, даваемых второй четвёркой общих методологий, имеющую место всегда, за исключением случаев, когда последняя дробь заменяется отношением двух к превышающему по абсолютной величине 2 положительному и отрицательному нечётному числу. Причём это может иметь место только в конечных разложениях, присущих лишь рациональным числам, и никогда не может осуществиться для иррациональных чисел.

Как видим, первая из этих задач действительно различает общие методологии 3 и 4.

Кроме того, первая из этих задач не различает общие методологии 1 и 4, однако как раз их различает вторая из этих задач. Поэтому система указанных двух задач действительно различает первую четвёрку общих методологий, однако совершенно не различает вторую четвёрку общих методологий.

Первая из этих задач вместе с задачами

$$a = 1/2.5 = 2/5,$$

$$a = - 1/2.5 = - 2/5$$

образует триаду задач

$$a = 69/100,$$

$$a = 1/2.5 = 2/5,$$

$$a = - 1/2.5 = - 2/5,$$

различающую все 8 общих методологий.

Возникает вопрос, нельзя ли, сохраняя идею пары задач, выбрать их так, чтобы подобная пара задач без указанного дополнения до триады различала все 8 общих методологий.

Этот вопрос решается отрицательно следующий теоремой.

Теорема. Пара задач

$$a_+ = 1/m + 2/(2n + 1),$$

$$a_- = 1/m - 2/(2n + 1)$$

ни при каких целых положительных числах m и n таких, что

$$2 \leq m < (2n + 1)/2,$$

не может различать все 8 общих методологий.

Доказательство.

Прежде всего рассмотрим принятое ранее значение

$m = 3$.

Тогда

$$a_+ = 1/3 + 2/(2n + 1) = (2n + 7)/(6n + 3) = 1/((6n + 3)/(2n + 7)),$$

$$a_- = 1/3 - 2/(2n + 1) = (2n - 5)/(6n + 3) = 1/((6n + 3)/(2n - 5)).$$

Для различения второй четвёрки общих методологий необходимо добиться первоначального выделения непременно др<u>о</u>би 1/3.

Для второй четвёрки общих методологий необходимо выполнение совокупности неравенств

$$(6n + 3)/(2n + 7) + 1/2 \geq 3,$$

$$(6n + 3)/(2n - 5) + 1/2 < 4.$$

Первое из этих неравенств даёт:

$$12n + 6 + 2n + 7 \geq 12n + 42,$$

$$n \geq 14.5.$$

Второе из этих неравенств даёт:

$$12n + 6 + 2n - 5 < 16n - 40,$$

$$n > 20.5.$$

Третья общая методология требует выполнения неравенства

$$(6n + 3)/(2n - 5) \leq 3,$$

что при выполнении неравенства

$$n > 20.5$$

невозможно.

Поэтому первая дробь разложения не может быть 1/3.

Теперь ясна идея доказательства теоремы в общем случае любых целых положительных чисел m и n таких, что

$$2 \leq m < (2n + 1)/2.$$

Имеем:

$$a_+ = 1/m + 2/(2n + 1) = (2n + 2m + 1)/(2mn + m) = 1/((2mn + m)/(2n + 2m + 1)),$$

$$a_- = 1/m - 2/(2n + 1) = (2n - 2m + 1)/(2mn + m) = 1/((2mn + m)/(2n - 2m + 1)).$$

Вначале исследуем, можно ли во всех случаях получить в качестве первой др<u>о</u>би именно 1/m.

Вторая четвёрка общих методологий требует выполнения совокупности равенств

$$[(2mn + m)/(2n + 2m + 1) + 1/2] = m,$$

$$[(2mn + m)/(2n - 2m + 1) + 1/2] = m.$$

Первое из этих двух равенств равносильно двойным неравенствам

$$m \le (4mn + 4m + 2n + 1)/(4n + 4m + 2) < m + 1,$$

$$m(4n + 4m + 2) \le 4mn + 4m + 2n + 1 < (m + 1)(4n + 4m + 2),$$

$$4mn + 4m^2 + 2m \le 4mn + 4m + 2n + 1 < 4mn + 4m^2 + 2m + 4n + 4m + 2,$$

$$4m^2 - 2m \le 2n + 1 < 4m^2 + 2m + 4n + 2.$$

Правое неравенство выполняется при любых указанных m и n и поэтому ничего нового не даёт.

Левое неравенство даёт

$$2n + 1 \ge 4m^2 - 2m.$$

Второе из тех двух равенств равносильно двойным неравенствам

$$m \leq (4mn + 2n + 1)/(4n - 4m + 2) < m + 1,$$

$$m(4n - 4m + 2) \leq 4mn + 2n + 1 < (m + 1)(4n - 4m + 2),$$

$$4mn - 4m^2 + 2m \leq 4mn + 2n + 1 < 4mn - 4m^2 + 2m + 4n - 4m + 2,$$

$$- 4m^2 + 2m \leq 2n + 1 < - 4m^2 + 4n - 2m + 2.$$

Левое неравенство выполняется при любых указанных m и n и поэтому ничего нового не даёт.

Правое неравенство даёт

$$2n + 1 > 4m^2 + 2m,$$

что усиливает неравенство

$$2n + 1 \geq 4m^2 - 2m$$

и становится итоговым для второй четвёрки общих методологий.

Общие методологии 3 и 4 требуют выполнения совокупности двух равенств

$$]\!(2mn + m)/(2n + 2m + 1)[= m,$$

$$]\!(2mn + m)/(2n - 2m + 1)[= m.$$

Первое из этих двух равенств равносильно двойным неравенствам

$$m - 1 < (2mn + m)/(2n + 2m + 1) \leq m,$$

$$(m - 1)(2n + 2m + 1) < 2mn + m \leq m(2n + 2m + 1),$$

$$2mn + 2m^2 + m - 2n - 2m - 1 < 2mn + m \leq 2mn + 2m^2 + m,$$

$$2m^2 - 2n - 2m - 1 < 0 \leq 2m^2.$$

Правое неравенство выполняется при любых указанных m и n и поэтому ничего нового не даёт.

Левое неравенство даёт

$$2n + 1 \geq 2m^2 - 2m,$$

что выполняется при

$$2n + 1 \geq 4m^2 - 2m$$

и поэтому ничего нового не даёт.

Второе из тех двух равенств равносильно двойным неравенствам

$$m - 1 < (2mn + m)/(2n - 2m + 1) \leq m,$$

$$(m - 1)(2n - 2m + 1) < 2mn + m \leq m(2n - 2m + 1),$$

$$2mn - 2m^2 + m - 2n + 2m - 1 < 2mn + m \leq 2mn - 2m^2 + m,$$

$$- 2m^2 - 2n + 2m - 1 < 0 \leq - 2m^2.$$

Правое неравенство очевидным образом невозможно.

Следовательно, невозможно во всех случаях получить в качестве первой дроби именно 1/m.

Остаётся, однако, последняя возможность добиться различения итогов 3 и 4 общих методологий. Для этого необходимо выполнение совокупности пяти условий:

$$[(2mn + m)/(2n + 2m + 1) + 1/2] = m,$$

$$[(2mn + m)/(2n - 2m + 1) + 1/2] = m.$$

$$](2mn + m)/(2n + 2m + 1)[= m,$$

$$](2mn + m)/(2n - 2m + 1)[= m + 1,$$

$$1/m - 2/(2n + 1) < 1/(m + 1).$$

Четвёртое из этих равенств равносильно двойным неравенствам

$$m < (2mn + m)/(2n - 2m + 1) \leq m + 1,$$

$$m(2n - 2m + 1) < 2mn + m \leq (m + 1)(2n - 2m + 1),$$

$$2mn - 2m^2 + m < 2mn + m \leq 2mn - 2m^2 + m + 2n - 2m + 1,$$

$$- 2m^2 < 0 \leq - 2m^2 + 2n - 2m + 1.$$

Левое неравенство выполняется при любых указанных m и n и поэтому ничего нового не даёт.

Правое неравенство даёт

$$2n + 1 \geq 2m^2 + 2m,$$

что выполняется при совокупности двух условий

$$2n + 1 \geq 4m^2 - 2m,\ m \geq 2$$

и поэтому ничего нового не даёт. Пятое условие

$$1/m - 2/(2n + 1) < 1/(m + 1)$$

выражает необходимость непременно отрицательного остатка действительного числа

$$a_- = 1/m - 2/(2n + 1) = (2n - 2m + 1)/(2mn + m) = 1/((2mn + m)/(2n - 2m + 1))$$

после выделения первой дроби 1/(m + 1), обеспечивает достаточность при том дополнительном условии, что обращение этого остатка не является целым числом, и даёт

$$1/m - 1/(m + 1) < 2/(2n + 1),$$

$$1/(m(m + 1)) < 2/(2n + 1),$$

$$2n + 1 < 2m(m + 1) = 2m^2 + 2m,$$

что противоречит условию

$$2n + 1 \geq 2m^2 + 2m.$$

Тем самым завершено доказательство теоремы.

В дальнейшем неоднократно используется очевидное равенство

$$\mathrm{sign}(x) = 1/\mathrm{sign}(x)$$

для любого ненулевого действительного числа x.

2.10.1. ОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ЦЕЛЫХ ЧАСТЕЙ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Для наибольшего возможного ускорения сходимости ряда единичных, или аликвотных, дробей общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков берёт в качестве целочисленного нулевого по счёту, или порядку, приближения именно ближайшее к требуемому действительному числу целое число, причём в случае

равноудалённости двух соседних целых чисел из их пары выбирается непременно большее число. А при обращениях последовательных остатков берутся целые части делителей непременно положительных единиц.

Таким образом, общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков берёт в качестве нулевого по счёту, или порядку, приближения к произвольному действительному числу a целую часть этого числа, предварительно увеличенного на 1/2, и тем самым ближайшее к числу a целое число

$$a_0 = [a + 1/2].$$

При этом, если дробная часть {a} числа a равна 1/2, то берётся большее из двух равноудалённых целых чисел, то есть

$$]a[= [a] + 1,$$

а не

$$[a] =]a[- 1.$$

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков вычисляет нулевой по счёту, или порядку, остаток

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

как разность между действительным числом a и его нулевым по счёту, или порядку, приближением a_0.

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] = 0,$$

$$a = a_0 = [a + 1/2],$$

то данное действительное число a является целым и равно целой части [a + 1/2], а вся система разложения и приближения этого числа сводится к этому единственному нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2].$$

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток r_0 не равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] \neq 0,$$

то этот остаток r_0 обращается, берётся целая часть этого обращения

$$z_1 = [1/r_0] = [1/(a - a_0)] = [1/(a - [a])]$$

и ставится в знаменатель первой единичной дроби

$$1/z_1 = 1/[1/r_0] = 1/[1/(a - a_0)] = 1/[1/(a - [a + 1/2])]$$

разложения

$$a = [a] + \Sigma_{k\in N} 1/z_k,$$

$$k \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\},$$

$$z_k \in Z \setminus \{0\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}$$

этого действительного числа a. Первая единичная дробь $1/z_1$ прибавляется к его нулевому по счёту, или порядку, приближению a_0 этого действительного числа a. Эта сумма даёт первое приближение

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$$

к данному действительному числу a, а вычитание первого приближения из этого числа даёт первый остаток

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1.$$

Если первый остаток r_1 равен нулю:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 = 0,$$

$$a = a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1,$$

то вся система разложения и приближения этого числа a сводится к нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2]$$

и первому приближению

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1,$$

и процесс разложения и приближения этого числа a завершается этим первым приближением.

А если первый остаток r_1 отличен от нуля:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 \neq 0,$$

то первый остаток r_1 обращается, берётся целая часть этого обращения

$$z_2 = [1/r_1] = [1/(a - a_1)] = [1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1)]$$

и ставится в знаменатель второй единичной дроби

$$1/z_2 = 1/[1/r_1] = 1/[1/(a - a_1)] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1)].$$

Вторая единичная дробь $1/z_2$ складывается с первым приближением

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$$

к данному действительному числу a, что даёт второе приближение к данному действительному числу a

$$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2.$$

Второе приближение a_2 вычитается из данного действительного числа a. Эта разность даёт второй остаток

$$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2.$$

Общие формулы для ряда, его частичных сумм как последовательных приближений, остатков, знаменателей единичных дробей и самих единичных дробей соответственно по общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков имеют вид:

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{\infty}1/z_k,$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j,$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j,$$

$$z_{k+1} = [1/r_k] = [1/(a - a_k)] = [1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j)],$$

$$1/z_{k+1} = 1/[1/r_k] = 1/[1/(a - a_k)] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j)].$$

Такой процесс продолжается бесконечно тогда и только тогда, когда действительное число a иррационально. Такой процесс завершается, когда очередной остаток r_k аннулируется, и это происходит тогда и только тогда, когда действительное число a рационально.

Замечание. Никаких априорных ограничений на знаки всех этих целых частей не накладывается. Поэтому любая из этих целых частей, являющаяся знаменателем соответствующей единичной дроби, может быть как положительным, так и отрицательным целым числом. Нулевым может быть только ближайшее к требуемому действительному числу a целое число [a + 1/2]. Абсолютная величина каждого остатка меньше единицы. Абсолютная величина обращения каждого остатка поэтому больше единицы. Следовательно, абсолютная величина целой части обращения

каждого остатка не меньше единицы. Для того, чтобы знакопеременное гармоническое разложение действительного числа a было конечным, необходимо и достаточно, чтобы действительное число a было рациональным числом.

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков даёт именно выборочное знакопеременное гармоническое разложение действительного числа a.

2.10.2. ОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ЦЕЛЫХ ЧАСТЕЙ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Другие общие методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел представляют действительные числа знакопеременными рядами единичных, или аликвотных, дробей с положительными знаменателями и не накладывают никаких априорных ограничений на последовательность знаков перед такими дробями в принятом порядке строгого монотонного возрастания их

знаменателей, которая может быть совершенно произвольной. Поэтому не обеспечивается именно <u>чередование</u> приближений действительного числ<u>а</u> снизу и сверху последовательными приближениями, в данном случае частичными суммами представляющего это число ряда единичных, или аликвотных, дробей. А метод непрерывных, или цепных, дробей обеспечивает именно <u>чередование</u> приближений действительного числ<u>а</u> снизу и сверху последовательными приближениями, в данном случае подходящими дробями. Поэтому представляет интерес создание именно однозначного достаточно высокоточного и достаточно высокоскоростного метода непременно <u>знакочередующихся</u> гармонических

разложения и приближения действительных чисел рядами единичных, или аликвотных, дробей с положительными знаменателями в принятом порядке строгого монотонного возрастания их знаменателей.

Замечание. Включение также целой части действительного числа в такое чередование в общем случае может потребовать как потери однозначности представления действительного числа, так и замедления сходимости представляющего это число ряда, обращающегося в конечную сумму тогда и только тогда, когда это действительное число оказывается рациональным. Поскольку нас интересуют именно общий метод и общий случай, то для доказательства этого общего утверждения

вполне достаточен всего лишь один конкретный контрпример. Легко указать даже бесконечное множество таких контрпримеров. Таким свойством обладает, в частности, сумма любого целого положительного числа и любой единичной, или аликвотной, дроби со знаменателем, превышающим 2, например 1 + 1/3. Попытка обеспечить именно чередование знаков вынуждает замену

$$1 + 1/3 = 2 - 2/3.$$

Однако дробь 2/3 не является единичной, или аликвотной. Поэтому общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков в принятом порядке

строгого монотонного возрастания знаменателей нецелых единичных, или аликвотных, дробей предусматривает непременно правильное чередование их знаков.

Для наибольшего возможного ускорения сходимости ряда единичных, или аликвотных, дробей берётся в качестве целочисленного нулевого приближения именно ближайшее к требуемому действительному числу целое число, причём в случае равноудалённости двух соседних целых чисел из их пары выбирается непременно большее число. А при обращениях последовательных остатков берутся целые части делителей единиц со знаками остатков.

Таким образом, общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков берёт в качестве нулевого по счёту, или порядку, приближения к произвольному действительному числу a целую часть этого числа, предварительно увеличенного на 1/2, и тем самым ближайшее к числу a целое число

$$a_0 = [a + 1/2].$$

При этом, если дробная часть {a} числа a равна 1/2, то берётся большее из двух равноудалённых целых чисел, то есть

$$]a[= [a] + 1,$$

а не

$$[a] =]a[- 1.$$

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков вычисляет нулевой по счёту, или порядку, остаток

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

как разность между действительным числом a и его нулевым по счёту, или порядку, приближением a_0.

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] = 0,$$

$$a = a_0 = [a + 1/2],$$

то данное действительное число a является целым и равно целой части $[a + 1/2]$, а вся система разложения и приближения этого числа сводится к этому единственному нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2].$$

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток r_0 не равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] \neq 0,$$

то абсолютная величина $|r_0|$ этого остатка r_0 обращается, берётся <u>целая часть</u> этого обращения, умножается на функцию знака $(\mathrm{sign}\ r_0)$ этого остатка r_0:

$$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|r_0|] = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|a - a_0|] = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|a - [a + 1/2]|]$$

и ставится в знаменатель первой единичной дроби

$$1/z_1 = (\text{sign } r_0)/[1/|r_0|] = (\text{sign } r_0)/[1/|a - a_0|] =$$
$$(\text{sign } r_0)/[1/|a - [a + 1/2]|]$$

разложения

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k \in N} 1/z_k,$$
$$k \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\},$$
$$z_k \in Z \setminus \{0\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}$$

этого действительного числа a.

Имеются три исключающие друг друга равносильные возможности умножения на функцию знака ($\text{sign } r_{k-1}$) любого последовательного остатка r_{k-1}:

1. На функцию знака остатка непременно после взятия целой части в делителе единицы умножается только знаменатель единичной дроби, который в итоге

приобретает знак остатка и может быть или положительным, или отрицательным целым числом, что подчёркивается обозначением $1/z_k$. При этом числитель единичной дроби является непременно положительной единицей.

2. На функцию знака остатка умножается только числитель единичной дроби, который становится единицей со знаком остатка и может быть или положительной, или отрицательной единицей, что подчёркивается обозначением

$$(\mathrm{sign}\ r_{k-1})/[1/|r_{k-1}|] = (\mathrm{sign}\ r_{k-1})/[1/|a - a_{k-1}|] =$$

$$(\mathrm{sign}\ r_{k-1})/[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k-1} 1/z_j|].$$

При этом знаменатель единичной дроби является непременно положительным целым числом.

3. На функцию знака остатка умножается только единичная дробь в целом, то есть функция знака остатка определяет знак дроби в целом, который ставится перед дробью. Это предпочтительный вариант после завершения действий с данным остатком и особенно для окончательного выражения разложения требуемого действительного числа. При этом числитель единичной дроби является непременно положительной единицей, а знаменатель единичной дроби является непременно положительным целым числом.

Первая единичная дробь прибавляется к нулевому по счёту, или порядку, приближению a_0 этого действительного числа a. Эта сумма даёт первое приближение

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$$

к данному действительному числу a, а вычитание первого приближения из этого числа даёт первый остаток

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1.$$

Если он равен нулю:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 = 0,$$

$$a = a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1,$$

то вся система разложения и приближения этого числа a сводится к нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2]$$

и первому приближению

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1,$$

и процесс разложения и приближения этого числа a завершается этим первым приближением.

А если первый остаток r_1 отличен от нуля:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 \neq 0,$$

то абсолютная величина $|r_1|$ первого остатка r_1 обращается, берётся <u>целая часть</u> этого обращения, умножается на функцию знака ($\mathrm{sign}\ r_1$) этого остатка r_1:

$$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|r_1|] = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - a_1|] =$$
$$(\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|]$$

и ставится в знаменатель второй единичной др<u>о</u>би

$$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|r_1|] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - a_1|] =$$
$$(\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|].$$

Вторая единичная дробь $1/z_2$ складывается с первым приближением a_1 к данному действительному числу a, что даёт второе приближение к данному действительному числу a

$$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2.$$

Второе приближение a_2 вычитается из данного действительного числа a. Эта разность даёт второй остаток

$$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2.$$

Общие формулы для ряда, его частичных сумм как последовательных приближений, остатков, знаменателей единичных дробей и самих единичных

дробей соответственно по общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков имеют вид:

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{\infty} 1/z_k,$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j,$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j,$$

$$z_{k+1} = (\text{sign } r_k)[1/|r_k|] = (\text{sign } r_k)[1/|a - a_k|] =$$

$$(\text{sign } r_k)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j|],$$

$$1/z_{k+1} = (\text{sign } r_k)/[1/|r_k|] = (\text{sign } r_k)/[1/|a - a_k|] =$$

$$(\text{sign } r_k)/[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j|].$$

Такой процесс продолжается бесконечно тогда и только тогда, когда действительное число а иррационально. Такой процесс завершается, когда очередной остаток r_k аннулируется, и это происходит тогда и только тогда, когда действительное число а рационально.

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт именно выборочное знакочередующееся гармоническое разложение действительного числа а.

2.10.3. ОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ПОТОЛКОВ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Для наибольшего возможного ускорения сходимости ряда единичных, или аликвотных, дробей общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков берёт в качестве целочисленного нулевого по счёту, или порядку, приближения именно ближайшее к требуемому действительному числу целое число, причём в случае

равноудалённости двух соседних целых чисел из их пары выбирается непременно большее число. А при обращениях последовательных остатков берутся потолки делителей непременно положительных единиц.

Таким образом, общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков берёт в качестве нулевого по счёту, или порядку, приближения к произвольному действительному числу a целую часть этого числа, предварительно увеличенного на 1/2, и тем самым ближайшее к числу a целое число

$$a_0 = [a + 1/2].$$

При этом, если дробная часть $\{a\}$ числа a равна 1/2, то берётся большее из двух равноудалённых целых чисел, то есть

$$]a[= [a] + 1,$$

а не

$$[a] =]a[- 1.$$

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков вычисляет нулевой по счёту, или порядку, остаток

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

как разность между действительным числом a и его нулевым по счёту, или порядку, приближением a_0.

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] = 0,$$

$$a = a_0 = [a + 1/2],$$

то данное действительное число a является целым и равно целой части [a + 1/2], а вся система разложения и приближения этого числа сводится к этому единственному нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2].$$

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток r_0 не равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a -]a[\neq 0,$$

то этот остаток r_0 обращается, берётся потолок этого обращения

$$z_1 =]1/r_0[=]1/(a - a_0)[=]1/(a - [a + 1/2])[$$

и ставится в знаменатель первой единичной др<u>о</u>би

$$1/z_1 = 1/]1/r_0[= 1/]1/(a - a_0)[= 1/]1/(a - [a + 1/2])[$$

разложения

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k,$$

$$k \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\},$$

$$z_k \in Z \setminus \{0\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}$$

этого действительного числ<u>а</u> a. Первая единичная дробь $1/z_1$ прибавляется к нулевому по счёту, или порядку, приближению a_0 этого действительного числ<u>а</u> a. Эта сумма даёт первое приближение

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$$

к данному действительному числу a, а вычитание первого приближения из этого числа даёт первый остаток

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1.$$

Если он равен нулю:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 = 0,$$

$$a = a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1,$$

то вся система разложения и приближения этого числа a сводится к нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2]$$

и первому приближению

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1,$$

и процесс разложения и приближения этого числа a завершается этим первым приближением.

А если первый остаток r_1 отличен от нуля:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 \neq 0,$$

то первый остаток r_1 обращается, берётся потолок этого обращения

$$z_2 =]1/r_1[=]1/(a - a_1)[=]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1)[$$

и ставится в знаменатель второй единичной дроби

$$1/z_2 = 1/]1/r_1[= 1/]1/(a - a_1)[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1)[,$$

складываемой с первым приближением к данному действительному числу a. Это даёт второе приближение к данному действительному числу a

$$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2,$$

вычитаемое из данного действительного числа a и тем самым дающее второй остаток

$$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2.$$

Общие формулы для ряда, его частичных сумм как последовательных приближений, остатков, знаменателей единичных дробей и самих единичных дробей соответственно по общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков имеют вид:

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{\infty} 1/z_k,$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j,$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j,$$

$$z_{k+1} =]1/r_k[=]1/(a - a_k)[=]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j)[,$$

$$1/z_{k+1} = 1/]1/r_k[= 1/]1/(a - a_k)[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j)[.$$

Такой процесс продолжается бесконечно тогда и только тогда, когда действительное число a иррационально. Такой процесс завершается, когда очередной остаток r_k аннулируется, и это происходит тогда и только тогда, когда действительное число a рационально.

Замечание. Никаких априорных ограничений на знаки всех этих потолков не накладывается.

Поэтому любой из этих потолков, являющийся знаменателем соответствующей единичной дроби, может быть как положительным, так и отрицательным целым числом. Нулевым может быть только ближайшее к требуемому действительному числу a целое число [a + 1/2]. Абсолютная величина каждого остатка меньше единицы. Абсолютная величина обращения каждого остатка поэтому больше единицы. Следовательно, абсолютная величина потолка обращения каждого остатка не меньше единицы.

Для того, чтобы знакопеременное гармоническое разложение действительного числа а было конечным, необходимо и достаточно, чтобы действительное число а было рациональным числом.

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков даёт именно выборочное знакопеременное гармоническое разложение действительного числа а.

2.10.4. ОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ПОТОЛКОВ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Для наибольшего возможного ускорения сходимости ряда единичных, или аликвотных, дробей общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков берёт в качестве целочисленного нулевого по счёту, или порядку, приближения именно ближайшее к требуемому действительному числу целое число, причём в

случае равноудалённости двух соседних целых чисел из их пары выбирается непременно большее число. А при обращениях последовательных остатков берутся потолки делителей единиц со знаками остатков.

Таким образом, общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков берёт в качестве нулевого по счёту, или порядку, приближения к произвольному действительному числу a целую часть этого числа, предварительно увеличенного на 1/2, и тем самым ближайшее к числу a целое число

$$a_0 = [a + 1/2].$$

При этом, если дробная часть {a} числа a равна 1/2, то берётся большее из двух равноудалённых целых чисел, то есть потолок действительного числа a

$$]a[= [a] + 1,$$

а не целая часть числа действительного a

$$[a] =]a[- 1.$$

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков вычисляет нулевой по счёту, или порядку, остаток

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

как разность между действительным числом a и его нулевым по счёту, или порядку, приближением a_0.

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] = 0,$$

$$a = a_0 = [a + 1/2],$$

то данное действительное число a является целым и равно целой части [a + 1/2], а вся система разложения и приближения этого числа сводится к этому единственному нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2].$$

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток r_0 не равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] \neq 0,$$

то абсолютная величина $|r_0|$ этого остатка r_0 обращается, берётся <u>потолок</u> этого обращения, умножается на функцию знака ($\mathrm{sign}\ r_0$) этого остатка r_0:

$$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|r_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - a_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - [a + 1/2]|[$$

и ставится в знаменатель первой единичной др<u>о</u>би

$$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|r_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - a_0|[=$$

$$(\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - [a + 1/2]|[$$

разложения

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k,$$

$$k \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\},$$

$$z_k \in Z \setminus \{0\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}$$

этого действительного числ<u>а</u> a.

Имеются три исключающие друг друга равносильные возможности умножения на функцию знака (sign r_{k-1}) любого последовательного остатка r_{k-1}:

1. На функцию знака остатка непременно после взятия потолка в делителе единицы умножается только знаменатель единичной дроби, который в итоге приобретает знак остатка и может быть или положительным, или отрицательным целым числом, что подчёркивается обозначением $1/z_k$. При этом числитель единичной дроби является непременно положительной единицей.

2. На функцию знака остатка умножается только числитель единичной дроби, который становится единицей со знаком

остатка и может быть или положительной, или отрицательной единицей, что подчёркивается обозначением

$$(\mathrm{sign}\ r_{k-1})/]1/|r_{k-1}|[= (\mathrm{sign}\ r_{k-1})/]1/|a - a_{k-1}|[=$$

$$(\mathrm{sign}\ r_{k-1})/]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k-1}1/z_j|[.$$

При этом знаменатель единичной дроби является непременно положительным целым числом.

3. На функцию знака остатка умножается только единичная дробь в целом, то есть функция знака остатка определяет знак дроби в целом, который ставится перед дробью. Это предпочтительный вариант после завершения действий с данным остатком и особенно для окончательного выражения разложения требуемого действительного числа. При этом числитель единичной дроби является непременно

положительной единицей, а знаменатель единичной дроби является непременно положительным целым числом.

Первая единичная дробь прибавляется к нулевому по счёту, или порядку, приближению a_0 этого действительного числа a. Эта сумма даёт первое приближение

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$$

к данному действительному числу a, а вычитание первого приближения из этого числа даёт первый остаток

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1.$$

Если он равен нулю:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 = 0,$$

$$a = a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1,$$

то вся система разложения и приближения этого числа a сводится к нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2]$$

и первому приближению

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1,$$

и процесс разложения и приближения этого числа a завершается этим первым приближением.

А если первый остаток r_1 отличен от нуля:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 \neq 0,$$

то абсолютная величина $|r_1|$ первого остатка r_1 обращается, берётся потолок этого обращения, умножается на функцию знака (sign r_1) этого остатка r_1:

$$z_2 = (\text{sign } r_1)]1/|r_1|[= (\text{sign } r_1)]1/|a - a_1|[=$$

$$(\text{sign } r_1)]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|[$$

и ставится в знаменатель второй единичной др<u>о</u>би

$$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|r_1|[= (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - a_1|[=$$

$$(\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|[.$$

Вторая единичная дробь $1/z_2$ складывается с первым приближением a_1 к данному действительному числу a, что даёт второе приближение к данному действительному числу a

$$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2.$$

Второе приближение a_2 вычитается из данного действительного числ<u>а</u> a. Эта разность даёт второй остаток

$$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2.$$

Общие формулы для ряда, его частичных сумм как последовательных приближений, остатков, знаменателей

единичных дробей и самих единичных дробей соответственно по общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков имеют вид:

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{\infty} 1/z_k,$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j,$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j,$$

$$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|r_k|[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - a_k|[=$$

$$(\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j|[,$$

$$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|r_k|[= (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - a_k|[=$$

$$(\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j|[.$$

Такой процесс продолжается бесконечно тогда и только тогда, когда действительное число a иррационально. Такой процесс завершается, когда очередной остаток r_k аннулируется, и это происходит тогда и только тогда, когда действительное число a рационально. Нулевым может быть только ближайшее к требуемому действительному числу a целое число [a + 1/2].

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт именно выборочное знакопеременное гармоническое разложение действительного числа a.

2.10.5. ОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ЦЕЛЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УВЕЛИЧЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков **обеспечивает выбор для единичных дробей именно целочисленных знаменателей, ближайших к обращениям соответствующих остатков,**

причём в случае равноудалённости двух соседних целых чисел из их пары выбирается непременно большее число.

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков берёт в качестве нулевого по счёту, или порядку, приближения к произвольному действительному числу a целую часть этого числа, предварительно увеличенного на 1/2, сохраняемую двойным обращением общего алгоритма этого метода, и тем самым ближайшее к числу a целое число

$$a_0 = [a + 1/2].$$

При этом, если дробная часть $\{a\}$ числа a равна 1/2, то берётся большее из двух равноудалённых целых чисел, то есть

$$]a[= [a] + 1,$$

а не $[a] =]a[- 1$.

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков вычисляет нулевой по счёту, или порядку, остаток

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

как разность между действительным числом a и его нулевым по счёту, или порядку, приближением a_0.

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] = 0,$$

то данное действительное число a является целым и равно целой части [a + 1/2], а вся система разложения и приближения этого числ<u>a</u> сводится к этому единственному нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2].$$

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток r_0 не равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] \neq 0,$$

то этот остаток r_0 обращается, берётся целая часть этого обращения, предварительно увеличенного на 1/2,

$$z_1 = [1/r_0 + 1/2] = [1/(a - a_0) + 1/2] = [1/(a - [a + 1/2]) + 1/2]$$

и ставится в знаменатель первой единичной др<u>о</u>би

$$1/z_1 = 1/[1/r_0 + 1/2] = 1/[1/(a - a_0) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2]) + 1/2]$$

разложения

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k,$$

$$k \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\},$$

$$z_k \in Z \setminus \{0\} = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, ...\}$$

этого действительного числ<u>а</u> a, прибавляемой к его нулевому по счёту, или порядку, приближению a_0. Эта сумма даёт первое приближение

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$$

к данному действительному числу a, а вычитание первого приближения из этого числа даёт первый остаток

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1.$$

Если он равен нулю:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 = 0,$$

$$a = a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1,$$

то вся система разложения и приближения этого числа a сводится к нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2]$$

и первому приближению

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1,$$

и процесс разложения и приближения этого числа a завершается этим первым приближением.

А если первый остаток r_1 отличен от нуля:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 \neq 0,$$

то первый остаток r_1 обращается, берётся целая часть этого обращения, предварительно увеличенного на 1/2,

$$z_2 = [1/r_1 + 1/2] = [1/(a - a_1) + 1/2] = [1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) + 1/2]$$

и ставится в знаменатель второй единичной дроби

$$1/z_2 = 1/[1/r_1 + 1/2] = 1/[1/(a - a_1) + 1/2] =$$
$$1/[1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) + 1/2],$$

складываемой с первым приближением к данному действительному числу a. Это даёт второе приближение к данному действительному числу a

$$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2,$$

вычитаемое из данного действительного числа a и тем самым дающее второй остаток

$$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2.$$

Общие формулы для ряда, его частичных сумм как последовательных приближений, остатков, знаменателей единичных дробей и самих единичных дробей соответственно по общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков имеют вид:

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{\infty} 1/z_k,$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j,$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j,$$

$$z_{k+1} = [1/r_k + 1/2] = [1/(a - a_k) + 1/2] =$$

$$[1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j) + 1/2],$$

$$1/z_{k+1} = 1/[1/r_k + 1/2] = 1/[1/(a - a_k) + 1/2] =$$

$$1/[1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j) + 1/2].$$

Такой процесс продолжается бесконечно тогда и только тогда, когда действительное число a иррационально. Такой процесс завершается, когда очередной остаток r_k аннулируется, и это происходит тогда и только тогда, когда действительное число a рационально.

Замечание. Никаких априорных ограничений на знаки всех этих целых частей не накладывается. Поэтому любая из этих целых частей, являющаяся знаменателем соответствующей единичной дроби, может быть как положительным, так и отрицательным целым числом. Нулевой может быть только целая часть самого числа, предварительно увеличенного на 1/2. Абсолютная величина каждого остатка меньше единицы. Абсолютная величина обращения каждого остатка поэтому больше единицы. Следовательно, абсолютная величина целой части обращения каждого остатка,

предварительно увеличенного на 1/2, не меньше единицы.

Для того, чтобы знакопеременное гармоническое разложение действительного числа a было конечным, необходимо и достаточно, чтобы действительное число a было рациональным.

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт именно выборочное знакопеременное гармоническое разложение действительного числа a.

2.10.6. ОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ЦЕЛЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УВЕЛИЧЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков обеспечивает выбор для единичных дробей именно

целочисленных знаменателей, ближайших к обращениям соответствующих остатков, причём в случае равноудалённости двух соседних целых чисел из их пары выбирается непременно большее число.

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков берёт в качестве нулевого по счёту, или порядку, приближения к произвольному действительному числу а целую часть этого числа, предварительно увеличенного на 1/2, сохраняемую

двойным обращением общего алгоритма этого метода, и тем самым ближайшее к числу a целое число

$$a_0 = [a + 1/2].$$

При этом, если дробная часть {a} числа a равна 1/2, то берётся большее из двух равноудалённых целых чисел, то есть

$$]a[= [a] + 1,$$

а не

$$[a] =]a[- 1.$$

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений

абсолютных величин последовательных остатков вычисляет нулевой по счёту, или порядку, остаток

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

как разность между действительным числом a и его нулевым по счёту, или порядку, приближением a_0.

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] = 0,$$

$$a = a_0 = [a + 1/2],$$

то данное действительное число a является целым и равно целой части [a + 1/2], а вся система разложения и приближения этого числа сводится к этому единственному нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2].$$

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток r_0 не равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] \neq 0,$$

то абсолютная величина $|r_0|$ этого остатка r_0 обращается, берётся целая часть этого обращения, предварительно увеличенного на 1/2, умножается на функцию знака (sign r_0) этого остатка r_0:

$$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|r_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|a - a_0| + 1/2] =$$

$$(\mathrm{sign}\ r_0)[1/|a - [a + 1/2]| + 1/2]$$

и ставится в знаменатель первой единичной дроби

$$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|r_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|a - a_0| + 1/2] =$$

$$(\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|a - [a + 1/2]| + 1/2]$$

разложения

$$\mathbf{a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k,}$$

$$\mathbf{k \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\},}$$

$$\mathbf{z_k \in Z \setminus \{0\} = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, ...\}}$$

этого действительного числ<u>а</u> a.

Имеются три исключающие друг друга равносильные возможности умножения на функцию знака (sign r_{k-1}) любого последовательного остатка r_{k-1}:

1. На функцию знака остатка <u>непременно после взятия целой части в делителе единицы</u> умножается <u>только знаменатель</u> единичной др<u>о</u>би, который в итоге приобретает знак остатка и может быть или положительным, или отрицательным целым числом, что

подчёркивается обозначением $1/z_k$. При этом числитель единичной др<u>о</u>би является непременно положительной единицей.

2. На функцию знака остатка умножается <u>только числитель</u> единичной др<u>о</u>би, который становится единицей со зн<u>а</u>ком остатка и может быть или положительной, или отрицательной единицей, что подчёркивается обозначением

$$(\mathrm{sign}\ r_{k-1})/[1/|r_{k-1}| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_{k-1})/[1/|a - a_{k-1}| + 1/2] =$$

$$(\mathrm{sign}\ r_{k-1})/[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k-1}1/z_j| + 1/2].$$

При этом знаменатель единичной др<u>о</u>би является непременно положительным целым числом.

3. На функцию знака остатка умножается <u>только единичная дробь в целом</u>, то есть функция знака остатка определяет

знак дроби в целом, который ставится перед дробью. Это предпочтительный вариант после завершения действий с данным остатком и особенно для окончательного выражения разложения требуемого действительного числа. При этом числитель единичной дроби является непременно положительной единицей, а знаменатель единичной дроби является непременно положительным целым числом.

Первая единичная дробь прибавляется к нулевому по счёту, или порядку, приближению a_0 этого действительного числа a. Эта сумма даёт первое приближение

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$$

к данному действительному числу a, а вычитание первого приближения из этого числа даёт первый остаток

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1.$$

Если он равен нулю:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 = 0,$$

$$a = a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1,$$

то вся система разложения и приближения этого числа а сводится к нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2]$$

и первому приближению

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1,$$

и процесс разложения и приближения этого числа а завершается этим первым приближением.

А если первый остаток r_1 отличен от нуля:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 \neq 0,$$

то абсолютная величина $|r_1|$ первого остатка r_1 обращается, берётся целая часть этого обращения, предварительно увеличенного на 1/2, умножается на функцию знака ($\mathrm{sign}\ r_1$) этого остатка r_1:

$$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|r_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - a_1| + 1/2] =$$
$$(\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| + 1/2]$$

и ставится в знаменатель второй единичной дроби

$$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|r_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - a_1| + 1/2] =$$
$$(\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| + 1/2].$$

Вторая единичная дробь $1/z_2$ складывается с первым приближением a_1 к данному действительному числу a, что даёт второе приближение к данному действительному числу a

$$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2.$$

Второе приближение a_2 вычитается из данного действительного числа a. Эта разность даёт второй остаток

$$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2.$$

Общие формулы для ряда, его частичных сумм как последовательных приближений, остатков, знаменателей единичных дробей и самих единичных дробей соответственно по общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков имеют вид:

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{\infty} 1/z_k,$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j,$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j,$$

$$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)[1/|r_k| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_k)[1/|a - a_k| + 1/2] =$$

$$(\mathrm{sign}\ r_k)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j| + 1/2],$$

$$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|r_k| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|a - a_k| + 1/2] =$$

$$(\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j| + 1/2].$$

Такой процесс продолжается бесконечно тогда и только тогда, когда действительное число a иррационально. Такой процесс завершается, когда очередной остаток r_k аннулируется, и это происходит тогда и только тогда, когда действительное число a рационально.

Замечание. Никаких априорных ограничений на знаки всех этих целых частей не накладывается. Поэтому любая из этих целых частей, являющаяся знаменателем соответствующей единичной дроби, может быть как положительным, так и отрицательным целым числом. Нулевой может быть только целая часть самого числа, предварительно увеличенного на 1/2. Абсолютная величина каждого остатка меньше единицы. Абсолютная величина обращения каждого остатка поэтому больше единицы. Следовательно, абсолютная величина целой части обращения каждого остатка, предварительно увеличенного на 1/2, не меньше единицы.

Для того, чтобы знакопеременное гармоническое разложение действительного числа a было конечным, необходимо и достаточно, чтобы действительное число a было рациональным числом.

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт именно выборочное знакопеременное гармоническое разложение действительного числа a.

2.10.7. ОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УМЕНЬШЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков **обеспечивает выбор для единичных дробей именно целочисленных знаменателей, ближайших к обращениям соответствующих остатков,**

причём в случае равноудалённости двух соседних целых чисел из их пары выбирается непременно меньшее число.

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков берёт в качестве нулевого по счёту, или порядку, приближения к произвольному действительному числу a целую часть этого числа, предварительно увеличенного на 1/2, сохраняемую двойным обращением общего алгоритма этого метода, и тем самым ближайшее к числу a целое число

$$a_0 = [a + 1/2].$$

При этом, если дробная часть {a} числа a равна 1/2, то берётся большее из двух равноудалённых целых чисел, то есть

$$]a[= [a] + 1,$$

а не

$$[a] =]a[- 1.$$

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков вычисляет нулевой по счёту, или порядку, остаток

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

как разность между действительным числом a и его нулевым по счёту, или порядку, приближением a_0.

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] = 0,$$

то данное действительное число a является целым и равно целой части [a + 1/2], а вся система разложения и приближения этого числа сводится к этому единственному нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2].$$

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток r_0 не равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] \neq 0,$$

то этот остаток r_0 обращается, берётся потолок этого обращения, предварительно уменьшенного на 1/2,

$$z_1 =]1/r_0 - 1/2[=]1/(a - a_0) - 1/2[=]1/(a - [a + 1/2]) - 1/2[$$

и ставится в знаменатель первой единичной дроби

$$1/z_1 = 1/]1/r_0 - 1/2[= 1/]1/(a - a_0) - 1/2[= 1/]1/(a - [a + 1/2]) - 1/2[$$

разложения

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N} 1/z_k,$$

$$k \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\},$$

$$z_k \in Z \setminus \{0\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}$$

этого действительного числа a, прибавляемой к его нулевому по счёту, или порядку, приближению a_0. Эта сумма даёт первое приближение

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$$

к данному действительному числу a, а вычитание первого приближения из этого числа даёт первый остаток

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1.$$

Если он равен нулю:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 = 0,$$

$$a = a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1,$$

то вся система разложения и приближения этого числа a сводится к нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2]$$

и первому приближению

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1,$$

и процесс разложения и приближения этого числа a завершается этим первым приближением.

А если первый остаток r_1 отличен от нуля:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 \neq 0,$$

то первый остаток r_1 обращается, берётся потолок этого обращения, предварительно уменьшенного на 1/2,

$$z_2 =]1/r_1 - 1/2[=]1/(a - a_1) - 1/2[=]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) - 1/2[$$

и ставится в знаменатель второй единичной дроби

$$1/z_2 = 1/]1/r_1 - 1/2[= 1/]1/(a - a_1) - 1/2[=$$

$$1/]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) - 1/2[,$$

складываемой с первым приближением к данному действительному числу a. Это даёт второе приближение к данному действительному числу a

$$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2,$$

вычитаемое из данного действительного числа a и тем самым дающее второй остаток

$$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2.$$

Общие формулы для ряда, его частичных сумм как последовательных приближений, остатков, знаменателей единичных дробей и самих единичных дробей соответственно по общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков имеют вид:

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{\infty} 1/z_k,$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j,$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j,$$

$$z_{k+1} =]1/r_k - 1/2[=]1/(a - a_k) - 1/2[=$$

$$]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j) - 1/2[,$$

$$1/z_{k+1} = 1/]1/r_k - 1/2[= 1/]1/(a - a_k) - 1/2[=$$

$$1/]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j) - 1/2[.$$

Такой процесс продолжается бесконечно тогда и только тогда, когда действительное число a иррационально. Такой процесс завершается, когда очередной остаток r_k аннулируется, и это происходит тогда и только тогда, когда действительное число a рационально.

Замечание. Никаких априорных ограничений на знаки всех этих потолков не накладывается.

Поэтому любой из этих потолков, являющийся знаменателем соответствующей единичной дроби, может быть как положительным, так и отрицательным целым числом. Нулевым может быть только потолок самого числа, предварительно уменьшенного на 1/2. Абсолютная величина каждого остатка меньше единицы. Абсолютная величина обращения каждого остатка поэтому больше единицы. Следовательно, абсолютная величина потолка уменьшенного на 1/2 обращения каждого остатка не меньше единицы.

Для того, чтобы знакопеременное гармоническое разложение действительного числа a было конечным, необходимо и достаточно, чтобы действительное число a было рациональным числом.

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков даёт именно выборочное знакопеременное гармоническое разложение действительного числа a.

2.10.8. ОБЩАЯ МЕТОДОЛОГИЯ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УМЕНЬШЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков обеспечивает выбор для единичных дробей именно целочисленных знаменателей, ближайших к обращениям соответствующих остатков, причём в случае равноудалённости двух соседних целых чисел из их пары выбирается непременно меньшее число.

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков берёт в качестве нулевого по счёту, или порядку, приближения к произвольному действительному числу a целую часть этого числа, предварительно увеличенного на 1/2, сохраняемую

двойным обращением общего алгоритма этого метода, и тем самым ближайшее к числу a целое число

$$a_0 = [a + 1/2].$$

При этом, если дробная часть {a} числа a равна 1/2, то берётся большее из двух равноудалённых целых чисел, то есть

$$]a[= [a] + 1,$$

а не

$$[a] =]a[- 1.$$

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений

абсолютных величин последовательных остатков вычисляет нулевой по счёту, или порядку, остаток

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

как разность между действительным числом a и его нулевым по счёту, или порядку, приближением a_0.

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] = 0,$$

$$a = a_0 = [a + 1/2],$$

то данное действительное число a является целым и равно целой части $[a + 1/2]$, а вся система разложения и приближения этого числа сводится к этому единственному нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2].$$

Если этот нулевой по счёту, или порядку, остаток r_0 не равен нулю:

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2] \neq 0,$$

то абсолютная величина $|r_0|$ этого остатка r_0 обращается, берётся потолок этого обращения, предварительно уменьшенного на 1/2, умножается на функцию знака (sign r_0) этого остатка r_0:

$$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|r_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - a_0| - 1/2[=$$

$$(\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - [a + 1/2]| - 1/2[$$

и ставится в знаменатель первой единичной др<u>о</u>би

$$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|r_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - a_0| - 1/2[=$$

$$(\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - [a + 1/2]| - 1/2[$$

разложения

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k,$$

$$k \in N = \{1, 2, 3, 4, ...\},$$

$$z_k \in Z \setminus \{0\} = \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, ...\}$$

этого действительного числа a, прибавляемой к его нулевому по счёту, или порядку, приближению a_0.

Имеются три исключающие друг друга равносильные возможности умножения на функцию знака (sign r_{k-1}) любого последовательного остатка r_{k-1}:

1. На функцию знака остатка непременно после взятия потолка в делителе единицы умножается только знаменатель единичной дроби, который в итоге приобретает знак остатка и может быть или

положительным, или отрицательным целым числом, что подчёркивается обозначением $1/z_k$. При этом числитель единичной дроби является непременно положительной единицей.

2. На функцию знака остатка умножается только числитель единичной дроби, который становится единицей со знаком остатка и может быть или положительной, или отрицательной единицей, что подчёркивается обозначением

$$(\mathrm{sign}\ r_{k-1})/]1/|r_{k-1}| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_{k-1})/]1/|a - a_{k-1}| - 1/2[=$$

$$(\mathrm{sign}\ r_{k-1})/]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k-1}1/z_j| - 1/2[.$$

При этом знаменатель единичной дроби является непременно положительным целым числом.

3. На функцию знака остатка умножается только единичная дробь в целом, то есть функция знака остатка определяет знак дроби в целом, который ставится перед дробью. Это предпочтительный вариант после завершения действий с данным остатком и особенно для окончательного выражения разложения требуемого действительного числа. При этом числитель единичной дроби является непременно положительной единицей, а знаменатель единичной дроби является непременно положительным целым числом.

Первая единичная дробь прибавляется к нулевому по счёту, или порядку, приближению a_0 этого действительного числа a. Эта сумма даёт первое приближение

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$$

к данному действительному числу a, а вычитание первого приближения из этого числа даёт первый остаток

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1.$$

Если он равен нулю:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 = 0,$$

$$a = a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1,$$

то вся система разложения и приближения этого числа a сводится к нулевому приближению

$$a = a_0 = [a + 1/2]$$

и первому приближению

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1,$$

и процесс разложения и приближения этого числа a завершается этим первым приближением.

А если первый остаток r_1 отличен от нуля:

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 \neq 0,$$

то абсолютная величина $|r_1|$ первого остатка r_1 обращается, берётся потолок этого обращения, предварительно уменьшенного на 1/2, умножается на функцию знака ($\text{sign}\ r_1$) этого остатка r_1:

$$z_2 = (\text{sign}\ r_1)]1/|r_1| - 1/2[= (\text{sign}\ r_1)]1/|a - a_1| - 1/2[=$$

$$(\text{sign}\ r_1)]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| - 1/2[$$

и ставится в знаменатель второй единичной дроби

$$1/z_2 = (\text{sign}\ r_1)/]1/|r_1| - 1/2[= (\text{sign}\ r_1)/]1/|a - a_1| - 1/2[=$$

$$(\text{sign}\ r_1)/]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| - 1/2[.$$

Вторая единичная дробь $1/z_2$ складывается с первым приближением a_1 к данному действительному числу a, что

даёт второе приближение к данному действительному числу a

$$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2.$$

Второе приближение a_2 вычитается из данного действительного числа a. Эта разность даёт второй остаток

$$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2.$$

Общие формулы для ряда, его частичных сумм как последовательных приближений, остатков, знаменателей единичных дробей и самих единичных дробей соответственно по общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений

абсолютных величин последовательных остатков имеют вид:

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{\infty}1/z_k,$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j,$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j,$$

$$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|r_k| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - a_k| - 1/2[=$$

$$(\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j| - 1/2[,$$

$$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|r_k| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - a_k| - 1/2[=$$

$$(\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j| - 1/2[.$$

Такой процесс продолжается бесконечно тогда и только тогда, когда действительное число a иррационально. Такой процесс завершается, когда очередной остаток r_k

аннулируется, и это происходит тогда и только тогда, когда действительное число a рациональн<u>о</u>.

<u>Замечание</u>. Никаких априорных ограничений на знаки всех этих потолков не накладывается. Поэтому любой из этих потолков, являющийся знаменателем соответствующей единичной др<u>о</u>би, может быть как положительным, так и отрицательным целым числом. Нулевым может быть только потолок самог<u>о</u> числ<u>а</u>, предварительно уменьшенного на 1/2. Абсолютная величина каждого остатка меньше единицы. Абсолютная величина обращения каждого остатка поэтому больше единицы. Следовательно, абсолютная величина потолка предварительно

уменьшенного на 1/2 обращения каждого остатка не меньше единицы.

Для того, чтобы знакопеременное гармоническое разложение действительного числа а было конечным, необходимо и достаточно, чтобы действительное число а было рациональным числом.

Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков даёт именно выборочное знакопеременное гармоническое разложение действительного числа а.

2.11. ИССЛЕДОВАНИЯ ТОЧНОСТИ И СКОРОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПО ОБЩИМ МЕТОДАМ И МЕТОДОЛОГИЯМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, ВКЛЮЧАЯ СРАВНЕНИЯ С ИЗВЕСТНЫМИ МЕТОДАМИ

Представляется целесообразным провести испытания на примерах основания e натуральных логарифмов (числа Эйлера), отношения π длины окружности к её диаметру и золотого сечения Ф. Можно было бы дополнительно взять и противоположные им числа, поскольку при смене знака действительного числа его дробная часть остаётся неотрицательной и меньшей, чем единица, однако изменяется тогда и только тогда, когда она отличается от 1/2, в частности для всех трёх указанных чисел e, π и Ф. Затем будут использованы специально выбранные дополнительные испытательные числа.

СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) e, ОТНОШЕНИЯ π ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ И ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ Φ С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k, π_k И Φ_k К ЭТИМ ПОСТОЯННЫМ СООТВЕТСТВЕННО, ДАВАЕМЫХ МЕТОДАМИ РЯДОВ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА, МЕТОДОМ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ, МЕТОДОМ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ И ОБЩИМИ МЕТОДАМИ И МЕТОДОЛОГИЯМИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

ОСНОВАНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛО ЭЙЛЕРА)

$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995... = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, ...] = \lim (2, 3, 8/3, 11/4, 19/7, 87/32, 106/39, 193/71, ...) = \Sigma_{k=0}^{\infty} 1/k!$.

ОТНОШЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ

$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 4... = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, ...] = \lim (3, 22/7, 333/106, 355/113, 103993/33102, 104348/33215, ...)$.

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

$\Phi = (5^{1/2} + 1)/2 = 1.61803398874989484820458683436563811772030917980576... = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...] = \lim (3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, 55/34, 89/55, ...)$.

2.11.1. СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА e С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ МЕТОДАМИ РЯДОВ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА, МЕТОДОМ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ, МЕТОДОМ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ И ОБЩИМИ МЕТОДАМИ И МЕТОДОЛОГИЯМИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

ОСНОВАНИЕ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛО ЭЙЛЕРА)

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995... = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, ...] = \lim (2, 3, 8/3, 11/4, 19/7, 87/32, 106/39, 193/71, ...) = \Sigma_{k=0}{}^{\infty} 1/k!.$$

2.11.1.1. СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА e С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ МЕТОДАМИ РЯДОВ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$e_0 = 1;$

$e_1 = \underline{2};$

$e_2 = \underline{2}.5;$

$e_3 = \underline{2}.6666666666...;$

$e_4 = \underline{2.7}083333333...;$

$e_5 = \underline{2.71}66666666... .$

Вычисление приближений первых порядков:

$e =$

$\underline{2.71}828182845904523536028747135266249775724709369995...$

$e = \Sigma_{k=0}^{\infty} 1/k! = 1/0! + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! + ...$

$e_0 = 1/0! = 1$

$e_1 = 1/0! + 1/1! = \underline{2}$

$e_2 = 1/0! + 1/1! + 1/2! = 2 + 1/2 = 5/2 = \underline{2}.5$

$e_3 = 1/0! + 1/1! + 1/2! + 1/3! = 2 + 2/3 = 8/3 = \underline{2}.6666666666...$

$e_4 = 1/0! + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! = 2 + 17/24 = 65/24 =$

$\underline{2.7}083333333...$

$e_5 = 1/0! + 1/1! + 1/2! + 1/3! + 1/4! + 1/5! = 2 + 43/60 =$

$163/60 = \underline{2.71}66666666...$

2.11.1.2. СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА e С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ МЕТОДОМ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$e_0 = \underline{2}$;

$e_1 = \underline{2.7}$;

$e_2 = \underline{2.7}2$;

$e_3 = \underline{2.718}$;

$e_4 = \underline{2.718}3$;

$e_5 = \underline{2.71828}$.

2.11.1.3. СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА e С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ МЕТОДОМ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$e_0 = \underline{2};$$

$$e_1 = 3;$$

$$e_2 = \underline{2}.6666666666...;$$

$$e_3 = \underline{2.7}5;$$

$$e_4 = \underline{2.71}42857143...;$$

$$e_5 = \underline{2.718}75.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$e =$

$2.71828182845904523536028747135266249775724709369995... =$

$[2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, ...]$

$e_0 = \underline{2}$

$e_1 = 2 + 1/1 = 3$

$e_2 = 2 + 1/(1 + 1/2) = 2 + 2/3 = 8/3 = \underline{2}.6666666666...$

$e_3 = 2 + 1/(1 + 1/(2 + 1/1)) = 2 + 3/4 = 11/4 = \underline{2.7}5$

$e_4 = 2 + 1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/1))) = 2 + 5/7 = 19/7 =$

$\underline{2.71}4285714...$

$e_5 = 2 + 1/(1 + 1/(2 + 1/(1 + 1/(1 + 1/4)))) = 2 + 23/32 = 87/32 =$

$\underline{2.718}75$

2.11.1.4. СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА e С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩИМ МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ОБРАЩЁННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ ДРОБНОЙ ЧАСТИ В ЗНАМЕНАТЕЛЯХ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$e_0 = \underline{2};$$

$$e_1 = \underline{2}.5;$$

$$e_2 = \underline{2.7};$$

$$e_3 = \underline{2.718}1818181818;$$

$$e_4 = \underline{2.718281828}1828;$$

$$e_5 = \underline{2.7182818284590452353}21585\ldots\ .$$

Вычисление приближений первых порядков:

$e =$

$2.71828182845904523536028747135266249775724709369995\ldots$

$e = 2 + 1/2 + 1/5 + 1/55 + 1/9999 + 1/3620211523 + \ldots$

$e_0 = \underline{2} < e = \underline{2}.71828182845904523536028\ldots$

$e_1 = 2 + 1/2 = 5/2 = \underline{2}.5 < e = \underline{2.7}1828182845904523536028 7\ldots$

$e_2 = 2 + 1/2 + 1/5 = 27/10 = \underline{2.7} < e =$

$\underline{2.7}18281828459045235360287\ldots$

$e_3 = 2 + 1/2 + 1/5 + 1/55 = 2 + 79/110 = 299/110 = \underline{2.718}181818... < e = \underline{2.718}28182845904523536028 7...$

$e_4 = 2 + 1/2 + 1/5 + 1/55 + 1/9999 = 271801/99990 = \underline{2.7182818281}828... < e = \underline{2.7182818284}5904523536028 7...$

$e_5 = 2 + 1/2 + 1/5 + 1/55 + 1/9999 + 1/3620211523 = 983977112262913/361984950184770 = \underline{2.718281828459045235}321585... < e = \underline{2.718281828459045235}360287...$

По методу проверки достоверности рационального разложения действительного числа со всеми промежуточными расчётами в обыкновенных дробях проверяется, что для гармонического разложения

действительного числа a и для каждого положительного целого числа k непременно выполнено двойное неравенство

$$[a] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j \leq a < [a] + \Sigma_{j=1}^{k-1} 1/n_j + 1/(n_k - 1) =$$

$$[a] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j + 1/(n_k(n_k - 1)).$$

В данном случае

$$a = e;$$

$$[e] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j \leq e < [e] + \Sigma_{j=1}^{k-1} 1/n_j + 1/(n_k - 1) =$$

$$[e] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j + 1/(n_k(n_k - 1));$$

$$2 + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j \leq e < 2 + \Sigma_{j=1}^{k-1} 1/n_j + 1/(n_k - 1) =$$

$$2 + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j + 1/(n_k(n_k - 1)).$$

Выполнение левых нестрогих неравенств, расчёты для которых уже выполнены, очевидно. Проведём дополнительные расчёты для проверки выполнения правых строгих неравенств.

$k = 1$; $2 + \Sigma_{j=1}^{k-1}1/n_j + 1/(n_k - 1) = 2 + 1/(2 - 1) = 3 > e = \underline{2}.718281828459045235360287...$;

$k = 2$; $2 + \Sigma_{j=1}^{k-1}1/n_j + 1/(n_k - 1) = 2 + 1/2 + 1/(5 - 1) = 11/4 = \underline{2.7}5 > e = \underline{2.7}18281828459045235360287...$;

$k = 3$; $2 + \Sigma_{j=1}^{k-1}1/n_j + 1/(n_k - 1) = 2 + 1/2 + 1/5 + 1/(55 - 1) = 367/135 = \underline{2.718}51... > e = \underline{2.718}281828459045235360287...$;

$k = 4$; $2 + \Sigma_{j=1}^{k-1}1/n_j + 1/(n_k - 1) = 2 + 1/2 + 1/5 + 1/55 + 1/(9999 - 1) = 747378/274945 = \underline{2.7182818}381858189819782 13... > e = \underline{2.7182818}284590452353602 87...$;

$k = 5$; $2 + \Sigma_{j=1}^{k-1}1/n_j + 1/(n_k - 1) = 2 + 1/2 + 1/5 + 1/55 + 1/9999 + 1/(3620211523 - 1) = 81998092665926/30165412507065 = \underline{2.718281828459045235}397886... > e = \underline{2.718281828459045235}360287...$.

2.11.1.5. СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА e С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ЦЕЛЫХ ЧАСТЕЙ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$e_0 = 3;$$

$$e_1 = \underline{2.7}5;$$

$$e_2 = \underline{2.718}75;$$

$$e_3 = \underline{2.7182818}3520599...;$$

$$e_4 = \underline{2.7182818284590452}6684738...;$$

$$e_5 = \underline{2.718281828459045235360287471352662}70286... .$$

$$r_5 = e - e_5 = - 2.051062... \times 10^{-34}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$e =$

$\underline{2.718281828459045235360287471352662}497757247093699995...$

$e = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215180 -$

$1/31759044513137297 - ...$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^k1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k1/z_j$

$z_{k+1} = [1/r_k] = [1/(a - a_k)] = [1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j)]$

$1/z_{k+1} = 1/[1/r_k] = 1/[1/(a - a_k)] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j)]$

$a_0 = [a + 1/2]$

$e_0 = [e + 1/2] = 3$

$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2].$

$r_0 = e - 3 = 2.718281828459045... - 3 = -0.28171817154095...$

$z_1 = [1/r_0] = [1/(a - a_0)] = [1/(a - [a + 1/2])]$

$z_1 = [1/(e - 3)] = [1/(2.718281828459045 - 3)] = [-3.5496467783038] = - 4$

$1/z_1 = 1/[1/r_0] = 1/[1/(a - a_0)] = 1/[1/(a - [a + 1/2])],$

$1/z_1 = - 1/4$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$e_1 = 3 - 1/4 = 11/4 = \underline{2.7}5$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = e - 3 + 1/4 = 2.718281828459045 - 3 + 1/4 = - 0.031718171540955$

$z_2 = [1/r_1]$

$z_2 = [1/(e - 3 + 1/4)] = [1/(2.718281828459045 - 3 + 1/4)] = [- 31.527668570327] = - 32$

$1/z_2 = - 1/32$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2$

$e_2 = 3 - 1/4 - 1/32 = 87/32 = \underline{2.718}75$

$$r_2 = e - 3 + 1/4 + 1/32 = 2.718281828459045 - 3 + 1/4 + 1/32 = - 0.00046817154095491$$

$$z_3 = [1/(e - 3 + 1/4 + 1/32)] = [1/(2.718281828459045 - 3 + 1/4 + 1/32)] = [- 2135.969217523...] = - 2136$$

$$1/z_3 = - 1/2136$$

$$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$$

$$e_3 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 = 23225/8544 = \underline{2.7182818}3520599...$$

$$r_3 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995 - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 = - 6.74694727400... \times 10^{-9}$$

$z_4 = [1/(e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136)] = [1/($
$2.71828182845904523536028747135266249775724709369995 - 3$
$+ 1/4 + 1/32 + 1/2136)] = [-148215179.308...] = - 148215180$

$1/z_4 = - 1/148215180$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$e_4 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215180 = 286858128913/105529208160 =$
$\underline{2.718281828459045}2668473808436468040678985418817530905654 05...$

$r_4 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215180 =$
$2.71828182845904523536028747135266249775724709369995 - 3 + 1/4$
$+ 1/32 + 1/2136 + 1/148215180 = -$
$3.14870933722941415701412947880... \times 10^{-17}$

$z_5 = [1/(e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215180)] =$
$[1/(2.71828182845904523536028747135266249775724709369995 - 3 +$

**1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215180)] = [-
31759044513137296.793122315718...] = - 31759044513137297**

$1/z_5 = - 1/31759044513137297$

$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$

**$e_5 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215180 - 1/31759044513137297 =$
91103400851032439593651600001/33515068193895716697727435200 =
$\underline{2.718281828459045235360287471352662}$702863447909465966024767...**

**$r_5 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215180 + 1/31759044513137297$
= 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995 -
3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215180 + 1/31759044513137297 = -
$2.051062... \times 10^{-34}$**

**e =
$\underline{2.718281828459045235360287471352662}$49775724709369995...**

2.11.1.6. СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА e С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ЦЕЛЫХ ЧАСТЕЙ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$e_0 = 3;$

$e_1 = \underline{2}.666...;$

$e_2 = \underline{2.71}9298245614...;$

$e_3 = \underline{2.71828}0951616...;$

$e_4 = \underline{2.7182818284590}8408663...;$

$$e_5 = \underline{2.7182818284590452353602874}698987\ldots\ .$$

$$r_5 = e - e_5 = 1.453939234\ldots \times 10^{-27}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$e =$

$2.71828182845904523536028747135266249775724709369995\ldots$

$e = 3 - 1/3 + 1/19 - 1/983 + 1/1140455 - 1/2573918440761 6 + \ldots$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{\infty}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)[1/|r_k|] = (\mathrm{sign}\ r_k)[1/|a - a_k|] =$

$(\mathrm{sign}\ r_k)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j|]$

$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|r_k|] = (\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|a - a_k|] =$

$(\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j|]$

$a_0 = [a + 1/2]$

$e_0 = [e + 1/2] = 3$

$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$

$r_0 = e - e_0 = 2.71828182845904523536... - 3 = -0.28171817154095...$

$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|r_0|] = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|a - a_0|] = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|a - [a + 1/2]|]$

$z_1 = - [1/|e - e_0|] = - [1/|e - 3|] = - [1/|2.71828182845904523536 - 3|] = - [|-3.5496467783038|] = - 3$

$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|r_0|] = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|a - a_0|] = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|a - [a + 1/2]|]$

$1/z_1 = - 1/3$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$e_1 = 3 - 1/3 = 8/3 = \underline{2}.666...$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = e - 3 + 1/3 = 2.718281828459045235 36 - 3 + 1/3 = 0.051615161792378$

$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|r_1|] = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - a_1|] = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|]$

$z_2 = [1/(e - 3 + 1/3)] = [1/(2.71828182845904523536 - 3 + 1/3)] = [19.374152192383] = 19$

$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|r_1|] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - a_1|] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|]$

$1/z_2 = 1/19$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$e_2 = 3 - 1/3 + 1/19 = 155/57 = \underline{2.71}9298245614...$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = e - 3 + 1/3 - 1/19 = 2.718281828459045235 36 - 3 + 1/3 - 1/19 = - 0.00101641715499$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|r_2|]$

$z_3 = - [1/|e - 3 + 1/3 - 1/19|] = - [|1/(2.71828182845904523536 - 3 + 1/3 - 1/19)|] = - [|-983.84801465676|] = - [983.84801465676] = - 983$

$1/z_3 = - 1/983$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$e_3 = 3 - 1/3 + 1/19 - 1/983 = 152308/56031 = \underline{2.71828}0951616...$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$r_3 = e - 3 + 1/3 - 1/19 + 1/983 = 2.71828182845904523536 - 3 + 1/3 - 1/19 + 1/983 = 8.7684297555 9645 \times 10^{-7}$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)[1/|e - 3 + 1/3 - 1/19 + 1/983|] = [|$
$1/(2.71828182845904523536 - 3 + 1/3 - 1/19 + 1/983)|] = [|$
$1140455.0505|] = 1140455$

$1/z_4 = 1/1140455$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$e_4 = 3 - 1/3 + 1/19 - 1/983 + 1/1140455 =$
$173700476171/63900834105 = \underline{2.718281828459}08408663...$

$r_4 = e - 3 + 1/3 - 1/19 + 1/983 - 1/1140455 =$
$2.71828182845904523536028747135266249775724709369995 - 3$
$+ 1/3 - 1/19 + 1/983 - 1/1140455 = - 3.885126988 \times 10^{-14}$

$z_5 = (\mathrm{sign}\ r_4)[1/|e - 3 + 1/3 - 1/19 + 1/983 - 1/1140455|] = (-$
$3.885126988 \times 10^{-14})[1/|$
$2.71828182845904523536028747135266249775724709369995 - 3$

+ 1/3 - 1/19 + 1/983 - 1/1140455|] = - [25739184407616.96...] = - 25739184407616

$1/z_5 = - 1/25739184407616$

$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$

e_5 = 3 - 1/3 + 1/19 - 1/983 + 1/1140455 - 1/25739184407616 = 1490302862618671286028077/548251784276387571514560 = 2.7182818284590452353602874698987...

r_5 = e - 3 + 1/3 - 1/19 + 1/983 - 1/1140455 + 1/25739184407616 = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995 - 3 + 1/3 - 1/19 + 1/983 - 1/1140455 + 1/25739184407616 = 1.453939234... $\times 10^{-27}$

e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...

2.11.1.7. СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА e С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ПОТОЛКОВ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$e_0 = 3;$$

$$e_1 = \underline{2.7}5;$$

$$e_2 = \underline{2.71}774...;$$

$$e_3 = \underline{2.718281}60089...;$$

$$e_4 = \underline{2.718281828459}004376...;$$

$$e_5 = \underline{2.71828182845904523536028747}03478... .$$

$$r_5 = e_5 = 1.0048065061450165 \times 10^{-27}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$e =$

2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...

$e = 3 - 1/4 - 1/31 + 1/1853 + 1/4394297 + 1/24474279195116 + ...$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$z_{k+1} =]1/r_k[=]1/(a - a_k)[=]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j)[$

$1/z_{k+1} = 1/]1/r_k[= 1/]1/(a - a_k)[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j)[$

$e = 3 - 1/4 - 1/31 + 1/1853 + 1/4394297 + 1/24474279195116 + ...$

$a_0 = [a + 1/2]$

$e_0 = [e + 1/2] = 3$

$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$

$r_0 = e - e_0 = 2.71828182845904523536... - 3 = -$
$0.28171817154095...$

$z_1 =]1/r_0[=]1/(a - a_0)[=]1/(a - [a + 1/2])[$

$z_1 =]1/r_0[=]1/(e - 3)[=]1/(2.718281828459045235 36 - 3)$
$[=]- 3.5496467783038[= - 4$

$1/z_1 = 1/]1/r_0[= 1/]1/(a - a_0)[= 1/]1/(a - [a + 1/2])[$

$1/z_1 = 1/(- 4) = - 1/4$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$e_1 = 3 - 1/4 = 11/4 = \underline{2.7}5$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = e - 3 + 1/4 = 2.718281828459045235 36 - 3 + 1/4 = -$
$0.031718171540954...$

$z_2 =]1/r_1[=]1/(a - a_1)[=]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1)[$

$z_2 =]1/(e - 3 + 1/4)[=]1/(2.718281828459045235 36 - 3 + 1/4)[=]-$
$31.527668570327[= - 31$

$1/z_2 = 1/]1/r_1[= 1/]1/(a - a_1)[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1)[$

$1/z_2 = 1/(- 31) = - 1/31$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$e_2 = 3 - 1/4 - 1/31 = 337/124 = \underline{2.71}774...$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = e - 3 + 1/4 + 1/31 = 2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/31$
$= 0.00053989297517 4...$

$z_3 =]1/r_2[$

$z_3 =]1/(e - 3 + 1/4 + 1/31)[=]1/(2.71828182845904523536 - 3 +$
$1/4 + 1/31)[=]1852.21895[= 1853$

$1/z_3 = 1/1853$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$e_3 = 3 - 1/4 - 1/31 + 1/1853 = 624585/229772 = \underline{2.718281}60089...$

$r_3 = e - 3 + 1/4 + 1/31 - 1/1853 =$
$2.718281828459045235 36 - 3 + 1/4 + 1/31 - 1/1853 =$
$2.2756772688 \times 10^{-7}$

$z_4 =]1/(e - 3 + 1/4 + 1/31 - 1/1853)$
$[=]1/(2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/31 - 1/1853)$
$[=]4394296.21101[= 4394297$

$1/z_4 = 1/4394297$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$e_4 = 3 - 1/4 - 1/31 + 1/1853 + 1/4394297 =$
$274461222151 7/100968641028 4 = \underline{2.7182818284590}04376...$

$r_4 = e - 3 + 1/4 + 1/31 - 1/1853 - 1/4394297 = 2.71828182845904523536$
$- 3 + 1/4 + 1/31 - 1/1853 - 1/4394297 = 4.08592217171 2 \times 10^{-14}$

$z_5 =]1/(e - 3 + 1/4 + 1/31 - 1/1853 - 1/4394297)$

$[=]1/(2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/31 - 1/1853 - 1/4394297)[=]24474279195115.398[= 24474279195116$

$a_5 = [a] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$

$1/z_5 = 1/24474279195116$

$e_5 = 3 - 1/4 - 1/31 + 1/1853 + 1/4394297 + 1/24474279195116 = 83965507239669536428651 57/3088918388100632358121618 = \underline{2.71828182845904523536028747}034785599\ldots$

$r_5 = e - 3 + 1/4 + 1/31 - 1/1853 - 1/4394297 - 1/24474279195116 = 1.004806506145016 5 \times 10^{-27}$

$e = \underline{2.71828182845904523536028747}135266249775724709369995\ldots$

2.11.1.8. СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА e С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ПОТОЛКОВ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$e_0 = 3;$

$$e_1 = \underline{2.7}5;$$

$$e_2 = \underline{2.718}75;$$

$$e_3 = \underline{2.7182818}3520599...;$$

$$e_4 = \underline{2.7182818284590452}66847...;$$

$$e_5 = \underline{2.718281828459045235360287471352662}70286... .$$

$$r_5 = e - e_5 = - 2.051062... \times 10^{-34}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$e =$

$2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...$

$e = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215180 - 1/3175904451313729 7 -$

$...$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{\infty}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|r_k|[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - a_k|[=$

$(\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j|[$

$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|r_k|[= (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - a_k|[=$

$(\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j|[$

$a_0 = [a + 1/2]$

$e_0 = [e + 1/2] = 3$

$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$

$r_0 = e - e_0 = 2.71828182845904523536... - 3 = - 0.28171817154095...$

$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|r_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - a_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - [a + 1/2]|[$

$z_1 = -]1/|e - e_0|[= -]1/|e - 3|[= -]1/|2.71828182845904523536 - 3|[= -$

$]|-3.5496467783038|[= - 4$

$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|r_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - a_0|[=$

$(\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - [a + 1/2]|[$

$1/z_1 = - 1/4$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$e_1 = 3 - 1/4 = 11/4 = \underline{2.7}5$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = e - 3 + 1/4 = 2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 = -$

0.031718171540955

$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|r_1|[= (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|a - a_1|[=$

$(\mathrm{sign}\ r_1)]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|[$

$z_2 = -]|1/(e - 3 + 1/4)|[= -]|1/(2.71828182845904523536 - 3 + 1/4)|[=$

$-]|-31.52766857...|[= - 32$

$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|r_1|[= (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - a_1|[=$

$(\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|[$

$1/z_2 = - 1/32$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$e_2 = 3 - 1/4 - 1/32 = 87/32 = \underline{2.7187}5$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = e - e_2 = e - 3 + 1/4 + 1/32 = 2.718281828459045235360 - 3 + 1/4 + 1/32 = - 0.00046817154...$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|r_2|[$

$z_3 = -]1/|e - 3 + 1/4 + 1/32|[= -]|1/(2.718281828459045235360 - 3 + 1/4 + 1/32)|[= -]|-2135.9692...|[= -]2135.9692...[= - 2136$

$1/z_3 = - 1/2136$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$e_3 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 = 23225/8544 = \underline{2.71828183}520599...$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$r_3 = e - e_3 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 =$

$2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 = -$

$6.746947274... \times 10^{-9}$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)]1/|r_3|[$

$z_4 = - [1/|e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136|] = -]|$

$1/(2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/32 +$

$1/2136)|[= -]|-148215179.308...|[=$

$-]148215179.308...[= - 148215180$

$1/z_4 = - 1/148215180$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$e_4 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215180 =$

$286858128913/105529208160 = \underline{2.7182818284590452}66847...$

$r_4 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215180 = - 3.1487... \times 10^{-17}$

$z_5 = (\text{sign } r_4)]1/|r_4|[$

$z_5 = -]1/|e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215180|[=$

$-]31759044513137296.793[= - 31759044513137297$

$1/z_5 = - 1/31759044513137297$

$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$

$e_5 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215180 - 1/31759044513137297 =$

$9110340085103243959365160001/3351506819389571669772743520 =$

$\underline{2.718281828459045235360287471352662}70286...$

$r_5 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215180 +$

$1/31759044513137297 = - 2.051062... \times 10^{-34}$

$e = \underline{2.718281828459045235360287471352662}49775724709369995...$

2.11.1.9. СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА e С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ЦЕЛЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО

УВЕЛИЧЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$e_0 = 3;$$

$$e_1 = \underline{2.7}5;$$

$$e_2 = \underline{2.718}75;$$

$$e_3 = \underline{2.7182818}3520599...;$$

$$e_4 = \underline{2.7182818284590452}21326...;$$

$$e_5 = \underline{2.7182818284590452353602874713526624}66029... .$$

$$r_5 = e - e_5 = 3.1727849153611 \times 10^{-35}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...$

$$e_5 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215179 + 1/71254486395929520 + \dots$$

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$$

$$z_{k+1} = [1/r_k + 1/2] = [1/(a - a_k) + 1/2] = [1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j) + 1/2]$$

$$1/z_{k+1} = 1/[1/r_k + 1/2] = 1/[1/(a - a_k) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j) + 1/2]$$

$$e = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215179 + 1/71254486395929520 + \dots$$

$$a_0 = [a + 1/2]$$

$$e_0 = [e + 1/2] = 3$$

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

$$r_0 = e - e_0 = 2.718281828459045235 36\dots - 3 = - 0.28171817154095\dots$$

$$z_1 = [1/r_0 + 1/2] = [1/(a - a_0) + 1/2] = [1/(a - [a + 1/2]) + 1/2]$$

$z_1 = [1/(e - e_0) + 1/2] = [1/(e - 3) + 1/2] = [1/(2.718281828459045235 36 - 3) + 1/2] = [-3.5496467783038 + 1/2] = [-3.0496467783038] = -4$

$1/z_1 = 1/[1/r_0 + 1/2] = 1/[1/(a - a_0) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2]) + 1/2]$

$1/z_1 = 1/(- 4) = - 1/4$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$e_1 = 3 - 1/4 = 11/4 = \underline{2.7}5$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = e - 3 + 1/4 = 2.718281828459045235 36 - 3 + 1/4 = -0.031718171540955$

$z_2 = [1/r_1 + 1/2] = [1/(a - a_1) + 1/2] = [1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) + 1/2]$

$z_2 = [1/(e - 3 + 1/4) + 1/2] = [1/(2.718281828459045235 36 - 3 + 1/4) + 1/2] = [-31.527668570327 + 1/2] = [-31.027668570327] = - 32$

$1/z_2 = 1/[1/r_1 + 1/2] = 1/[1/(a - a_1) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) + 1/2]$

$1/z_2 = - 1/32$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$e_2 = 3 - 1/4 - 1/32 = 87/32 = \underline{2.718}75$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = e - 3 + 1/4 + 1/32 = 2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/32 = - 0.00046817154095491$

$z_3 = [1/r_2 + 1/2]$

$z_3 = [1/(e - 3 + 1/4 + 1/32) + 1/2] = [1/(2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/32) + 1/2] = [-2135.969217523 + 1/2] = [- 2135.469217523] = - 2136$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$1/z_3 = - 1/2136$

$e_3 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 = 23225/8544 = \underline{2.7182818}3520599...$

$$r_3 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 = 2.718281828459045235 36 - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 = -6.746947274 \times 10^{-9}$$

$$z_4 = [1/(e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136) + 1/2] = [1/(2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136) + 1/2] = [-148215179.3 + 1/2] = [-148215178.8] = -148215179$$

$$1/z_4 = -1/148215179$$

$$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$$

$$e_4 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215179 = 3442297523731/1266350489376 = \underline{2.7182818284590452}21326...$$

$$r_4 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179 = 2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179 = 1.40342040281287 6 \times 10^{-17}$$

$z_5 = [1/(e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179) + 1/2] =$
$[7125448639592951 9.8389 + 1/2] = [7125448639592952 0.3389] =$
$7125448639592952 0$

$1/z_5 = 1/7125448639592952 0$

$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$

$e_5 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215179 + 1/7125448639592952 0$
$=$
$5109982126571508641674040177/1879857369119185044716766 2$
$40 = \underline{2.71828182845904523536028747135266 24}66029...$

$r_5 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179 -$
$1/71254486395929520 = 3.1727849153611 \times 10^{-35}$

$e =$
$\underline{2.718281828459045235360287471352662 4}9775724709369995...$

2.11.1.10. СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА e С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ЦЕЛЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО

УВЕЛИЧЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$e_0 = 3;$$

$$e_1 = \underline{2.7}5;$$

$$e_2 = \underline{2.718}75;$$

$$e_3 = \underline{2.7182818}3520599...;$$

$$e_4 = \underline{2.718281828459045}21326...;$$

$$e_5 = \underline{2.7182818284590452353602874713526624}66029... .$$

$$r_5 = e - e_5 = 3.1727849153611 \times 10^{-35}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...$

$e = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215179 + 1/71254486395929520 + ...$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^k1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k1/z_j$

$z_{k+1} = (\text{sign } r_k)[1/|r_k| + 1/2] = (\text{sign } r_k)[1/|a - a_k| + 1/2] = (\text{sign } r_k)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k1/z_j| + 1/2]$

$1/z_{k+1} = (\text{sign } r_k)/[1/|r_k| + 1/2] = (\text{sign } r_k)/[1/|a - a_k| + 1/2] = (\text{sign } r_k)/[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k1/z_j| + 1/2]$

$a_0 = [a + 1/2]$

$e_0 = [e + 1/2] = 3$

$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$

$r_0 = e - e_0 = 2.71828182845904523536... - 3 = - 0.28171817154095...$

$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|r_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|a - a_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|a - [a + 1/2]| + 1/2]$

$z_1 = (\mathrm{sign}(e - e_0))[1/|e - e_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}(e - 3))[1/|e - 3| + 1/2] = - [1/|e - 3| + 1/2] = - [3.5496467783038449 + 1/2] = - [4.0496467783038449] = - 4$

$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|r_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|a - a_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|a - [a + 1/2]| + 1/2]$

$1/z_1 = 1/(- 4) = - 1/4$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$e_1 = 3 - 1/4 = 11/4 = \underline{2.7}5$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = e - 3 + 1/4 = 2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 = - 0.031718171540955$

$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|r_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - a_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| + 1/2]$

$z_2 = (\mathrm{sign}(e - 3 + 1/4))[1/|e - 3 + 1/4| + 1/2] = (\mathrm{sign}(-0.0317181715409 55))[31.5276685703270049 + 1/2] = -[32.0276685703270049] = -32$

$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|r_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - a_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| + 1/2]$

$1/z_2 = -1/32$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$e_2 = 3 - 1/4 - 1/32 = 87/32 = \underline{2.718}75$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = e - 3 + 1/4 + 1/32 = 2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/32 = -0.00046817154095491$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|r_2| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|a - a_2| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^2 1/z_j| + 1/2]$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|r_2| + 1/2] = (\mathrm{sign}(e - 3 + 1/4 + 1/32))[1/|e - 3 + 1/4 + 1/32| + 1/2] = (\mathrm{sign}(- 0.00046817154095491))[2135.9692175236711732 + 1/2] = - [2136.4692175236711732] = - 2136$

$1/z_3 = - 1/2136$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$e_3 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 = 23225/8544 = \underline{2.71828183}520599...$

$r_3 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 = 2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 = - 6.746947274 \times 10^{-9}$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)[1/|r_3| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_3)[1/|a - a_3| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_3)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^3 1/z_j| + 1/2]$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)[1/|r_3| + 1/2] = (\mathrm{sign}(e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136))[1/|e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136| + 1/2] = (\mathrm{sign}(-6.746947274 \times 10^{-9}))$

$[148215179.308299735817781 + 1/2] = -$

$[148215179.808299735817781] = - 148215179$

$1/z_4 = - 1/148215179$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$e_4 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215179 =$

$3442297523731/1266350489376 = \underline{2.7182818284590452}21326...$

$r_4 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179 =$

$2.718281828459045235 36 - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179$

$= 1.40342040281287 6 \times 10^{-17}$

$z_5 = (\mathrm{sign}\ r_4)[1/|r_4| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_4)[1/|a - a_4| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_4)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{4}1/z_j| + 1/2]$

$z_5 = (\mathrm{sign}\ r_4)[1/|r_4| + 1/2] = (\mathrm{sign}(e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179))[1/|e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179| + 1/2]$
$= (\mathrm{sign}(1.40342040281287 6 \times 10^{-17}))$
$[71254486395929519.838911306166214 + 1/2] =$
$[71254486395929520.338911306166214] = 71254486395929520$

$1/z_5 = 1/71254486395929520$

$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$

$e_5 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215179 + 1/71254486395929520$
$= 5109982126571508641674040177/1879857369119185044716766240$
$= \underline{2.7182818284590452353602874713526624}66029...$

$r_5 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179 - 1/71254486395929520 = 3.1727849153611 \times 10^{-35}$

$e = \underline{2.7182818284590452353602874713526624}9775724709369995...$

2.11.1.11. СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА e С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО

УМЕНЬШЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$e_0 = 3;$$

$$e_1 = \underline{2.7}5;$$

$$e_2 = \underline{2.718}75;$$

$$e_3 = \underline{2.7182818}3520599...;$$

$$e_4 = \underline{2.7182818284590452}21326...;$$

$$e_5 = \underline{2.7182818284590452353602874713526624}66029... .$$

$$r_5 = e - e_5 = 3.1727849153611 \times 10^{-35}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...$

$e = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215179 + 1/7125448639592952 0 + \ldots$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^\infty 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j$

$z_{k+1} =]1/r_k - 1/2[=]1/(a - a_k) - 1/2[=]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j) - 1/2[$

$1/z_{k+1} = 1/]1/r_k - 1/2[= 1/]1/(a - a_k) - 1/2[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j) - 1/2[$

$a_0 = [a + 1/2]$

$e_0 = [e + 1/2] = 3$

$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$

$r_0 = e - e_0 = 2.718281828459045235 36\ldots - 3 = - 0.28171817154095\ldots$

$z_1 =]1/r_0 - 1/2[=]1/(a - a_0) - 1/2[=]1/(a - [a + 1/2]) - 1/2[$

$z_1 =]1/r_0 - 1/2[=]1/(2.71828182845904523536 - 3) - 1/2[=]-3.5496467783038 - 1/2[=]-4.0496467783038[= - 4$

$1/z_1 = 1/]1/r_0 - 1/2[= 1/]1/(a - a_0) - 1/2[= 1/]1/(a - [a + 1/2]) - 1/2[$

$1/z_1 = - 1/4$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$e_1 = 3 - 1/4 = 11/4 = \underline{2.7}5$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = e - 3 + 1/4 = 2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 = - 0.031718171540955$

$z_2 =]1/r_1 - 1/2[=]1/(a - a_1) - 1/2[=]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) - 1/2[$

$z_2 =]1/(e - 3 + 1/4) - 1/2[=]1/(2.71828182845904523536 - 3 + 1/4) - 1/2[=]-31.527668570327 - 1/2[=]- 32.027668570327[= - 32$

$1/z_2 = 1/]1/r_1 - 1/2[= 1/]1/(a - a_1) - 1/2[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) - 1/2[$

$1/z_2 = - 1/32$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$e_2 = 3 - 1/4 - 1/32 = 87/32 = \underline{2.718}75$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = e - 3 + 1/4 + 1/32 = 2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/32 = -0.00046817154095491$

$z_3 =]1/r_2 - 1/2[$

$z_3 =]1/(e - 3 + 1/4 + 1/32) - 1/2[=]1/(2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/32) - 1/2[=]-2135.969217523 - 1/2[=]-2136.469217523[= -2136$

$1/z_3 = - 1/2136$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$e_3 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 = 23225/8544 = \underline{2.7182818}3520599...$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...$

$r_3 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 = 2.718281828459045235 36 - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 = -6.746947274 \times 10^{-9}$

$z_4 =]1/(e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136) - 1/2[=]1/(2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136) - 1/2[=]-148215179.3 - 1/2[=]-148215179.8[= - 148215179$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$1/z_4 = - 1/148215179$

$e_4 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215179 = 3442297523731/1266350489376 = \underline{2.718281828459045}221326...$

$r_4 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179 = 2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179 = 1.40342040281 2876 \times 10^{-17}$

$z_5 =]1/(e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179) -$
$1/2[=]7125448639592951 9.8389 -$
$1/2[=]71254486395929519.3389[= 71254486395929520$
$1/z_5 = 1/71254486395929520$
$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$
$e_5 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215179 + 1/71254486395929520$
$= 510998212657150864167404017 7/187985736911918504471676624 0$
$=$
$\underline{2.7182818284590452353602874713526624}66029...$
$r_5 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179 -$
$1/71254486395929520 = 3.1727849153611 \times 10^{-35}$
$e =$
$\underline{2.7182818284590452353602874713526624}9775724709369995...$

2.11.1.12. СРАВНЕНИЕ ОСНОВАНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛА ЭЙЛЕРА) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА e С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО

УМЕНЬШЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$e_0 = 3;$$

$$e_1 = \underline{2.7}5;$$

$$e_2 = \underline{2.718}75;$$

$$e_3 = \underline{2.7182818}3520599...;$$

$$e_4 = \underline{2.7182818284590452}21326...;$$

$$e_5 = \underline{2.718281828459045235360287471352662 4}66029... .$$

$$r_5 = e - e_5 = 3.1727849153611 \times 10^{-35}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...$$

$$e = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215179 + 1/71254486395929520 + ...$$

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$$

$$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|r_k| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - a_k| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j| - 1/2[$$

$$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|r_k| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - a_k| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j| - 1/2[$$

$$a_0 = [a + 1/2]$$

$$e_0 = [e + 1/2] = 3$$

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

$$r_0 = e - e_0 = 2.71828182845904523536... - 3 = - 0.28171817154095...$$

$$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|r_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - a_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - [a + 1/2]| - 1/2[$$

$$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|r_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}(e - e_0))]1/|e - e_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}(e - 3))]1/|e - 3| - 1/2[= -]3.5496467783038449 - 1/2[= -]3.0496467783038449[= - 4$$

$$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|r_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - a_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - [a + 1/2]| - 1/2[$$

$$1/z_1 = - 1/4$$

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$$

$$e_1 = 3 - 1/4 = 11/4 = \underline{2.7}5$$

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$$

$$r_1 = e - 3 + 1/4 = 2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 = -0.031718171540955$$

$z_2 = (\text{sign } r_1)]1/|r_1| - 1/2[= (\text{sign } r_1)]1/|a - a_1| - 1/2[= (\text{sign } r_1)]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| - 1/2[$

$z_2 = (\text{sign } r_1)]1/|r_1| - 1/2[= (\text{sign}(e - 3 + 1/4))]1/|e - 3 + 1/4| - 1/2[= (\text{sign}(- 0.031718171540955))]31.5276685703270049 - 1/2[= -]31.0276685703270049[= - 32$

$1/z_2 = (\text{sign } r_1)/]1/|r_1| - 1/2[= (\text{sign } r_1)/]1/|a - a_1| - 1/2[= (\text{sign } r_1)/]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| - 1/2[$

$1/z_2 = - 1/32$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$e_2 = 3 - 1/4 - 1/32 = 87/32 = \underline{2.718}75$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = e - 3 + 1/4 + 1/32 = 2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/32 = - 0.00046817154095491$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|r_2| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|a - a_2| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^2 1/z_j| - 1/2[$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|r_2| - 1/2[= (\mathrm{sign}(e - 3 + 1/4 + 1/32))]1/|e - 3 + 1/4 + 1/32| - 1/2[= (\mathrm{sign}(- 0.00046817154095491))]2135.9692175236711732 - 1/2[= -]2135.9692175236711732 - 1/2[= -]2135.4692175236711732[= - 2136$

$1/z_3 = - 1/2136$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$e_3 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 = 23225/8544 = \underline{2.7182818}3520599...$

$e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...$

$r_3 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 = 2.71828182845904523536 - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 = - 6.746947274 \times 10^{-9}$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)]1/|r_3| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_3)]1/|a - a_3| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_3)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{3} 1/z_j| - 1/2[$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)]1/|r_3| - 1/2[= (\mathrm{sign}(e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136))]1/|e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136| - 1/2[= (\mathrm{sign}(- 6.746947274 \times 10^{-9}))]148215179.308299735817781 - 1/2[=$

$-]148215178.808299735817781[= - 148215179$

$1/z_4 = - 1/148215179$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$e_4 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215179 = 3442297523731/1266350489376 = \underline{2.7182818284590452}21326...$

$r_4 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179 = 2.718281828459045235 36 - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179 = 1.40342040281287 6 \times 10^{-17}$

$$\mathbf{z_5 = (sign\ r_4)]1/|r_4| - 1/2[= (sign\ r_4)]1/|a - a_4| - 1/2[= (sign\ r_4)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{4}1/z_j| - 1/2[}$$

$$\mathbf{z_5 = (sign\ r_4)]1/|r_4| - 1/2[= (sign(e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179))]1/|e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179| - 1/2[= (sign(1.403420402812876 \times 10^{-17}))]7125448639592 9519.838911306166214 - 1/2[=]7125448639592 9519.338911306166214[= 71254486395929520}$$

$$\mathbf{1/z_5 = 1/71254486395929520}$$

$$\mathbf{a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5}$$

$$\mathbf{e_5 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215179 + 1/71254486395929520 = 510998212657150864167404017 7/187985736911918504471676624 0 = \underline{2.7182818284590452353602874713526624}66029...}$$

$$\mathbf{r_5 = e - 3 + 1/4 + 1/32 + 1/2136 + 1/148215179 - 1/71254486395929520 = 3.1727849153611 \times 10^{-35}}$$

$$\mathbf{e = \underline{2.7182818284590452353602874713526624}9775724709369995...}$$

2.11.1.13. СРАВНЕНИЕ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ ПЕРВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ОСНОВАНИЮ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА) e С ОСТАТКАМИ r_k ПО МЕТОДАМ РЯДОВ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА, МЕТОДУ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ, МЕТОДУ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ И ОБЩИМ МЕТОДАМ И МЕТОДОЛОГИЯМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Метод	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	$e-e_5$
Ряды Тейлора, Маклорена	1	2	2.5	2.666...	2.708333...	2.71666...	10^{-3}
Десятичные дроби	2	2.7	2.72	2.718	2.7183	2.71828	10^{-6}
Непрерывные дроби	2	3	2.6...	2.75	2.7142857...	2.71875	10^{-4}
$[a]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}[$	2	2.5	2.7	2.71818	2.718281828...	2.71828182845904523532 1...	10^{-20}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}]$	3	2.7	2.718	2.7182818	2.71828182845904 52	2.718281828459045235360287471352662	10^{-34}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/[1/\|r_{j-1}\|]$	3	2.6	2.719	2.71828	2.7182818284590	2.7182818284590452353602874	10^{-27}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}[$	3	2.7	2.717	2.718281	2.7182818284590	2.7182818284590452353602874 7	10^{-27}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/]1/\|r_{j-1}\|[$	3	2.7	2.718	2.7182818	2.7182818284590452	2.718281828459045235360287471352662	10^{-34}

$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}{}^{k}1/[1/r_{j-1}+1/2]$	3	2.7	2.718	2.7182818	2.7182818284590452	2.718281828459045235360287471352662 4	10^{-35}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}{}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/[1/\lvert r_{j-1}\rvert+1/2]$	3	2.7	2.718	2.7182818	2.7182818284590452	2.718281828459045235360287471352662 4	10^{-35}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}{}^{k}1/]1/r_{j-1}-1/2[$	3	2.7	2.718	2.7182818	2.7182818284590452	2.718281828459045235360287471352662 4	10^{-35}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}{}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/]1/\lvert r_{j-1}\rvert-1/2[$	3	2.7	2.718	2.7182818	2.7182818284590452	2.718281828459045235360287471352662 4	10^{-35}
ЧИСЛО ЭЙЛЕРА e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...							

Сравнение вычисленных всеми указанными методами пятых приближений e_5 расставляет эти методы по качеству полученных приближений к основанию натуральных логарифмов (числу Эйлера) следующим образом:

1...4. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков.

1...4. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков.

1...4. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков.

1...4. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков.

$$e_5 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215179 + 1/71254486395929520$$

$$= \underline{2.7182818284590452353602874713526624}66029\ldots .$$

$$r_5 = e - e_5 = 3.1727849153611 \times 10^{-35}.$$

34 верных десятичных знака после запятой.

5...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков.

5...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков.

$$e_5 = 3 - 1/4 - 1/32 - 1/2136 - 1/148215180 - 1/31759044513137297 = \underline{2.718281828459045235360287471352662}70286\ldots .$$

$$r_5 = e - e_5 = - 2.051062 \times 10^{-34}.$$

33 верных десятичных знака после запятой.

7. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков.

$$e_5 = 3 - 1/4 - 1/31 + 1/1853 + 1/4394297 + 1/24474279195116 = \underline{2.71828182845904523536028747}03478\ldots\,.$$

$$r_5 = e - e_5 = 1.0048065061450165 \times 10^{-27}.$$

26 верных десятичных знаков после запятой.

8. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков.

$$e_5 = 3 - 1/3 + 1/19 - 1/983 + 1/1140455 - 1/25739184407616 = \underline{2.7182818284590452353602874}698987\ldots .$$

$$r_5 = e - e_5 = 1.453939234\ldots \times 10^{-27}.$$

25 верных десятичных знаков после запятой.

9. Общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях.

$$e_5 = 2 + 1/2 + 1/5 + 1/55 + 1/9999 + 1/3620211523 =$$

$$\underline{2.7182818284590452353}21585\ldots\ .$$

19 верных десятичных знаков после запятой.

По общему методу гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях верхняя оценка погрешности пятого приближения e_5 к числу e выражается следующим образом:

$$0 \leq \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/n_j = a - a_k = a - [a] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/n_j < 1/(n_k - 1) - 1/n_k = 1/(n_k(n_k - 1));$$

$$0 < e - e_5 = e - (2 + 1/2 + 1/5 + 1/55 + 1/9999 + 1/3620211523) < 1/(3620211523 \times 3620211522) = 1/13105931467641768006 = 7.6301329857323 \times 10^{-20}.$$

Действительная погрешность составляет

$$e - e_5 = \underline{2.7182818284590452353}60287... - \underline{2.7182818284590452353}21585... = 0{,}000000000000000000038702... = 3.8702 \times 10^{-20},$$

то есть менее 51 % указанной верхней оценки.

10. Метод десятичных дробей.

$e_5 = \underline{2{,}71828}$. 5 верных десятичных знаков после запятой.

11. Метод непрерывных (цепных) дробей.

$e_5 = \underline{2.718}75$. 3 верных десятичных знака после запятой.

12. Методы рядов Тейлора и Маклорена.

$e_5 = \underline{2.71}66666666\ldots$. 2 верных десятичных знака после запятой.

2.11.1.14. АНАЛИЗ ИТОГОВ СРАВНЕНИЯ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ ПЕРВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ e_k К ОСНОВАНИЮ НАТУРАЛЬНЫХ ЛОГАРИФМОВ (ЧИСЛУ ЭЙЛЕРА) e С ОСТАТКАМИ r_k ПО МЕТОДАМ РЯДОВ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА, МЕТОДУ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ, МЕТОДУ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ И ОБЩИМ МЕТОДАМ И МЕТОДОЛОГИЯМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Эти итоги кажутся весьма неожиданными, однако имеют свои вполне логичные объяснения.

1. Наилучшие и при этом одинаковые итоги даются всеми четырьмя общими методологиями знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел. Задача приближения основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) е не разделяет эти четыре общие методологии.

2. На порядок хуже предыдущих следующие по качеству одинаковые итоги пары общих методологий знакопеременных гармонических

разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков и выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков. Задача приближения основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) e не разделяет эти две общие методологии.

3. На семь порядков хуже предыдущих следующие по качеству различные итоги пары общих методологий знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений

последовательных остатков (несколько лучше) и выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков (несколько хуже). Задача приближения основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) e разделяет эти две общие методологии.

3. На семь порядков хуже предыдущих следующие по качеству различные итоги пары общих методологий знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков (несколько лучше) и

выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков (несколько хуже). Задача приближения основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) e разделяет эти две общие методологии.

4. На семь порядков хуже предыдущих следующие по качеству итоги наилучшего среди знакопостоянных общего метода гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях. Этот общий метод осуществляет из каждого остатка дробной части

действительного числа последовательное выделение именно наибольшего возможного элемента гармонического ряда, то есть дроби с единичным числителем, знаменателем которой является наименьшее возможное натуральное число. Так что каждый шаг общего метода гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях является наилучшим для наибольшего возможного ускорения сходимости избранной части гармонического ряда путём оставления наименьшего возможного нового остатка

дробной части действительного числа. Поэтому именно общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях всегда обеспечивает наилучший возможный выбор ряда непременно положительных единичных, или аликвотных, дробей и является наилучшим возможным с точки зрения ускорения сходимости последовательности приближений частными суммами наличной части гармонического ряда.

5. Метод десятичных дробей, несмотря на возможные изменения в последовательности наличных цифр дробной части действительного числа, даёт универсальную верхнюю оценку погрешности отбрасывания всех цифр, начиная с некоторой цифры, единицей последней оставляемой цифры. Эти универсальные верхние оценки погрешностей для последовательности всех приближений образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой обратен основанию системы счисления m и составляет 1/m. В наших примерах

$m = 10$,

$1/m = 1/10$.

Поэтому метод десятичных дробей обеспечивает по закону убывающей геометрической прогрессии для верхних оценок погрешностей такую сходимость последовательных приближений, которую можно считать естественной, нормальной, стандартной, средней.

6. Метод непрерывных (цепных) дробей даёт наилучшие последовательные рациональные приближения действительных чисел попеременно снизу и сверху именно по критерию малости

знаменателей этих приближений как несократимых дробей, но отнюдь не по критерию ускорения сходимости последовательности этих приближений, особенно при частоте небольших, начиная с наименьших возможных, то есть единичных, неполных частных как целых частей знаменателей непрерывной, или цепной, дроби. Так, для основания натуральных логарифмов (числа Эйлера)

$$e = 2.718281828459045235360287471352662497757247093699995... = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, ...]$$

последовательность этих неполных частных

1, 2, 1, 1, 4, 1, ...

складывается их тройками с единицами по краям и медленно растущими чётными серединами. Относительно малые, в частности по сравнению с десятью, неполные частные ведут к медленным росту знаменателей последовательных приближений и уменьшению их погрешностей по сравнению с даваемыми методом десятичных дробей. Метод непрерывных (цепных) дробей обеспечит более быструю сходимость приближений, чем метод десятичных дробей, лишь начиная с тех приближений, для которых указанные чётные

середины вырастут хотя бы до десятков. Но это повлияет только на достаточно далёкие цифры основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) после запятой, лежит далеко за пределами и практической значимости, и наших рассмотрений, ограничивающихся лишь несколькими важнейшими первыми приближениями, и имеет сугубо теоретическое значение, однако важное для именно глубокого понимания сути дела.

7. Методы рядов Тейлора и Маклорена применяются в настоящей научной монографии только для представления и приближения основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) ввиду удобства и широкой известности соответствующего ряда обратных факториалов. Для чисел, превышающих большее единицы основание показательной функции, то есть знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, факториал умножается на больший и при этом далее растущий множитель и поэтому растёт быстрее этой показательной функции, или возрастающей

геометрической прогрессии. Методы рядов Тейлора и Маклорена обеспечат более быструю сходимость приближений, чем метод десятичных дробей, лишь начиная с приближений с индексами более 10. Но это повлияет только на достаточно далёкие цифры основания натуральных логарифмов (числа Эйлера) после запятой, лежит далеко за пределами и практической значимости, и наших рассмотрений, ограничивающихся лишь несколькими важнейшими первыми приближениями, и имеет сугубо теоретическое значение, однако важное для именно глубокого понимания сути дела.

2.11.2. СРАВНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ π С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ МЕТОДОМ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ, МЕТОДОМ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ И ОБЩИМИ МЕТОДАМИ И

МЕТОДОЛОГИЯМИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ОТНОШЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ

π = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974... = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, ...] = lim (3, 22/7, 333/106, 355/113, 103993/33102, 104348/33215, ...).

2.11.2.1. СРАВНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ π С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ МЕТОДОМ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$\pi_0 = \underline{3};$

$\pi_1 = \underline{3.1};$

$\pi_2 = \underline{3.14};$

$\pi_3 = \underline{3.14}2;$

$\pi_4 = \underline{3.141}6;$

$\pi_5 = \underline{3.14159}.$

2.11.2.2. СРАВНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ π С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ МЕТОДОМ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\pi_0 = \underline{3};$$

$$\pi_1 = \underline{3.14}2857...;$$

$$\pi_2 = \underline{3.1415}0943...;$$

$$\pi_3 = \underline{3.1415929}2035...;$$

$$\pi_4 = \underline{3.1415926530}1... .$$

Вычисление приближений первых порядков:

$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 4...$

$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, ...]$

$\pi_0 = \underline{3}$

$\pi_1 = 3 + 1/7 = 22/7 = \underline{3.14}2857...$

$\pi_2 = 3 + 1/(7 + 1/15) = 3 + 2/3 = 333/106 = \underline{3.1415}0943...$

$\pi_3 = 3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/1)) = 3 + 16/113 = 355/113 = \underline{3.1415929}2035...$

$\pi_4 = 3 + 1/(7 + 1/(15 + 1/(1 + 1/292))) = 3 + 4687/33102 = 103993/33102 = \underline{3.141592653}01...$

2.11.2.3. СРАВНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ π С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩИМ МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ОБРАЩЁННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ ДРОБНОЙ ЧАСТИ В ЗНАМЕНАТЕЛЯХ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\pi_0 = \underline{3};$$

$$\pi_1 = \underline{3.1}25;$$

$$\pi_2 = \underline{3.141}3934426...;$$

$$\pi_3 = \underline{3.1415926}458...;$$

$$\pi_4 = \underline{3.14159265358979323}232... .$$

$$r_4 = \pi - \pi_4 = 6.1378186... \times 10^{-18}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$\pi = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209 74...$

$\pi = 3 + 1/8 + 1/61 + 1/5020 + 1/128541455 + ...$

$\pi_0 = \underline{3} < \pi = \underline{3}.14159265358979323846...$

$\pi_1 = 3 + 1/8 = 25/8 = \underline{3.1}25 < \pi = \underline{3.1}4159265358979323846...$

$\pi_2 = 3 + 1/8 + 1/61 = 1533/488 = \underline{3.141}3934426... < \pi = \underline{3.141}59265358979323846...$

$\pi_3 = 3 + 1/8 + 1/61 + 1/5020 = 1924037/612440 = \underline{3.1415926}458... < \pi = \underline{3.1415926}5358979323846...$

$\pi_4 = 3 + 1/8 + 1/61 + 1/5020 + 1/128541455 = 9892740642651/3148957148008 = \underline{3.14159265358979323}232... < \pi = \underline{3.14159265358979323}846...$

По методу проверки достоверности рационального разложения действительного числа со всеми промежуточными расчётами в обыкновенных дробях проверяется, что для гармонического разложения действительного числа a и для каждого положительного целого числа k непременно выполнено двойное неравенство

$$[a] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j \le a < [a] + \Sigma_{j=1}^{k-1} 1/n_j + 1/(n_k - 1) =$$
$$[a] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j + 1/(n_k(n_k - 1)).$$

В данном случае

$$\mathbf{a = \pi;}$$

$$[\pi] + \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/n_j \leq \pi < [\pi] + \Sigma_{j=1}{}^{k-1} 1/n_j + 1/(n_k - 1) =$$

$$[\pi] + \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/n_j + 1/(n_k(n_k - 1));$$

$$3 + \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/n_j \leq \pi < 3 + \Sigma_{j=1}{}^{k-1} 1/n_j + 1/(n_k - 1) =$$

$$3 + \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/n_j + 1/(n_k(n_k - 1)).$$

Выполнение левых нестрогих неравенств, расчёты для которых уже выполнены, очевидно. Проведём дополнительные расчёты для проверки выполнения правых строгих неравенств.

$k = 1;\ 3 + \Sigma_{j=1}^{k-1}1/n_j + 1/(n_k - 1) = 3 + 1/(8 - 1) = 3 + 1/7 = 22/7 = \underline{3.14}2857142857... > \pi = \underline{3.14}159265358979323846...;$

$k = 2;\ 3 + \Sigma_{j=1}^{k-1}1/n_j + 1/(n_k - 1) = 3 + 1/8 + 1/(61 - 1) = 377/120 = \underline{3.141}6666... > \pi = \underline{3.141}59265358979323846...;$

$k = 3;\ 3 + \Sigma_{j=1}^{k-1}1/n_j + 1/(n_k - 1) = 3 + 1/8 + 1/61 + 1/(5020 - 1) = 76946015/2449272 = \underline{3.1415926}855000... > \pi = \underline{3.1415926}5358979323846...;$

$k = 4;\ 3 + \Sigma_{j=1}^{k-1}1/n_j + 1/(n_k - 1) = 3 + 1/8 + 1/61 + 1/5020 + 1/(128541455 - 1) = 12365925707119/3936196404388 0 = \underline{3.1415926535897932}9284... > \pi = \underline{3.1415926535897932}3846...\ .$

2.11.2.4. СРАВНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ π С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ЦЕЛЫХ ЧАСТЕЙ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\pi_0 = \underline{3};$$

$$\pi_1 = \underline{3.14}2857...;$$

$$\pi_2 = \underline{3.141592}920354...;$$

$$\pi_3 = \underline{3.141592653589}8578...;$$

$$\pi_4 = \underline{3.14159265358979323846264338}5978... .$$

$$r_4 = \pi - \pi_4 = - 2.6985671... \times 10^{-27}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 4...$

$\pi = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748630 - 1/15487322375986 - ...$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N} 1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j$

$z_{k+1} = [1/r_k] = [1/(a - a_k)] = [1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j)]$

$1/z_{k+1} = 1/[1/r_k] = 1/[1/(a - a_k)] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j)]$

$a_0 = [a + 1/2]$

$\pi_0 = [\pi + 1/2] = \underline{3}$

$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$

$r_0 = 3.14159265358979323846... - 3 = 0.14159265358979323846...$

$z_1 = [1/r_0] = [1/(a - a_0)] = [1/(a - [a + 1/2])]$

$z_1 = [1/r_0] = [1/0.14159265358979323846...] = [7.0625...] = 7$

$1/z_1 = 1/[1/r_0] = 1/[1/(a - a_0)] = 1/[1/(a - [a + 1/2])]$

$1/z_1 = 1/7$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$\pi_1 = 3 + 1/7 = 22/7 = \underline{3.14}2857...$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1.$

$r_1 = \pi - 3 - 1/7 = - 0.0012644892673497$

$z_2 = [1/r_1] = [1/(a - a_1)] = [1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1)]$

$z_2 = [1/(\pi - 3 - 1/7)] = [- 790.833] = - 791$

$1/z_2 = 1/[1/r_1] = 1/[1/(a - a_1)] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1)],$

$1/z_2 = - 1/791$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2,$

$\pi_2 = 3 + 1/7 - 1/791 = 355/113 = \underline{3.1415929}20354...$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2.$

$r_2 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 = 3.14159265358979323846 - 3 - 1/7 + 1/791 = -2.6676418917685 \times 10^{-7}$

$z_3 = [1/r_2]$

$z_3 = [1/(\pi - 3 - 1/7 + 1/791)] = [1/(3.14159265358979323846 - 3 - 1/7 + 1/791)] = [-3748629.0910548] = - 3748630$

$1/z_3 = - 1/3748630$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$\pi_3 = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748630 = 1330763537/423595190 = \underline{3.14159265358}985780740...$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j$

$r_3 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748630 = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209 74 - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748630 = - 6.456894 \times 10^{-14}$

$z_4 = [1/(\pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748630)] = [1/(3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 4$

$- 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748630)] = [-$

$15487322375985.3527] = - 15487322375986$

$1/z_4 = - 1/15487322375986$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$\pi_4 = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748630 - 1/15487322375986$

$=$

$125670511608085058703/40002166246628299435$

$= \underline{3.14159265358979323846264338}5978...$

$r_4 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748630 + 1/15487322375986 =$

$- 2.6985671... \times 10^{-27}$

$\pi = \underline{3.14159265358979323846264338}3279502884197169399375105820974...$

2.11.2.5. СРАВНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ π С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ЦЕЛЫХ ЧАСТЕЙ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\pi_0 = 3;$$

$$\pi_1 = \underline{3.14}2857...;$$

$$\pi_2 = \underline{3.14159}13200723...;$$

$$\pi_3 = \underline{3.1415926535}9058...;$$

$$\pi_4 = \underline{3.141592653589793238462643}0769547... .$$

$$r_4 = \pi - \pi_4 = 3.0632479319 \times 10^{-25}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$\pi =$

$\underline{3.141592653589793238462643}38327950288419716939937510582$
$0974...$

$\pi = 3 + 1/7 - 1/790 + 1/749896 - 1/1270073831726 + ...$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{\infty}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$$z_{k+1} = (\text{sign } r_k)[1/|r_k|] = (\text{sign } r_k)[1/|a - a_k|] = (\text{sign } r_k)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j|]$$

$$1/z_{k+1} = (\text{sign } r_k)/[1/|r_k|] = (\text{sign } r_k)/[1/|a - a_k|] = (\text{sign } r_k)/[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j|]$$

$$a_0 = [a + 1/2]$$

$$\pi_0 = [\pi + 1/2] = 3$$

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

$$r_0 = \pi - \pi_0 = 3.14159265358979323846... - 3 = 0.14159265358979323846...$$

$$z_1 = (\text{sign } r_0)[1/|r_0|] = (\text{sign } r_0)[1/|a - a_0|] = (\text{sign } r_0)[1/|a - [a + 1/2]|]$$

$$z_1 = [1/|\pi - \pi_0|] = [1/|\pi - 3|] = [|1/(3.14159265358979323846 - 3)|] = [|7.0625133059311|] = 7$$

$1/z_1 = (\text{sign } r_0)/[1/|r_0|] = (\text{sign } r_0)/[1/|a - a_0|] = (\text{sign } r_0)/[1/|a - [a + 1/2]|]$

$1/z_1 = 1/7$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$\pi_1 = 3 + 1/7 = 22/7 = \underline{3.14}2857...$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = \pi - 3 - 1/7 = 3.14159265358979323846 - 3 - 1/7 = -0.0012644892673497$

$z_2 = (\text{sign } r_1)[1/|r_1|] = (\text{sign } r_1)[1/|a - a_1|] = (\text{sign } r_1)[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|]$

$z_2 = - [1/|\pi - 3 - 1/7|] = - [|1/(3.14159265358979323846 - 3 - 1/7)|] = - [|-790.83312592753|] = - 790$

$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|r_1|] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - a_1|] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|]$

$1/z_2 = - 1/790$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$\pi_2 = 3 + 1/7 - 1/790 = 17373/5530 = \underline{3.14159}13200723...$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = \pi - 3 - 1/7 + 1/790 = 3.14159265358979323846 - 3 - 1/7 + 1/790 = 0.00000133351746$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|r_2|]$

$z_3 = [1/|\pi - 3 - 1/7 + 1/790|] = [|1/(3.14159265358979323846 - 3 - 1/7 + 1/790)|] = [|749896.44282948|] = [749896.44] = 749896$

$1/z_3 = 1/749896$

$\mathbf{a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3}$

$\mathbf{\pi_3 = 3 + 1/7 - 1/790 + 1/749896 = 930567767/296208920 =}$
$\mathbf{\underline{3.1415926535}9058...}$

$\mathbf{r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j}$

$\mathbf{r_3 = \pi - 3 - 1/7 + 1/790 - 1/749896 =}$
$\mathbf{3.14159265358979323846 - 3 - 1/7 + 1/790 - 1/749896 = -}$
$\mathbf{7.873558 \times 10^{-13}}$

$\mathbf{z_4 = (sign\ r_3)[1/|r_3|]}$

$\mathbf{z_4 = - [1/|\pi - 3 - 1/7 + 1/790 - 1/749896|] = -}$
$\mathbf{[|1/(3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494 - 3 - 1/7 + 1/790 - 1/749896)|] = - [|1270073831726.494|] = -}$
$\mathbf{1270073831726}$

$1/z_4 = - 1/1270073831726$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$\pi_4 = 3 + 1/7 - 1/790 + 1/749896 - 1/1270073831726 =$

$844206978224358119 23/268719427154157 28280 =$

$\underline{3.14159265358979323846264 3}0769547...$

$r_4 = \pi - 3 - 1/7 + 1/790 - 1/749896 + 1/1270073831726 =$

$3.0632479319 \times 10^{-25}$

$z_5 = (\operatorname{sign} r_4)[1/|r_4|]$

$z_5 = [1/|\pi - 3 - 1/7 + 1/790 - 1/749896 + 1/1270073831726|]$

$= [3264508855407706377676178.56957] =$

$3264508855407706377676178$

$1/z_5 = 1/3264508855407706377676178$

$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$

$\pi_5 = 3 + 1/7 - 1/790 + 1/749896 - 1/1270073831726 + 1/326450885540770637767 6178 =$
$137796057810519891300914308921650725410599287/43861847478241626200978912253639808938456920 =$
$3.141592653589793238462643383279502884197169399375159266927...$

$r_5 = \pi - 3 - 1/7 + 1/790 - 1/749896 + 1/1270073831726 - 1/3264508855407706377676178 = - 5.344595... \times 10^{-50}$

$\pi =$
$3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974...$

2.11.2.6. СРАВНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ π С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ПОТОЛКОВ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

$$\pi_0 = \underline{3};$$

$$\pi_1 = \underline{3.1}25;$$

$$\pi_2 = \underline{3.141}393442623...;$$

$$\pi_3 = \underline{3.1415926}458102...;$$

$$\pi_4 = \underline{3.14159265358979323}23248... .$$

$$r_4 = \pi - \pi_4 = 6.1378186... \times 10^{-18}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$\pi =$

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 4...

$\pi = 3 + 1/8 + 1/61 + 1/5020 + 1/128541455 + ...$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k \in N} 1/z_k$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j$$

$$z_{k+1} =]1/r_k[=]1/(a - a_k)[=]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j)[$$

$$1/z_{k+1} = 1/]1/r_k[= 1/]1/(a - a_k)[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j)[$$

$$a_0 = [a + 1/2]$$

$$\pi_0 = 3$$

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

$$r_0 = 3.14159265358979323846... - 3 = 0.14159265358979323846...$$

$$z_1 =]1/r_0[=]1/(a - a_0)[=]1/(a - [a + 1/2])[$$

$$z_1 =]1/(\pi - 3)[=]7.0625...[= 8$$

$1/z_1 = 1/]1/r_0[= 1/]1/(a - a_0)[= 1/]1/(a - [a + 1/2])[$

$1/z_1 = 1/8$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$\pi_1 = 3 + 1/8 = 25/8 = \underline{3.1}25$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = \pi - 3 - 1/8 = 3.14159265358979323846 - 3 - 1/8 =$
0.016592653589793

$z_2 =]1/r_1[$

$z_2 =]1/(\pi - 3 - 1/8)[=]1/(3.14159265358979323846 - 3 - 1/8)[=$
$]60.267635588749[= 61$

$1/z_2 = 1/61$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2$

$\pi_2 = 3 + 1/8 + 1/61 = 1533/488 = \underline{3.141}39344262\ldots$

$r_2 = \pi - 3 - 1/8 - 1/61 = 3.14159265358979323846 - 3 - 1/8 - 1/61 = 0.0001992109668423$

$z_3 = \,]1/(\pi - 3 - 1/8 - 1/61)[\, = \,]1/(3.14159265358979323846 - 3 - 1/8 - 1/61)[\, = \,]5019.8039588435[\, = 5020$

$1/z_3 = 1/5020$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$\pi_3 = 3 + 1/8 + 1/61 + 1/5020 = 1924037/612440 = \underline{3.1415926}458102...$

$r_3 = \pi - 3 - 1/8 - 1/61 - 1/5020 = 3.14159265358979323846 - 3 - 1/8 - 1/61 - 1/5020 = 7.7795912994494 \times 10^{-9}$

$z_4 = \,]1/(\pi - 3 - 1/8 - 1/61 - 1/5020)[\, =$

$]1/(3.14159265358979323846264338327950288419716939937510$

5820974 - 3 - 1/8 - 1/61 - 1/5020)[=]128541454.898585...[= 128541455

$$1/z_4 = 1/128541455$$

$$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$$

$$\pi_4 = 3 + 1/8 + 1/61 + 1/5020 + 1/128541455 = 9892740642651/3148957148008 = \underline{3.14159265358979323}23248...$$

$$r_4 = \pi - 3 - 1/8 - 1/61 - 1/5020 - 1/128541455 = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974 - 3 - 1/8 - 1/61 - 1/5020 - 1/128541455 = 6.1378186... \times 10^{-18}$$

$$\pi = \underline{3.14159265358979323}8462643383279502884197169399375105820974...$$

2.11.2.7. СРАВНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ π С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ПОТОЛКОВ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$\pi_0 = 3$;

$\pi_1 = \underline{3.1}25$;

$\pi_2 = \underline{3.141}3934426229...$;

$\pi_3 = \underline{3.1415926}4581020...$;

$\pi_4 = \underline{3.14159265358979323}23248...$.

$r_4 = \pi - \pi_4 = 6.13781860... \times 10^{-18}$.

Вычисление приближений первых порядков:

$\pi =$
3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974...

$\pi = 3 + 1/8 + 1/61 + 1/5020 + 1/128541455 + ...$

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{\infty} 1/z_k$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$$

$$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|r_k|[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - a_k|[=$$

$$(\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j|[$$

$$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|r_k|[= (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - a_k|[=$$

$$(\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j|[$$

$$a_0 = [a + 1/2]$$

$$\pi_0 = [\pi + 1/2] = 3$$

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

$$r_0 = \pi - \pi_0 = 3.14159265358979323846... - 3 =$$

$$0.14159265358979323846...$$

$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|r_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - a_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - [a + 1/2]||[$

$z_1 =]1/|\pi - \pi_0|[=]1/|\pi - 3|[=]|1/(3.14159265358979323846 - 3)|[=]|7.0625133059311|[= 8$

$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|r_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - a_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - [a + 1/2]||[$

$1/z_1 = 1/8$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$\pi_1 = 3 + 1/8 = 25/8 = \underline{3.1}25$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$$r_1 = \pi - 3 - 1/8 = 3.14159265358979323846 - 3 - 1/8 = 0.016592653589793$$

$$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|r_1|[= (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|a - a_1|[= (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|[$$

$$z_2 =]1/|\pi - 3 - 1/8|[=]|1/(3.14159265358979323846 - 3 - 1/8)|[=]|60.267635588749|[= 61$$

$$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|r_1|[= (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - a_1|[= (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|[$$

$$1/z_2 = 1/61$$

$$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$$

$$\pi_2 = 3 + 1/8 + 1/61 = 1533/488 = \underline{3.141}393426229...$$

$$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$$

$r_2 = \pi - 3 - 1/8 - 1/61 = 3.14159265358979323846 - 3 - 1/8 - 1/61 = 0.0001992109668423$

$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|r_k|[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - a_k|[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j|[$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|r_2|[$

$z_3 =]1/|\pi - 3 - 1/8 - 1/61|[=]|1/(3.14159265358979323846 - 3 - 1/8 - 1/61)|[=]|5019.8039|[=]5019.8039[= 5020$

$1/z_3 = 1/5020$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$\pi_3 = 3 + 1/8 + 1/61 + 1/5020 = 1924037/612440 = \underline{3.1415926}4581020...$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$

$r_3 = \pi - 3 - 1/8 - 1/61 - 1/5020 = 3.14159265358979323846 - 3 - 1/8 - 1/61 - 1/5020 = 7.779591422... \times 10^{-9}$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)]1/|r_3|[$

$z_4 =]1/|\pi - 3 - 1/8 - 1/61 - 1/5020|[=]|1/(3.14159265358979323846 - 3 - 1/8 - 1/61 - 1/5020)|[=]|128541454.898585...|[= 128541455$

$1/z_4 = 1/128541455$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$\pi_4 = 3 + 1/8 + 1/61 + 1/5020 + 1/128541455 = 9892740642651/3148957148008 = \underline{3.14159265358979323}23248...$

$r_4 = \pi - 3 - 1/8 - 1/61 - 1/5020 - 1/128541455 = 6.13781860... \times 10^{-18}$

$\pi = \underline{3.14159265358979323}8462643383279502884197169399375105820974...$

2.11.2.8. СРАВНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ π С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ЦЕЛЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УВЕЛИЧЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\pi_0 = \underline{3};$$

$$\pi_1 = \underline{3.14}2857...;$$

$$\pi_2 = \underline{3.141592}920354...;$$

$$\pi_3 = \underline{3.1415926535897}86644...;$$

$$\pi_4 = \underline{3.1415926535897932384626433832}80258... .$$

$$r_4 = \pi - \pi_4 = - 7.555737478355... \times 10^{-31}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$$\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974...$$

$$\pi = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748629 + 1/151648960887729 - ...$$

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k \in N} 1/z_k$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$$

$$z_{k+1} = [1/r_k + 1/2] = [1/(a - a_k) + 1/2] = [1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j) + 1/2]$$

$$1/z_{k+1} = 1/[1/r_k + 1/2] = 1/[1/(a - a_k) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j) + 1/2]$$

$$a_0 = [a + 1/2]$$

$$\pi_0 = 3$$

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

$$r_0 = 3.14159265358979323846... - 3 = 0.14159265358979323846...$$

$$z_1 = [1/r_0 + 1/2] = [1/(a - a_0) + 1/2] = [1/(a - [a]) + 1/2]$$

$z_1 = [1/r_0 + 1/2] = [1/0.14159265358979323846... + 1/2] = [7.0625... + 1/2] = 7$

$1/z_1 = 1/[1/r_0 + 1/2] = 1/[1/(a - a_0) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2]) + 1/2]$

$1/z_1 = 1/7$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$\pi_1 = 3 + 1/7 = 22/7 = \underline{3.14}2857...$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = \pi - 3 - 1/7 = - 0.0012644892673497$

$z_2 = [1/r_1 + 1/2] = [1/(a - a_1) + 1/2] = [1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) + 1/2]$

$z_2 = [1/(\pi - 3 - 1/7) + 1/2] = [- 790.833... + 1/2] = [- 790.333...] = - 791$

$1/z_2 = 1/[1/r_1 + 1/2] = 1/[1/(a - a_1) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) + 1/2]$

$1/z_2 = - 1/791$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$\pi_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = 3 + 1/7 - 1/791 = 355/113 = \underline{3.141592}920354...$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 = 3.14159265358979323846 - 3 - 1/7 + 1/791 = - 2.6676418917685 \times 10^{-7}$

$z_3 = [1/r_2 + 1/2]$

$z_3 = [1/(\pi - 3 - 1/7 + 1/791) + 1/2] = [1/(3.14159265358979323846$
$- 3 - 1/7 + 1/791) + 1/2] = [- 3748629.0910548 + 1/2] = - 3748629$

$1/z_3 = - 1/3748629$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$\pi_3 = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748629 = 1330763182/423595077 =$
$\underline{3.1415926535897}86644...$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$\pi =$
$\underline{3.14159265358979323846264338}3279...$

$r_3 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629 = 3.14159265358979323846 - 3$
$- 1/7 + 1/791 + 1/3748629 = - 6.4797482599 \times 10^{-15}$

$z_4 = [1/(\pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629) + 1/2] =$
$[1/(3.14159265358979323846264338327950288419716939937510$

$5820974 - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629) + 1/2] =$
$[151648960887729.017 + 1/2] = [151648960887729.517] =$
151648960887729

$1/z_4 = 1/151648960887729$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$\pi_4 = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748629 + 1/151648960887729 =$
$67269617912649404129585/21412584421402518036711 =$
$\underline{3.14159265358979323846264338328}025845794500490401234431 4783...$

$r_4 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629 - 1/151648960887729 =$
$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 4$
$- 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629 - 1/151648960887729 = -$
$7.555737478355... \times 10^{-31}$

$\pi = \underline{3.1415926535897932384626433832}7950288419716939937510582097 4...$

2.11.2.9. СРАВНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ π С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ЦЕЛЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УВЕЛИЧЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\pi_0 = \underline{3};$$

$$\pi_1 = \underline{3.14}2857...;$$

$$\pi_2 = \underline{3.141592}920354...;$$

$$\pi_3 = \underline{3.1415926535897}86644...;$$

$$\pi_4 = \underline{3.1415926535897932384626433832}80258... .$$

$$r_4 = \pi - \pi_4 = - 7.555737478355... \times 10^{-31}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$\pi =$

$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582$

$0974...$

$\pi = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748629 + 1/151648960887729 - ...$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$$

$$z_{k+1} = (\text{sign } r_k)[1/|r_k| + 1/2] = (\text{sign } r_k)[1/|a - a_k| + 1/2] =$$

$$(\text{sign } r_k)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j| + 1/2]$$

$$1/z_{k+1} = (\text{sign } r_k)/[1/|r_k| + 1/2] = (\text{sign } r_k)/[1/|a - a_k| + 1/2] =$$

$$(\text{sign } r_k)/[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j| + 1/2]$$

$$a_0 = [a + 1/2]$$

$$\pi_0 = 3$$

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

$$r_0 = \pi - \pi_0 = 3.1415926535897932384626433832795 - 3 =$$

$$0.1415926535897932384626433832795$$

$$z_1 = (\text{sign } r_0)[1/|r_0| + 1/2] = (\text{sign } r_0)[1/|a - a_0| + 1/2] =$$

$$(\text{sign } r_0)[1/|a - [a + 1/2]| + 1/2]$$

$z_1 = (\mathrm{sign}(\pi - \pi_0))[1/|\pi - \pi_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}(\pi - 3))[1/|\pi - 3| + 1/2] =$
$(\mathrm{sign}(0.1415926535897932384626433832795))[1/|$
$0.1415926535897932384626433832795| + 1/2] =$
$[7.0625133059310457697930051525707019 + 1/2] =$
$[7.5625133059310457697930051525707019] = 7$

$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|r_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|a - a_0| + 1/2] =$
$(\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|a - [a + 1/2]| + 1/2]$

$1/z_1 = 1/7$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$\pi_1 = 3 + 1/7 = 22/7 = \underline{3.14}2857...$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = \pi - 3 - 1/7 = 3.1415926535897932384626433832795 - 3 - 1/7 =$
$- 0.0012644892673496186802137595776428571428571428571 43$

$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|r_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - a_1| + 1/2] =$
$(\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| + 1/2]$

$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|r_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}(\pi - 3 - 1/7))[1/|\pi - 3 - 1/7| + 1/2] =$
$(\mathrm{sign}(-$
$0.001264489267349618680213759577642857142857142857143))$
$[1/|3.14159265358979323846264338327950 - 3 - 1/7| + 1/2] = -$
$[790.83312592760027455722995983 12 + 1/2] = -$
$[791.3331259276002745572299598312] = - 791$

$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|r_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - a_1| + 1/2] =$
$(\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| + 1/2]$

$1/z_2 = - 1/791$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$\pi_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = 3 + 1/7 - 1/791 = 355/113 = \underline{3.141592}920354...$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 = 3.1415926535897932384626433832795 - 3 - 1/7 + 1/791 = -0.000000266764189062422312368932889380530973451327434$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|r_2| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|a - a_2| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{2}1/z_j| + 1/2]$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|r_2| + 1/2] = (\mathrm{sign}(\pi - 3 - 1/7 + 1/791))[1/|\pi - 3 - 1/7 + 1/791| + 1/2] = (\mathrm{sign}(3.1415926535897932384626433832795 - 3 - 1/7 + 1/791))[1/|3.1415926535897932384626433832795 - 3 - 1/7 + 1/791| + 1/2] = (\mathrm{sign}(-0.000000266764189062422312368932889380530973451327434))$

$[3748629.092662815786801624410635314735194937658538235908798 + 1/2] = -$
$[3748629.592662815786801624410635314735194937658538235908798] = - 3748629$

$1/z_3 = - 1/3748629$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$\pi_3 = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748629 = 1330763182/423595077 =$
$\underline{3.1415926535897}8664...$

$r_3 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629 =$
$3.1415926535897932384626433832795 - 3 - 1/7 + 1/791 +$
$1/3748629 =$
$0.0000000000000065941764067894580850263788594502 48049$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)[1/|r_3| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_3)[1/|a - a_3| + 1/2] =$

$(\mathrm{sign}\ r_3)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{3} 1/z_j| + 1/2]$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)[1/|r_3| + 1/2] = (\mathrm{sign}(\pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629))[1/|\pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629| + 1/2] = (\mathrm{sign}(3.1415926535897932384626433832795 - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629))[1/|3.1415926535897932384626433832795 - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629| + 1/2] = (\mathrm{sign}(0.000000000000006594176406789458085026378859450248049))[151648960887729.01744256631 + 1/2] = [151648960887729.51744256631] = 151648960887729$

$1/z_4 = 1/151648960887729$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$\pi_4 = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748629 + 1/151648960887729 =$
$67269617912649404129585/21412584421402518036711 =$
$3.141592653589793238462643383280258457945004904012344314783...$

$r_4 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629 - 1/151648960887729$
$=$

$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 4 - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629 -$
$1/151648960887729 = - 7.555737478355... \times 10^{-31}$

$\pi =$
$3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582 0974...$

2.11.2.10. СРАВНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ π С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УМЕНЬШЕННЫХ НА 1/2

ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\pi_0 = \underline{3};$$

$$\pi_1 = \underline{3.14}2857...;$$

$$\pi_2 = \underline{3.141592}920354...;$$

$$\pi_3 = \underline{3.1415926535897}8664 4...;$$

$$\pi_4 = \underline{3.1415926535897932384626433832}80258... .$$

$$r_4 = \pi - \pi_4 = - 7.555737478355... \times 10^{-31}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$$\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974\ldots$$

$$\pi = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748629 + 1/151648960887729 - \ldots$$

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$$

$$z_{k+1} =]1/r_k - 1/2[=]1/(a - a_k) - 1/2[=]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j) - 1/2[$$

$$1/z_{k+1} = 1/]1/r_k - 1/2[= 1/]1/(a - a_k) - 1/2[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j) - 1/2[$$

$$a_0 = [a + 1/2]$$

$\pi_0 = 3$

$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$

$r_0 = 3.14159265358979323846... - 3 = 0.14159265358979323846...$

$z_1 =]1/r_0 - 1/2[=]1/(a - a_0) - 1/2[=]1/(a - [a + 1/2]) - 1/2[$

$z_1 =]1/r_0 - 1/2[=]1/0.14159265358979323846... - 1/2[=]7.0625... - 1/2[= 7$

$1/z_1 = 1/]1/r_0 - 1/2[= 1/]1/(a - a_0) - 1/2[= 1/]1/(a - [a + 1/2]) - 1/2[$

$1/z_1 = 1/7 = 0.142857...$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$\pi_1 = 3 + 1/7 = 22/7 = \underline{3.14}2857...$

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$$

$$r_1 = \pi - 3 - 1/7 = - 0.0012644892673497$$

$$z_2 =]1/r_1 - 1/2[=]1/(a - a_1) - 1/2[=]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) - 1/2[$$

$$z_2 =]1/(\pi - 3 - 1/7) - 1/2[=]- 790.833... - 1/2[=]- 791.333...[= - 791$$

$$1/z_2 = 1/]1/r_1 - 1/2[= 1/]1/(a - a_1) - 1/2[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) - 1/2[$$

$$1/z_2 = - 1/791$$

$$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$$

$$\pi_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = 3 + 1/7 - 1/791 = 355/113 = \underline{3.141592}920354...$$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 = 3.14159265358979323846 - 3 - 1/7 + 1/791 = - 2.6676418917685 \times 10^{-7}$

$z_3 =]1/r_2 - 1/2[$

$z_3 =]1/(\pi - 3 - 1/7 + 1/791) - 1/2[=]1/(3.14159265358979323846 - 3 - 1/7 + 1/791) - 1/2[=]-3748629.0910548 - 1/2[= - 3748629$

$1/z_3 = - 1/3748629$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$\pi_3 = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748629 = 1330763182/423595077 = \underline{3.1415926535897}86644...$

$\pi =$

$\underline{3.14159265358979323846264338}3279...$

$r_3 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629 =$

$3.14159265358979323846 - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629 =$

$- 6.4797482599 \times 10^{-15}$

$z_4 =]1/(\pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629) - 1/2[=$

$]1/(3.1415926535897932384626433832795028841971693$

$99375105820974 - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629) -$

$1/2[=]151648960887729.017 -$

$1/2[=]151648960887728.517[= 151648960887729$

$1/z_4 = 1/151648960887729$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$\pi_4 = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748629 + 1/151648960887729 =$
$67269617912649404129585/21412584421402518036711 =$
$\underline{3.1415926535897932384626433832}802584579450049040$
$12344314783...$

$r_4 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629 - 1/151648960887729$
$=$
$3.14159265358979323846264338327950288419716939937$
$5105820974 - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629 -$
$1/151648960887729 = - 7.55573747835 5... \times 10^{-31}$

$\pi =$
$\underline{3.1415926535897932384626433832}795028841971693993$
$75105820974...$

2.11.2.11. СРАВНЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ π С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УМЕНЬШЕННЫХ НА 1/2

ОБРАЩЕНИЙ <u>АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН</u> ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\pi_0 = \underline{3};$$

$$\pi_1 = \underline{3.14}2857...;$$

$$\pi_2 = \underline{3.141592}920354...;$$

$$\pi_3 = \underline{3.1415926535897}86644...;$$

$$\pi_4 = \underline{3.1415926535897932384626433832}80258... .$$

$$r_4 = \pi - \pi_4 = - 7.58457945... \times 10^{-31}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 4...$$

$$\pi = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748629 + 1/15164896088772 9 - ...$$

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$$

$$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|r_k| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - a_k| - 1/2[=$$

$$(\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j| - 1/2[$$

$$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|r_k| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - a_k| - 1/2[=$$

$$(\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j| - 1/2[$$

$$a_0 = [a + 1/2]$$

$$\pi_0 = \underline{3}$$

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

$$r_0 = 3.1415926535897932384626433832795 - 3 =$$

$$0.1415926535897932384626433832795$$

$$z_1 = (\operatorname{sign} r_0)]1/|r_0| - 1/2[= (\operatorname{sign} r_0)]1/|a - a_0| - 1/2[= (\operatorname{sign} r_0)]1/|a - [a + 1/2]| - 1/2[$$

$$z_1 = (\operatorname{sign} r_0)]1/|r_0| - 1/2[= (\operatorname{sign}(3.14159265358979323846264338327950 - 3))]1/|3.14159265358979323846264338327950 - 3| - 1/2[= (\operatorname{sign}(0.14159265358979323846264338327950))]7.062513305931045769793 - 1/2[=]6.562513305931045769793[= 7$$

$$1/z_1 = (\operatorname{sign} r_0)/]1/|r_0| - 1/2[= (\operatorname{sign} r_0)/]1/|a - a_0| - 1/2[= (\operatorname{sign} r_0)/]1/|a - [a + 1/2]| - 1/2[$$

$$1/z_1 = 1/7 = 0.142857\ldots$$

$$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$$

$$\pi_1 = 3 + 1/7 = 22/7 = \underline{3.14}2857\ldots$$

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$$

$$r_1 = \pi - 3 - 1/7 = 3.1415926535897932384626433832795 - 3 - 1/7 = -0.001264489267349618680213759577642857142857142857143$$

$$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|r_1| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|a - a_1| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| - 1/2[$$

$$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|r_1| - 1/2[= (\mathrm{sign}(\pi - 3 - 1/7))]1/|\pi - 3 - 1/7| - 1/2[= (\mathrm{sign}(-0.001264489267349618680213759577642857142857142857143]1/| 3.1415926535897932384626433832795 - 3 - 1/7| - 1/2[=$$

$-]790.833125927600274557229959831204629641450091$
$935454641 - 1/2[=$

$-]791.333125927600274557229959831204629641450091$
$935454641[= - 791$

$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|r_1| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - a_1| - 1/2[=$
$(\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| - 1/2[$

$1/z_2 = - 1/791$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$\pi_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = 3 + 1/7 - 1/791 = 355/113 =$
$\underline{3.141592}920354...$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 =$
$3.1415926535897932384626433832795 - 3 - 1/7 + 1/791 =$
$-$
$0.000000266764189062422312368932889380530973451327434$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|r_2| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|a - a_2| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{2}1/z_j| - 1/2[$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|r_2| - 1/2[= (\mathrm{sign}(\pi - 3 - 1/7 + 1/791))]1/|\pi - 3 - 1/7 + 1/791| - 1/2[=$
$(\mathrm{sign}(3.1415926535897932384626433832795 - 3 - 1/7 + 1/791))]1/|3.1415926535897932384626433832795 - 3 - 1/7 + 1/791| - 1/2[= (\mathrm{sign}(-$

0.0000002667641890624223123689328893805309734513
27434))] 3748629.0926628157868 - 1/2[=
-]3748628.5926628157868[= - 3748629

$1/z_3 = - 1/3748629$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$\pi_3 = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748629 = 1330763182/423595077$
$= \underline{3.14159265358979}86644...$

$r_3 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629 =$
3.14159265358979323846264338327950 - 3 - 1/7 + 1/791 +
1/3748629 =
0.00000000000000065941764067894580850263788594502
48049

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)]1/|r_3| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_3)]1/|a - a_3| - 1/2[=$
$(\mathrm{sign}\ r_3)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{3}1/z_j| - 1/2[$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)]1/|r_3| - 1/2[=$
$(\mathrm{sign}(3.1415926535897932384626433832795 - 3 - 1/7 +$
$1/791 + 1/3748629))]1/|$
$3.1415926535897932384626433832795 - 3 - 1/7 + 1/791 +$
$1/3748629| - 1/2[=$
$(\mathrm{sign}(0.0000000000000659417640678945808502637885$
$9450248049))]1/|3.1415926535897932384626433832795 -$
$3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629| - 1/2[=$
$]15164896088729.01744256631 - 1/2[=$
$]15164896088728.51744256631[= 15164896088729$

$1/z_4 = 1/151648960887729$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$\pi_4 = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748629 + 1/151648960887729 =$
$67269617912649404129585/21412584421402518036711 =$
$\underline{3.14159265358979323846264338328}025845794500490 40$
$12344314783...$

$r_4 = \pi - 3 - 1/7 + 1/791 + 1/3748629 - 1/151648960887729$
$= 3.14159265358979323846264338327 95 - 3 - 1/7 + 1/791$
$+ 1/3748629 - 1/151648960887729 = - 7.58457945... \times 10^{-31}$

$\pi =$
$\underline{3.14159265358979323846264338327}950288419716939937510582$
$0974...$

2.11.2.12. СРАВНЕНИЕ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ ПЕРВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЧИСЛУ π (ОТНОШЕНИЮ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ) С ОСТАТКАМИ r_k ПО МЕТОДУ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ, МЕТОДУ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ И ОБЩИМ МЕТОДАМ И МЕТОДОЛОГИЯМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Метод	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4	$\pi-\pi_4$
Десятичные дроби	3	3.1	3.14	3.142	3.1416	10^{-5}

Ph. D. & Dr. Sc. LEV GRIGOREVIC GELIMSON: СИНЕРГИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ВСЕОБЩИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ, МЕТОДОВ И (МЕТА)МЕТОДОЛОГИЙ (ЛОГИЧЕСКОГО) ВЗВЕШИВАНИЯ И О(БЕС)КОНЕЧИВАНИЯ, МНОГОПОРЯДКОВЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДЕЛОВ И ВЫСОКОТОЧНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 1812/2207

Непрерывные дроби	**3**	**3.1428**	**3.1415094**	**3.14159292035**	**3.14159265301...**	**10^{-10}**
$[a]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}[$	**3**	**3.125**	**3.1413934**	**3.1415926458**	**3.14159265358979323248**	**10^{-18}**
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}]$	**3**	**3.1428**	**3.1415929**	**3.141592653589**	**3.1415926535897932384626433 8**	**10^{-27}**
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/[1/\lvert r_{j-1}\rvert]$	**3**	**3.1428**	**3.1415913**	**3.14159265359**	**3.1415926535897932384626 43**	**10^{-25}**
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}[$	**3**	**3.125**	**3.1413934**	**3.14159264581**	**3.14159265358979323248**	**10^{-18}**
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/]1/\lvert r_{j-1}\rvert[$	**3**	**3.125**	**3.1413934**	**3.14159264581**	**3.14159265358979323248**	**10^{-18}**
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}+1/2]$	**3**	**3.1428**	**3.1415929**	**3.1415926535897**	**3.1415926535897932384626433832 80**	**10^{-31}**
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/[1/\lvert r_{j-1}\rvert+1/2]$	**3**	**3.1428**	**3.1415929**	**3.1415926535897**	**3.141592653589793238462643383280**	**10^{-31}**
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}-1/2[$	**3**	**3.1428**	**3.1415929**	**3.1415926535897**	**3.141592653589793238462643383280**	**10^{-31}**
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/]1/\lvert r_{j-1}\rvert-1/2[$	**3**	**3.1428**	**3.1415929**	**3.1415926535897**	**3.141592653589793238462643383280**	**10^{-31}**

ЧИСЛО π =

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097 4...

Сравнение вычисленных всеми указанными методами четвёртых приближений π_4 расставляет эти методы по качеству полученных приближений к числу π (отношению длины окружности к её диаметру) следующим образом:

1...4. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков.

1...4. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков.

1...4. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков.

1...4. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков.

$$\pi_4 = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748629 + 1/15164896088772 9 =$$

$$\underline{3.1415926535897932384626433832}80258\ldots .$$

$$r_4 = \pi - \pi_4 = - 7.58457945\ldots \times 10^{-31}.$$

28 верных десятичных знаков после запятой.

5. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков.

$$\pi_4 = 3 + 1/7 - 1/791 - 1/3748630 - 1/15487322375986$$

$$= \underline{3.14159265358979323846264338}5978\ldots .$$

$$r_4 = \pi - \pi_4 = - 2.6985671\ldots \times 10^{-27}.$$

26 верных десятичных знаков после запятой.

6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков.

$$\pi_4 = 3 + 1/7 - 1/790 + 1/749896 - 1/1270073831726 =$$

$$\underline{3.141592653589793238462643}0769547\ldots .$$

$$r_4 = \pi - \pi_4 = 3.0632479319 \times 10^{-25}.$$

24 верных десятичных знака после запятой.

7...9. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков.

7...9. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков.

7...9. Общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками

обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях.

$$\pi_4 = 3 + 1/8 + 1/61 + 1/5020 + 1/128541455 =$$

$$\underline{3.14159265358979323}23248\ldots\ .$$

$$r_4 = \pi - \pi_4 = 6.1378186\ldots \times 10^{-18}.$$

17 верных десятичных знаков после запятой.

По общему методу гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях верхняя оценка погрешности пятого приближения π_4 к числу е выражается следующим образом:

$$0 \le \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/n_j = a - a_k = a - [a] - \Sigma_{j=1}^{k}1/n_j < 1/(n_k - 1) - 1/n_k = 1/(n_k(n_k - 1));$$

$$0 < \pi - \pi_4 = \pi - (3 + 1/8 + 1/61 + 1/5020 + 1/128541455) < 1/(128541455 \times 128541454) = 1/16522905524975570 = 6.0522043080645 \times 10^{-17}.$$

По методам общей теории рациональных разложения и приближения действительных чисел действительная погрешность составляет

$$\pi - \pi_4 = \underline{3.14159265358979323}846... - \underline{3.14159265358979323}232... = 0.00000000000000000614... = 6.14 \times 10^{-18},$$

то есть примерно 10 % указанной верхней оценки.

10. Метод непрерывных (цепных) дробей.

$$\pi_4 = \underline{3.141592653}01\ldots\ .$$

9 верных десятичных знаков после запятой.

11. Метод десятичных дробей.

$$\pi_4 = \underline{3{,}141}6.$$

3 верных десятичных знака после запятой;

четвёртый десятичный знак после запятой даёт верное округление с избытком.

2.11.2.13. АНАЛИЗ ИТОГОВ СРАВНЕНИЯ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ ПЕРВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ π_k К ЧИСЛУ π (ОТНОШЕНИЮ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ К ЕЁ ДИАМЕТРУ) С ОСТАТКАМИ r_k ПО МЕТОДУ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ, МЕТОДУ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ И ОБЩИМ МЕТОДАМ И МЕТОДОЛОГИЯМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Эти итоги кажутся весьма неожиданными, однако имеют свои вполне логичные объяснения.

1. Наилучшие и при этом одинаковые итоги даются всеми четырьмя общими методологиями знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел. Задача приближения числа π (отношения длины окружности к её диаметру) не разделяет эти четыре общие методологии.

2. На четыре порядка хуже предыдущих следующие по качеству итоги общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков.

3. На два порядка хуже предыдущих следующие по качеству итоги общей методологии знакопеременных гармонических

разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков.

4. На семь порядков хуже предыдущих следующие по качеству одинаковые итоги пары общих методологий знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков и из обращений абсолютных величин последовательных остатков, а также общего метода гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях. Задача приближения числа π (отношения длины

окружности к её диаметру) не разделяет эти две общие методологии и этот общий метод. Этот общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях осуществляет из каждого остатка дробной части действительного числа последовательное выделение именно наибольшего возможного элемента гармонического ряда, то есть дроби с единичным числителем, знаменателем которой является наименьшее возможное натуральное число. Так что каждый шаг общего метода гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в

знаменателях является наилучшим для наибольшего возможного ускорения сходимости избранной части гармонического ряда путём оставления наименьшего возможного нового остатка дробной части действительного числа. Поэтому именно общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях всегда обеспечивает наилучший возможный выбор ряда непременно положительных единичных, или аликвотных, дробей и является наилучшим возможным с точки зрения ускорения сходимости последовательности приближений частными суммами наличной части гармонического ряда.

5. Явное отставание сходимости последовательных приближений по методу десятичных дробей очевидно, бесспорно и вполне логично. Однако различие третьих приближений π_3, с одной стороны, по паре общих методологий знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков и из обращений абсолютных величин последовательных остатков, а также по общему методу гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях, а с другой стороны, по методу непрерывных (цепных) дробей, мало и для прояснения требует сопоставить все вычисленные последовательные приближения, представленные в табличном виде.

Таблица. Сопоставление всех вычисленных первых последовательных приближений π_k к числу π (отношению длины окружности к её диаметру), с одной стороны, по паре общих методологий знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков и из обращений абсолютных величин последовательных остатков, а также по общему методу гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях, а с другой стороны, по методу непрерывных (цепных) дробей

Метод	π_0	π_1	π_2	π_3	π_4
Общие методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков и из обращений абсолютных величин последовательных остатков, а также общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях	**3**	**3,125**	**3.14139**	**3.141592645**	**3.14159265358979323232**
Метод непрерывных (цепных) дробей	**3**	**3.14285**	**3.14150**	**3.14159292**	**3.14159265301**
π	**3.14**	**3.14159**	**3.14159**	**3.141592653**	**3.14159265358979323846**

Приближение нулевого порядка π_0 к числу π является целой частью числа π и одинаково даётся этими двумя общими методологиями и общим методом, а также методом десятичных дробей.

Первое приближение π_1 к числу π даётся методом непрерывных (цепных) дробей существенно точнее, чем этими двумя общими методологиями и общим методом. Это произошло потому, что дробная часть числа π крайне близка к единичной дроби (в данном случае 1/7) и при этом как раз незначительно меньше этой дроби. Именно сочетание этих двух условий является крайне затруднительным и невыгодным для этих двух общих методологий и общего метода гармонических разложения и

приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях, в данном случае дающего те же итоги, что и эти две общие методологии, и поэтому в данном случае представляющего также и их. Жёсткий алгоритм этого общего метода вынуждает взять единичную дробь (в данном случае 1/8) со знаменателем, большим на единицу по сравнению со знаменателем той дроби (в данном случае 1/7). Наоборот, для метода непрерывных (цепных) дробей сочетание тех двух условий в данном случае на редкость выгодно и удобно, поскольку после приближения нулевого порядка с недостатком этот метод даёт первое приближение как раз с избытком и поэтому в данном случае именно

наиболее близкую слегка завышенную единичную дробь (в данном случае 1/7).

Второе приближение π_2 к числу π даётся общим методом гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях лишь незначительно менее точно, чем методом непрерывных (цепных) дробей.

Третье π_3 приближение к числу π даётся уж<u>е</u> существенно точнее и четвёртое π_4 приближение к числу π даётся уж<u>е</u> на 8 порядков точнее общим методом гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях, чем методом непрерывных

(цепных) дробей. Это означает, что по скорости сходимости приближений к числу π общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях немедленно устранил существенное начальное отставание от метода непрерывных (цепных) дробей при первом приближении π_1 к числу π и уверенно обогнал этот метод. Особенно убедительно сопоставление верхних границ погрешностей четвёртых приближений π_4 к числу π по методу непрерывных (цепных) дробей и по общему методу гармонических разложения и приближения действительных

чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях.

По методу непрерывных (цепных) дробей для более точной, более мягкой и тем самым наиболее выгодной для этого метода верхней оценки погрешности его четвёртого приближения π_4 к числу π потребуется учёт не только четвёртого приближения π_4, но и знаменателя дроби, являющейся следующим, пятым приближением π_5 к числу π:

$$\pi_4 = p_4/q_4 = 103993/33102;$$

$$\pi_5 = p_5/q_5 = 104348/33215;$$

$$|\pi - p_4/q_4| < 1/(q_4q_5);$$

$$|\pi - 103993/33102| < 1/(33102 \times 33215) = 1/1099482930 = 9.09518441 \times 10^{-10}.$$

По общему методу гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях верхняя оценка погрешности четвёртого приближения π_4 к числу π на целых 7 порядков меньше, чем по методу непрерывных (цепных) дробей:

$$0 \leq \Sigma_{j=k+1}^{\infty} 1/n_j = a - a_k = a - [a] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j < 1/(n_k - 1) - 1/n_k = 1/(n_k(n_k - 1));$$

$$0 < \pi - \pi_4 = \pi - (3 + 1/8 + 1/61 + 1/5020 + 1/128541455) < 1/(128541455 \times 128541454) = 1/16522905524975570 = 6.0522043080645 \times 10^{-17}.$$

По общему методу гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях <u>действительная погрешность</u> составляет

$$\pi - \pi_4 = \underline{3.14159265358979323}846... - \underline{3.14159265358979323}232...$$

$$= 0.00000000000000000614... = 6.14 \times 10^{-18},$$

то есть примерно 10 % указанной верхней оценки.

Эти итоги кажутся весьма неожиданными, однако имеют свои вполне логичные объяснения.

<u>Общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях</u> осуществляет из каждого остатка дробной части

действительного числа последовательное выделение именно наибольшего возможного элемента гармонического ряда, то есть дроби с единичным числителем, знаменателем которой является наименьшее возможное натуральное число. То есть каждый шаг по общему методу гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях является наилучшим для наибольшего возможного ускорения сходимости избранной части гармонического ряда путём оставления наименьшего возможного нового остатка дробной части действительного числа. Поэтому именно общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел

потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях всегда обеспечивает наилучший возможный выбор именно <u>положительных</u> единичных дробей и является наилучшим возможным с точки зрения <u>ускорения сходимости</u> последовательности приближений частными суммами наличной части гармонического ряда.

<u>Метод непрерывных (цепных) дробей</u> даёт наилучшие последовательные рациональные приближения действительных чисел попеременно снизу и сверху именно по критерию <u>малости знаменателей</u> этих приближений как несократимых дробей, но отнюдь не по критерию <u>ускорения сходимости</u> последовательности этих приближений,

особенно при частоте небольших, начиная с наименьших возможных, то есть единичных, неполных частных как целых частей знаменателей непрерывной, или цепной, дроби. Однако для числа π

$$\pi = 3.14159265358979323846... = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, ...]$$

последовательность этих неполных частных

$$7, 15, 1, 292, 1, 1, ...$$

именно в самом начале содержит достаточно большие неполные частные 7, 15 и особенно 292. Относительно большие, в частности по сравнению с

десятью, неполные частные в самом начале ведут к достаточно быстрым росту знаменателей последовательных приближений и уменьшению их погрешностей по сравнению с даваемыми методом десятичных дробей. Это наиболее выгодно для метода непрерывных (цепных) дробей и в самом начале обеспечивает более быструю сходимость приближений, чем по методу десятичных дробей. Правда, в дальнейшем последует множество небольших, часто единичных, неполных частных числа π. Но это повлияет только на достаточно далёкие цифры числа π после запятой, лежит далеко

за пределами и практической значимости, и наших рассмотрений, ограничивающихся лишь несколькими важнейшими первыми приближениями, и имеет сугубо теоретическое значение, однако важное для именно глубокого понимания сути дела.

Метод десятичных дробей, несмотря на возможные изменения в последовательности наличных цифр дробной части действительного числа, даёт универсальную верхнюю оценку погрешности отбрасывания всех цифр, начиная с некоторой цифры, единицей последней оставляемой цифры.

Эти универсальные верхние оценки погрешностей для последовательности всех приближений образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой обратен основанию системы счисления m и составляет 1/m. В наших примерах

$$m = 10,$$

$$1/m = 1/10.$$

Поэтому метод десятичных дробей обеспечивает по закону убывающей геометрической прогрессии для верхних оценок погрешностей такую сходимость последовательных приближений, которую можно считать естественной, нормальной, стандартной, средней.

2.11.3. СРАВНЕНИЕ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (ЧИСЛА Ф) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ Φ_k К ЭТОМУ ОТНОШЕНИЮ (ЧИСЛУ) Ф С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ МЕТОДОМ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ, МЕТОДОМ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ И ОБЩИМИ МЕТОДАМИ И МЕТОДОЛОГИЯМИ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

ЗОЛОТОЕ СЕЧЕНИЕ

$$\Phi = (5^{1/2} + 1)/2 =$$

$$1.61803398874989484820458683436563811772030917980576\ldots =$$

$$[1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots] = \lim (3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, 55/34, 89/55, \ldots).$$

2.11.3.1. СРАВНЕНИЕ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (ЧИСЛА Ф) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ Φ_k К ЭТОМУ ОТНОШЕНИЮ (ЧИСЛУ) Ф С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ МЕТОДОМ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$\Phi_0 = \underline{1}$;

$\Phi_1 = \underline{1.6}$;

$\Phi_2 = \underline{1.6}2$;

$\Phi_3 = \underline{1.618}$;

$\Phi_4 = \underline{1.6180}$;

$\Phi_5 = \underline{1.61803}$.

2.11.3.2. СРАВНЕНИЕ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (ЧИСЛА Φ) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ Φ_k К ЭТОМУ ОТНОШЕНИЮ (ЧИСЛУ) Φ С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ МЕТОДОМ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$\Phi_0 = \underline{1}$;

$\Phi_1 = 2$;

$\Phi_2 = \underline{1}.5$;

$\Phi_3 = \underline{1.6}66666666...$;

$\Phi_4 = \underline{1.6}$;

$\Phi_5 = \underline{1.6}25$.

Вычисление приближений первых порядков:

$\Phi =$

$1.61803398874989484820458683436563811772030917980576...$

$\Phi = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...]$

$\Phi_0 = \underline{1}$

$\Phi_1 = 1 + 1/1 = 2$

$\Phi_2 = 1 + 1/(1 + 1/1) = 1 + 1/2 = 3/2 = \underline{1}.5$

$\Phi_3 = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/1)) = 1 + 2/3 = 5/3 =$

$\underline{1.6}66666666...$

$\Phi_4 = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/1))) = 1 + 3/5 = 8/5 = \underline{1.6}$

$\Phi_5 = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/1)))) = 1 + 5/8 = 13/8 = \underline{1.6}25$

2.11.3.3. СРАВНЕНИЕ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (ЧИСЛА Φ) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ $Φ_k$ К ЭТОМУ ОТНОШЕНИЮ (ЧИСЛУ) Φ С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩИМ МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ОБРАЩЁННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ ДРОБНОЙ ЧАСТИ В ЗНАМЕНАТЕЛЯХ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$Φ_0 = \underline{1}$;

$Φ_1 = \underline{1}.5$;

$Φ_2 = \underline{1.61}11111111...$;

$$\Phi_3 = \underline{1.6180}076628...;$$

$$\Phi_4 = \underline{1.618033988}3235...;$$

$$\Phi_5 = \underline{1.618033988749894848}16747... \,.$$

$$\Phi - \Phi_5 = 3.711... \times 10^{-20}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$\Phi =$

$1.6180339887498948482045868343656381177203091798057 6...$

$\Phi = 1 + 1/2 + 1/9 + 1/145 + 1/37986 + 1/2345721887 + ...$

$\Phi_0 = \underline{1} < \Phi = \underline{1}.61803398874989484820458...$

$\Phi_1 = 1 + 1/2 = 3/2 = \underline{1}.5 < \Phi = \underline{1}.61803398874989484820458...$

$\Phi_2 = 1 + 1/2 + 1/9 = 29/18 = \underline{1.61}11111111... < \Phi =$

$\underline{1.61}803398874989484820458...$

$\Phi_3 = 1 + 1/2 + 1/9 + 1/145 = 1 + 1613/2610 = 4223/2610 = \underline{1.6180}076628... < \Phi = \underline{1.6180}339887498948482045 8...$

$\Phi_4 = 1 + 1/2 + 1/9 + 1/145 + 1/37986 = 13368124/8261955 = \underline{1.618033988}3235... < \Phi = \underline{1.618033988}74989484820458...$

$\Phi_5 = 1 + 1/2 + 1/9 + 1/145 + 1/37986 + 1/2345721887 = 31357901063191943/19380248672909085 = \underline{1.61803398874989484}816747... < \Phi = \underline{1.61803398874989484}820458...$

По методу проверки достоверности рационального разложения действительного числа со всеми промежуточными расчётами в обыкновенных дробях проверяется, что для гармонического разложения

действительного числа a и для каждого положительного целого числа k непременно выполнено двойное неравенство

$$[a] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j \le a < [a] + \Sigma_{j=1}^{k-1} 1/n_j + 1/(n_k - 1) = [a] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j + 1/(n_k(n_k - 1)).$$

В данном случае

$$a = \Phi;$$

$$[\Phi] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j \le \Phi < [\Phi] + \Sigma_{j=1}^{k-1} 1/n_j + 1/(n_k - 1) = [\Phi] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j + 1/(n_k(n_k - 1));$$

$$1 + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j \le \Phi < 1 + \Sigma_{j=1}^{k-1} 1/n_j + 1/(n_k - 1) = 1 + \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j + 1/(n_k(n_k - 1)).$$

Выполнение левых нестрогих неравенств, расчёты для которых уже выполнены, очевидно. Проведём дополнительные расчеты для проверки выполнения правых строгих неравенств.

$k = 1; 1 + \Sigma_{j=1}{}^{k-1}1/n_j + 1/(n_k - 1) = 1 + 1/(2 - 1) = 2 > \Phi = \underline{1}.61803398874989484820458...;$

$k = 2; 1 + \Sigma_{j=1}{}^{k-1}1/n_j + 1/(n_k - 1) = 1 + 1/2 + 1/(9 - 1) = 13/8 = \underline{1.6}25 > \Phi = \underline{1.6}1803398874989484820458...;$

$k = 3; 1 + \Sigma_{j=1}{}^{k-1}1/n_j + 1/(n_k - 1) = 1 + 1/2 + 1/9 + 1/(145 - 1) = 233/144 = \underline{1.6180}5555... > \Phi = \underline{1.6180}339887498948482045 8...;$

$k = 4; 1 + \Sigma_{j=1}{}^{k-1}1/n_j + 1/(n_k - 1) = 1 + 1/2 + 1/9 + 1/145 + 1/(37986 - 1) = 32082653/19828170 = \underline{1.61803398}90166... > \Phi = \underline{1.61803398}874989484820458...;$

$k = 5; 1 + \Sigma_{j=1}{}^{k-1}1/n_j + 1/(n_k - 1) = 1 + 1/2 + 1/9 + 1/145 + 1/37986 + 1/(2345721887 - 1) = 3135790104982381 9/1938024866464713 0 = \underline{1.618033988749894848}34921... > \Phi = \underline{1.618033988749894848}20458... .$

2.11.3.4. СРАВНЕНИЕ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (ЧИСЛА Φ) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ Φ_k К ЭТОМУ ОТНОШЕНИЮ (ЧИСЛУ) Φ С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ЦЕЛЫХ ЧАСТЕЙ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\Phi_0 = 2;$$

$$\Phi_1 = \underline{1.6}666666666666...;$$

$$\Phi_2 = \underline{1.61}90476190476...;$$

$$\Phi_3 = \underline{1.61803}444782168...;$$

$$\Phi_4 = \underline{1.618033988749}989...;$$

$$\Phi_5 = \underline{1.61803398874989484820458683}8338... .$$

$$r_5 = \Phi - \Phi_5 = - 3.97252876... \times 10^{-27}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$\Phi =$

$1.6180339887498948482045868343656381177203091798$
$0576...$

$\Phi = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 - 1/10610209857723 - \ldots$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^\infty 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j$

$z_{k+1} = [1/r_k] = [1/(a - a_k)] = [1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j)]$

$1/z_{k+1} = 1/[1/r_k] = 1/[1/(a - a_k)] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j)]$

$a_0 = [a + 1/2]$

$\Phi_0 = [\Phi + 1/2] = 2$

$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$

$r_0 = \Phi - \Phi_0 = \Phi - [\Phi + 1/2]$

$r_0 = 1.6180339887498948482 - 2 = - 0.38196601125011$

$z_1 = [1/r_0] = [1/(a - a_0)] = [1/(a - [a + 1/2])]$

$z_1 = [1/(\Phi - \Phi_0)]$

$z_1 = [1/(1.6180339887498948482 - 2)] = [-2.6180339887499] = - 3$

$1/z_1 = 1/[1/r_0] = 1/[1/(a - a_0)] = 1/[1/(a - [a + 1/2])],$

$1/z_1 = - 1/3$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$\Phi_1 = \Phi_0 + 1/z_1$

$\Phi_1 = 2 - 1/3 = 5/3 = \underline{1.6}666666666666...$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = \Phi - \Phi_1 = \Phi - [\Phi + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 = -$
0.048632677916772

$z_2 = [1/r_1]$

$z_2 = [1/(\Phi - 2 + 1/3)] = [1/(1.6180339887498948482 - 2 +$
$1/3)] = [- 20.562305898749] = - 21$

$1/z_2 = - 1/21$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2$

$\Phi_2 = 2 - 1/3 - 1/21 = 34/21 = \underline{1.61}90476190476...$

$r_2 = \Phi - \Phi_2 = \Phi - [\Phi + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 = -$
0.0010136302977242

$z_3 = [1/r_2]$

$z_3 = [1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21)] = [- 986.55298903874] = - 987$

$1/z_3 = - 1/987$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$\Phi_3 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 = 1597/987 = \underline{1.61803}444782168...$

$r_3 = \Phi - \Phi_3 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 = - 4.590717870... \times 10^{-7}$

$z_4 = [1/r_3]$

$z_4 = [1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987)] = [- 2178308.552786...] = - 2178309$

$1/z_4 = - 1/2178309$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$\Phi_4 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 = 3924578/2178309$
$= \underline{1.618033988749}989...$

$r_4 = \Phi - \Phi_4 =$
$1.6180339887498948482045868343656 38 - 2 + 1/3$
$+ 1/21 + 1/987 + 1/2178309 = - 9.42488427... \times 10^{-14}$

$z_5 = [1/r_4]$

$z_5 = [1/(1.618033988749894848204586834365638 - 2 +$
$1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309)] = [-$
$10610209857722.552786...] = - 10610209857723$

$1/z_5 = - 1/10610209857723$

$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$

$\Phi_5 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 - 1/10610209857723 = 17167680177565/10610209857723 = \underline{1.6180339887498948482045868}338...$

$r_5 = \Phi - \Phi_5 = \underline{1.6180339887498948482045868}3436563811772030917980576 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 + 1/10610209857723 = - 3.97252876... \times 10^{-27}$

$\Phi = \underline{1.6180339887498948482045868}3436563811772030917980576...$

2.11.3.5. СРАВНЕНИЕ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (ЧИСЛА Ф) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ $Ф_k$ К ЭТОМУ ОТНОШЕНИЮ (ЧИСЛУ) Ф С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ЦЕЛЫХ ЧАСТЕЙ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ

АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\Phi_0 = 2;$$

$$\Phi_1 = \underline{1}.5;$$

$$\Phi_2 = \underline{1.6}25;$$

$$\Phi_3 = \underline{1.6180}06993006993...;$$

$$\Phi_4 = \underline{1.61803398}9389477754...;$$

$$\Phi_5 = \underline{1.618033988749894848}051548... .$$

$$r_5 = \Phi - \Phi_5 = 1.53038707557... \times 10^{-19}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$\Phi =$

$1.6180339887498948482045868343656381177203091798$
$0576...$

$\Phi = 2 - 1/2 + 1/8 - 1/143 + 1/37042 - 1/1563518960 + ...$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{\infty}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)[1/|r_k|] = (\mathrm{sign}\ r_k)[1/|a - a_k|] =$
$(\mathrm{sign}\ r_k)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j|]$

$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|r_k|] = (\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|a - a_k|] =$
$(\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j|]$

$a_0 = [a + 1/2]$

$$\Phi_0 = [\Phi + 1/2] = 2$$

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

$$r_0 = \Phi - \Phi_0 = 1.6180339887498948482 - 2 = -0.38196601125011$$

$$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|r_0|] = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|a - a_0|] = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|a - [a + 1/2]|]$$

$$z_1 = -[1/|\Phi - \Phi_0|] = -[1/|\Phi - 2|] = -[|1/(1.6180339887498948482 - 2)|] = -[|-2.6180339887499|] = -2$$

$$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|r_0|] = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|a - a_0|] = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|a - [a + 1/2]|]$$

$$1/z_1 = -1/2$$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$\Phi_1 = 2 - 1/2 = 3/2 = \underline{1}.5$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = \Phi - 2 + 1/2 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/2 = 0.11803398874989$

$z_2 = (\text{sign } r_1)[1/|r_1|] = (\text{sign } r_1)[1/|a - a_1|] = (\text{sign } r_1)[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|]$

$z_2 = [1/(\Phi - 2 + 1/2)] = [1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/2)] = [8.4721359549996] = 8$

$1/z_2 = (\text{sign } r_1)/[1/|r_1|] = (\text{sign } r_1)/[1/|a - a_1|] = (\text{sign } r_1)/[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|]$

$1/z_2 = 1/8$

$$\mathbf{a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2}$$

$$\mathbf{\Phi_2 = 2 - 1/2 + 1/8 = 13/8 = \underline{1.6}25}$$

$$\mathbf{r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2}$$

$$\mathbf{r_2 = \Phi - 2 + 1/2 - 1/8 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/2 - 1/8 = - 0.0069660112501051}$$

$$\mathbf{z_3 = (sign\ r_2)[1/|r_2|]}$$

$$\mathbf{z_3 = - [1/|\Phi - 2 + 1/2 - 1/8|] = - [|1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/2 - 1/8)|] = - [|-143.55417527999|] = - [143.55417527999] = - 143}$$

$$\mathbf{1/z_3 = - 1/143}$$

$$\mathbf{a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3}$$

$\Phi_3 = 2 - 1/2 + 1/8 - 1/143 = 1851/1144 =$
$\underline{1.6180}06993006993...$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$r_3 = \Phi - 2 + 1/2 - 1/8 + 1/143 = 1.6180339887498948482 -$
$2 + 1/2 - 1/8 + 1/143 = 0.0000269957429018 96$

$z_4 = (\text{sign } r_3)[1/|\Phi - 2 + 1/2 - 1/8 + 1/143|] =$
$[|1/(1.6180339887498948482045868343656 38 - 2 + 1/2 -$
$1/8 + 1/143)|] = [|37042.87759874...|] = 37042$

$1/z_4 = 1/37042$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$\Phi_4 = 2 - 1/2 + 1/8 - 1/143 + 1/37042 = 34282943/21188024$
$= \underline{1.618033989}389477754...$

$r_4 = \Phi - 2 + 1/2 - 1/8 + 1/143 - 1/37042 =$
$1.6180339887498948482045868343656 38 - 2 + 1/2 - 1/8 +$
$1/143 - 1/37042 = - 6.395829... \times 10^{-10}$

$z_5 = (\mathrm{sign}\ r_4)[1/|\Phi - 2 + 1/2 - 1/8 + 1/143 - 1/37042|] = (\mathrm{sign}$
$r_4)[1/|$
$1.61803398874989484820458683436563811772030917980576 - 2 + 1/2 - 1/8 + 1/143 - 1/37042|] = -$
$[1563518960.3741] = - 1563518960$

$1/z_5 = - 1/1563518960$

$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$

$$\Phi_5 = 2 - 1/2 + 1/8 - 1/143 + 1/37042 - 1/1563518960 = 6700253920488907/4140984656116880 = \underline{1.618033988749894848}051548...$$

$$r_5 = \Phi - 2 + 1/2 - 1/8 + 1/143 - 1/37042 + 1/1563518960 = 1.61803398874989484820458683436563811772030917980576 - 2 + 1/2 - 1/8 + 1/143 - 1/37042 + 1/1563518960 = 1.53038707557... \times 10^{-19}$$

$$\Phi = \underline{1.618033988749894848}20458683436563811772030917980576...$$

2.11.3.6. СРАВНЕНИЕ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (ЧИСЛА Φ) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ Φ_k К ЭТОМУ ОТНОШЕНИЮ (ЧИСЛУ) Φ С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ПОТОЛКОВ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\Phi_0 = 2;$$

$$\Phi_1 = \underline{1}.5;$$

$$\Phi_2 = \underline{1.61}111111111111...;$$

$$\Phi_3 = \underline{1.6180}07662835249...;$$

$$\Phi_4 = \underline{1.618033988}32358685...;$$

$$\Phi_5 = \underline{1.618033988749894848}16747... .$$

$$r_5 = \Phi - \Phi_5 = 3.7114267791... \times 10^{-20}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

Ф =

1.61803398874989484820458683436563811772030917980576...

$\Phi = 2 - 1/2 + 1/9 + 1/145 + 1/37986 + 1/2345721887 + ...$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$z_{k+1} =]1/r_k[=]1/(a - a_k)[=]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j)[$

$1/z_{k+1} = 1/]1/r_k[= 1/]1/(a - a_k)[= 1/]1/(a - [a + 1/2] -$
$\Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j)[$

$a_0 = [a + 1/2]$

$\Phi_0 = [\Phi + 1/2] = 2$

$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$

$r_0 = \Phi - \Phi_0 = 1.6180339887498948482 - 2 = -$
0.3819660112501

$z_1 =]1/r_0[=]1/(a - a_0)[=]1/(a - [a + 1/2])[$

$z_1 =]1/r_0[=]1/(\Phi - \Phi_0)[=]1/(1.6180339887498948482 - 2)[=]-2.6180339887499[= - 2$

$1/z_1 = 1/]1/r_0[= 1/]1/(a - a_0)[= 1/]1/(a - [a + 1/2])[$

$1/z_1 = 1/(- 2) = - 1/2$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$\Phi_1 = 2 - 1/2 = 3/2 = \underline{1}.5$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = \Phi - 2 + 1/2 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/2 = 0.11803398874989$

$z_2 =]1/r_1[=]1/(a - a_1)[=]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1)[$

$z_2 =]1/(\Phi - 2 + 1/2)[=]1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/2)[=]8.4721359549996[= 9$

$1/z_2 = 1/]1/r_1[= 1/]1/(a - a_1)[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1)[$

$1/z_2 = 1/9$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$\Phi_2 = 2 - 1/2 + 1/9 = 29/18 = \underline{1.61}11111111111...$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = \Phi - 2 + 1/2 - 1/9 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/2 - 1/9 = 0.0069228776387838$

$z_3 =]1/r_2[$

$z_3 =]1/(\Phi - 2 + 1/2 - 1/9)[=]1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/2 - 1/9)[=]144.4486[= 145$

$1/z_3 = 1/145$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$\Phi_3 = 2 - 1/2 + 1/9 + 1/145 = 4223/2610 =$

$\underline{1.6180}07662835249...$

$r_3 = \Phi - 2 + 1/2 - 1/9 - 1/145 = 1.6180339887498948482 -$

$2 + 1/2 - 1/9 - 1/145 = 0.000026325914645867$

$z_4 =]1/(\Phi - 2 + 1/2 - 1/9 - 1/145)[=$

$]1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/2 - 1/9 - 1/145)$

$[=]37985.3848747211...[= 37986$

$1/z_4 = 1/37986$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$$\Phi_4 = 2 - 1/2 + 1/9 + 1/145 + 1/37986 = 13368124/8261955$$
$$= \underline{1.618033988}32358685...$$

$$r_4 = \Phi - 2 + 1/2 - 1/9 - 1/145 - 1/37986 =$$
$$1.6180339887498948482045868343656381177 2 - 2 + 1/2 -$$
$$1/9 - 1/145 - 1/37986 = 4.263079973926422... \times 10^{-10}$$

$$z_5 =]1/(\Phi - 2 + 1/2 - 1/9 - 1/145 - 1/37986)[=$$
$$]1/(1.61803398874989484820458683436563811772 - 2 +$$
$$1/2 - 1/9 - 1/145 - 1/37986)[=]2345721886.795782...[=$$
$$2345721887$$

$$1/z_5 = 1/2345721887$$

$$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$$

$\mathbf{\Phi_5 = 2 - 1/2 + 1/9 + 1/145 + 1/37986 + 1/2345721887 = 31357901063191943/19380248672909085 = \underline{1.618033988749894848}16747...}$

$\mathbf{r_5 = \Phi - 2 + 1/2 - 1/9 - 1/145 - 1/37986 - 1/2345721887 = \underline{1.618033988749894848}20458683436563811772 - 2 + 1/2 - 1/9 - 1/145 - 1/37986 - 1/2345721887 = 3.7114267791... \times 10^{-20}}$

$\mathbf{\Phi = \underline{1.618033988749894848}20458683436563811772030917980576...}$

2.11.3.7. СРАВНЕНИЕ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (ЧИСЛА Ф) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ $Ф_k$ К ЭТОМУ ОТНОШЕНИЮ (ЧИСЛУ) Ф С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ПОТОЛКОВ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\Phi_0 = 2;$$

$$\Phi_1 = \underline{1.6}66666...;$$

$$\Phi_2 = \underline{1.61}9047619...;$$

$$\Phi_3 = \underline{1.61803}444782168...;$$

$$\Phi_4 = \underline{1.618033988749}989097...;$$

$$\Phi_5 = \underline{1.61803398874989484820458683}83381668787... .$$

$$r_5 = \Phi - \Phi_5 = - 3.9725288787177 \times 10^{-27}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$\Phi =$

$1.6180339887498948482045868343656381177203091798$
$0576...$

$\Phi = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 - 1/10610209857723$
$- \ldots$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{\infty} 1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j$

$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|r_k|[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - a_k|[=$
$(\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j|[$

$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|r_k|[= (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - a_k|[=$
$(\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j|[$

$a_0 = [a + 1/2]$

$\Phi_0 = [\Phi + 1/2] = 2$

$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$

$r_0 = \Phi - \Phi_0 = 1.6180339887498948482 - 2 = -0.38196601125011$

$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|r_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - a_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - [a + 1/2]|[$

$z_1 = -\ ]1/|\Phi - \Phi_0|[= -\ ]1/|\Phi - 2|[= -\ ]|1/(1.6180339887498948482 - 2)|[= -\ ]|-2.6180339887499|[= -3$

$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|r_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - a_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - [a + 1/2]|[$

$1/z_1 = -1/3$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$\Phi_1 = 2 - 1/3 = 5/3 = \underline{1.6}666666666666...$

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$$

$$r_1 = \Phi - 2 + 1/3 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 = -0.048632677916772$$

$$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|r_1|[= (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|a - a_1|[= (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|[$$

$$z_2 = -\ ]|1/(\Phi - 2 + 1/3)|[= -\ ]|1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/3)|[= -\ ]|-20.5623...|[= -21$$

$$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|r_1|[= (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - a_1|[= (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1|[$$

$$1/z_2 = -1/21$$

$$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$$

$$\Phi_2 = 2 - 1/3 - 1/21 = 34/21 = \underline{1.61}90476190476190...$$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = \Phi - \Phi_2 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 =$

$1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 = -$

$0.001013630297 7242$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|r_2|[$

$z_3 = -]1/|\Phi - 2 + 1/3 + 1/21|[= -]|$

$1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21)|[= -]|-$

$986.552989...|[= -]986.552989...[= - 987$

$1/z_3 = - 1/987$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$\Phi_3 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 = 1597/987 =$

$\underline{1.61803}444782168...$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$

$r_3 = \Phi - \Phi_3 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 =$
$1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 = -$
$4.59071787... \times 10^{-7}$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)]1/|r_3|[$

$z_4 = - [1/|\Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987|] = -$
$]|1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987)|[= -$
$]|- 2178308.552786...|[= -]2178308.552786...[= -$
2178309

$1/z_4 = - 1/2178309$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$\Phi_4 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 = 3924578/2178309$
$= \underline{1.618033988749}989097...$

$r_4 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 =$
$1.6180339887498948482045868343656 38 - 2 + 1/3 + 1/21$
$+ 1/987 + 1/2178309 = - 9.42488427 \times 10^{-14}$

$z_5 = (\mathrm{sign}\ r_4)]1/|r_4|[$

$z_5 = -]1/|\Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309|[= -]1/|$
$1.618033988749894848204586834365638 - 2 + 1/3 + 1/21$
$+ 1/987 + 1/2178309|[= -]10610209857722.55278639...[=$
$- 10610209857723$

$1/z_5 = - 1/10610209857723$

$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$

$\Phi_5 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 - 1/10610209857723 = 17167680177565/10610209857723 = \underline{1.61803398874989484820458683}83381668787...$

$r_5 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 + 1/10610209857723 = 1.6180339887498948482045868343656 38 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 + 1/10610209857723 = -3.9725288787177 \times 10^{-27}$

$\Phi = \underline{1.61803398874989484820458683}4365638117720309179805 76...$

2.11.3.8. СРАВНЕНИЕ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (ЧИСЛА Ф) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ $Ф_k$ К ЭТОМУ ОТНОШЕНИЮ (ЧИСЛУ) Ф С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ЦЕЛЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО

УВЕЛИЧЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\Phi_0 = 2;$$

$$\Phi_1 = \underline{1.6}6666666...;$$

$$\Phi_2 = \underline{1.61}9047619...;$$

$$\Phi_3 = \underline{1.61803}444782168...;$$

$$\Phi_4 = \underline{1.618033988749}989097...;$$

$$\Phi_5 = \underline{1.61803398874989484820458683}8338... .$$

$$r_5 = \Phi - \Phi_5 = - 3.97252876 \times 10^{-27}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$\Phi = 1.61803398874989484820458683436563811772030917980576...$

$\Phi = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 - 1/10610209857723 - ...$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$z_{k+1} = [1/r_k + 1/2] = [1/(a - a_k) + 1/2] = [1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j) + 1/2]$

$1/z_{k+1} = 1/[1/r_k + 1/2] = 1/[1/(a - a_k) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j) + 1/2]$

$$a_0 = [a + 1/2]$$

$$\Phi_0 = [\Phi + 1/2] = 2$$

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

$$r_0 = \Phi - \Phi_0 = 1.6180339887498948482 - 2 = -0.38196601125011$$

$$z_1 = [1/r_0 + 1/2] = [1/(a - a_0) + 1/2] = [1/(a - [a + 1/2]) + 1/2]$$

$$z_1 = [1/(\Phi - \Phi_0) + 1/2] = [1/(\Phi - 2) + 1/2] = [1/(1.6180339887498948482 - 2) + 1/2] = [-2.6180339887499 + 1/2] = [- 2.1180339887499] = - 3$$

$$1/z_1 = 1/[1/r_0 + 1/2] = 1/[1/(a - a_0) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2]) + 1/2]$$

$1/z_1 = - 1/3$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$\Phi_1 = 2 - 1/3 = 5/3 = \underline{1.6}66666666666...$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = \Phi - 2 + 1/3 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 = - 0.048632677916772$

$z_2 = [1/r_1 + 1/2] = [1/(a - a_1) + 1/2] = [1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) + 1/2]$

$z_2 = [1/(\Phi - 2 + 1/3) + 1/2] = [1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/3) + 1/2] = [- 20.562305898749 + 1/2] = [- 20.062305898749] = - 21$

$1/z_2 = 1/[1/r_1 + 1/2] = 1/[1/(a - a_1) + 1/2] =$

$1/[1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) + 1/2]$

$1/z_2 = - 1/21$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$\Phi_2 = 2 - 1/3 - 1/21 = 34/21 = \underline{1.61}9047619...$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 = - 0.001013630297242$

$z_3 = [1/r_2 + 1/2]$

$z_3 = [1/(\Phi - 2 + 1/3 + 1/21) + 1/2] = [1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21) + 1/2] = [- 986.55298903874 + 1/2] = [- 986.05298903874] = - 987$

$1/z_3 = - 1/987$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$\Phi_3 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 = 1597/987 =$ $\underline{1.61803}444782168...$

$r_3 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 = - 4.59071787 \times 10^{-7}$

$z_4 = [1/(\Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987) + 1/2] =$ $[1/(1.6180339887498948482045868343656381177\dot{2} - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987) + 1/2] = [- 2178308.552786... + 1/2] =$ $[- 2178308.052786...] = - 2178309$

$1/z_4 = - 1/2178309$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$\Phi_4 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 = 3924578/2178309 = \underline{1.618033988749}989097...$

$r_4 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 = 1.6180339887498948482045868343656381177 2 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 = - 9.42488427... \times 10^{-14}$

$z_5 = [1/(\Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309) + 1/2] = [1/(1.6180339887498948482045868343656381177 2 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309) + 1/2] = [- 10610209857722.0527864...] = - 10610209857723$

$1/z_5 = - 1/10610209857723$

$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$

$\Phi_5 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 - 1/10610209857723 = 17167680177565/10610209857723 = \underline{1.61803398874989484820458683}8338...$

$r_5 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 + 1/10610209857723 = \underline{1.61803398874989484820458683}436563811772 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 + 1/10610209857723 = -3.97252876 \times 10^{-27}$

$\Phi = \underline{1.61803398874989484820458683}43656381177203091798 0576...$

2.11.3.9. СРАВНЕНИЕ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (ЧИСЛА Ф) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ $Ф_k$ К ЭТОМУ ОТНОШЕНИЮ (ЧИСЛУ) Ф С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ЦЕЛЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО

УВЕЛИЧЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\Phi_0 = 2;$$

$$\Phi_1 = \underline{1.6}6666666...;$$

$$\Phi_2 = \underline{1.61}9047619...;$$

$$\Phi_3 = \underline{1.61803}444782168...;$$

$$\Phi_4 = \underline{1.61803398874}9989097...;$$

$$\Phi_5 = \underline{1.61803398874989484820458683}8338... .$$

$$r_5 = \Phi - \Phi_5 = - 3.97252876 \times 10^{-27}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$\Phi = 1.61803398874989484820458683436563811772030917980576...$

$\Phi = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 - 1/10610209857723 - ...$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)[1/|r_k| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_k)[1/|a - a_k| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_k)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j| + 1/2]$

$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|r_k| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|a - a_k| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j| + 1/2]$

$a_0 = [a + 1/2]$

$\Phi_0 = [\Phi + 1/2] = 2$

$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$

$r_0 = \Phi - \Phi_0 = 1.6180339887498948482 - 2 = - 0.38196601125011$

$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|r_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|a - a_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|a - [a + 1/2]| + 1/2]$

$z_1 = (\mathrm{sign}(\Phi - \Phi_0))[1/|\Phi - \Phi_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}(1.6180339887498948482 - 2))[1/|1.6180339887498948482 - 2| + 1/2] = - [2.6180339887498948481731482 + 1/2] = - [3.1180339887498948481731482] = - 3$

$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|r_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|a - a_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|a - [a + 1/2]| + 1/2]$

$1/z_1 = 1/(- 3) = - 1/3$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$\Phi_1 = 2 - 1/3 = 5/3 = \underline{1.6}66666666666...$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = \Phi - 2 + 1/3 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 = - 0.048632677916772$

$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|r_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - a_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| + 1/2]$

$z_2 = (\mathrm{sign}(\Phi - 2 + 1/3))[1/|\Phi - 2 + 1/3| + 1/2] =$ $(\mathrm{sign}(1.6180339887498948482 - 2 + 1/3))[1/|$

$1.6180339887498948482 - 2 + 1/3| + 1/2] = (\mathrm{sign}(-0.048632677916772))[20.562305898749 + 1/2] = -[21.062305898749] = - 21$

$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|r_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - a_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| + 1/2]$

$1/z_2 = 1/(- 21) = - 1/21$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$\Phi_2 = 2 - 1/3 - 1/21 = 34/21 = \underline{1.61}9047619...$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 = - 0.001013630297724$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|r_2| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|a - a_2| + 1/2] =$

$(\mathrm{sign}\ r_2)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{2} 1/z_j| + 1/2]$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|r_2| + 1/2] = (\mathrm{sign}(\Phi - 2 + 1/3 + 1/21))[1/|\Phi - 2 + 1/3 + 1/21| + 1/2] = (\mathrm{sign}(1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21))[1/|1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21| + 1/2] = (\mathrm{sign}(- 0.0010136302977242))[986.5529890387 + 1/2] = - [987.0529890387] = - 987$

$1/z_3 = 1/(- 987) = - 1/987$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$\Phi_3 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 = 1597/987 = \underline{1.61803}444782168...$

$r_3 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 = 1.61803398874989484820458683436563811772 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 = - 0.000000459071787$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)[1/|r_3| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_3)[1/|a - a_3| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_3)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{3} 1/z_j| + 1/2]$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)[1/|r_3| + 1/2] = (\mathrm{sign}(\Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987))[1/|\Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987| + 1/2] = (\mathrm{sign}(1.61803398874989484820458683436563811772 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987))[1/|1.61803398874989484820458683436563811772 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987| + 1/2] = (\mathrm{sign}(- 0.000000459071787))$

$[2178308.55278649631438 + 1/2] = -$
$[2178309.05278649631438] = - 2178309$

$1/z_4 = 1/(- 2178309) = - 1/2178309$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$\Phi_4 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 = 3924578/2178309$
$= \underline{1.618033988749}989097...$

$r_4 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 =$
$1.61803398874989484820458683436563811772 - 2 + 1/3$
$+ 1/21 + 1/987 + 1/2178309 = -$
0.0000000000000942488427

$z_5 = (\text{sign } r_4)[1/|r_4| + 1/2] = (\text{sign } r_4)[1/|a - a_4| + 1/2] =$
$(\text{sign } r_4)[1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^4 1/z_j| + 1/2]$

$z_5 = (\text{sign } r_4)[1/|r_4| + 1/2] = (\text{sign}(\Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309))[1/|\Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309| + 1/2] = (\text{sign}(1.61803398874989484820458683436563811772 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309))[1/|1.61803398874989484820458683436563811772 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309| + 1/2] = (\text{sign}(-0.0000000000000942488427))[10610209857722.5527864 + 1/2] = -[10610209857723.0527864] = -10610209857723$

$1/z_5 = 1/(-10610209857723) = -1/10610209857723$

$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$

$$\Phi_5 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 - 1/10610209857723 = 17167680177565/10610209857723 = \underline{1.61803398874989484820458683}8338...$$

$$r_5 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 + 1/10610209857723 = \underline{1.61803398874989484820458683}436563811772 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 + 1/10610209857723 = -3.97252876 \times 10^{-27}$$

$$\Phi = \underline{1.61803398874989484820458683}4365638117720309179805 76...$$

2.11.3.10. СРАВНЕНИЕ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (ЧИСЛА Φ) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ Φ_k К ЭТОМУ ОТНОШЕНИЮ (ЧИСЛУ) Φ С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УМЕНЬШЕННЫХ НА 1/2

ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\Phi_0 = 2;$$

$$\Phi_1 = \underline{1.6}6666666...;$$

$$\Phi_2 = \underline{1.61}9047619...;$$

$$\Phi_3 = \underline{1.61803}444782168...;$$

$$\Phi_4 = \underline{1.618033988749}989097...;$$

$$\Phi_5 = \underline{1.61803398874989484820458683}8338... .$$

$$r_5 = \Phi - \Phi_5 = - 3.97252876 \times 10^{-27}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$\Phi =$

1.61803398874989484820458683436563811772030917980576...

$$\Phi = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 - 1/10610209857723 - \ldots$$

$$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N} 1/z_k$$

$$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$$

$$z_{k+1} =]1/r_k - 1/2[=]1/(a - a_k) - 1/2[=]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j) - 1/2[$$

$$1/z_{k+1} = 1/]1/r_k - 1/2[= 1/]1/(a - a_k) - 1/2[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j) - 1/2[$$

$$a_0 = [a + 1/2]$$

$$\Phi_0 = [\Phi + 1/2] = 2$$

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

$$r_0 = \Phi - \Phi_0 = 1.6180339887498948482 - 2 = - 0.3819660112501 1$$

$$z_1 =]1/r_0 - 1/2[=]1/(a - a_0) - 1/2[=]1/(a - [a + 1/2]) - 1/2[$$

z_1 =]1/r_0 - 1/2[=]1/(1.6180339887498948482 - 2) - 1/2[=]-2.6180339887499 - 1/2[=]-3.1180339887499[= - 3

1/z_1 = 1/]1/r_0 - 1/2[= 1/]1/(a - a_0) - 1/2[= 1/]1/(a - [a + 1/2]) - 1/2[

1/z_1 = - 1/3

a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1

Φ$_1$ = 2 - 1/3 = 5/3 = $\underline{1.6}$666666666666...

r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1

r_1 = Φ - 2 + 1/3 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 = -0.048632677916772

z_2 =]1/r_1 - 1/2[=]1/(a - a_1) - 1/2[=]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) - 1/2[

z_2 =]1/(Φ - 2 + 1/3) - 1/2[=]1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/3) - 1/2[=]- 20.562305898749 - 1/2[=]- 21.062305898749[= - 21

$1/z_2 = 1/]1/r_1 - 1/2[= 1/]1/(a - a_1) - 1/2[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) - 1/2[$

$1/z_2 = - 1/21$

$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$\Phi_2 = 2 - 1/3 - 1/21 = 34/21 = \underline{1.61}9047619...$

$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 = - 0.0010136302977242$

$z_3 =]1/r_2 - 1/2[$

$z_3 =]1/(\Phi - 2 + 1/3 + 1/21) - 1/2[=]1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21) - 1/2[=]-986.55298903874 - 1/2[=]-987.05298903874[= - 987$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$\Phi_3 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 = 1597/987 = \underline{1.61803}444782168...$

$r_3 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 = - 4.59071787 \times 10^{-7}$

$z_4 =]1/(\Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987) - 1/2[=]1/(1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987) - 1/2[=]- 2178308.5529442 - 1/2[=]- 2178309.0529442[= - 2178309$

$a_4 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$\Phi_4 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 = 3924578/2178309 = \underline{1.6180339887499}89097...$

$r_4 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 = - 9.42488427... \times 10^{-14}$

$z_5 =]1/(\Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309) - 1/2[=]1/(1.61803398874989484820458683436563811772 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309) - 1/2[=]- 10610209857723.0527864...[= - 10610209857723$

$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$

$\Phi_5 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 - 1/10610209857723 = 17167680177565/10610209857723 = \underline{1.61803398874989484820458683}8338...$

$r_5 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 + 1/10610209857723 = 1.61803398874989484820458683436563811772 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 + 1/10610209857723 = - 3.97252876 \times 10^{-27}$

$\Phi = \underline{1.61803398874989484820458683}436563811772030917980576...$

2.11.3.11. СРАВНЕНИЕ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ (ЧИСЛА Ф) С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ $Ф_k$ К ЭТОМУ ОТНОШЕНИЮ (ЧИСЛУ) Ф С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УМЕНЬШЕННЫХ НА 1/2

ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$\Phi_0 = 2;$$

$$\Phi_1 = \underline{1.6}6666666...;$$

$$\Phi_2 = \underline{1.61}9047619...;$$

$$\Phi_3 = \underline{1.61803}444782168...;$$

$$\Phi_4 = \underline{1.618033988749}989097...;$$

$$\Phi_5 = \underline{1.61803398874989484820458683}8338... .$$

$$r_5 = \Phi - \Phi_5 = - 3.97252876 \times 10^{-27}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$\Phi =$

$1.6180339887498948482045868343656381177203091798$

$0576...$

$\Phi = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 - 1/10610209857723$

$- ...$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|r_k| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - a_k| - 1/2[=$

$(\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j| - 1/2[$

$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|r_k| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - a_k| - 1/2[=$

$(\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j| - 1/2[$

$$a_0 = [a + 1/2]$$

$$\Phi_0 = [\Phi + 1/2] = 2$$

$$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$$

$$r_0 = \Phi - \Phi_0 = 1.6180339887498948482 - 2 = -0.38196601125011$$

$$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|r_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - a_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - [a + 1/2]| - 1/2[$$

$$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|r_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}(\Phi - \Phi_0))]1/|\Phi - \Phi_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}(1.6180339887498948482 - 2))]1/|1.6180339887498948482 - 2| - 1/2[= (\mathrm{sign}(-0.3819660112501))]1/|1.6180339887498948482 - 2| -$$

$1/2[= -]2.6180339887498948481731482 - 1/2[= -]2.1180339887498948481731482[= - 3$

$1/z_1 = (\text{sign } r_0)/]1/|r_0| - 1/2[= (\text{sign } r_0)/]1/|a - a_0| - 1/2[= (\text{sign } r_0)/]1/|a - [a + 1/2]| - 1/2[$

$1/z_1 = 1/(- 3) = - 1/3$

$a_1 = [a + 1/2] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$\Phi_1 = 2 - 1/3 = 5/3 = \underline{1.6}66666666666...$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = \Phi - 2 + 1/3 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 = - 0.048632677916772$

$z_2 = (\text{sign } r_1)]1/|r_1| - 1/2[= (\text{sign } r_1)]1/|a - a_1| - 1/2[= (\text{sign } r_1)]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| - 1/2[$

$$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|r_1| - 1/2[= (\mathrm{sign}(\Phi - 2 + 1/3))]1/|\Phi - 2 + 1/3| - 1/2[= (\mathrm{sign}(1.6180339887498948482 - 2 + 1/3))]1/|1.6180339887498948482 - 2 + 1/3| - 1/2[= (\mathrm{sign}(-0.048632677916772))]20.562305898749 - 1/2[= -\ ]20.062305898749[= - 21$$

$$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|r_1| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - a_1| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - [a + 1/2] - 1/z_1| - 1/2[$$

$$1/z_2 = 1/(- 21) = - 1/21$$

$$a_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$$

$$\Phi_2 = 2 - 1/3 - 1/21 = 34/21 = \underline{1.61}9047619...$$

$$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$$

$r_2 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 = - 0.0010136302977242$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|r_2| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|a - a_2| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^{2} 1/z_j| - 1/2[$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|r_2| - 1/2[= (\mathrm{sign}(\Phi - 2 + 1/3 + 1/21))]1/|\Phi - 2 + 1/3 + 1/21| - 1/2[= (\mathrm{sign}(1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21))]1/|1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21| - 1/2[= (\mathrm{sign}(- 0.0010136302977242))]986.5529890387 - 1/2[= -]986.0529890387[= - 987$

$1/z_3 = 1/(- 987) = - 1/987$

$a_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$\Phi_3 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 = 1597/987 =$
$\underline{1.61803}444782168...$

$r_3 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 = 1.6180339887498948482$
$- 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 = - 0.000000459071787$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)]1/|r_3| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_3)]1/|a - a_3| - 1/2[= (\mathrm{sign}$
$r_3)]1/|a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^3 1/z_j| - 1/2[$

$z_4 = (\mathrm{sign}\ r_3)]1/|r_3| - 1/2[= (\mathrm{sign}(\Phi - 2 + 1/3 + 1/21 +$
$1/987))]1/|\Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987| - 1/2[=$
$(\mathrm{sign}(1.6180339887498948482045868343656381177 2 - 2$
$+ 1/3 + 1/21 + 1/987))]1/|$
$1.61803398874989484820458683436563811772 - 2 + 1/3$
$+ 1/21 + 1/987| - 1/2[= (\mathrm{sign}(-$

0.000000459071787))]2178308.55278649631438 - 1/2[= -]2178308.05278649631438[= - 2178309

$1/z_4$ = 1/(- 2178309) = - 1/2178309

a_4 = [a + 1/2] + $1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

Φ_4 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 = 3924578/2178309 = $\underline{1.618033988749}$989097...

r_4 = Φ - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 = 1.6180339887498948482 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 = - 0.00000000000000942488472967 7929

z_5 = (sign r_4)]1/|r_4| - 1/2[= (sign r_4)]1/|a - a_4| - 1/2[= (sign r_4)]1/|a - [a + 1/2] - $\Sigma_{j=1}{}^4 1/z_j$| - 1/2[

$$z_5 = (\mathrm{sign}\ r_4)]1/|r_4| - 1/2[= (\mathrm{sign}(\Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309))]1/|\Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309| - 1/2[= (\mathrm{sign}(1.61803398874989484820458683436563811772 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309))]1/|1.61803398874989484820458683436563811772 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309| - 1/2[= (\mathrm{sign}(-0.00000000000009424884729677929))]1061020985772.5527864045 - 1/2[= -\ ]1061020985772.0527864045[= -1061020985773$$

$$1/z_5 = 1/(-1061020985773)]1/|r_4| - 1/2[= -1/1061020985773$$

$$a_5 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 + 1/z_5$$

$$\Phi_5 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 - 1/10610209857723 = 17167680177565/10610209857723 = \underline{1.61803398874989484820458683}38...$$

$$r_5 = \Phi - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 + 1/10610209857723 = 1.61803398874989484820458683436563811772 - 2 + 1/3 + 1/21 + 1/987 + 1/2178309 + 1/10610209857723 = -3.97252876 \times 10^{-27}$$

$$\Phi = \underline{1.61803398874989484820458683}436563811772030917980576...$$

2.11.3.12. СРАВНЕНИЕ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ ПЕРВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ Φ_k К ЗОЛОТОМУ СЕЧЕНИЮ (ОТНОШЕНИЮ, ЧИСЛУ) Φ С ОСТАТКАМИ r_k ПО МЕТОДУ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ, МЕТОДУ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ И ОБЩИМ МЕТОДАМ И МЕТОДОЛОГИЯМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Метод	Φ_0	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5	$\Phi\text{-}\Phi_5$
Десятичные дроби	$\underline{1}$	$\underline{1.6}$	$\underline{1.6}2$	$\underline{1.618}$	$\underline{1.6180}$	$\underline{1.61803}$	10^{-6}
Непрерывные дроби	$\underline{1}$	2	$\underline{1}.5$	$\underline{1.6}66$	$\underline{1.6}$	$\underline{1.6}25$	10^{-3}
$[a]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}[$	$\underline{1}$	$\underline{1}.5$	$\underline{1.61}1$	$\underline{1.6180}$	$\underline{1.618033988}$	$\underline{1.618033988749894848}$	10^{-20}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}]$	2	$\underline{1.6}$	$\underline{1.61}9$	$\underline{1.61803}$	$\underline{1.618033988749}$	$\underline{1.61803398874989484820458683}$	10^{-27}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/[1/\vert r_{j-1}\vert]$	2	$\underline{1}.5$	$\underline{1.6}25$	$\underline{1.6180}$	$\underline{1.61803398}$	$\underline{1.618033988749894848}$	10^{-19}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}[$	2	$\underline{1}.5$	$\underline{1.61}1$	$\underline{1.6180}$	$\underline{1.618033988}$	$\underline{1.618033988749894848}$	10^{-20}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/]1/\vert r_{j-1}\vert[$	2	$\underline{1.6}$	$\underline{1.61}9$	$\underline{1.61803}$	$\underline{1.618033988749}$	$\underline{1.61803398874989484820458683}$	10^{-27}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}+1/2]$	2	$\underline{1.6}$	$\underline{1.61}9$	$\underline{1.61803}$	$\underline{1.618033988749}$	$\underline{1.61803398874989484820458683}$	10^{-27}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/[1/\vert r_{j-1}\vert+1/2]$	2	$\underline{1.6}$	$\underline{1.61}9$	$\underline{1.61803}$	$\underline{1.618033988749}$	$\underline{1.61803398874989484820458683}$	10^{-27}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}-1/2[$	2	$\underline{1.6}$	$\underline{1.61}9$	$\underline{1.61803}$	$\underline{1.618033988749}$	$\underline{1.61803398874989484820458683}$	10^{-27}
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}{}^{\circ}/]1/\vert r_{j-1}\vert-1/2[$	2	$\underline{1.6}$	$\underline{1.61}9$	$\underline{1.61803}$	$\underline{1.618033988749}$	$\underline{1.61803398874989484820458683}$	10^{-27}

Золотое сечение $\Phi = (5^{1/2} + 1)/2 =$

$\underline{1.61803398874989484820458683}436563811772030917980576...$

Сравнение вычисленных всеми указанными методами пятых приближений $Ф_5$ расставляет эти методы по качеству полученных приближений к золотому сечению Ф следующим образом:

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением <u>ближайших целых чисел</u> <u>целыми частями</u> из предварительно <u>увеличенных на 1/2</u> обращений последовательных остатков.

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения

действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков.

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков.

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения

действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков.

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков.

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из

обращений абсолютных величин последовательных остатков.

$$\Phi_5 = 2 - 1/3 - 1/21 - 1/987 - 1/2178309 - 1/10610209857723 =$$

$$\underline{1.61803398874989484820458683}8338... .$$

$$r_5 = \Phi - \Phi_5 = - 3.97252876 \times 10^{-27}.$$

26 верных десятичных знаков после запятой.

7...8. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков.

$$\Phi_5 = 2 - 1/2 + 1/9 + 1/145 + 1/37986 + 1/2345721887 =$$

$$\underline{1.618033988749894848}16747... .$$

$$\Phi - \Phi_5 = 3.711... \times 10^{-20}.$$

18 верных десятичных знаков после запятой.

7...8. Общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях.

$$\Phi_5 = 1 + 1/2 + 1/9 + 1/145 + 1/37986 + 1/2345721887 =$$

$$\underline{1.618033988749894848}16747\ldots .$$

$$\Phi - \Phi_5 = 3.711\ldots \times 10^{-20}.$$

18 верных десятичных знаков после запятой.

По общему методу гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях верхняя оценка погрешности пятого

приближения Φ_5 к числу Φ выражается следующим образом:

$$0 \le \Sigma_{j=k+1}^{\infty} 1/n_j = a - a_k = a - [a] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/n_j < 1/(n_k - 1) - 1/n_k = 1/(n_k(n_k - 1));$$

$$0 < \Phi - \Phi_5 = \Phi - (1 + 1/2 + 1/9 + 1/145 + 1/37986 + 1/2345721887) < 1/(2345721887 \times 2345721886) = 1/5502411168805118882 = 1.8173850868676 \times 10^{-19}.$$

Действительная погрешность составляет

$$\Phi - \Phi_5 = \underline{1.61803398874989484}820458... - \underline{1.61803398874989484}816747... = 0.0000000000000000000003711... = 3.711 \times 10^{-20},$$

то есть менее 21 % указанной верхней оценки.

9. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков.

$$\Phi_5 = 2 - 1/2 + 1/8 - 1/143 + 1/37042 - 1/1563518960 =$$

$$\underline{1.618033988749894848}051548\ldots .$$

$$\Phi - \Phi_5 = 1.53038707557\ldots \times 10^{-19}.$$

18 верных десятичных знаков после запятой.

10. Метод десятичных дробей.

$$\Phi_5 = \underline{1.61803}.$$

5 верных десятичных знаков после запятой.

11. Метод непрерывных (цепных) дробей.

$$\Phi_5 = \underline{1.6}25.$$

1 верный десятичный знак после запятой.

2.11.3.13. АНАЛИЗ ИТОГОВ СРАВНЕНИЯ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ ПЕРВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ Φ_k К ЗОЛОТОМУ СЕЧЕНИЮ (ОТНОШЕНИЮ, ЧИСЛУ) Ф С ОСТАТКАМИ r_k ПО МЕТОДУ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ, МЕТОДУ НЕПРЕРЫВНЫХ (ЦЕПНЫХ) ДРОБЕЙ И ОБЩИМ МЕТОДАМ И МЕТОДОЛОГИЯМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Эти итоги кажутся весьма неожиданными, однако имеют свои вполне логичные объяснения.

1. Наилучшие и при этом одинаковые итоги даются всеми четырьмя общими методологиями знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел, а также общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков и общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков. Задача приближения золотого сечения Ф не разделяет эти шесть общих методологий.

2. На семь порядков хуже предыдущих следующие по качеству одинаковые итоги общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков и общего метода гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях. Задача приближения золотого сечения Ф не разделяет эти общую методологию и общий метод. Этот общий метод осуществляет из каждого остатка дробной части действительного числа последовательное выделение именно наибольшего возможного элемента гармонического ряда, то есть дроби с

единичным числителем, знаменателем которой является наименьшее возможное натуральное число. Так что каждый шаг общего метода гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях является наилучшим для наибольшего возможного ускорения сходимости избранной части гармонического ряда путём оставления наименьшего возможного нового остатка дробной части действительного числа. Поэтому именно общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях всегда обеспечивает

наилучший возможный выбор ряда непременно положительных единичных, или аликвотных, дробей и является наилучшим возможным с точки зрения ускорения сходимости последовательности приближений частными суммами наличной части гармонического ряда.

3. Незначительно хуже предыдущих следующие по качеству итоги общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков.

4. Метод десятичных дробей, несмотря на возможные изменения в последовательности наличных цифр дробной части действительного числа, даёт универсальную

верхнюю оценку погрешности отбрасывания всех цифр, начиная с некоторой цифры, единицей последней оставляемой цифры. Эти универсальные верхние оценки погрешностей для последовательности всех приближений образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой обратен основанию системы счисления m и составляет 1/m. В наших примерах

$$m = 10,$$

$$1/m = 1/10.$$

Поэтому метод десятичных дробей обеспечивает по закону убывающей геометрической прогрессии для верхних оценок погрешностей такую сходимость последовательных

приближений, которую можно считать естественной, нормальной, стандартной, средней.

5. Метод непрерывных (цепных) дробей даёт наилучшие последовательные рациональные приближения действительных чисел попеременно снизу и сверху именно по критерию малости знаменателей этих приближений как несократимых дробей, но отнюдь не по критерию ускорения сходимости последовательности этих приближений, особенно при частоте небольших, начиная с наименьших возможных, то есть единичных, неполных частных как целых частей знаменателей

непрерывной, или цепной, др<u>о</u>би. Так, для золотого сечения

$$\Phi = 1.6180339887498948482045 8... = [1; 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...]$$

последовательность этих неполных частных

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, ...$$

полностью состоит из единиц, то есть наименьших возможных. Относительно малые, в частности по сравнению с десятью, неполные частные ведут к медленным росту знаменателей последовательных приближений и уменьшению их погрешностей по сравнению с даваемыми методом десятичных дробей.

2.11.4. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.499 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К ЭТОМУ ЧИСЛУ ПО МЕТОДАМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Представляется целесообразным провести испытания именно на примере испытательного числа 0.499, поскольку для него созданный общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях дал заведомо резко

усложнённое представление. Для наглядности и удобства сопоставлений придётся повторить изложенное выше. Крайне полезно для именно дополнительного ускорения последовательных приближений к действительным числам допустить дополнительную возможность наряду с <u>положительными</u> также <u>отрицательных</u> единичных, или аликвотных, дробей. Это хорошо видно на простом примере последовательных приближений к числу 0.499. Поскольку общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях ограничивается только <u>положительными</u> единичными, или аликвотными, дробями, он даёт

$$0.499 = 499/1000 = 1/3 + 1/7 + 1/44 + 1/12158 + 1/1404249000$$

и последовательные приближения к числу 0.499

$$0.499_0 = \underline{0};$$

$$0.499_1 = 1/3 = \underline{0}.333...;$$

$$0.499_2 = 1/3 + 1/7 = 10/21 = \underline{0.4}7619...;$$

$$0.499_3 = 1/3 + 1/7 + 1/44 = 461/924 = \underline{0.49}89177...;$$

$$0.499_4 = 1/3 + 1/7 + 1/44 + 1/12158 = 2802881/5616996 = \underline{0.49}89999992878...;$$

$$0.499_5 = 1/3 + 1/7 + 1/44 + 1/12158 + 1/1404249000 = 499/1000 = \underline{0.499}.$$

Если теперь методы общей теории рациональных разложения и приближения действительных чисел для именно дополнительного ускорения последовательных приближений к действительным числам допускают

дополнительную возможность наряду с <u>положительными</u> также <u>отрицательных</u> единичных, или аликвотных, дробей, то могут давать

$$0.499 = 499/1000 = 1/2 - 1/1000$$

и последовательные приближения к числу 0.499

$$0.499_1 = 1/2 = \underline{0}.5;$$

$$0.499_2 = 1/2 - 1/1000 = 499/1000 = \underline{0.499}.$$

Выигрыш как кардинальное упрощение и резкое ускорение последовательных приближений к числу 0.499 при допущении общей теорией рациональных разложения и приближения действительных чисел дополнительной возможности наряду с <u>положительными</u> также <u>отрицательных</u> единичных, или аликвотных, дробей более чем очевиден.

Замечание. Ранее использовалось единообразие приближения [a + 1/2] нулевого порядка к действительному числу a для всех восьми общих методологий знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел, тогда как дальнейшие единичные, или аликвотные, дроби брались в каждом случае по соответствующей общей методологии. Теперь же и далее используется многообразие приближения также нулевого порядка к приближаемому действительному числу по соответствующей общей методологии. При этом само приближаемое число a естественно рассматривается как обращение $1/r_{-1}$ остатка минус первого порядка r_{-1}.

2.11.4.1. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.499 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.499_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.499 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ЦЕЛЫХ ЧАСТЕЙ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$0.499_0 = \underline{0};$$

$$0.499_1 = \underline{0}.5;$$

$$0.499_2 = \underline{0.499}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$$0.499 = 0 + 1/2 - 1/1000$$

$$a = [a] + \Sigma_{k\in N} 1/z_k$$

$$a_k = [a] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$$

$$z_{k+1} = [1/r_k] = [1/(a - a_k)] = [1/(a - [a] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j)]$$

$$1/z_{k+1} = 1/[1/r_k] = 1/[1/(a - a_k)] = 1/[1/(a - [a] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j)]$$

$$a_0 = [a]$$

$$0.499_0 = 0$$

$$r_0 = a - a_0 = a - [a]$$

$$r_0 = 0.499 - 0 = 0.499$$

$$z_1 = [1/r_0] = [1/(a - a_0)] = [1/(a - [a])]$$

$$z_1 = [1/r_0] = [1/0.499] = [2.004008016032 1] = 2$$

$1/z_1 = 1/[1/r_0] = 1/[1/(a - a_0)] = 1/[1/(a - [a])]$

$1/z_1 = 1/2$

$a_1 = [a] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$0.499_1 = 0 + 1/2 = 1/2 = 0.5$

$r_1 = a - a_1 = a - [a] - 1/z_1$

$r_1 = 0.499 - 0 - 1/2 = - 0.001$

$z_2 = [1/r_1] = [1/(a - a_1)] = [1/(a - [a] - 1/z_1)]$

$z_2 = [1/(0.499 - 0 - 1/2)] = [- 1000] = - 1000$

$1/z_2 = 1/[1/r_1] = 1/[1/(a - a_1)] = 1/[1/(a - [a] - 1/z_1)]$

$1/z_2 = 1/(- 1000) = - 1/1000$

$a_2 = [a] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$0.499_2 = 0 + 1/2 - 1/1000 = 499/1000 = 0.499$

$r_2 = a - a_2 = a - [a] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = 0.499 - 0 - 1/2 + 1/1000 = 0$

2.11.4.2. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.499 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.499_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.499 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ЦЕЛЫХ ЧАСТЕЙ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$0.499_0 = \underline{0}$;

$0.499_1 = \underline{0}.5$;

$0.499_2 = \underline{0.499}$.

Вычисление приближений первых порядков:

$0.499 = 0 + 1/2 - 1/1000$

$a = (\mathrm{sign}\ a)[|a|] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = (\mathrm{sign}\ a)[|a|] + \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - (\mathrm{sign}\ a)[|a|] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)[1/|r_k|] = (\mathrm{sign}\ r_k)[1/|a - a_k|] = (\mathrm{sign}\ r_k)[1/|a - (\mathrm{sign}\ a)[|a|] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j|]$

$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|r_k|] = (\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|a - a_k|] = (\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|a - (\mathrm{sign}\ a)[|a|] - \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j|]$

$a_0 = (\mathrm{sign}\ a)[|a|]$

$0.499_0 = (\mathrm{sign}\ 0.499)[|0.499|] = [0.499] = 0$

$r_0 = a - a_0 = a - (\mathrm{sign}\ a)[|a|]$

$r_0 = 0.499 - 0 = 0.499$

$z_1 = (\text{sign } r_0)[1/|r_0|] = (\text{sign } r_0)[1/|a - a_0|] = (\text{sign } r_0)[1/|a - (\text{sign } a)[|a|]|]$

$z_1 = (\text{sign } 0.499)[1/|0.499|] = [1/0.499] = [2.004008016032\,1] = 2$

$1/z_1 = (\text{sign } r_0)/[1/|r_0|] = (\text{sign } r_0)/[1/|a - a_0|] = (\text{sign } r_0)/[1/|a - (\text{sign } a)[|a|]|]$

$1/z_1 = 1/2$

$a_1 = (\text{sign } a)[|a|] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$0.499_1 = 0 + 1/2 = 1/2 = 0.5$

$r_1 = a - a_1 = a - (\text{sign } a)[|a|] - 1/z_1$

$r_1 = 0.499 - 0 - 1/2 = - 0.001$

$$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|r_1|] = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - a_1|] = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - (\mathrm{sign}\ a)[|a|] - 1/z_1|]$$

$$z_2 = (\mathrm{sign}(- 0.001))[1/|- 0.001|] = - [1/0.001] = - [1000] = - 1000$$

$$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|r_1|] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - a_1|] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - (\mathrm{sign}\ a)[|a|] - 1/z_1|]$$

$$1/z_2 = 1/(- 1000) = - 1/1000$$

$$a_2 = (\mathrm{sign}\ a)[|a|] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$$

$$0.499_2 = 0 + 1/2 - 1/1000 = 499/1000 = 0.499$$

$$r_2 = a - a_2 = a - (\mathrm{sign}\ a)[|a|] - 1/z_1 - 1/z_2$$

$$r_2 = 0.499 - 0 - 1/2 + 1/1000 = 0$$

2.11.4.3. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.499 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.499_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.499 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ПОТОЛКОВ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$0.499_0 = 1;$$

$$0.499_1 = \underline{0};$$

$$0.499_2 = \underline{0}.333...;$$

$$0.499_3 = \underline{0.4}7619...;$$

$$0.499_4 = \underline{0.49}89177489...;$$

$$0.499_5 = \underline{0.49}899999928788...;$$

$$0.499_6 = \underline{0.499}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$0.499 = 1 + 1/(- 1) + 1/3 + 1/7 + 1/44 + 1/12158 + 1/1404249000$

$a =]a[+ \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k =]a[+ \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^\infty 1/z_j = a - a_k = a -]a[- \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j$

$z_{k+1} =]1/r_k[=]1/(a - a_k)[=]1/(a -]a[- \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j)[$

$1/z_{k+1} = 1/]1/r_k[= 1/]1/(a - a_k)[= 1/]1/(a -]a[- \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j)[$

$a_0 =]a[$

$0.499_0 =]0.499[= 1$

$r_0 = a - a_0 = a -]a[$

$r_0 = 0.499 - 1 = - 0.501$

$z_1 =]1/r_0[=]1/(a - a_0)[=]1/(a -]a[)[$

$z_1 =]1/(- 0.501)[=]- 1.9960079840319[= - 1$

$1/z_1 = 1/]1/r_0[= 1/]1/(a - a_0)[= 1/]1/(a -]a[)[$

$1/z_1 = 1/(- 1) = - 1$

$a_1 =]a[+ 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$

$0.499_1 = 1 + 1/(- 1) = 0$

$r_1 = a - a_1 = a -]a[- 1/z_1$

$r_1 = 0.499 - 1 - 1/(- 1) = 0.499$

$z_2 =]1/r_1[=]1/(a - a_1)[=]1/(a -]a[- 1/z_1)[$

$z_2 =]1/0.499[=]2.004008016032[= 3$

$1/z_2 = 1/]1/r_1[= 1/]1/(a - a_1)[= 1/]1/(a -]a[- 1/z_1)[$

$1/z_2 = 1/3$

$a_2 =]a[+ 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$0.499_2 = 1 + 1/(- 1) + 1/3 = 1 - 1 + 1/3 = 1/3 = 0.333...$

$r_2 = a - a_2 = a -]a[- 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = 0.499 - 1/3 = 0.166666...$

$z_3 =]1/r_2[$

$z_3 =]1/(0.499 - 1/3)[=]6.0362173038229[= 7$

$1/z_3 = 1/]1/r_2[$

$1/z_3 = 1/7$

$a_3 =]a[+ 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$0.499_3 = 1 + 1/(- 1) + 1/3 + 1/7 = 10/21 = 0.47619047619048$

$r_3 = 0.499 - 1 + 1 - 1/3 - 1/7 = 0.022809523809524$

$z_4 =]1/r_3[$

$z_4 =]1/(0.499 - 1 + 1 - 1/3 - 1/7)[=]43.84133611691[= 44$

$1/z_4 = 1/]1/r_3[$

$1/z_4 = 1/44$

$a_4 =]a[+ 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$

$0.499_4 = 1 + 1/(- 1) + 1/3 + 1/7 + 1/44 = 0.49891774891775$

$r_4 = 0.499 - 1 + 1 - 1/3 - 1/7 - 1/44 = 0.000082251082251107$

$z_5 =]1/r_4[$

$z_5 =]1/(0.499 - 1 + 1 - 1/3 - 1/7 - 1/44)[=]12157.894736838[= 12158$

$1/z_5 = 1/]1/r_4[$

$1/z_5 = 1/12158$

$0.499_5 = 1 + 1/(- 1) + 1/3 + 1/7 + 1/44 + 1/12158 =$

0.49899999928788

$r_5 = 0.499 - 1 + 1 - 1/3 - 1/7 - 1/44 - 1/12158 =$

$0.00000000071212441668108718610445868218528195498$

$z_6 =]1/r_5[$

$z_6 =]1/(0.499 - 1 + 1 - 1/3 - 1/7 - 1/44 - 1/12158)[=]1404249000[=$

1404249000

$1/z_6 = 1/]1/r_5[$

$1/z_6 = 1/1404249000$

$0.499_6 = 1 + 1/(- 1) + 1/3 + 1/7 + 1/44 + 1/12158 + 1/1404249000 =$

0.499

$r_6 = 0.499 - 1 + 1 - 1/3 - 1/7 - 1/44 - 1/12158 - 1/1404249000 = 0$

2.11.4.4. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.499 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.499_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.499 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ПОТОЛКОВ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$0.499_0 = 1;$

$0.499_1 = \underline{0}.5;$

$0.499_2 = \underline{0.499}$.

Вычисление приближений первых порядков:

$$0.499 = 1 - 1/2 - 1/1000$$

$$a = (\operatorname{sign} a)]|a|[+ \Sigma_{k\in N}1/z_k$$

$$a_k = (\operatorname{sign} a)]|a|[+ \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - (\operatorname{sign} a)]|a|[- \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$$

$$z_{k+1} = (\operatorname{sign} r_k)]1/|r_k|[= (\operatorname{sign} r_k)]1/|a - a_k|[= (\operatorname{sign} r_k)]1/|a - (\operatorname{sign} a)]|a|[- \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j|[$$

$$1/z_{k+1} = (\operatorname{sign} r_k)/]1/|r_k|[= (\operatorname{sign} r_k)/]1/|a - a_k|[= (\operatorname{sign} r_k)/]1/|a - (\operatorname{sign} a)]|a|[- \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j|[$$

$$a_0 = (\operatorname{sign} a)]|a|[$$

$$0.499_0 = (\operatorname{sign} 0.499)]|0.499|[=]0.499[= 1$$

$$r_0 = a - a_0 = a - (\operatorname{sign} a)]|a|[$$

$$r_0 = 0.499 - 1 = - 0.501$$

$$z_1 = (\operatorname{sign} r_0)]1/|r_0|[= (\operatorname{sign} r_0)]1/|a - a_0|[= (\operatorname{sign} r_0)]1/|a - (\operatorname{sign} a)]|a|[|[$$

$$z_1 = (\operatorname{sign}(- 0.501))]1/|- 0.501|[= -]1/0.501[= -]1.9960079840319[= - 2$$

$$1/z_1 = (\operatorname{sign} r_0)/]1/|r_0|[= (\operatorname{sign} r_0)/]1/|a - a_0|[= (\operatorname{sign} r_0)/]1/|a - (\operatorname{sign} a)]|a|[|[$$

$$1/z_1 = 1/(- 2) = - 1/2$$

$$a_1 = a_0 + 1/z_1 = (\operatorname{sign} a)]|a|[+ 1/z_1$$

$$0.499_1 = 1 - 1/2 = 1/2$$

$$r_1 = a - a_1 = a - a_0 - 1/z_1$$

$r_1 = 0.499 - 1 + 1/2 = 0.499 - 1/2 = - 0.001$

$z_2 = (\text{sign } r_1)]1/|r_1|[= (\text{sign } r_1)]1/|a - a_1|[= (\text{sign } r_1)]1/|a - (\text{sign } a)]|a|[- 1/z_1|[$

$z_2 = (\text{sign}(- 0.001))]1/|- 0.001|[= -]1/0.001[= -]1000[= - 1000$

$1/z_2 = (\text{sign } r_1)/]1/|r_1|[= (\text{sign } r_1)/]1/|a - a_1|[= (\text{sign } r_1)/]1/|a - (\text{sign } a)]|a|[- 1/z_1|[$

$1/z_2 = 1/(- 1000) = - 1/1000$

$a_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 = (\text{sign } a)]|a|[+ 1/z_1 + 1/z_2$

$0.499_2 = 1 - 1/2 - 1/1000 = 0.499$

$r_2 = a - a_2 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 = a - (\text{sign } a)]|a|[- 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = 0.499 - 0.499_2 = 0.499 - 0.499 = 0$

2.11.4.5. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.499 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.499_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.499 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ЦЕЛЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УВЕЛИЧЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$0.499_0 = \underline{0};$$

$$0.499_1 = \underline{0}.5;$$

$$0.499_2 = \underline{0.499}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$0.499 = 0 + 1/2 - 1/1000$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N} 1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$

$z_{k+1} = [1/r_k + 1/2] = [1/(a - a_k) + 1/2] = [1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j) + 1/2]$

$1/z_{k+1} = 1/[1/r_k + 1/2] = 1/[1/(a - a_k) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j) + 1/2]$

$a_0 = [a + 1/2]$

$0.499_0 = [0.499 + 1/2] = [0.999] = 0$

$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$

$$r_0 = 0.499 - 0.499_0 = 0.499 - 0 = 0.499$$

$$z_1 = [1/r_0 + 1/2] = [1/(a - a_0) + 1/2] = [1/(a - [a]) + 1/2]$$

$$z_1 = [1/(0.499 - 0) + 1/2] = [2.0040080160321 + 1/2] = [2.5040080160321] = 2$$

$$1/z_1 = 1/[1/r_0 + 1/2] = 1/[1/(a - a_0) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2]) + 1/2]$$

$$1/z_1 = 1/2$$

$$a_1 = a_0 + 1/z_1 = [a + 1/2] + 1/z_1$$

$$0.499_1 = 0.499_0 + 1/2 = 0 + 1/2 = 1/2 = 0.5$$

$$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$$

$$r_1 = 0.499 - 0 - 1/2 = - 0.001$$

$$z_2 = [1/r_1 + 1/2] = [1/(a - a_1) + 1/2] = [1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) + 1/2]$$

$$z_2 = [1/(0.499 - 0 - 1/2) + 1/2] = [1/(- 0.001) + 1/2] = [- 1000 + 1/2] = [- 999.5] = - 1000$$

$$1/z_2 = 1/[1/r_1 + 1/2] = 1/[1/(a - a_1) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) + 1/2]$$

$$1/z_2 = 1/(- 1000) = - 1/1000$$

$$a_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2$$

$$0.499_2 = 0 + 1/2 - 1/1000 = 0.499$$

$$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$$

$$r_2 = 0.499 - 0 - 1/2 + 1/1000 = 0$$

2.11.4.6. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.499 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.499_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.499 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ЦЕЛЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УВЕЛИЧЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$0.499_0 = \underline{0};$$

$$0.499_1 = \underline{0}.5;$$

$$0.499_2 = \underline{0.499}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$0.499 = 0 + 1/2 - 1/1000$

$a = (\text{sign } a)[|a| + 1/2] + \Sigma_{k\in N} 1/z_k$

$a_k = (\text{sign } a)[|a| + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^\infty 1/z_j = a - a_k = a - (\text{sign } a)[|a| + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j$

$z_{k+1} = (\text{sign } r_k)[1/|r_k| + 1/2] = (\text{sign } r_k)[1/|a - a_k| + 1/2] = (\text{sign } r_k)$
$[1/|a - (\text{sign } a)[|a| + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j| + 1/2]$

$1/z_{k+1} = (\text{sign } r_k)/[1/|r_k| + 1/2] = (\text{sign } r_k)/[1/|a - a_k| + 1/2] = (\text{sign}$
$r_k)/[1/|a - (\text{sign } a)[|a| + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j| + 1/2]$

$a_0 = (\text{sign } a)[|a| + 1/2]$

$0.499_0 = (\text{sign } 0.499)[|0.499| + 1/2] = [0.499 + 1/2] = [0.999] = 0$

$r_0 = a - a_0 = a - (\text{sign } a)[|a| + 1/2]$

$r_0 = 0.499 - 0.499_0 = 0.499 - 0 = 0.499$

$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|r_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|a - a_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)[1/|a - (\mathrm{sign}\ a)[|a| + 1/2]| + 1/2]$

$z_1 = (\mathrm{sign}(0.499))[1/|0.499| + 1/2] = [1/|0.499| + 1/2] = [1/0.499 + 1/2] = [2.0040080160321 + 1/2] = [2.5040080160321] = 2$

$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|r_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|a - a_0| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_0)/[1/|a - (\mathrm{sign}\ a)[|a| + 1/2]| + 1/2]$

$1/z_1 = 1/2$

$a_1 = a_0 + 1/z_1 = (\mathrm{sign}\ a)[|a| + 1/2] + 1/z_1$

$0.499_1 = 0.499_0 + 1/2 = 0 + 1/2 = 1/2 = 0.5$

$r_1 = a - a_1 = a - a_0 - 1/z_1 = a - (\mathrm{sign}\ a)[|a| + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = 0.499 - 0.499_0 - 1/2 = 0.499 - 0 - 1/2 = - 0.001$

$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|r_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - a_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)[1/|a - (\mathrm{sign}\ a)[|a| + 1/2] - 1/z_1| + 1/2]$

$z_2 = (\mathrm{sign}(- 0.001))[1/|- 0.001| + 1/2] = - [1/0.001 + 1/2] = - [1000 + 1/2] = - 1000$

$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|r_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - a_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - (\mathrm{sign}\ a)[|a| + 1/2] - 1/z_1| + 1/2]$

$1/z_2 = 1/(- 1000) = - 1/1000$

$a_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 = (\mathrm{sign}\ a)[|a| + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2$

$0.499_2 = 0.499_0 + 1/2 - 1/1000 = 0 + 1/2 - 1/1000 = 0.499$

$r_2 = a - a_2 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 = a - (\mathrm{sign}\ a)[|a| + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = 0.499 - 0.499_2 = 0.499 - 0.499_0 - 1/2 + 1/1000 = 0.499 - 0 - 1/2 + 1/1000 = 0$

2.11.4.7. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.499 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.499_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.499 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УМЕНЬШЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$0.499_0 = \underline{0};$$

$$0.499_1 = \underline{0}.5;$$

$$0.499_2 = \underline{0.499}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$0.499 = 0 + 1/2 - 1/1000$

$a =]a - 1/2[+ \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k =]a - 1/2[+ \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a -]a - 1/2[- \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$z_{k+1} =]1/r_k - 1/2[=]1/(a - a_k) - 1/2[=]1/(a -]a - 1/2[- \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j) - 1/2[$

$1/z_{k+1} = 1/]1/r_k - 1/2[= 1/]1/(a - a_k) - 1/2[= 1/]1/(a -]a - 1/2[- \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j) - 1/2[$

$a_0 =]a - 1/2[$

$0.499_0 =]0.499 - 1/2[=]- 0.001[= 0$

$r_0 = a - a_0 = a -]a - 1/2[$

$$r_0 = 0.499 - 0 = 0.499$$

$$z_1 =]1/r_0 - 1/2[=]1/(a - a_0) - 1/2[=]1/(a - [a + 1/2]) - 1/2[$$

$$z_1 =]1/(0.499 - 0) - 1/2[=]2.0040080160321 - 1/2[=]1.5040080160321[= 2$$

$$1/z_1 = 1/]1/r_0 - 1/2[= 1/]1/(a - a_0) - 1/2[= 1/]1/(a - [a + 1/2]) - 1/2[$$

$$1/z_1 = 1/2$$

$$a_1 = a_0 + 1/z_1 =]a - 1/2[+ 1/z_1$$

$$0.499_1 = 0.499_0 + 1/2 = 0 + 1/2 = 1/2 = 0.5$$

$$r_1 = a - a_1 = a - a_0 - 1/z_1 = a -]a - 1/2[- 1/z_1$$

$$r_1 = 0.499 - 0.499_0 - 1/2 = 0.499 - 0 - 1/2 = - 0.001$$

$$z_2 =]1/r_1 - 1/2[=]1/(a - a_1) - 1/2[=]1/(a -]a - 1/2[- 1/z_1) - 1/2[$$

$$z_2 =]1/(0.499 - 0 - 1/2) - 1/2[=]1/(- 0.001) - 1/2[=]- 1000 - 1/2[=]- 1000.5[= - 1000$$

$$1/z_2 = 1/]1/r_1 - 1/2[= 1/]1/(a - a_1) - 1/2[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) - 1/2[$$

$$1/z_2 = 1/(- 1000) = - 1/1000$$

$$a_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 =]a - 1/2[+ 1/z_1 + 1/z_2$$

$$0.499_2 = 0.499_0 + 1/2 - 1/1000 = 0 + 1/2 - 1/1000 = 0.499$$

$$r_2 = a - a_2 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 = a -]a - 1/2[- 1/z_1 - 1/z_2$$

$$r_2 = 0.499 - 0.499_0 - 1/2 + 1/1000 = 0.499 - 0 - 1/2 + 1/1000 = 0$$

2.11.4.8. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.499 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.499_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.499 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УМЕНЬШЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$0.499_0 = \underline{0}$;

$0.499_1 = \underline{0}.5$;

$0.499_2 = \underline{0.499}$.

Вычисление приближений первых порядков:

$$0.499 = 0 + 1/2 - 1/1000$$

$$a = (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[+ \Sigma_{k\in N}1/z_k$$

$$a_k = (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[+ \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[- \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$$

$$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|r_k| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - a_k| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[- \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j| - 1/2[$$

$$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|r_k| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - a_k| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[- \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j| - 1/2[$$

$$a_0 = (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[$$

$$0.499_0 = (\mathrm{sign}\ 0.499)]|0.499| - 1/2[=]0.499 - 1/2[=]- 0.001[= 0$$

$$r_0 = a - a_0 = a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[$$

$$r_0 = 0.499 - 0.499_0 = 0.499 - 0 = 0.499$$

$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|r_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - a_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[| - 1/2[$

$z_1 = (\mathrm{sign}(0.499))]1/|0.499| - 1/2[=]1/0.499 - 1/2[=]2.0040080160320641 - 1/2[=]1.5040080160320641[= 2$

$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|r_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - a_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[| - 1/2[$

$1/z_1 = 1/2$

$a_1 = a_0 + 1/z_1 = (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[+ 1/z_1$

$0.499_1 = 0.499_0 + 1/2 = 0 + 1/2 = 1/2$

$r_1 = a - a_1 = a - a_0 - 1/z_1$

$r_1 = 0.499 - 0.499_1 = 0.499 - 1/2 = 0.499 - 1/2 = - 0.001$

$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|r_1| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|a - a_1| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[- 1/z_1| - 1/2[$

$$z_2 = (\mathrm{sign}(- 0.001))]1/|- 0.001| - 1/2[= -]1/0.001 - 1/2[= -]1000 - 1/2[= -]999.5[= - 1000$$

$$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|r_1| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - a_1| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[- 1/z_1| - 1/2[$$

$$1/z_2 = 1/(- 1000) = - 1/1000$$

$$a_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 = (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[+ 1/z_1 + 1/z_2$$

$$0.499_2 = 0.499_0 + 1/2 - 1/1000 = 0 + 1/2 - 1/1000 = 0.499$$

$$r_2 = a - a_2 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 = a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[- 1/z_1 - 1/z_2$$

$$r_2 = 0.499 - 0.499_2 = 0.499 - 0.499 = 0$$

2.11.4.9. СРАВНЕНИЕ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.499_k К ЧИСЛУ 0.499 ПО ОБЩИМ МЕТОДАМ И МЕТОДОЛОГИЯМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Методология	0.499_0	0.499_1	0.499_2	0.499_3	0.499_4	0.499_5	0.499_6
$[a]+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}[$	$\underline{0}$	$\underline{0}.333$	$\underline{0.4}7619$	$\underline{0.49}89177$	$\underline{0.49}89999992878$	$\underline{0.499}$	
$[a]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}]$	$\underline{0}$	$\underline{0}.5$	$\underline{0.499}$				
$a°[\lvert a\rvert]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}°/[1/\lvert r_{j-1}\rvert]$	$\underline{0}$	$\underline{0}.5$	$\underline{0.499}$				
$]a[+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}[$	1	$\underline{0}$	$\underline{0}.333$	$\underline{0.4}7619$	$\underline{0.49}89177$	$\underline{0.49}89999992878$	$\underline{0.499}$

$a^\circ]\vert a\vert[+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}^\circ/]1/\vert r_{j-1}\vert[$	1	0.5	0.499				
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}1/[1/r_{j-1}+1/2]$	0	0.5	0.499				
$a^\circ[\vert a\vert+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}^\circ/[1/\vert r_{j-1}\vert+1/2]$	0	0.5	0.499				
$]a-1/2[+\Sigma_{j=1}^{k}1/]1/r_{j-1}-1/2[$	0	0.5	0.499				
$a^\circ]a-1/2[+\Sigma_{j=1}^{k}r_{j-1}^\circ/]1/\vert r_{j-1}\vert-1/2[$	0	0.5	0.499				

Сравнение вычисленных всеми указанными методологиями первых приближений 0.499_k расставляет эти методы по качеству полученных приближений к числу 0.499 следующим образом:

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел

выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков.

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков.

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков.

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков.

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков.

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков.

$$0.499_0 = \underline{0};$$

$$0.499_1 = \underline{0}.5;$$

$$0.499_2 = \underline{0.499}.$$

7. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков.

$$0.499_0 = 1;$$

$$0.499_1 = \underline{0}.5;$$

$$0.499_2 = \underline{0.499}.$$

8. Общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях.

$$0.499_0 = \underline{0};$$

$$0.499_1 = 1/3 = \underline{0}.333...;$$

$$0.499_2 = 1/3 + 1/7 = 10/21 = \underline{0.4}7619...;$$

$$0.499_3 = 1/3 + 1/7 + 1/44 = 461/924 = \underline{0.49}89177...;$$

$$0.499_4 = 1/3 + 1/7 + 1/44 + 1/12158 = 2802881/5616996 = \underline{0.49}8999992878...;$$

$$0.499_5 = 1/3 + 1/7 + 1/44 + 1/12158 + 1/1404249000 = 499/1000 = \underline{0.499}.$$

9. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков.

$$0.499_0 = 1;$$

$$0.499_1 = \underline{0};$$

$$0.499_2 = 1/3 = \underline{0}.333...;$$

$$0.499_3 = 1/3 + 1/7 = 10/21 = \underline{0.4}7619...;$$

$$0.499_4 = 1/3 + 1/7 + 1/44 = 461/924 = \underline{0.49}89177...;$$

$$0.499_5 = 1/3 + 1/7 + 1/44 + 1/12158 =$$
$$2802881/5616996 = \underline{0.49}8999992878...;$$

$$0.499_6 = 1/3 + 1/7 + 1/44 + 1/12158 + 1/1404249000$$
$$= 499/1000 = \underline{0.499}.$$

2.11.4.10. АНАЛИЗ ИТОГОВ СРАВНЕНИЯ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ ПЕРВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.499_k К ЧИСЛУ 0.499 ПО ОБЩИМ МЕТОДАМ И МЕТОДОЛОГИЯМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Эти итоги имеют свои вполне логичные объяснения.

1. Наилучшие и при этом одинаковые итоги даются всеми четырьмя общими методологиями знакопеременных

гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел, а также общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков и общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков. Уже второе приближение даёт точный итог. Задача приближения числа 0.499 не разделяет эти шесть общих методологий. Число 0.499 положительно и имеет дробную часть, меньшую, чем 1/2. Для такого числа выделение целых частей полезнее, чем выделение потолков.

2. Незначительно хуже предыдущих (только приближение нулевого порядка) следующие по качеству итоги общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков. Уже второе приближение даёт точный итог.

3. Намного хуже предыдущих следующие по качеству итоги общего метода гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях. Только пятое приближение даёт точный итог. Этот общий метод осуществляет из каждого остатка дробной части

действительного числа последовательное выделение именно наибольшего возможного элемента гармонического ряда, то есть дроби с единичным числителем, знаменателем которой является наименьшее возможное натуральное число. Так что каждый шаг общего метода гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях является наилучшим для наибольшего возможного ускорения сходимости избранной части гармонического ряда путём оставления наименьшего возможного нового остатка дробной части действительного числа. Поэтому именно общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел

потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях всегда обеспечивает наилучший возможный выбор ряда непременно положительных единичных, или аликвотных, дробей и является наилучшим возможным с точки зрения ускорения сходимости последовательности приближений частными суммами наличной части гармонического ряда.

4. Ещё хуже предыдущих следующие по качеству итоги общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков. Только шестое приближение даёт точный итог. Дополнительное замедление сходимости обусловлено единичным приближением нулевого порядка и возвращением к нулю первым приближением.

2.11.5. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.599 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К ЭТОМУ ЧИСЛУ ПО МЕТОДАМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Приближавшееся выше число 0.499 положительно и имеет дробную часть, меньшую, чем 1/2. Для такого числа выделение целых частей полезнее, чем выделение потолков. Представляется целесообразным провести испытания именно на примере испытательного числа 0.599. Оно положительно и имеет дробную часть, бóльшую, чем 1/2. Для такого числа выделение потолков полезнее, чем выделение целых частей. И для него созданный общий

метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях даёт заведомо резко усложнённое представление. Крайне полезно для именно дополнительного ускорения последовательных приближений к действительным числам допустить дополнительную возможность наряду с <u>положительными</u> также <u>отрицательных</u> единичных, или аликвотных, дробей. Это хорошо видно на простом примере последовательных приближений к числу 0.599. Поскольку общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях

ограничивается только положительными единичными, или аликвотными, дробями, он даёт

$$\mathbf{0.599 = 599/1000 = 1/2 + 1/11 + 1/124 + 1/37889 + 1/12920149000}$$

и последовательные приближения к числу 0.599

$$\mathbf{0.599_0 = \underline{0};}$$

$$\mathbf{0.599_1 = 1/2 = \underline{0.5};}$$

$$\mathbf{0.599_2 = 1/2 + 1/11 = 13/22 = \underline{0.59}09090...;}$$

$$\mathbf{0.599_3 = 1/2 + 1/11 + 1/124 = 817/1364 = \underline{0.59}8973607038 1232...;}$$

$$\mathbf{0.599_4 = 1/2 + 1/11 + 1/124 + 1/37889 = \underline{0.59}8999999226015...;}$$

$$0.599_5 = 1/2 + 1/11 + 1/124 + 1/37889 + 1/12920149000 = 599/1000 = \underline{0.599}.$$

Если теперь методы общей теории рациональных разложения и приближения действительных чисел для именно дополнительного ускорения последовательных приближений к действительным числам допускают дополнительную возможность наряду с положительными также отрицательных единичных, или аликвотных, дробей, то могут давать

$$0.599 = 599/1000 = 1/2 + 1/10 - 1/1000$$

и последовательные приближения к числу 0.599

$$\mathbf{0.599_0 = \underline{0};}$$

$$\mathbf{0.599_1 = 1/2 = \underline{0.5};}$$

$$\mathbf{0.599_2 = 1/2 + 1/10 = 3/5 = \underline{0}.6;}$$

$$\mathbf{0.599_3 = 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 599/1000 = \underline{0.599}.}$$

Выигрыш как кардинальное упрощение и резкое ускорение последовательных приближений к числу 0.599 при допущении общей теорией рациональных разложения и приближения действительных чисел дополнительной возможности наряду с положительными также отрицательных единичных, или аликвотных, дробей более чем очевиден.

2.11.5.1. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.599 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.599_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.599 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ЦЕЛЫХ ЧАСТЕЙ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$0.599_0 = \underline{0};$$

$$0.599_1 = 0 + 1/1 = 1;$$

$$0.599_2 = 0 + 1/1 - 1/3 = 2/3 = \underline{0}.(6);$$

$$0.599_3 = 0 + 1/1 - 1/3 - 1/15 = 3/5 = \underline{0}.6;$$

$$0.599_4 = 0 + 1/1 - 1/3 - 1/15 - 1/1000 = 599/1000 = \underline{0.599}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$0.599 = 0 + 1/1 - 1/3 - 1/15 - 1/1000 = 599/1000$

$a = [a] + \Sigma_{k\in N} 1/z_k$

$a_k = [a] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - [a] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j$

$z_{k+1} = [1/r_k] = [1/(a - a_k)] = [1/(a - [a] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j)]$

$1/z_{k+1} = 1/[1/r_k] = 1/[1/(a - a_k)] = 1/[1/(a - [a] - \Sigma_{j=1}^{k} 1/z_j)]$

$a_0 = [a]$

$0.599_0 = [0.599] = 0$

$r_0 = a - a_0 = a - [a]$

$r_0 = 0.599 - 0.599_0 = 0.599 - 0 = 0.599$

$z_1 = [1/r_0] = [1/(a - a_0)] = [1/(a - [a])]$

$z_1 = [1/r_0] = [1/0.599] = [1.669449081803005] = 1$

$1/z_1 = 1/[1/r_0] = 1/[1/(a - a_0)] = 1/[1/(a - [a])]$

$1/z_1 = 1/1 = 1$

$a_1 = a_0 + 1/z_1 = [a] + 1/z_1$

$0.599_1 = 0 + 1/1 = 1/1 = 1$

$r_1 = a - a_1 = a - [a] - 1/z_1$

$r_1 = 0.599 - 0 - 1/1 = - 0.401$

$z_2 = [1/r_1] = [1/(a - a_1)] = [1/(a - [a] - 1/z_1)]$

$z_2 = [1/(0.599 - 0 - 1/1)] = [- 2.493765586] = - 3$

$1/z_2 = 1/[1/r_1] = 1/[1/(a - a_1)] = 1/[1/(a - [a] - 1/z_1)]$

$1/z_2 = 1/(- 3) = - 1/3$

$a_2 = [a] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$0.599_2 = 0 + 1/1 - 1/3 = 2/3 = 0.6666666666$

$r_2 = a - a_2 = a - [a] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = 0.599 - 0.599_2 = 0.599 - 0.599_0 - 1/1 + 1/3 = 0.599 - 0 - 1/1 + 1/3 = - 203/3000 = - 0.0676666666666666$

$z_3 = [1/r_2] = [1/(a - a_2)] = [1/(a - [a] - 1/z_1 - 1/z_2)]$

$z_3 = [1/(0.599 - 0 - 1/1 + 1/3)] = [- 14.7783251231527] = - 15$

$1/z_3 = 1/[1/r_2] = 1/[1/(a - a_2)] = 1/[1/(a - [a] - 1/z_1 - 1/z_2)]$

$1/z_3 = 1/(- 15) = - 1/15$

$a_3 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 = [a] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$0.599_3 = 0.599_0 + 1/1 - 1/3 - 1/15 = 0 + 1/1 - 1/3 - 1/15 = 3/5 = 0.6$

$$r_3 = a - a_3 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3 = a - [a] - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3$$

$$r_3 = 0.599 - 0.599_3 = 0.599 - 0 - 1/1 + 1/3 + 1/15 = - 0.001$$

$$z_4 = [1/r_3] = [1/(a - a_3)] = [1/(a - [a] - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3)]$$

$$z_4 = [1/(0.599 - 0 - 1/1 + 1/3 + 1/15)] = [- 1000] = - 1000$$

$$1/z_4 = 1/[1/r_3] = 1/[1/(a - a_3)] = 1/[1/(a - [a] - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3)]$$

$$1/z_4 = 1/(- 1000) = - 1/1000$$

$$a_4 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 = [a] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$$

$$0.599_4 = 0.599_0 + 1/1 - 1/3 - 1/15 - 1/1000 = 0 + 1/1 - 1/3 - 1/15 - 1/1000 = 599/1000 = 0.599$$

$$r_4 = a - a_4 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3 - 1/z_4 = a - [a] - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3 - 1/z_4$$

$$r_4 = 0.599 - 0.599_4 = 0.599 - 0 - 1/1 + 1/3 + 1/15 + 1/1000 = 0$$

2.11.5.2. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.599 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.599_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.599 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ЦЕЛЫХ ЧАСТЕЙ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$0.599_0 = \underline{0};$$

$$0.599_1 = 0 + 1/1 = 1;$$

$$0.599_2 = 0 + 1/1 - 1/2 = 1/2 = \underline{0}.5;$$

$$0.599_3 = 0 + 1/1 - 1/2 + 1/10 = 3/5 = \underline{0}.6;$$

$$0.599_4 = 0 + 1/1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 599/1000 = \underline{0.599}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$$0.599 = 0 + 1/1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 599/1000$$

$$a = (\mathrm{sign}\ a)[|a|] + \Sigma_{k\in N} 1/z_k$$

$$a_k = (\mathrm{sign}\ a)[|a|] + \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j$$

$$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty} 1/z_j = a - a_k = a - (\mathrm{sign}\ a)[|a|] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j$$

$$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)[1/|r_k|] = (\mathrm{sign}\ r_k)[1/|a - a_k|] =$$

$$(\mathrm{sign}\ r_k)[1/|a - (\mathrm{sign}\ a)[|a|] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j|]$$

$$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|r_k|] = (\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|a - a_k|] =$$

$$(\mathrm{sign}\ r_k)/[1/|a - (\mathrm{sign}\ a)[|a|] - \Sigma_{j=1}{}^{k} 1/z_j|]$$

$$a_0 = (\mathrm{sign}\ a)[|a|]$$

$$0.599_0 = (\mathrm{sign}\ 0.599)[|0.599|] = [0.599] = 0$$

$$r_0 = a - a_0 = a - (\text{sign } a)[|a|]$$

$$r_0 = 0.599 - 0 = 0.599$$

$$z_1 = (\text{sign } r_0)[1/|r_0|] = (\text{sign } r_0)[1/|a - a_0|] = (\text{sign } r_0)[1/|a - (\text{sign } a)[|a|]|]$$

$$z_1 = (\text{sign } 0.599)[1/|0.599|] = [1/0.599] = [1.669449081803005] = 1$$

$$1/z_1 = (\text{sign } r_0)/[1/|r_0|] = (\text{sign } r_0)/[1/|a - a_0|] = (\text{sign } r_0)/[1/|a - (\text{sign } a)[|a|]|]$$

$$1/z_1 = 1/1 = 1$$

$$a_1 = (\text{sign } a)[|a|] + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$$

$$0.599_1 = 0 + 1/1 = 1/1 = 1$$

$$r_1 = a - a_1 = a - (\text{sign } a)[|a|] - 1/z_1$$

$r_1 = 0.599 - 0 - 1/1 = - 0.401$

$z_2 = (\text{sign } r_1)[1/|r_1|] = (\text{sign } r_1)[1/|a - a_1|] =$

$(\text{sign } r_1)[1/|a - (\text{sign } a)[|a|] - 1/z_1|]$

$z_2 = (\text{sign}(- 0.401))[1/|- 0.401|] = - [1/0.401] = -$

$[2.4937655860349127] = - 2$

$1/z_2 = (\text{sign } r_1)/[1/|r_1|] = (\text{sign } r_1)/[1/|a - a_1|] =$

$(\text{sign } r_1)/[1/|a - (\text{sign } a)[|a|] - 1/z_1|]$

$1/z_2 = 1/(- 2) = - 1/2$

$a_2 = (\text{sign } a)[|a|] + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$

$0.599_2 = 0 + 1/1 - 1/2 = 1/2 = 0.5$

$r_2 = a - a_2 = a - (\text{sign } a)[|a|] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = 0.599 - 0.599_2 = 0.599 - 0 - 1/1 + 1/2 = 0.099$

$$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|r_2|] = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|a - a_2|] =$$

$$(\mathrm{sign}\ r_2)[1/|a - (\mathrm{sign}\ a)[|a|] - 1/z_1 - 1/z_2|]$$

$$z_3 = (\mathrm{sign}(0.099))[1/|0.099|] = [1/0.099] =$$

$$[10.10101010101010101] = 10$$

$$1/z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)/[1/|r_2|] = (\mathrm{sign}\ r_2)/[1/|a - a_2|] =$$

$$(\mathrm{sign}\ r_2)/[1/|a - (\mathrm{sign}\ a)[|a|] - 1/z_1 - 1/z_2|]$$

$$1/z_3 = 1/10$$

$$a_3 = (\mathrm{sign}\ a)[|a|] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$$

$$0.599_3 = 0 + 1/1 - 1/2 + 1/10 = 3/5 = 0.6$$

$$r_3 = a - a_3 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3 = a - [a] - 1/z_1 - 1/z_2 -$$

$$1/z_3$$

$$r_3 = 0.599 - 0.599_3 = 0.599 - 0 - 1/1 + 1/2 - 1/10 = - 0.001$$

$$z_4 = (\operatorname{sign} r_3)[1/|r_3|] = (\operatorname{sign} r_3)[1/|a - a_3|] =$$

$$(\operatorname{sign} r_3)[1/|a - (\operatorname{sign} a)[|a|] - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3|]$$

$$z_4 = (\operatorname{sign}(- 0.001))[1/|- 0.001|] = - [1/0.001] = - [1000] = - 1000$$

$$1/z_4 = (\operatorname{sign} r_3)/[1/|r_3|] = (\operatorname{sign} r_3)/[1/|a - a_3|] =$$

$$(\operatorname{sign} r_3)/[1/|a - (\operatorname{sign} a)[|a|] - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3|]$$

$$1/z_4 = 1/(- 1000) = - 1/1000$$

$$a_4 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4 = [a] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 + 1/z_4$$

$$0.599_4 = 0.599_0 + 1/1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 =$$

$$0 + 1/1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 599/1000 = 0.599$$

$$r_4 = a - a_4 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3 - 1/z_4 =$$

$$a - [a] - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3 - 1/z_4$$

$$r_4 = 0.599 - 0.599_4 = 0.599 - 0 - 1/1 + 1/2 - 1/10 + 1/1000 = 0$$

2.11.5.3. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.599 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.599_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.599 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ПОТОЛКОВ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$0.599_0 = 1;$$

$$0.599_1 = 1 - 1/2 = 1/2 = \underline{0.5};$$

$$0.599_2 = 1 - 1/2 + 1/10 = 3/5 = \underline{0}.6;$$

$$0.599_3 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 599/1000 = \underline{0.599}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$0.599 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 599/1000 = 0.599$

$a =]a[+ \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k =]a[+ \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a -]a[- \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j$

$z_{k+1} =]1/r_k[=]1/(a - a_k)[=]1/(a -]a[- \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j)[$

$1/z_{k+1} = 1/]1/r_k[= 1/]1/(a - a_k)[= 1/]1/(a -]a[- \Sigma_{j=1}{}^{k}1/z_j)[$

$a_0 =]a[$

$0.599_0 =]0.599[= 1$

$r_0 = a - a_0 = a -]a[$

$r_0 = 0.599 - 1 = - 0.401$

$z_1 =]1/r_0[=]1/(a - a_0)[=]1/(a -]a[)[$

$$z_1 =]1/(-\ 0.401)[\ =]-\ 2.4937655860349127[\ = -\ 2$$

$$1/z_1 = 1/]1/r_0[\ = 1/]1/(a - a_0)[\ = 1/]1/(a -]a[)[$$

$$1/z_1 = 1/(-\ 2) = -\ 1/2$$

$$a_1 =]a[\ + 1/z_1 = a_0 + 1/z_1$$

$$0.599_1 = 1 - 1/2 = 1/2$$

$$r_1 = a - a_1 = a -]a[\ - 1/z_1$$

$$r_1 = 0.599 - 1 + 1/2 = 0.099$$

$$z_2 =]1/r_1[\ =]1/(a - a_1)[\ =]1/(a -]a[\ - 1/z_1)[$$

$$z_2 =]1/0.099[\ =]10.101010101010101[\ = 10$$

$$1/z_2 = 1/]1/r_1[\ = 1/]1/(a - a_1)[\ = 1/]1/(a -]a[\ - 1/z_1)[$$

$$1/z_2 = 1/10$$

$$a_2 =]a[\ + 1/z_1 + 1/z_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2$$

$0.599_2 = 1 - 1/2 + 1/10 = 3/5 = 0.6$

$r_2 = a - a_2 = a -]a[- 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = 0.599 - 0.599_2 = 0.599 - 1 + 1/2 - 1/10 = - 0.001$

$z_3 =]1/r_2[$

$z_3 =]1/(0.599 - 1 + 1/2 - 1/10)[=]1/(- 0.001)[=]- 1000[=$

$- 1000$

$1/z_3 = 1/]1/r_2[$

$1/z_3 = 1/(- 1000) = - 1/1000$

$a_3 =]a[+ 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$0.599_3 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 599/1000 = 0.599$

$r_3 = 0.599 - 0.599_3 = 0.599 - 1 + 1/2 - 1/10 + 1/1000 = 0$

2.11.5.4. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.599 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.599_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.599 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ ПОТОЛКОВ ИЗ ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$0.599_0 = 1;$$

$$0.599_1 = 1 - 1/3 = 2/3 = \underline{0}.(6);$$

$$0.599_2 = 1 - 1/3 - 1/15 = 3/5 = \underline{0}.6;$$

$$0.599_3 = 1 - 1/3 - 1/15 - 1/1000 = 599/1000 = \underline{0.599}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$0.599 = 1 - 1/3 - 1/15 - 1/1000$

$a = (\mathrm{sign}\ a)]|a|[+ \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = (\mathrm{sign}\ a)]|a|[+ \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - (\mathrm{sign}\ a)]|a|[- \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|r_k|[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - a_k|[= (\mathrm{sign}\ r_k)]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a|[- \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j|[$

$1/z_{k+1} = (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|r_k|[= (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - a_k|[= (\mathrm{sign}\ r_k)/]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a|[- \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j|[$

$a_0 = (\mathrm{sign}\ a)]|a|[$

$0.599_0 = (\mathrm{sign}\ 0.599)]|0.599|[=]0.599[= 1$

$$r_0 = a - a_0 = a - (\mathrm{sign}\ a)]|a|[$$

$$r_0 = 0.599 - 1 = - 0.401$$

$$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|r_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - a_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a|[|[$$

$$z_1 = (\mathrm{sign}(- 0.401))]1/|- 0.401|[= -]1/0.401[= -]2.4937655860349127[= - 3$$

$$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|r_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - a_0|[= (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a|[|[$$

$$1/z_1 = 1/(- 3) = - 1/3$$

$$a_1 = a_0 + 1/z_1 = (\mathrm{sign}\ a)]|a|[+ 1/z_1$$

$$0.599_1 = 1 - 1/3 = 2/3 = 0.(6)$$

$$r_1 = a - a_1 = a - a_0 - 1/z_1$$

$r_1 = 0.599 - 0.599_1 = 0.599 - 1 + 1/3 = 0.599 - 2/3 = -$
$203/3000 = - 0.067(6)$

$z_2 = (\text{sign } r_1)]1/|r_1|[= (\text{sign } r_1)]1/|a - a_1|[=$
$(\text{sign } r_1)]1/|a - (\text{sign } a)]|a|[- 1/z_1|[$

$z_2 = (\text{sign}(- 203/3000))]1/|- 203/3000|[= -]3000/203[=$
$-]14.7783251231527094[= - 15$

$1/z_2 = (\text{sign } r_1)/]1/|r_1|[= (\text{sign } r_1)/]1/|a - a_1|[=$
$(\text{sign } r_1)/]1/|a - (\text{sign } a)]|a|[- 1/z_1|[$

$1/z_2 = 1/(- 15) = - 1/15$

$a_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 = (\text{sign } a)]|a|[+ 1/z_1 + 1/z_2$

$0.599_2 = 1 - 1/3 - 1/15 = 3/5 = 0.6$

$r_2 = a - a_2 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 = a - (\text{sign } a)]|a|[- 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = 0.599 - 0.599_2 = 0.599 - 1 + 1/3 + 1/15 = - 0.001$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|r_2|[= (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|a - a_2|[=$

$(\mathrm{sign}\ r_2)]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a|[- 1/z_1 - 1/z_2|[$

$z_3 = (\mathrm{sign}(- 0.001))]1/|- 0.001|[= -]1/0.001[= -]1000[= - 1000$

$1/z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)/]1/|r_2|[= (\mathrm{sign}\ r_2)/]1/|a - a_2|[=$

$(\mathrm{sign}\ r_2)/]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a|[- 1/z_1 - 1/z_2|[$

$1/z_3 = 1/(- 1000) = - 1/1000$

$a_3 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 = (\mathrm{sign}\ a)]|a|[+ 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$0.599_3 = 1 - 1/3 - 1/15 - 1/1000 = 599/1000 = 0.599$

$r_3 = a - a_3 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3 =$

$a - (\mathrm{sign}\ a)]|a|[- 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3$

$r_3 = 0.599 - 0.599_3 = 0.599 - 1 + 1/3 + 1/15 + 1/1000 = 0.599 -$

$0.599 = 0$

2.11.5.5. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.599 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.599_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.599 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ЦЕЛЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УВЕЛИЧЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$0.599_0 = 1;$$

$$0.599_1 = 1 - 1/2 = 1/2 = \underline{0.5};$$

$$0.599_2 = 1 - 1/2 + 1/10 = 3/5 = \underline{0}.6;$$

$$0.599_3 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 599/1000 = \underline{0.599}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$0.599 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000$

$a = [a + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = [a + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^\infty 1/z_j = a - a_k = a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j$

$z_{k+1} = [1/r_k + 1/2] = [1/(a - a_k) + 1/2] = [1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j) + 1/2]$

$1/z_{k+1} = 1/[1/r_k + 1/2] = 1/[1/(a - a_k) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j) + 1/2]$

$a_0 = [a + 1/2]$

$0.599_0 = [0.599 + 1/2] = [1.099] = 1$

$r_0 = a - a_0 = a - [a + 1/2]$

$r_0 = 0.599 - 0.599_0 = 0.599 - 1 = - 0.401$

$z_1 = [1/r_0 + 1/2] = [1/(a - a_0) + 1/2] = [1/(a - [a]) + 1/2]$

$z_1 = [1/(0.599 - 1) + 1/2] = 1/(- 0.401) + 1/2] = [- 2.493765586 + 1/2] = [- 1.993765586] = - 2$

$1/z_1 = 1/[1/r_0 + 1/2] = 1/[1/(a - a_0) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2]) + 1/2]$

$1/z_1 = - 1/2$

$a_1 = a_0 + 1/z_1 = [a + 1/2] + 1/z_1$

$0.599_1 = 0.599_0 - 1/2 = 1 - 1/2 = 1/2 = 0.5$

$r_1 = a - a_1 = a - [a + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = 0.599 - 1 + 1/2 = 0.099$

$$z_2 = [1/r_1 + 1/2] = [1/(a - a_1) + 1/2] = [1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) + 1/2]$$

$$z_2 = [1/(0.599 - 1 + 1/2) + 1/2] = [1/(0.099) + 1/2] = [10.101010 + 1/2] = [10.60101] = 10$$

$$1/z_2 = 1/[1/r_1 + 1/2] = 1/[1/(a - a_1) + 1/2] = 1/[1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) + 1/2]$$

$$1/z_2 = 1/10$$

$$a_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2$$

$$0.599_2 = 1 - 1/2 + 1/10 = 3/5 = 0.6$$

$$r_2 = a - a_2 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$$

$$r_2 = 0.599 - 0.599_2 = 0.599 - 1 + 1/2 - 1/10 = - 0.001$$

$$z_3 = [1/r_2 + 1/2] = [1/(a - a_2) + 1/2] =$$

$[1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2) + 1/2]$

$z_3 = [1/(0.599 - 1 + 1/2 - 1/10) + 1/2] = [1/(- 0.001) + 1/2] =$

$[- 1000 + 1/2] = [- 999.5] = - 1000$

$1/z_3 = 1/[1/r_2 + 1/2] = 1/[1/(a - a_2) + 1/2] =$

$1/[1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2) + 1/2]$

$1/z_3 = 1/(- 1000) = - 1/1000$

$a_3 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 = [a + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$0.599_3 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 0.599$

$r_3 = a - a_3 = a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3$

$r_3 = 0.599 - 0.599_3 = 0.599 - 1 + 1/2 - 1/10 + 1/1000 = 0$

2.11.5.6. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.599 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.599_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.599 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ЦЕЛЫМИ ЧАСТЯМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УВЕЛИЧЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$0.599_0 = 1;$$

$$0.599_1 = 1 - 1/2 = 1/2 = \underline{0.5};$$

$$0.599_2 = 1 - 1/2 + 1/10 = 3/5 = \underline{0}.6;$$

$$0.599_3 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 599/1000 = \underline{0.599}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$0.599 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000$

$a = (\text{sign } a)[|a| + 1/2] + \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = (\text{sign } a)[|a| + 1/2] + \Sigma_{j=1}{}^k1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - (\text{sign } a)[|a| + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k1/z_j$

$z_{k+1} = (\text{sign } r_k)[1/|r_k| + 1/2] = (\text{sign } r_k)[1/|a - a_k| + 1/2] =$

$(\text{sign } r_k)[1/|a - (\text{sign } a)[|a| + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k1/z_j| + 1/2]$

$1/z_{k+1} = (\text{sign } r_k)/[1/|r_k| + 1/2] = (\text{sign } r_k)/[1/|a - a_k| + 1/2] =$

$r_k{}^\circ/[1/|a - a^\circ[|a| + 1/2] - \Sigma_{j=1}{}^k1/z_j| + 1/2]$

$a_0 = (\text{sign } a)[|a| + 1/2]$

$0.599_0 = (\text{sign } 0.599)[|0.599| + 1/2] = [0.599 + 1/2] = [1.099] = 1$

$r_0 = a - a_0 = a - (\text{sign } a)[|a| + 1/2]$

$r_0 = 0.599 - 0.599_0 = 0.599 - 1 = - 0.401$

$z_1 = (\text{sign } r_0)[1/|r_0| + 1/2] = (\text{sign } r_0)[1/|a - a_0| + 1/2] =$
$(\text{sign } r_0)[1/|a - (\text{sign } a)[|a| + 1/2]| + 1/2]$

$z_1 = (\text{sign}(- 0.401))[1/|0.599 - 1| + 1/2] = - [1/|0.599 - 1| + 1/2] =$
$- [1/0.401 + 1/2] = - [2.493765586 + 1/2] = - [2.993765586] = - 2$

$1/z_1 = (\text{sign } r_0)/[1/|r_0| + 1/2] = (\text{sign } r_0)/[1/|a - a_0| + 1/2] =$
$(\text{sign } r_0)/[1/|a - (\text{sign } a)[|a| + 1/2]| + 1/2]$

$1/z_1 = - 1/2$

$a_1 = a_0 + 1/z_1 = (\text{sign } a)[|a| + 1/2] + 1/z_1$

$0.599_1 = 0.599_0 - 1/2 = 1 - 1/2 = 1/2 = 0.5$

$r_1 = a - a_1 = a - a_0 - 1/z_1 = a - (\text{sign } a)[|a| + 1/2] - 1/z_1$

$r_1 = 0.599 - 0.599_0 + 1/2 = 0.599 - 1 + 1/2 = 0.099$

$z_2 = (\text{sign } r_1)[1/|r_1| + 1/2] = (\text{sign } r_1)[1/|a - a_1| + 1/2] =$
$(\text{sign } r_1)[1/|a - (\text{sign } a)[|a| + 1/2] - 1/z_1| + 1/2]$

$z_2 = (\mathrm{sign}(0.099))[1/|0.099| + 1/2] = [1/0.099 + 1/2] = [10.101010 + 1/2] = [10.60101] = 10$

$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|r_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - a_1| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_1)/[1/|a - a°[|a| + 1/2] - 1/z_1| + 1/2]$

$1/z_2 = 1/10$

$a_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 = (\mathrm{sign}\ a)[|a| + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2$

$0.599_2 = 0.599_0 - 1/2 + 1/10 = 1 - 1/2 + 1/10 = 3/5 = 0.6$

$r_2 = a - a_2 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 = a - (\mathrm{sign}\ a)[|a| + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = 0.599 - 0.599_2 = 0.599 - 1 + 1/2 - 1/10 = - 0.001$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|r_2| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|a - a_2| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_2)[1/|a - a°[|a| + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2| + 1/2]$

$z_3 = (\mathrm{sign}(- 0.001))[1/|- 0.001| + 1/2] = - [1/0.001 + 1/2] = - [1000 + 1/2] =$

$- [1000.5] = - 1000$

$1/z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)/[1/|r_2| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_2)/[1/|a - a_2| + 1/2] = (\mathrm{sign}\ r_2)/[1/|a - (\mathrm{sign}\ a)[|a| + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2| + 1/2]$

$1/z_3 = 1/(- 1000) = - 1/1000$

$a_3 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 = (\mathrm{sign}\ a)[|a| + 1/2] + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$0.599_3 = 0.599_0 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 0.599$

$r_3 = a - a_3 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3 = a - (\mathrm{sign}\ a)[|a| + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3$

$r_3 = 0.599 - 0.599_3 = 0.599 - 0.599_0 + 1/2 - 1/10 + 1/1000 = 0.599 - 1 + 1/2 - 1/10 + 1/1000 = 0$

2.11.5.7. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.599 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.599_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.599 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УМЕНЬШЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$0.599_0 = 1;$$

$$0.599_1 = 1 - 1/2 = 1/2 = \underline{0.5};$$

$$0.599_2 = 1 - 1/2 + 1/10 = 3/5 = \underline{0}.6;$$

$$0.599_3 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 599/1000 = \underline{0.599}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$0.599 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000$

$a =]a - 1/2[+ \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k =]a - 1/2[+ \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}{}^\infty 1/z_j = a - a_k = a -]a - 1/2[- \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j$

$z_{k+1} =]1/r_k - 1/2[=]1/(a - a_k) - 1/2[=]1/(a -]a - 1/2[- \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j) - 1/2[$

$1/z_{k+1} = 1/]1/r_k - 1/2[= 1/]1/(a - a_k) - 1/2[= 1/]1/(a -]a - 1/2[- \Sigma_{j=1}{}^k 1/z_j) - 1/2[$

$a_0 =]a - 1/2[$

$0.599_0 =]0.599 - 1/2[=]0.099[= 1$

$$r_0 = a - a_0 = a -]a - 1/2[$$

$$r_0 = 0.599 - 0.599_0 = 0.599 - 1 = - 0.401$$

$$z_1 =]1/r_0 - 1/2[=]1/(a - a_0) - 1/2[=$$

$$]1/(a - [a + 1/2]) - 1/2[$$

$$z_1 =]1/(0.599 - 1) - 1/2[=]1/(- 0.401) - 1/2[=$$

$$]- 2.4937655860349127 - 1/2[=]- 2.9937655860349127[= - 2$$

$$1/z_1 = 1/]1/r_0 - 1/2[= 1/]1/(a - a_0) - 1/2[=$$

$$1/]1/(a - [a + 1/2]) - 1/2[$$

$$1/z_1 = 1/(- 2) = - 1/2$$

$$a_1 = a_0 + 1/z_1 =]a - 1/2[+ 1/z_1$$

$$0.599_1 = 0.599_0 - 1/2 = 1 - 1/2 = 1/2 = 0.5$$

$r_1 = a - a_1 = a - a_0 - 1/z_1 = a -]a - 1/2[- 1/z_1$

$r_1 = 0.599 - 0.599_0 + 1/2 = 0.599 - 1 + 1/2 = 0.099$

$z_2 =]1/r_1 - 1/2[=]1/(a - a_1) - 1/2[=]1/(a -]a - 1/2[- 1/z_1) - 1/2[$

$z_2 =]1/(0.599 - 1 + 1/2) - 1/2[=]1/0.099 - 1/2[=$
$]10.101010101010101 - 1/2[=]9.601010101010101[= 10$

$1/z_2 = 1/]1/r_1 - 1/2[= 1/]1/(a - a_1) - 1/2[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1) -$
$1/2[$

$1/z_2 = 1/10$

$a_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 =]a - 1/2[+ 1/z_1 + 1/z_2$

$0.599_2 = 0.599_0 - 1/2 + 1/10 = 1 - 1/2 + 1/10 = 3/5 = 0.6$

$r_2 = a - a_2 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 = a -]a - 1/2[- 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = 0.599 - 0.599_0 + 1/2 - 1/10 = 0.599 - 1 + 1/2 - 1/10 = - 0.001$

$z_3 =]1/r_2 - 1/2[=]1/(a - a_2) - 1/2[=]1/(a -]a - 1/2[- 1/z_1 - 1/z_2) - 1/2[$

$z_3 =]1/(0.599 - 1 + 1/2 - 1/10) - 1/2[=]1/(- 0.001) - 1/2[=]- 1000 - 1/2[=]- 1000.5[= - 1000$

$1/z_3 = 1/]1/r_2 - 1/2[= 1/]1/(a - a_2) - 1/2[= 1/]1/(a - [a + 1/2] - 1/z_1 - 1/z_2) - 1/2[$

$1/z_3 = 1/(- 1000) = - 1/1000$

$a_3 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 =]a - 1/2[+ 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$

$0.599_3 = 0.599_0 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 0.599$

$r_3 = a - a_3 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3 = a -]a - 1/2[- 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3$

$r_3 = 0.599 - 0.599_0 + 1/2 - 1/10 + 1/1000 = 0.599 - 1 + 1/2 - 1/10 + 1/1000 = 0$

2.11.5.8. СРАВНЕНИЕ ИСПЫТАТЕЛЬНОГО ЧИСЛА 0.599 С УКАЗАННЫМИ ИНДЕКСОМ ПОРЯДКАМИ И ПОДЧЁРКНУТЫМИ ПЕРВЫМИ ВЕРНЫМИ ЦИФРАМИ ПЕРВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.599_k К ЭТОМУ ЧИСЛУ 0.599 С ОСТАТКАМИ r_k, ДАВАЕМЫХ ОБЩЕЙ МЕТОДОЛОГИЕЙ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВЫДЕЛЕНИЕМ БЛИЖАЙШИХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ ПОТОЛКАМИ ИЗ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО УМЕНЬШЕННЫХ НА 1/2 ОБРАЩЕНИЙ АБСОЛЮТНЫХ ВЕЛИЧИН ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ОСТАТКОВ

Итоги расчётов приближений первых порядков:

$$0.599_0 = 1;$$

$$0.599_1 = 1 - 1/2 = 1/2 = \underline{0.5};$$

$$0.599_2 = 1 - 1/2 + 1/10 = 3/5 = \underline{0}.6;$$

$$0.599_3 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 599/1000 = \underline{0.599}.$$

Вычисление приближений первых порядков:

$0.599 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000$

$a = (\text{sign } a)]|a| - 1/2[+ \Sigma_{k\in N}1/z_k$

$a_k = (\text{sign } a)]|a| - 1/2[+ \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$r_k = \Sigma_{j=k+1}^{\infty}1/z_j = a - a_k = a - (\text{sign } a)]|a| - 1/2[- \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j$

$z_{k+1} = (\text{sign } r_k)]1/|r_k| - 1/2[= (\text{sign } r_k)]1/|a - a_k| - 1/2[=$

$(\text{sign } r_k)]1/|a - a^\circ]|a| - 1/2[- \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j| - 1/2[$

$1/z_{k+1} = (\text{sign } r_k)/]1/|r_k| - 1/2[= (\text{sign } r_k)/]1/|a - a_k| - 1/2[=$

$(\text{sign } r_k)/]1/|a - a^\circ]|a| - 1/2[- \Sigma_{j=1}^{k}1/z_j| - 1/2[$

$a_0 = (\text{sign } a)]|a| - 1/2[$

$0.599_0 = (\text{sign } 0.599)]|0.599| - 1/2[=]0.599 - 1/2[=]0.099[= 1$

$r_0 = a - a_0 = a - (\text{sign } a)]|a| - 1/2[$

$r_0 = 0.599 - 0.599_0 = 0.599 - 1 = - 0.401$

$z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|r_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - a_0| - 1/2[=$

$(\mathrm{sign}\ r_0)]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[| - 1/2[$

$z_1 = (\mathrm{sign}(- 0.401))]1/|- 0.401| - 1/2[= -]1/0.401 - 1/2[= -$

$]2.4937655860349127 - 1/2[= -]1.9937655860349127[= - 2$

$1/z_1 = (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|r_0| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - a_0| - 1/2[=$

$(\mathrm{sign}\ r_0)/]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[| - 1/2[$

$1/z_1 = 1/(- 2) = - 1/2$

$a_1 = a_0 + 1/z_1 = (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[+ 1/z_1$

$0.599_1 = 0.599_0 - 1/2 = 1 - 1/2 = 1/2$

$r_1 = a - a_1 = a - a_0 - 1/z_1$

$r_1 = 0.599 - 0.599_1 = 0.599 - 1 + 1/2 = 0.599 - 1/2 = 0.099$

$z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|r_1| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_1)]1/|a - a_1| - 1/2[=$

$(\mathrm{sign}\ r_1)]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[- 1/z_1| - 1/2[$

$z_2 = (\mathrm{sign}(0.099))]1/|0.099| - 1/2[=]1/0.099 - 1/2[=]10.101010101010101 - 1/2[=]9.601010101010101[= 10$

$1/z_2 = (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|r_1| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - a_1| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_1)/]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[- 1/z_1| - 1/2[$

$1/z_2 = 1/10$

$a_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 = (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[+ 1/z_1 + 1/z_2$

$0.599_2 = 0.599_0 - 1/2 + 1/10 = 1 - 1/2 + 1/10 = 3/5 = 0.6$

$r_2 = a - a_2 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 = a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[- 1/z_1 - 1/z_2$

$r_2 = 0.599 - 0.599_0 + 1/2 - 1/10 = 0.599 - 1 + 1/2 - 1/10 = -0.001$

$z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|r_2| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|a - a_2| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_2)]1/|a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[- 1/z_1 - 1/z_2| - 1/2[$

$$z_3 = (\mathrm{sign}(- 0.001))]1/|- 0.001| - 1/2[= -]1/0.001 - 1/2[= -]1000 - 1/2[= -]999.5[= - 1000$$

$$1/z_3 = (\mathrm{sign}\ r_2)/]1/|r_2| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_2)/]1/|a - a_2| - 1/2[= (\mathrm{sign}\ r_2)/]1/|a - a^\circ]|a| - 1/2[- 1/z_1 - 1/z_2| - 1/2[$$

$$1/z_3 = 1/(- 1000) = - 1/1000$$

$$a_2 = a_0 + 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3 = (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[+ 1/z_1 + 1/z_2 + 1/z_3$$

$$0.599_3 = 0.599_0 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 0.599$$

$$r_3 = a - a_2 = a - a_0 - 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3 = a - (\mathrm{sign}\ a)]|a| - 1/2[- 1/z_1 - 1/z_2 - 1/z_3$$

$$r_3 = 0.599 - 0.599_0 + 1/2 - 1/10 + 1/1000 = 0.599 - 1 + 1/2 - 1/10 + 1/1000 = 0$$

2.11.5.9. СРАВНЕНИЕ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.599_k К ЧИСЛУ 0.599 ПО ОБЩИМ МЕТОДАМ И МЕТОДОЛОГИЯМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Методология	0.599_0	0.599_1	0.599_2	0.599_3	0.599_4	0.599_5
$[a] + \Sigma_{j=1}^{k} 1/]1/r_{j-1}[$	$\underline{0}$	$\underline{0.5}$	$\underline{0.59}090\ldots$	$\underline{0.59}89736\ldots$	$\underline{0.59}89999999226$	$\underline{0.599}$
$[a]+\Sigma_{j=1}^{k} 1/[1/r_{j-1}]$	$\underline{0}$	1	$\underline{0}.66666\ldots$	$\underline{0}.6$	$\underline{0.599}$	
$a^{\circ}[\vert a\vert]+\Sigma_{j=1}^{k} r_{j-1}^{\circ}/[1/\vert r_{j-1}\vert]$	$\underline{0}$	1	$\underline{0.5}$	$\underline{0}.6$	$\underline{0.599}$	
$]a[+\Sigma_{j=1}^{k} 1/]1/r_{j-1}[$	1	$\underline{0.5}$	$\underline{0}.6$	$\underline{0.599}$		

$a^\circ]\vert a\vert[+\Sigma_{j=1}^{k} r_{j-1}{}^\circ/]1/\vert r_{j-1}\vert[$	1	$\underline{0}.666...$	$\underline{0}.6$	$\underline{0.599}$		
$[a+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k} 1/[1/r_{j-1}+1/2]$	1	$\underline{0.5}$	$\underline{0}.6$	$\underline{0.599}$		
$a^\circ[\vert a\vert+1/2]+\Sigma_{j=1}^{k} r_{j-1}{}^\circ/[1/\vert r_{j-1}\vert+1/2]$	1	$\underline{0.5}$	$\underline{0}.6$	$\underline{0.599}$		
$]a-1/2[+\Sigma_{j=1}^{k} 1/]1/r_{j-1}-1/2[$	1	$\underline{0.5}$	$\underline{0}.6$	$\underline{0.599}$		
$a^\circ]a-1/2[+\Sigma_{j=1}^{k} r_{j-1}{}^\circ/]1/\vert r_{j-1}\vert-1/2[$	1	$\underline{0.5}$	$\underline{0}.6$	$\underline{0.599}$		

Сравнение вычисленных всеми указанными методами первых приближений 0.599_k расставляет эти методы по качеству полученных приближений к числу 0.599 следующим образом:

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением

ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений последовательных остатков.

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков.

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из предварительно уменьшенных на 1/2 обращений последовательных остатков.

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел потолками из

предварительно уменьшенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков.

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением потолков из обращений последовательных остатков.

$$0.599_0 = 1;$$

$$0.599_1 = 1 - 1/2 = 1/2 = \underline{0.5};$$

$$0.599_2 = 1 - 1/2 + 1/10 = 3/5 = \underline{0}.6;$$

$$0.599_3 = 1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 599/1000 = \underline{0.599}.$$

1...6. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел

выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков.

$$0.599_0 = 1;$$

$$0.599_1 = 1 - 1/3 = 2/3 = \underline{0}.66666... = \underline{0}.(6);$$

$$0.599_2 = 1 - 1/3 - 1/15 = 3/5 = \underline{0}.6;$$

$$0.599_3 = 1 - 1/3 - 1/15 - 1/1000 = 599/1000 = \underline{0.599}.$$

7...8. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков.

$$0.599_0 = \underline{0};$$

$$0.599_1 = 0 + 1/1 = 1;$$

$$0.599_2 = 0 + 1/1 - 1/2 = 1/2 = \underline{0}.5;$$

$$0.599_3 = 0 + 1/1 - 1/2 + 1/10 = 3/5 = \underline{0}.6;$$

$$0.599_4 = 0 + 1/1 - 1/2 + 1/10 - 1/1000 = 599/1000 = \underline{0.599}.$$

7...8. Общая методология знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков.

$$0.599_0 = \underline{0};$$

$$0.599_1 = 0 + 1/1 = 1;$$

$$0.599_2 = 0 + 1/1 - 1/3 = 2/3 = \underline{0}.(6);$$

$$0.599_3 = 0 + 1/1 - 1/3 - 1/15 = 3/5 = \underline{0}.6;$$

$$0.599_4 = 0 + 1/1 - 1/3 - 1/15 - 1/1000 = 599/1000 = \underline{0.599}.$$

9. Общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях.

$$0.599_0 = \underline{0};$$

$$0.599_1 = 1/2 = \underline{0.5};$$

$$0.599_2 = 1/2 + 1/11 = 13/22 = \underline{0.59}09090...;$$

$$0.599_3 = 1/2 + 1/11 + 1/124 = 817/1364 = \underline{0.59}89736070381232...;$$

$$0.599_4 = 1/2 + 1/11 + 1/124 + 1/37889 = \underline{0.59}8999999226015...;$$

$$0.599_5 = 1/2 + 1/11 + 1/124 + 1/37889 + 1/12920149000 = 599/1000 = \underline{0.599}.$$

2.11.5.10. АНАЛИЗ ИТОГОВ СРАВНЕНИЯ СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ ПЕРВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ 0.599_k К ЧИСЛУ 0.599 ПО ОБЩИМ МЕТОДАМ И МЕТОДОЛОГИЯМ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ, РАЗЛОЖЕНИЯ И ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Эти итоги имеют свои вполне логичные объяснения.

1. Наилучшие и при этом одинаковые итоги даются всеми четырьмя общими методологиями знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением ближайших целых чисел, а также общей

методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением <u>потолков</u> <u>целых частей</u> из обращений последовательных остатков. Уж<u>е</u> третье приближение даёт точный итог. Задача приближения числ<u>а</u> 0.599 <u>не разделяет</u> эти пять общих методологий. Число 0.599 положительно и имеет дробную часть, б<u>о</u>льшую, чем 1/2. Для такого числ<u>а</u> выделение <u>потолков</u> полезнее, чем выделение <u>целых частей</u>.

2. Также наилучшие отличающиеся от предыдущих лишь первым приближением (менее точным по числу первых верных цифр, зато более точным по абсолютной погрешности) итоги даются общей методологией <u>знакопеременных</u> гармонических разложения и

приближения действительных чисел выделением потолков из обращений абсолютных величин последовательных остатков. Уже третье приближение даёт точный итог.

3. Ввиду дополнительного нулевого приближения нулевого порядка хуже предыдущих следующие по качеству итоги общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков. Уже четвёртое приближение даёт точный итог. Число 0.599 положительно и имеет дробную часть, большую, чем 1/2. Для такого числа выделение потолков полезнее, чем выделение целых частей.

4. Столь же качественны отличающиеся от предыдущих лишь вторым приближением (менее точным по числу первых верных цифр, зато более точным по абсолютной погрешности) **итоги** общей методологии знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков. Уже четвёртое приближение даёт точный итог.

5. Как обычно, хуже предыдущих следующие по качеству итоги общего метода знакопостоянных гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях. Только пятое приближение

даёт точный итог. Кроме того, второе, третье и четвёртое приближения оказываются неоправданно сложными по сравнению с самим приближаемым числом 0.599. Но зато в данном редком случае все эти три приближения оказываются высокоточными. А первое, второе и третье приближения значительно точнее даваемых общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений последовательных остатков и общей методологией знакопеременных гармонических разложения и приближения действительных чисел выделением целых частей из обращений абсолютных величин последовательных остатков. Это вызвано несколькими

причинами. Число 0.599 положительно и имеет дробную часть, б<u>о</u>льшую, чем 1/2. Для такого числ<u>а</u> выделение <u>потолков</u> полезнее, чем выделение <u>целых частей</u>. Кроме того, число 0.599 именно ненамного превышает половину. Поэтому первое приближение по обеим этим общим методологиям слишком далеко перескакивает с нулевого приближения нулевого порядка через это число 0.599 сразу к единице. Наконец, это превышение очень ненамного именно превышает единичную дробь 1/11. Однако уже четвёртым приближением обе эти общие методологии дают именно точный итог и тем самым обгоняют этот общий метод, итог которого оказывается высокоточным, но всё-таки только приближённым. Этот общий метод

осуществляет из каждого остатка дробной части действительного числа последовательное выделение именно наибольшего возможного элемента гармонического ряда, то есть дроби с единичным числителем, знаменателем которой является наименьшее возможное натуральное число. Так что каждый шаг общего метода гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях является наилучшим для наибольшего возможного ускорения сходимости избранной части гармонического ряда путём

оставления наименьшего возможного нового остатка дробной части действительного числа. Поэтому именно общий метод гармонических разложения и приближения действительных чисел потолками обращённых последовательных остатков дробной части в знаменателях всегда обеспечивает наилучший возможный выбор ряда непременно положительных единичных, или аликвотных, дробей и является наилучшим возможным с точки зрения ускорения сходимости последовательности приближений частными суммами наличной части гармонического ряда.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, созданы всеобщие математические теории и (мета)методологии синергии функциональных анализа и синтеза методов и методологий, которые открывают, развивают и эффективно используют функциональные природу и сущность методов и методологий, а также изобретают принципиально новые методы и методологии. Всеобщие математические теории и методологии уравновешивания и уточняющего взвешивания также логических доводов и противодоводов и последовательного выделения, оконечивания (финитации, финитизации, финитирования, финитизирования) и обесконечивания (инфинитации, инфинитизации, инфинитирования,

инфинитизирования) дополняют, обобщают, уточняют и развивают известные подходы и методы, включая дедукцию, индукцию и метод наименьших квадратов, в том числе применительно к бесконечно переопределённым совокупностям как бесструктурным системам уравнений с использованием суммирования расходящихся рядов, а также изобретают принципиально новые методы и методологии. Всеобщие математические теории и методологии конечных и бесконечных многопорядковых асимптотических пределов создают синергию анализа и синтеза конечных и бесконечных пределов и асимптотических формул для бесконечно больших и бесконечно малых величин различных порядков. Всеобщие

математические теории и методологии конечных и бесконечных систем и систематических изменений и закономерностей анализируют изменения зависимых переменных изменениями значений зависимых переменных, изменениями систем значений систем независимых переменных и совместными обоими типами этих изменений. Всеобщие систематические закономерности открываются посредством всеобщих методологий именно систематических вычислительных экспериментов с синергией анализа и синтеза итогов этих экспериментов. Всеобщие математические теории и методологии высокоскоростных высокоточных приближений применительно именно ко всему бесконечному множеству

гармонических чисел более чем существенно уточняют, обобщают и развивают теорию Эйлера. Создана общая теория рациональных разложения и приближения действительных чисел с четырьмя парами общих методологий, общей метаметодологией их различения и наиболее высокоточными и высокоскоростными общими методами по сравнению с методами дробей в позиционных системах счисления, непрерывных (цепных) дробей и даже рядов с обратными факториалами. Используются знакопеременные бесконечные гармонические ряды, тогда как теория египетских дробей как сумм непременно различных только положительных единичных (аликвотных) дробей с методом Фибоначчи ограничивается

лишь конечными разложениями рациональных чисел. Теория целочисленных начальных приближений обобщена теорией остаточно-модульной целой части и теорией остаточно-модульного потолка и различает общие методы с однозначными алгоритмами. Эти общие методологии различаются как методически и аналитически выделением целых частей в первой паре общих методологий и потолков во второй паре общих методологий и выделением ближайших целых чисел целыми частями после увеличения на 1/2 в третьей паре общих методологий и потолками после уменьшения на 1/2 в четвёртой паре общих методологий из обращённых последовательных остатков или их абсолютных величин в первых и во вторых

общих методологиях их пар соответственно, так и численно различающими системами задач в общей метаметодологии различения. В частности, самой высокоточной и самой высокоскоростной является вторая общая методология третьей пары общих методологий, выделяющая ближайшие целые числа целыми частями из предварительно увеличенных на 1/2 обращений абсолютных величин последовательных остатков. Такое начальное приближение может использоваться общими методами этой и других общих методологий для ускорения сходимости последовательных приближений и для удобства сопоставлений и сравнений.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Адамар Ж. Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М.: Советское радио, 1970. 152 с.
2. Акилов Г. П., Макаров Б. М., Хавин В. П. Элементарное введение в теорию интеграла. Л.: изд-во Ленинградского университета, 1969. 349 с.
3. Акчурин И. А. Единство естественнонаучного знания. М.: Наука, 1974. 207 с.
4. Александров П. С. Введение в общую теорию множеств и функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. 411 с.
5. Александров П. С. Комбинаторная топология. М.; Л.: Гостехиздат, 1947. 660 с.

6. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии, пополненные необходимыми знаниями из алгебры. М.: Наука, 1968. 912 с.
7. Александров П. С. Проблемы Гильберта. М.: Наука, 1969. 240 с.
8. Александров П. С. Что такое неэвклидова геометрия. М.: Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1950. 72 с.
9. Александров П. С., Ефремович В. А. О простейших понятиях современной топологии. М.; Л.: Гл. ред. общетехн. лит и номографии, 1935. 32 с.

10. Александров П. С., Ефремович В. А. Очерк основных понятий топологии. М.; Л.: Гл. ред. общетехн. лит и номографии, 1936. 95 с.

11. Александров П. С., Колмогоров А. Н. Введение в теорию функций действительного переменного. М.; Л.: Государственное объединённое научно-техническое издательство, Ред. технико-теоретической литературы, 1933. 275 с.

12. Александров П. С., Колмогоров А. Н. Введение в теорию функций действительного переменного. Изд. 3-е, перераб. М.; Л.: Государственное объединённое научно-техническое издательство, Ред. технико-теоретической литературы, 1938. 268 с.

13. Александров А. Д., Колмогоров А. Н., Лаврентьев М. А. (ред.) Математика, её содержание, методы и значение. Том 1. М.: Изд. АН СССР, 1956. 296 с.

14. Александров А. Д., Колмогоров А. Н., Лаврентьев М. А. (ред.) Математика, её содержание, методы и значение. Том 2. М.: Изд. АН СССР, 1956. 397 с.

15. Александров А. Д., Колмогоров А. Н., Лаврентьев М. А. (ред.) Математика, её содержание, методы и значение. Том 3. М.: Изд. АН СССР, 1956. 336 с.

16. Александров П. С., Маркушевич А. И., Хинчин А. Я. Энциклопедия элементарной математики в 5 книгах. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951–1966.

17. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973. 576 с.

18. Альтшуллер Г. С. Алгоритм изобретения. М.: Московский рабочий, 1969. 272 с.

19. Альтшуллер Г. С. Алгоритм изобретения. 2-е изд., испр. М.: Московский рабочий, 1973. 296 с.

20. Альтшуллер Г. С. Как научиться изобретать. Тамбов: Тамбовское книжное изд-во, 1961. 128 с.

21. Альтшуллер Г. С. Основы изобретательства. Воронеж: Центрально-черноземное книжное издательство, 1964. 238 с.

22. Амосов Н. М. Искусственный разум. Киев: Наукова думка, 1969. 153 с.

23. Амосов Н. М. (ред.) Кибернетика и живой организм. Киев: Наукова думка, 1964. 117 с.

24. Амосов Н. М. Моделирование сложных систем. Киев: Наукова думка, 1968. 81 с.

25. Амосов Н. М., Касаткин А. М., Касаткина Л. М., Талаев С. А. Автоматы и разумное поведение: Опыт моделирования. 1973. 380 с.

26. Андреев И. Д. Познаваемость мира и его закономерностей. М.: Знание, 1953. 64 с.

27. Арбиб М. Мозг, машина и математика / пер. с англ. М.: Наука, 1968. 224 с.

28. Аристотель. Аналитики первая и вторая / пер. с греч. Б. А. Фохта. Л.: Государственное издательство политической литературы, 1952. 440 с.

29. Арнольд И. В. Теоретическая арифметика. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1938. 480 с.

30. Арсеньев А. С., Библер В. С., Кедров Б. М. Анализ развивающегося понятия. М.: Наука, 1967. 440 с.

31. Артин Э. Геометрическая алгебра / пер. с англ. В. М. Котлова под ред. Л. А. Калужнина. М., Наука, 1969. 283 с.

32. Архангельский А. В., Пономарёв В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974. 424 с.

33. Архангельский Н. А., Зайцев Б. И. Автоматические цифровые машины. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 128 с.

34. Архимед. Сочинения / перевод, вступительная статья и комментарии Ю. Н. Веселовского; перевод арабских текстов Б. А. Розенфельда. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 640 с.

35. Асмус В. Ф. Логика. М.: Государственное издательство политической литературы (ОГИЗ), 1947. 387 с.

36. Асмус В. Ф. Проблема интуиции в философии и математике (Очерк истории: XVII – начало XX в.). М.: Мысль, 1965. 312 с.

37. Асмус В. Ф. Учение логики о доказательстве и опровержении. М.: Государственное издательство политической литературы, 1954. 88 с.

38. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. 2-ое изд. М.: Наука, 1965. 408 с.

39. Бакрадзе К. С. Логика. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та им. Сталина, 1951. 456 с.

40. Банах С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1966. 436 с.

41. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 936 с.

42. Барра Ж.-Р. Основные понятия математической статистики. М.: Мир, 1974. 282 с.
43. Бартлетт М. С. Введение в теорию случайных процессов. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1958. 384 с.
44. Бахман Ф. Построение геометрии на основе понятия симметрии. М.: Наука, 1969. 380 с.
45. Бахман Ф., Шмидт Э. N-угольники / пер. с нем. А. И. Сирота. М.: Мир, 1973. 249 с.
46. Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения. М.: Наука, 1972. 68 с.
47. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 326 с.

48. Беккенбах Э. (ред.). Прикладная комбинаторная математика: сб. статей / пер. с англ. М.: Мир, 1968. 364 с.

49. Беккенбах Э. Ф. (ред.) Современная математика для инженеров / пер. с англ. И. Н. Векуа. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1958. 498 с.

50. Беккенбах Э., Беллман Р. Введение в неравенства / пер. с англ. М.: Мир, 1965. 168 с.

51. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965. 276 с.

52. Беллман Р. Э. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.

53. Беллман Р. (ред.) Математические проблемы в биологии. Сборник переводов. М.: Мир, 1966. 278 с.

54. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 464 с.

55. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 620 с.

56. Березин С. И. Техника элементарных вычислений. Л.: Машиностроение. 1974. 136 с.

57. Берман Г. Н. Приёмы счёта. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 88 с.

58. Берман Г. Н. Счёт и число. Как люди учились считать. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 36 с.

59. Берман Г. Н. Число и наука о нём. Общедоступные очерки по арифметике натуральных чисел. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 164 с.

60. Бернал Дж. Наука в истории общества. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1956. 736 с.

61. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: в 4 т. Том I. Конструктивная теория функций (1905–1930 гг.). М.: Издательство Академии Наук СССР, 1952. 582 с.

62. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: в 4 т. Том II. Конструктивная теория функций (1931–1950 гг.). М.: Издательство Академии Наук СССР, 1954. 628 с.

63. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: в 4 т. Том III. Дифференциальные уравнения, вариационное исчисление и геометрия (1903–1947 гг.). М.: Издательство Академии Наук СССР, 1960. 441 с.

64. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений: в 4 т. Том IV. Теория вероятностей и математическая статистика (1917–1946 гг.). М.: Издательство Академии Наук СССР, 1964. 579 с.

65. Бернштейн С. Н. Теория вероятностей. Изд. 2-е, доп. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934. 412 с.

66. Бернштейн С. Н. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной

вещественной переменной. Часть 1. М.; Л.: Главная редакция общетехнической литературы, 1937. 200 с.

67. Бесконечность и Вселенная: сбор. статей. М.: Мысль, 1969. 325 с.

68. Биркгоф Г. Теория структур. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1952. 407 с.

69. Блекуэлл Д., Гиршик М. А. Теория игр и статистических решений. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1958. 376 с.

70. Богданов А. А. Тектология. Всеобщая организационная наука: в 2-х кн. Берлин; Москва; Санкт-Петербург: Издательство З. И. Гржебина, 1922.

71. Боголюбов Н. Н. Мергелян С. Н. Советская математическая школа. М.: Знание, 1967. 65 с.

72. Богомолов С. А. Актуальная бесконечность. Зенон Элейский, Ис. Ньютон, Г. Кантор. Л.; М.: ОНТИ Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934. 78 с.

73. Богуславский В. М. Задачи по логике. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1952. 112 с.

74. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.

75. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами. М.: Наука, 1973. 448 с.

76. Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. М.: Наука, 1965. 108 с.

77. Больцано Б. Парадоксы бесконечного. Одесса: Mathesis, 1911. 111 с.

78. Боревич З. И. Определители и матрицы. М.: Наука, 1970. 200 с.

79. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. Теория чисел. Изд. 2-е. М.: Наука, 1972. 496 с.

80. Борель Э. Вероятность и достоверность. М.: Наука, 1969. 110 с.

81. Борель Э. Случай / пер. с французского Ю. И. Костицыной под редакцией В. А. Костицына. М.; Пг.: Госиздат, 1923. 227 с.

82. Борель Эм., Дельтейль Р., Юрон Р. Вероятности, ошибки. М.: Статистика, 1972. 176 с.

83. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1972. 368 с.

84. Ботвинник М. М. Алгоритм игры в шахматы. М.: Наука, 1968. 94 с.

85. Ботвинник М. М. О кибернетической цели игры. М.: Советская радио, 1955. 120 с.

86. Боумен У. Графическое представление информации / пер. с англ. М.: Мир, 1971. 228 с.

87. Боярский А. Я. Теоретические исследования по статистике. М.: Статистика, 1974. 305 с.

88. Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1959. 178 с.

89. Бриллюэн Л. Наука и теория информации. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 392 с.

90. Бродский И. Н. Отрицательные высказывания. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1973. 104 с.

91. Бродский И. Н. Элементарное введение в символическую логику. Л.: Издательство Ленинградского университета, 1964. 66 с.

92. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. 11-е изд., стер. М.: Наука, 1967. 608 с.

93. Брудно А. Л. Теория функций действительного переменного. М.: Наука, 1971. 119 с.

94. Бугулов Е. А., Толасов Б. А. Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам. Орджоникидзе: Северо-Осетинское книжное изд-во, 1962. 226 с.

95. Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. М.: Мир, 1972. 259 с.

96. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер / пер. с франц. Д. А. Райкова. М.: Наука, 1967. 400 с.

97. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры / пер. с франц. С. Н. Крачковского; под ред. Д. А. Райкова. М.: Наука, 1968. 275 с.

98. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства / пер. с франц. С. Н. Крачковского; под ред. Д. А. Райкова. М.: Наука, 1969. 392 с.

99. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 292 с.

100. Бурбаки Н. Теория множеств. Книга 1. Основные структуры анализа / пер. с франц. Г. Н. Поварова, Ю. А.

Шихановича; под ред. В. А. Успенского. М.: Мир, 1965. 456 с.

101. Бурбаки Н. Функции действительного переменного. Элементарная теория / пер. с франц. Е. И. Стечкиной. М.: Наука, 1965. 424 с.

102. Бут Э. Д. Численные методы / пер. с англ. Т. М. Тер-Микаэляна под ред. В. М. Курочкина. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 237 с.

103. Бухштаб А. А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966. 384 с.

104. Бэкон Р. Большое сочинение. Часть первая, в которой устраняются четыре общие причины человеческого

невежества // Антология мировой философии. Т. 1, ч. 2. М., 1969. С. 862–877.

105. Бэкон Ф. Новый органон. Л.: ОГИЗ СОЦЭКГИЗ, 1935. 384 с.

106. Бэр Р. Теория разрывных функций / пер. с фр. и редакция А. Я. Хинчина. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1932. 134 с.

107. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том 1 / пер. с англ. Б. Т. Вавилова. М.: Мир, 1972. 337 с.

108. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том 2 / пер. с английского В. Я. Алтаева. М.: Мир, 1973. 489 с.

109. Вагнер Г. Основы исследования операций. Том 3 / пер. с англ. Б. Т. Вавилова. М.: Мир, 1973. 504 с.

110. Вайскопф В. Наука и удивительное. Как человек понимает природу / пер. А. С. Компанеец. М.: Наука, 1965. 234 с.

111. Вальд А. Последовательный анализ. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 328 с.

112. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1960. 435 с.

113. Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции / пер. с

голландского Н. Веселовского. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 456 с.

114. Варпаховский Ф. Л. Элементы теории алгоритмов. М.: Просвещение, 1970. 25 с.

115. Васильев А. В. Целое число. М.: Научное книгоиздательство, 1919. 272 с.

116. Васильев Н. А. Логика и металогика // Логос. 1912–1913. Кн. 1–2. С. 53–81.

117. Васильев Н. А. Воображаемая (неаристотелева) логика // Журнал мин-ва нар. просвещения. Нов. Сер. 1912. Август. С. 207–246.

118. Введенский А. И. Лекции по логике. СПб.: Типография В. Безобразова и К°, 1896. 446 с.
119. Введенский А. И. Лекции по психологии 1890–91 акад. г. СПб.: Издательство студентов Императорского историко-филологического института, 1891. 204 с.
120. Введенский А. И. Лекции психологии. СПб.: Типография В. Безобразова и К°, 1908. 523 с.
121. Введенский А. И. Логика для гимназий. Пг.: Типография М. М. Стасюлевича, 1915. 181 с.
122. Введенский А. И. Логика как часть теории познания. Пг.: Типография М. М. Стасюлевича, 1917. 430 с.

123. Введенский А. И. О видах веры в её отношениях к знанию. СПб.: Типография лит. т-ва И. Н. Кушнерев и К°, 1894. 76 с.
124. Введенский А. И. О пределах и признаках одушевления. СПб.: Типография В. С. Балашева, 1892. 119 с.
125. Введенский А. И. Психология без всякой метафизики. Пг.: Типография М. М. Стасюлевича, 1917. 359 с.
126. Вейль А. Основы теории чисел. М.: Мир, 1972. 410 с.
127. Вейль Г. О философии математики. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934. 128 с.

128. Вейль Г. Полвека математики / перевод с английского З. А. Кузичевой. М.: Знание, 1969. 48 с.

129. Вейль Г. Симметрия / перевод с английского Б. В. Бирюкова и Ю. А. Данилова под редакцией Б. А. Розенфельда. М.: Наука, 1968. 192 с.

130. Великанов М. А. Ошибки измерения и эмпирические зависимости. Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1962. 302 с.

131. Венков Б. А. Элементарная теория чисел. М.; Л.: Гл. ред. общетехн. и техно-теорет. лит., 1937. 220 с.

132. Вентцель Е. С. Введение в исследование операций. М.: Советское радио, 1964. 388 с.

133. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969. 576 с.

134. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 68 с.

135. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей. Задачи и упражнения. М.: Наука, 1969. 368 с.

136. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 468 с.

137. Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 320 с.

138. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969. 328 с.

139. Виленкин Н. Я. Метод последовательных приближений. М.: Наука, 1968. 108 с.

140. Виленкин Н. Я., Горин Е. А., Костюченко А. Г. и др. Функциональный анализ (Справочная математическая библиотека). М.: Наука, 1964. 424 с.

141. Винер Н. Кибернетика, или Управление и связь в животном и машине. 2-е изд. М.: Советское радио, 1968. 201 с.

142. Винер Н. Моё отношение к кибернетике. Её прошлое и будущее. М.: Советское радио, 1969. 24 с.

143. Винер Н. Я – математик. М.: Наука, 1964. 354 с.

144. Виноградов И. М. Основы теории чисел. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. 180 с.

145. Виноградов С. Н., Кузьмин А. Ф. Логика. 8-е изд. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1954. 176 с.

146. Воеводин В. В. Численные методы алгебры. Теория и алгорифмы. М.: Наука, 1966. 248 с.

147. Воробьёв Н. Н. Признаки делимости. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 72 с.

148. Воробьёв Н. Н. Числа Фибоначчи. М.: Наука, 1969. 112 с.

149. Воробьёв Н. Н., Врублевская И. Н. (ред.) Позиционные игры. Сборник статей. М.: Наука, 1967. 524 с.

150. Время и современная физика / под ред. Дж. Ригала. М.: Мир, 1970. 152 с.

151. Вудсон У., Коновер Д. Справочник по инженерной психологии для инженеров и художников-конструкторов. М.: Мир, 1968. 260 с.

152. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967. 415 с.

153. Вулих Б. З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. Введение в теорию интеграла. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Наука, 1973. 350 с.

154. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в Древнем мире. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Наука, 1967. 320 с.
155. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. М.: Наука, 1964. 872 с.
156. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. М.: Наука, 1966. 424 с.
157. Гавурин М. К. Лекции по методам вычислений. М.: Наука, 1971. 248 с.
158. Гагарин Ю. А., Лебедев В. И. Психология и космос. М.: Молодая гвардия, 1968. 208 с.
159. Галилей Г. Избранные труды: в 2 т. М.: Наука, 1964.

160. Галлагер Р. Теория информации и надёжная связь / перевод с английского под ред. М. С. Минскера, Б. С. Цыбакова. М.: Советское радио, 1974. 720 с.

161. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. 2-е изд., доп. М.: Наука, 1966. 576 с.

162. Гарднер М. Математические досуги. М.: Мир, 1972. 496 с.

163. Гарднер М. Математические новеллы / пер. с англ. М.: Мир, 1974. 456 с.

164. Гарднер М. Этот правый, левый мир. М.: Мир, 1967. 267 с.

165. Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел / перевод Б. Б. Демьянова, общая редакция И. М. Виноградова,

комментарии Б. Н. Делоне. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1959. 979 с.

166. Гегель Г. В. Ф. Наука логики: в 3-х томах. Т. 1. М.: Мысль, 1970. 501 с.

167. Гейтинг А. Интуиционизм. Введение. М.: Мир, 1965. 201 с.

168. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе / пер. с англ. Б. И. Голубова. М.: Мир, 1967. 252 с.

169. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщённые функции и действия над ними (Обобщённые функции, выпуск 1) (2-е изд.). М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 472 с.

170. Гельфонд А. О. Избранные труды. М.: Наука, 1973. 440 с.

171. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 400 с.

172. Гельфонд А. О., Линник Ю. В. Элементарные методы в аналитической теории чисел. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 272 с.

173. Генкин Л. О математической индукции. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 36 с.

174. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций. М.: Наука, 1971. 384 с.

175. Гершель Д. Философия естествознания. Об общем характере, пользе и принципах исследования природы. СПб.: Русская книжная торговля, 1868. 355 с.

176. Гильберт Д. Основания геометрии / перевод с седьмого немецкого издания И. С. Градштейна; под редакцией и со вступительной статьёй П. К. Рашевского. М.; Л.: ОГИЗ, Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 491 с.

177. Гильберт Д., Аккерман В. Основы теоретической логики. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1947. 306 с.

178. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. М.: Наука, 1972. 288 с.

179. Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков. М.: Мир, 1970. 326 с.

180. Гладкий А. В. Формальные грамматики и языки. М.: Наука, 1973. 368 с.

181. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969. 476 с.

182. Гливенко В. И. Интеграл Стильтьеса. Л.: ОНТИ, 1936. 217 с.

183. Глушков В. М. Введение в кибернетику. Киев: Изд-во АН УССР, 1964. 324 с.

184. Глушков В. М. Введение в теорию самосовершенствующихся систем. Киев: Изд-во КВИРТУ, 1962. 109 с.

185. Глушков В. М. Гносеологические основы математизации науки. Киев.: Наук, думка, 1965. 25 с.

186. Глушков В. М. Кибернетика и умственный труд. М.: Знание, 1965. 46 с.

187. Глушков В. М. Мышление и кибернетика. М.: Знание, библиотечка философских проблем техники, 1966. 32 с.

188. Глушков В. М. Введение в АСУ. Киев: Техніка, 1972. 312 с.

189. Гнеденко Б. В. Беседы о математической статистике. М.: Знание, 1968. 48 с.

190. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Изд. 5-е. М.: Наука, 1969. 400 с.

191. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1946. 246 с.

192. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьёв А. Д. Математические методы в теории надёжности. М.: Наука, 1965. 524 с.

193. Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 1970. 168 с.

194. Гоббс Т. Избранные произведения в двух томах. Т. 1–2. М.: Мысль, 1964.

195. Голдман С. Теория информации / пер. с англ. Б. Г. Белкина, под ред. В. В. Фурдуева. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1957. 446 с.

196. Головина Л. И., Яглом И. М. Индукция в геометрии. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 100 с.

197. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. Изд. 2-е, перераб. М.: Гостехтеориздат, 1954. 328 с.

198. Гордин А. Б. Занимательная кибернетика. М.: Энергия, 1974. 64 с.

199. Горский Д. П. Вопросы абстракции и образование понятий. М.: Издательство Академии наук СССР, 1961. 352 с.

200. Горский Д. П. Логика. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1958. 292 с.

201. Горский Д. П. Определение (логико-методологические проблемы). М.: Мысль, 1974. 311 с.

202. Горский Д. П., Таванец П. В. (ред.) Логика. М.: Государственное издательство политической литературы, 1956. 279 с.

203. Градштейн И. С. Прямая и обратная теоремы. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 80 с.

204. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, перераб. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 1100 с.

205. Гребенча М. К. Теория чисел. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1949. 128 с.

206. Гришкин И. И. Понятие информации. Логико-методологический аспект. М.: Наука, 1973. 231 с.

207. Грузенберг С. О. Гений и творчество: Основы теории и психологии творчества: с прил. неизд. материалов по вопросам психологии творчества и указ. лит. Л.: Изд-во П. П. Сойкина, 1924. 254 с.

208. Гудстейн Р. Л. Рекурсивный математический анализ. М.: Наука, 1970. 472 с.

209. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций / пер. М. А. Евграфова. М.: Наука, 1968. 648 с.

210. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 232 с.

211. Гутер Р. С., Овчинский Б. В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М.: Наука, 1970. 432 с.

212. Гутер Р. С., Овчинский Б. В., Резниковский П. Т. Программирование и вычислительная математика. М.: Наука, 1965. 448 с.

213. Гутчин И. Б. Кибернетические модели творчества. М.: Знание, 1969. 64 с.

214. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. Том 1. Изд. 12-е, испр. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 224 с.

215. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. Том 2. Изд. 3-е, перераб. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1945. 223 с.

216. Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. Том 3. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 264 с.

217. Даймeнд С. Мир вероятностей. Статистика в науке. М.: Статистика, 1970. 155 с.

218. Данскин Дж. М. Теория максимина и её приложение к задачам распределения вооружения. М.: Советское радио, 1970. 200 с.

219. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование / пер. с англ. Д. А. Бабаева. М.: Мир, 1972. 311 с.

220. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1973. 228 с.

221. Де Брёйн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. М.: Мир, 1966. 248 с.

222. Дедекиндъ Р. Непрерывность и ирраціональныя числа. Одесса: Mathesis, 1906. 40 с.

223. Декарт Р. Избранные произведения = Oeuvres choisies. М.: Государственное издательство политической литературы, 1950. 712 с.

224. Декарт Р. Рассуждение о методе. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1953. 655 с. (Серия: Классики науки).

225. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. 7-е изд., стер. М.: Наука, 1969. 544 с.

226. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Изд. 2-е. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 660 с.

227. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. М.: Наука, 1967. 368 с.

228. Депман И. Я. История арифметики. Пособие для учителей. 2-е изд., испр. М.: Просвещение, 1965. 416 с.

229. Депман И. Я. Первое знакомство с математической логикой. Л.: Знание, 1965. 59 с.

230. Депман И. Я. Рассказы о математике. Л.: Детгиз, 1957. 142 с.

231. Депман И. Я. Рассказы о решении задач. Л.: Детская литература, 1957. 127 с.

232. Джевонс У. С. Основы науки. Трактат о логике и научном методе = The Principles of Science: A Treatise on Logic and Scientific Method / пер. со 2-го англ. изд. М. Антоновича. СПб.: Издательство Л. Ф. Пантелеева, 1881. 713 с.

233. Диалектика и логика. Законы мышления / под общей редакцией члена-корреспондента АН СССР Б. М. Кедрова. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1962. 336 с.

234. Диалектика и логика. Формы мышления / под общей редакцией члена-корреспондента АН СССР Б. М. Кедрова. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1962. 312 с.

235. Диофант Александрийский. Арифметика и книга о многоугольных числах. М.: Наука, 1974. 328 с.

236. Доморяд А. П. Математические игры и развлечения. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 267 с.

237. Дороднов А. М., Острецов И. Н., Петросов В. А., Приходов В. Ю., Сафонов И. Б. Графики функций. М.: Высшая школа, 1972. 104 с.

238. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Краткое пособие по математике для поступающих в Московский университет. М.: изд-во МГУ, 1964. 209 с.

239. Дрешер М. Стратегические игры. Теория и приложения / пер. с англ. И. В. Соловьева. М.: Советское радио, 1964. 352 с.

240. Дринфельд Г. И. Дополнения к общему курсу математического анализа. Харьков: Изд-во Харьковского государственного университета им. А. М. Горького, 1958. 115 с.

241. Дринфельд Г. И. Трансцендентность чисел пи и е. Харьков: Изд-во Харьковского государственного университета им. А. М. Горького, 1952. 76 с.

242. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1956. 609 с.

243. Дубнов Я. С. Измерение отрезков. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 100 с.

244. Дубнов Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 72 с.

245. Дьедонне Ж. Основы современного анализа / пер. с англ. М. А. Вайнштейна. М.: Мир, 1964. 430 с.

246. Дьяченко В. Ф. Основные понятия вычислительной математики. М. Наука, 1972. 120 с.

247. Дэвенпорт Г. Высшая арифметика. Введение в теорию чисел / пер. с англ. Б. 3. Мороза; под ред. Ю. В. Линника. М.: Наука, 1965. 175 с.

248. Жуков Н. И. Информация. Философский анализ центрального понятия кибернетики. Минск: Наука и техника, 1971. 280 с.

249. Журдэн Ф. Природа математики / пер. с английского А. А. Мочульский; под редакцией профессора И. Ю. Тимченко. Одесса: Матезис, 1923. 178 с.

250. Заде Л. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // Математика сегодня. М.: Знание, 1974. С. 5–49.

251. Зайдель А. Н. Элементарные оценки ошибок измерений. Л.: Наука, Ленинградское отделение, 1967. 88 с.

252. Збірник задач республіканських математичних олімпіад / В. І. Михайловський, М. Й. Ядренко, Г. Й. Призва, В. А. Вишенський; за заг. ред. доц. В. І. Михайловського. К.: Вища школа, 1969. 120 с.

253. Зедгенидзе Г. П., Гогсадзе Р. Ш. Математические методы в измерительной технике. М: Изд-во Комитета стандартов, 1970. 616 с.

254. Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих и её приложения к физике. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 560 с.

255. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1967. 648 с.

256. Зиновьев А. А. Комплексная логика. М.: Наука, 1970. 206 с.

257. Зиновьев А. А. Логика науки. М.: Мысль, 1971. 279 с.

258. Зиновьев А. А. Логическая физика. М.: Наука, 1972. 193 с.

259. Ивин А. А. Логика норм. М.: Изд-во Московского ун-та, 1973. 121 с.

260. Ивин А. А. Основания логики оценок. М.: Изд-во Московского ун-та, 1970. 230 с.

261. Ивс Г., Ньюсом К. В. О математической логике и философии математики / пер. с англ. М.: Знание, 1968. 48 с.

262. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех: опыт математической хрестоматии: книга для семьи и школы. Кн. 1. 4-е изд., перераб. СПб.: Тип. Т-ва А. С. Суворина «Новое Время», 1914. 275 с.

263. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех: опыт математической хрестоматии: книга для семьи и школы. Кн. 2. СПб.: Тип. А. С. Суворина «Новое Время», 1909. 282 с.

264. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки, или Арифметика для всех: опыт математической хрестоматии: книга для семьи и школы. Кн. 3. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Тип. Т-ва А. С. Суворина «Новое Время», 1915. 322 с.

265. Идельсон А. В., Минц Г. Е. (ред.) Математическая теория логического вывода. М.: Наука, 1967. 351 с.

266. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

267. История математики: в 3 томах / под редакцией А. П. Юшкевича. Том 1. С древнейших времен до начала нового времени. М.: Наука, 1970. 352 с.

268. История математики: в 3 томах / под редакцией А. П. Юшкевича. Том 2. Математика XVII столетия. М.: Наука, 1970. 301 с.

269. История математики: в 3 томах / под редакцией А. П. Юшкевича. Том 3. Математика XVIII столетия. М.: Наука, 1972. 496 с.

270. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973. 150 с.

271. Кавальери Б. Геометрия, изложенная новым способом при помощи неделимых непрерывного. Том 1. Основы

учения о неделимых / перевод со вступительной статьёй и примечаниями С. Я. Лурье. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1940. 416 с.

272. Каган В. Ф. Лобачевский (2-е изд.). М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 506 с.

273. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. Общедоступные очерки. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 305 с.

274. Калитин Н. И. Искусство быть читателем. М.: Молодая гвардия, 1962. 160 с.

275. Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру. М.: Наука, 1973. 448 с.

276. Калужнин Л. А. Основная теорема арифметики. М.: Наука, 1969. 32 с.

277. Камке Э. Интеграл Лебега–Стилтьеса. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 328 с.

278. Кантор Г. Основы общего учения о многообразиях. О различных точках зрения на актуально-бесконечное. К учению о трансфинитном / перевод П. С. Юшкевича // А. В. Васильев (ред.). Новые идеи в математике. Сборник 6-ой. Теория ассамблей 1. СПб.: Образование, 1914. 184 с.

279. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Математическое оптимальное программирование в экономике. М.: Знание, 1968. 66 с.

280. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Оптимальные решения в экономике. М.: Наука, 1972. 232 с.

281. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближённые методы высшего анализа. 5-е изд. М.; Л.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 708 с.

282. Каринский М. И. Классификация выводов. СПб.: тип. Ф. Г. Елеонского и К°, 1880. 271 с.

283. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964. 835 с.

284. Карлин С. Основы теории случайных процессов / пер. с англ. М.: Мир, 1971. 537 с.

285. Карнап Р. Значение и необходимость. Исследование по семантике и модальной логике. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1959. 384 с.
286. Кассандрова О. Н., Лебедев В. В. Обработка результатов наблюдений. М.: Наука, 1970. 104 с.
287. Катлер Э., Мак-Шейн Р. Система быстрого счёта по Трахтенбергу. М.: Просвещение, 1967. 134 с.
288. Кац М., Улам С. Математика и логика. Ретроспектива и перспективы / пер. с английского Н. И. Плужниковой под редакцией И. М. Яглома. М.: Мир, 1971. 253 с.
289. Келли Дж. Общая топология. М.: Наука, 1968. 384 с.

290. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование. Некоторые приложения. М.: Советское радио, 1972. 192 с.

291. Кемени Дж., Снелл Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику. М.: Мир, 1965. 484 с.

292. Кендалл М., Моран П. Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972. 192 с.

293. Кеплер И. (Ioanne Kepplero). Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки. С присоединением дополнения к архимедовой стереометрии / перевод и предисловие Г. Н. Свешникова, вступительная

статья М. Я. Выгодского. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1935. 360 с.

294. Кибернетика, мышление, жизнь / под ред. А. И. Берга, Б. В. Бирюкова, И. Б. Новика, И. В. Кузнецова, А. Г. Спиркина. М.: Мысль, 1964. 510 с.

295. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Часть 1. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 432 с.

296. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2 томах. Том 1. М.: ОНТИ, 1933. 472 с.

297. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2 томах. Том 2. М.: ОНТИ, 1934. 444 с.

298. Клиланд Д., Кинг В. Системный анализ и целевое управление / пер. с англ. М.: Советское радио, 1974. 280 с.

299. Клини С. Введение в метаматематику. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1957. 526 с.

300. Клини С. Математическая логика. М.: Мир, 1973. 480 с.

301. Кобринский Н. Е., Пекелис В. Д. Быстрее мысли. М.: Молодая гвардия, 1963. 475 с.

302. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / пер. с нем. М.: Мир, 1969. 448 с.

303. Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. М.: Мир, 1971. 312 с.

304. Колмогоров А. Н. О профессии математика. М.: МГУ, 1959. 30 с.

305. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.; Л.: ОНТИ, 1936. 80 с.

306. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. 2-е изд. М.: Наука, 1974. 120 с.

307. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.

308. Кольман Э. Я. История математики в древности. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 235 с.

309. Кольман Э., Зих О. Занимательная логика. М.: Наука, 1966. 128 с.

310. Кондаков Н. И. Введение в логику. М.: Наука, 1967. 467 с.

311. Кондаков Н. И. Логический словарь. М.: Наука, 1971. 656 с.

312. Кондратюк Ю. В. Завоевание межпланетных пространств / под ред. В. П. Ветчинкина. Новосибирск: Изд. авт., 1929. 72 с.

313. Коперник Н. О вращениях небесных сфер. М: Наука, 1964. 653 с.

314. Копсон Э. Т. Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966. 160 с.

315. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 576 с.

316. Кордемский Б. А., Русалев Н. В. Удивительный квадрат. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. 160 с.

317. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 720 с.

318. Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 224 с.

319. Косса П. Кибернетика. От человеческого мозга к мозгу искусственному / перевод со второго французского издания

под общей редакцией и предисловием действительного члена АМН СССР доктора медицинских наук П. К. Анохина. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1958. 123 с.

320. Коши Г. А. Л. Дифференциальное и интегральное исчисление / пер. с фр. В. Я. Буняковского. СПб.: Императорская Академия Наук, 1831. 243 с.

321. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир, 1969. 348 с.

322. Коэн П. Дж., Херш Р. Неканторовская теория множеств // Математика в современном мире: сб. статей / сост. А. В. Шилейко. М.: Знание, 1969. 32 с. С. 20–32.

323. Кояловичъ Б. М. Исследование о бесконечных системах линейных уравнений // Известия физико-математического ин-та им. В. А. Стеклова. 1930. 3. С. 41–167.

324. Крайзмер Л. П. Техническая кибернетика. М.; Л. Государственное энергетическое издательство, 1958. 82 с.

325. Крамер Г. Математические методы статистики / пер. с англ.; под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 632 с.

326. Кречмар В. А. Задачник по алгебре. М.: Наука, 1964. 388 с.

327. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, 1968. 432 с.

328. Крылов А. Н. Избранные труды. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1958. 806 с.

329. Крылов А. Н. Лекции о приближённых вычислениях. Изд. 2-е, перераб. и знач. доп. Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1933. 541 с.

330. Крылов В. И. Приближённое вычисление интегралов. Изд. 2-е. М.: Наука, 1967. 500 с.

331. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы высшей математики. Том 1 / под ред. И. П. Мысовских. Минск: Вышэйшая школа, 1972. 584 с.

332. Крылов В. И., Шульгина Л. Т. Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1966. 370 с.

333. Кузичев А. С. Диаграммы Венна. М.: Наука, 1968. 253 с.

334. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 472 с.

335. Кульбак С. Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967. 408 с.

336. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. 4-е изд., перераб., доп. М.: Наука, 1967. 704 с.

337. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. 2-е изд., перераб., доп. М.: Наука, 1970. 671 с.

338. Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. Элементарный очерк идей и методов / перевод с английского под редакцией А. Н. Колмогорова. М.: Государственное издание технико-теоретической литературы, 1947. 664 с.

339. Куратовский К. Топология. Том 1. М.: Мир, 1966. 594 с.

340. Куратовский К. Топология. Том 2. М.: Мир, 1969. 624 с.

341. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.

342. Курош А. Г. Алгебраические уравнения произвольных степеней. М.; Л.: Государственное издание технико-теоретической литературы, 1961. 32 с.

343. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. 9-е изд. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1968. 431 с.

344. Кутюра Л. Алгебра логики / переводъ съ французскаго съ прибавленіями профессора И. Слешинскаго. Одесса: Матезисъ, 1909. 134 с.

345. Кушнер Б. А. Лекции по конструктивному математическому анализу. М.: Наука, 1973. 448 с.

346. Кымпан Ф. История числа пи. М.: Наука, 1971. 216 с.

347. Кэррол Л. История с узелками / перевод с английского Ю. А. Данилова; под ред. Я. А. Смородинского. М.: Мир, 1973. 408 с.
348. Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы / пер. с англ. И. Н. Веселовского. М.: Наука, 1967. 152 с.
349. Ламперти Дж. Вероятность. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1973. 184 с.
350. Ланге В. Н. Физические парадоксы, софизмы и занимательные задачи. М.: Просвещение, 1967. 168 с.
351. Ланге О. Оптимальные решения. Основы программирования. М.: Изд-во МГУ, 1967. 284 с.

352. Ландау Э. Основы анализа. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1947. 182 с.

353. Ланс Дж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1962. 208 с.

354. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 524 с.

355. Лаплас П. Опыт философии теории вероятностей / пер. с фр. М.: Тип. Т-ва И. Н. Кушнерев и Ко, 1908. 210 с.

356. Лебег А. Интегрирование и отыскание примитивных функций / пер. и ред. проф. Н. К. Бари; доп. статьи акад. Н. Н. Лузина. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934. 325 с.

357. Лебег А. Об измерении величин. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1960. 204 с.

358. Лейбниц Г. В. Избранные философские сочинения / ред. и вступ. ст. В. П. Преображенского // Труды Московского психологического общества. 1890. Вып. 4 (переиздано в 1908 г.).

359. Лейкфельд П. Э. Логическое учение об индукции в главнейшие исторические моменты его разработки. СПб.: Типография В. С. Балашева и К°, 1896. 248 с.

360. Лейкфельд П. Э. Психология: краткое извлечение из курса, читанного в Императорском Харьковском университете. Харьков: Издание студента Дав. Килосанидзе, 1906. 146 с.

361. Лейкфельд П. Э. Психология: краткое извлечение из курса, читанного в Императорском Харьковском университете. Харьков: Типо-литография С. Иванченко, 1913. 176 с.

362. Лейкфельд П. Э. Различные направления в логике и основные задачи этой науки. Харьков: Типография Губернского Правления, 1890. 387 с.

363. Лейтес Н. С. Об умственной одарённости. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1960. 216 с.

364. Лефор Г. Алгебра и анализ. Задачи / перевод с французского Е. И. Стечкиной. М.: Наука, 1973. 463 с.

365. Линдон Р. Заметки по логике. М.: Мир, 1968. 128 с.

366. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. Изд. 2-е, доп. и испр. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 352 с.

367. Литлвуд Дж. Математическая смесь / пер. с англ. Изд. 2, стереот. М.: Наука, 1965. 150 с.

368. Литцман В. Весёлое и занимательное о числах и фигурах. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 264 с.

369. Литцман В. Где ошибка? М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 192 с.

370. Литцман В. Старое и новое о круге. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 60 с.

371. Литцман В. Теорема Пифагора. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 116 с.

372. Литцманн В., Триер В. В чём ошибка? Ложные умозаключения и ученические ошибки / перевод с немецкого Л. С. Левиной-Бри. Одесса: Mathesis 1923. 78 с.

373. Лобачевский Н. И. Геометрические исследования по теории параллельных линий / перевод, комментарии, вступительные статьи и примечания профессора В. Ф. Кагана. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1945. 176 с.
374. Лобачевский Н. И. Три сочинения по геометрии. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 416 с.
375. Логика, автоматы, алгоритмы / М. А. Айзерман, Л. А. Гусев, Л. И. Розоноэр, И. М. Смирнова, А. А. Таль. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 556 с.

376. Локк Дж. Избранные философские произведения: в 2 т. М.: Соцэкгиз [Гос. социально-экономическое издательство], 1960.

377. Ломов Б. Ф., Васильев А. А., Офицеров В. В., Рубахин В. Ф. Военная инженерная психология. М.: Воениздат, 1970. 400 с.

378. Ломоносов М. В. Полное собрание сочинений. Том 04. Труды по физике, астрономии и приборостроению 1744-1765 гг. М.; Л.: Издательство Академии наук СССР, 1955. 832 с.

379. Ломоносов М. В. Полное собрание сочинений. В 11 т. Т. 6. Труды по русской истории, общественно-экономическим вопросам и географии, 1747-1765 гг. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1952. 689 с.

380. Ломоносов М. В. Полное собрание сочинений. В 11 т. Т. 7. Труды по филологии, 1739-1758 гг. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1952. 993 с.

381. Ломоносов М. В. Полное собрание сочинений. В 11 т. Т. 8. Поэзия. Ораторская проза. Надписи 1732-1764 гг. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1959. 1289 с.

382. Лоэв М. Теория вероятностей. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1962. 720 с.

383. Лузин Н. Н. Дифференциальное исчисление. 7-е изд. М.: Высш. шк., 1961. 479 с.

384. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. 544 с.

385. Лузин Н. Н. Интегральное исчисление. 7-е изд. М.: Высш. шк., 1961. 479 с.

386. Лузин Н. Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 360 с.

387. Лузин Н. Н. О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1935. 400 с.

388. Лузин Н. Н. Современное состояние теории функций действительного переменного. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1933. 58 с.

389. Лузин Н. Н. Теория функций действительного переменного. Общая часть. Изд. 2. Уч. пособие для педвузов.

М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1948. 320 с.

390. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика с точки зрения современной формальной логики. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1959. 311 с.

391. Льюс Р. Д., Райфа Х. Игры и решения. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1961. 642 с.

392. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1965. 520 с.

393. Ляминъ А. А. Математическіе парадоксы и интересныя задачи для любителей математики. М.: типография Г. Лисснера и Д. Собко, 1911. 334 с.

394. Маделунг Э. Математический аппарат физики. Справочное руководство. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 620 с.

395. Мазмишвили А. И. Способ наименьших квадратов. М.: Недра, 1968. 440 с.

396. Мазур М. Качественная теория информации. М.: Мир, 1974. 238 с.

397. Майстров Л. Е. Теория вероятностей. Исторический очерк. М.: Наука, 1967. 321 с.

398. Макаров И. П. Дополнительные главы математического анализа. Учебное пособие. М.: Просвещение, 1968. 308 с.

399. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на ФОРТРАНе. М.: Мир, 1969. 582 с.

400. Маковельский А. О. История логики. М.: Наука, 1967. 504 с.

401. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 393 с.

402. Мандельброт Б. Теория информации и психологическая теория частот слов // Математические методы в социальных науках. М.: Наука, 1973. С. 316–447.

403. Марков А. А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля / биографический очерк и примечания Н. И. Ахиезера. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. 411 с. (Классики естествознания. Математика. Механика. Физика. Астрономия).

404. Марков А. А. Избранные труды. Теория чисел, теория вероятностей. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1951. 720 с.

405. Марков А. А. Теория алгорифмов. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1954. 377 с.

406. Маркс К. Математические рукописи. М.: Наука, 1968. 640 с.

407. Марон И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. М.: Наука, 1970. 400 с.

408. Матвеев И. В. Функции и их графики. М.: МГУ, 1970. 104 с.

409. Математический анализ. Вычисление элементарных функций / под ред. Л. А. Люстерника, О. А. Червоненкиса, А. Р. Янпольского. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 239 с. (Справочная математическая библиотека).

410. Математический анализ. Функции, пределы, ряды, цепные дроби / под ред. Л. А. Люстерника и А. Р.

Янпольского. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 266 с.

411. Медведев Ф. А. Развитие понятия интеграла. М.: Наука, 1974. 423 с.

412. Медведев Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке. М.: Наука, 1965. 231 с.

413. Мейер Цур Капеллен В. Математические инструменты. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1950. 318 с.

414. Мелентьев П. В. Приближённые вычисления. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 388 с.

415. Мельников Г. П. Азбука математической логики. М.: Знание, 1967. 104 с.

416. Мендельсон Э. Введение в математическую логику / пер. с англ. Ф. А. Кабакова; под ред. С. И. Адяна. М.: Наука; Государственное издательство физико-математической литературы, 1971. 322 с.

417. Метельский Н. В. Очерки истории методики математики. Минск: Вышэйшая школа, 1968. 340 с.

418. Мизес Р. Э. фон. Вероятность и статистика. М.; Л.: Госиздат., 1930. 250 с.

419. Микеладзе Ш. Е. Численные методы математического анализа. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 527 с.

420. Милль Д. С. Система логики силлогистической и индуктивной: изложение принципов доказательства в связи с методами научного исследования / перевод с английского под редакцией приват-доцента Императорского Московского университета В. Н. Ивановского. М.: Издание магазина «Книжное дело», 1900. 119 с.

421. Милн В. Э. Численный анализ / перевод с англ. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1951. 292 с.

422. Милсум Дж. Анализ биологических систем управления. М.: Мир, 1968. 502 с.

423. Минто В. Дедуктивная и индуктивная логика / пер. с англ. С. А. Котляревского; под ред. В. Н. Ивановского;

примеры для упражнений подобраны В. Н. Ивановским и А. С. Белкиным. 2-е испр. и доп. изд. М.: Тип. т-ва И. Д. Сытина, 1896. 540 с.

424. Митропольский А. К. Теория моментов. Л.: Государственное издательство колхозной и совхозной литературы, 1933. 223 с.

425. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. М.: Наука, 1971. 576 с.

426. Митягин Б. С. (ред.) Математическая экономика и функциональный анализ. М.: Наука, 1974. 264 с.

427. Митягин Б.С. (ред.) Математическая экономика. Равновесные модели, оптимальное планирование и управление. М.: Мир, 1974. 246 с.

428. Михеева А. В. и др. Словарь-минимум для чтения научной литературы на английском языке. М.: Наука, 1969. 138 с.

429. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближённые методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965. 384 с.

430. Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII веке. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1953. 180 с.

431. Молодший В. Н. Очерки по вопросам обоснования математики. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1958. 232 с.

432. Мордухай-Болтовской Д. Д. Психология математического мышления // Вопросы философии и психологии. 1908. Год 19. Вып. 94. Кн. 4. С. 491–534.

433. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. М.: Мир, 1969. 432 с.

434. Мостовский А. Конструктивные множества и их приложения. М.: Мир, 1973. 256 с.

435. Мысовских И. П. Лекции по методам вычислений. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 342 с.

436. Нагибин Ф. Ф. Математическая шкатулка. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1958. 168 с.

437. Налимов В. В., Мульченко З. М. Наукометрия. М.: Наука, 1969. 192 с.

438. Налимов В. В., Чернова Н. А. Статистические методы планирования экстремальных экспериментов. М.: Наука, 1965. 340 с.

439. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 688 с.

440. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. 2-е изд. М.: Наука, 1968. 727 с.

441. Натансон И. П. Простейшие задачи на максимум и минимум. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 32 с.

442. Натансон И. П. Суммирование бесконечно малых величин. 3-е изд. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 58 с.

443. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. 2-е изд., перераб. М.: Гостехиздат, 1957. 552 с.

444. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974. 484 с.

445. Научное наследие П. Л. Чебышева. Выпуск 1. Математика. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР. 1945. 174 с.

446. Начала Евклида. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского. М.; Л.:

Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949–1951.
447. Неве Ж. Математические основы теории вероятностей. М.: Мир , 1969. 431 с.
448. Нивен А. Числа рациональные и иррациональные / пер. с англ. В. В. Сазонова; под ред. И. М. Яглома. М.: Мир, 1966. 199 с.
449. Никитин В. В. Сборник логических упражнений. Пособие для учителей математики. М.: Просвещение, 1970. 96 с.
450. Нильсон Н. Искусственный интеллект. Методы поиска решений. М.: Мир, 1973. 273 с.

451. Новиков П. С. Элементы математической логики. 2-е изд., испр. М.: Наука, 1973. 399 с.

452. Носиро К. Предельные множества. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 253 с.

453. Ньютон И. Всеобщая арифметика, или Книга об арифметических синтезе и анализе. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1948. 444 с. (Классики науки).

454. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / пер. с латин. с примечаниями и пояснениями А. Н. Крылова // А. Н. Крылов. Собрание трудов. Т. VII. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1936. 696 с.

455. Ньютон И. Математические работы / пер. с лат., вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-

Болтовского. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 478 с. (Классики естествознания).

456. Оре О. Графы и их применение. М.: Мир, 1965. 175 с.

457. Островский А. М. Решение уравнений и систем уравнений / пер. с англ. Л. З. Румынского, Б. Л. Румынского. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 383 с.

458. Оуэн Г. Теория игр / пер. с англ. под ред. А. А. Корбута; вступ. статья Н. Н. Воробьёва. М.: Мир, 1971. 230 с.

459. Пархоменко А. С. Что такое линия. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 140 с.

460. Паскаль Б. Трактат об арифметическом треугольнике (Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traités sur la même matière, 1654, издан в 1665).

461. Пекелис В. Д. Кибернетическая смесь. М.: Знание, 1973. 240 с.

462. Перельман Я. И. Быстрый счёт. Тридцать простых приёмов устного счёта. Л.: Дом занимательной науки, 1941. 12 с.

463. Перельман Я. И. Живая математика. М.: Наука, 1967. 160 с.

464. Перельман Я. И. Живой учебник геометрии. Л.: Время, 1930. 127 с.

465. Перельман Я. И. Занимательная алгебра. М.: Наука, 1970. 198 с.

466. Перельман Я. И. Занимательная арифметика: загадки и диковинки в мире чисел. Изд. 9-е. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 190 с.

467. Перельман Я. И. Занимательная геометрия. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 206 с.

468. Перельман Я. И. Занимательная математика. Л.: Время, 1927. 98 с.

469. Перельман Я. И. Фокусы и развлечения. 3-е изд. М.: Детгиз, 1935. 171 с.

470. Петер Р. Игра с бесконечностью / перевод с венгерского В. М. Боцу, А. Я. Маргулиса, А. Ш. Мейлихзона. М.: Просвещение, 1967. 272 с.

471. Платон. Собрание сочинений в 3 т. (в 4 кн.) (Серия «Философское наследие»). Т. 1. М.: Мысль, 1968. 624 с.

472. Платон. Собрание сочинений: в 3 т. (в 4 кн.) (Серия «Философское наследие»). Т. 2. М.: Мысль, 1970. 611 с.

473. Поварнин С. И. Введение в логику. Пг.: Наука и школа, 1921. 70 с.

474. Поварнин С. И. Искусство спора. О теории и практике спора. Пг.: Культурно-просветительное кооперативное товарищество «Начатки знаний», 1923. 128 с.

475. Поварнин С. И. Как читать книги. Л.: Изд-во Ленинградского государственного университета, 1960. 88 с.
476. Поварнин С. И. Логика: общее учение о доказательстве. Пг.: Тип. Акц. Общ. Типографского Дела, 1916. 210 с.
477. Пойа Д. Как решать задачу: пособие для учителя / пер. с англ. В. Г. Звонаревой и Д. Н. Белла; под ред. Ю. М. Гайдука. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1959. 208 с.
478. Пойа Дж. Математика и правдоподобные рассуждения / пер. с англ.; под ред. С. А. Яновской. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1957. 536 с.
479. Пойа Дж. Математическое открытие / пер. с англ. В. Бермана. М.: Наука, 1970. 456 с.

480. Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа (в 2-х частях). М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.

481. Попов П. С. История логики Нового времени. М.: Издательство Московского университета, 1960. 254 с.

482. Попов П. С., Стяжкин Н. И. Развитие логических идей от Античности до эпохи Возрождения. М.: Издательство Московского университета, 1974. 223 с.

483. Поспелов Д. А., Пушкин В. Н. Мышление и автоматы. М.: Советское радио, 1972. 226 с.

484. Постников М. М. Магические квадраты. М.: Наука, 1964. 84 с.

485. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. 512 с.

486. Преподавание математики: пособие для учителей / Ж. Пиаже, Э. Бет, Ж. Дьедонне, А. Лихнерович, Г. Шоке, К. Гаттеньо; перевод с французского А. И. Фетисова. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1960. 161 с.

487. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1967. 496 с.

488. Психологические измерения: сборник / пер. с англ. под ред. Л. Д. Мешалкина. М.: Мир, 1967. 196 с.

489. Пуанкаре А. Избранные труды. Том 1. М.: Наука, 1971. 772 с.

490. Пуанкаре А. Избранные труды. Том 2. М.: Наука, 1972. 358 с.

491. Пуанкаре А. Избранные труды. Том 3. М.: Наука, 1974. 772 с.

492. Пуанкаре А. Наука и гипотеза / перевод с французского А. Г. Бачинского, Н. М. Соловьёва, Р. М. Соловьёва; предисловие Н. А. Умова. М.: Т-во тип. А. И. Мамонтова, 1904. 273 с.

493. Пуанкаре А. Наука и методъ / переводъ съ французскаго И. К. Брусиловскаго; подъ редакціей приватъ-доцента В. Ф. Кагана. Одесса: Mathesis, 1910. 384 с.

494. Пуанкаре А. Последние мысли / пер. с франц. А. И. Стожарова; под ред. [и с предисл.] А. П. Афанасьева. Пг.: Научное книгоизд-во, 1923. 134 с.
495. Пуанкаре А. Ценность науки / пер. с франц. под ред. А. Г. Бачинского, Н. М. Соловьёва. М.: Творческая мысль, 1906. 195 с.
496. Пустыльник Е. И. Статистические методы анализа и обработки наблюдений. М.: Наука, 1968. 288 с.
497. Радемахер Г., Тёплиц О. Чи́сла и фигуры. Опыты математического мышления / пер. с нем. В. И. Контова; под редакцией И. М. Яглома. 2-ое издание. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 264 с. (Серия «Библиотека математического кружка»).

498. Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика. М.: Мир, 1965. 154 с.
499. Ракитов А. И. Курс лекций по логике науки. М.: Высшая школа, 1971. 176 с.
500. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики / пер. с англ. М.: Наука, 1972. 592 с.
501. Рачинский С. А. (сост.) 1001 задача для умственного счёта: пособие для учителей сельских школ. СПб.: Синодальная типография, 1899. 88 с.
502. Рвачёв Л. А. Математика и семантика. Киев: Наукова думка, 1966. 81 с.
503. Реньи А. Диалоги о математике. М.: Мир, 1969. 98 с.

504. Реньи А. Письма о вероятности / пер. с венг. Д. Сааса и А. Крамли; под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Мир, 1970. 93 с.

505. Риман Б. Сочинения. М.: Гостехиздат, 1948. 543 с.

506. Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 288 с.

507. Розенберг В. Я., Прохоров А. И. Что такое теория массового обслуживания. М.: Советское радио, 1962. 254 с.

508. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Омар Хайям. М.: Наука, 1965. 192 с.

509. Романовский В. И. Избранные труды. Том 2. Теория вероятностей, статистика и анализ. Ташкент: Наука, 1964. 392 с.

510. Романовский В. И. Основные задачи теории ошибок. 1947. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 116 с.

511. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1966. 320 с.

512. Румшиский Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента. М.: Наука, Государственное издательство физико-математической литературы, 1971. 192 с.

513. Рурк К., Сандерсон Б. Введение в кусочно линейную топологию. М.: Мир, 1974. 213 с.

514. Рыбников К. А. История математики. Т. 1. М.: Изд-во МГУ, 1960. 190 с.

515. Рыбников К. А. История математики. Т. 2. М.: Изд-во МГУ, 1963. 336 с.

516. Сакс С. Теория интеграла / пер. И. С. Березина, Б. М. Будака, Л. А. Гусарова. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1949. 494 с.

517. Сборник задач московских математических олимпиад / сост. А. А. Леман; ред. В. Г. Болтянский. М.: Просвещение, 1965. 384 с.

518. Серебрянников О. Ф. Эвристические принципы и логические исчисления. М.: Наука, 1970. 283 с.

519. Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. М.: Просвещение, 1968. 168 с.

520. Серпинский В. О решении уравнений в целых числах / перевод с польского И. Г. Мельникова. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 88 с.

521. Серпинский В. О теории множеств / перевод с польского З. З. Рачинского. М.: Просвещение, 1966. 62 с.

522. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1959. 112 с.

523. Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. М.; Л.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 92 с.

524. Серр Ж.-П. Курс арифметики. М.: Мир, 1972. 183 с.

525. Сикорский Р. Булевы алгебры. М.: Мир, 1969. 376 с.
526. Скорняков Л. А. Элементы теории структур. М.: Наука, 1970. 148 с.
527. Смирнов В. И. Курс высшей математики: в 5 т. М.: Наука, 1961–1969.
528. Смолянский М. Л. Таблицы неопределённых интегралов. 2-е изд., испр. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 112 с.
529. Соболев В. И. Лекции по дополнительным главам математического анализа. М.: Наука, 1968. 288 с.

530. Соминский И. С. Метод математической индукции. М.: Наука, 1965. 58 с. Серия: Популярные лекции по математике.

531. Соминский И. С., Головина Л. И., Яглом И. М. О математической индукции. М.: Наука, 1967. 144 с.

532. Стеклов В. А. Математика и её значение для человечества. Берлин: ГИ РСФСР, 1923. 137 с.

533. Стилтьес Т. И. Исследования о непрерывных дробях. Харьков: Научно-техническое издательство Украины, 1936. 160 с.

534. Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. Геометрия отображений отрезков, кривых, окружностей и кругов. М.: Мир, 1967. 224 с.

535. Столл Р. Р. Множества. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968. 231 с.
536. Столяр А. А. Как мы рассуждаем? Минск: Нар. асвета, 1968. 112 с.
537. Столяр А. А. Логические проблемы преподавания математики. Минск: Вышэйшая школа, 1965. 254 с.
538. Столяр А. А. Логическое введение в математику. Минск: Вышэйшая школа, 1971. 224 с.
539. Стяжкин Н. И. Формирование математической логики. М.: Наука, 1967. 508 с.
540. Таванец П. В. (ред.). Проблемы логики. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1963. 152 с.

541. Таванец П. В. (ред.). Философские вопросы современной формальной логики. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1962. 365 с.

542. Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 327 с.

543. Тейл Г. Эконометрические прогнозы и принятие решений. М.: Статистика, 1971. 488 с.

544. Тиман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 624 с.

545. Торндайк Э. Л. Вопросы преподавания алгебры (Психология алгебры) / пер. с англ. А. С. Долговой; под ред. И. К. Андронова, Д. Л. Волковского. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1934. 192 с.

546. Торндайк Э. Л. Новые методы преподавания арифметики / пер. с англ. А. С. Долговой; под ред. и с предисл. Д. Л. Волковского. М.: Работник просвещения, 1930. 296 с.

547. Торндайк Э. Л. Принципы обучения, основанные на психологии / пер. с англ. Е. А. Герье; вступит. ст. Л. С. Выготского. Изд. 3-е. М.: Работник просвещения, 1930. 230 с.

548. Торндайк Э. Л. Психология арифметики / пер. с англ. А. С. Долговой; под ред. Д. Л. Волковского. М.; Л.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1932. 302 с.

549. Трахтенброт Б. А. Алгоритмы и машинное решение задач. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. 96 с.

550. Троицкий М. М. Учебник логики с подробными указаниями на историю и современное состояние этой науки в России и в других странах. Кн. 1. Изд. 2-е. М.: тип. Э. Лисснера и Ю. Романа, 1886. 247 с.

551. Троицкий М. М. Учебник логики с подробными указаниями на историю и современное состояние этой

науки в России и в других странах. Кн. 2. Логика начал. М.: тип. А. А. Гатцука, 1886. 253 с.

552. Троицкий М. М. Учебник логики с подробными указаниями на историю и современное состояние этой науки в России и в других странах. Кн. 3, вып. 1. Логика геометрии и наук о духе. М.: тип. А. А. Гатцука, 1888. 148 с.

553. Троицкий М. М. Элементы логики: руководство к логике, составленное для средних учебных заведений. М.: Издание книжного магазина В. Думнова, 1887. 152 с.

554. Тромгольтъ С. Игры со спичками. Задачи и развлеченія / переводъ съ нѣмецкаго. 2-е изданіе. Одесса: Mathesis, 1912. 146 с.

555. Трост Э. Простые числа. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 135 с.

556. Тростников В. Н. Человек и информация. М.: Наука, 1970. 187 с.

557. Тьюринг А. М. Может ли машина мыслить / перевод с англ. Ю. А. Данилова. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 67 с.

558. Уёмов А. И. Аналогия в практике научного исследования. М.: Наука, 1970. 266 с.

559. Уёмов А. И. Задачи и упражнения по логике. М.: Высшая школа, 1961. 355 с.

560. Уёмов А. И. Логические основы метода моделирования. М.: Мысль, 1971. 311 с.

561. Уёмов А. И. Логические ошибки: как они мешают правильно мыслить. М.: Государственное издательство политической литературы, 1958. 120 с.

562. Уилкс С. Математическая статистика. М.: Наука, 1967. 632 с.

563. Уитни Х. Геометрическая теория интегрирования / перевод с английского И. А. Вайнштейна; под редакцией В. Г. Болтянского. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1960. 534 с.

564. Уиттекер Э., Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений / перевод под редакцией члена-

корреспондента Академии Наук СССР проф. Н. М. Гюнтера. 2-е изд. М.: ОНТИ, 1935. 368 с.

565. Уиттекер Э. Т. Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Часть 1. Основные операции анализа. 2-е изд. / пер. с англ. под ред. Ф. В. Широкова. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 344 с.

566. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Часть 2. Трансцендентные функции / пер. с англ. под ред. Ф. В. Широкова. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 516 с.

567. Улам С. Нерешённые математические задачи. М.: Наука, 1964. 168 с.

568. Урманцев Ю. А. Симметрия природы и природа симметрии. М.: Мысль, 1974. 229 с.

569. Урсул А. Д. Информация и мышление. М.: Знание, 1970. 50 с.

570. Урсул А. Д. Информация. Методологические аспекты. М.: Наука, 1971. 293 с.

571. Урсул А. Д. Отражение и информация. М.: Мысль, 1973. 231 с.

572. Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. Том 1 / редакция, примечания и вступительная статья П. С. Александрова. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. 512 с.

573. Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. Том 2 / редакция, примечания и вступительная статья П. С. Александрова. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1951. 481 с.

574. Успенский В. А. Треугольник Паскаля. М.: Наука, 1966. 36 с.

575. Уэвелл У. История индуктивных наук от древнейшего и до настоящего времени: в 3 т. СПб.: Русская книжная торговля, 1867–1869.

576. Фаермарк Д. С. Задача пришла с картины. М.: Наука, 1974. 160 с.

577. Файнстейн А. Основы теории информации. М.: Мир, 1960. 138 с.

578. Фейс Р. Модальная логика. М.: Наука. 1974. 520 с. (Математическая логика и основания математики).

579. Феликс Л. Элементарная математика в современном изложении. М.: Просвещение, 1967. 488 с.

580. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Том 1. М.: Мир, 1964. 500 с.

581. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. Том 2. М.: Мир, 1967. 752 с.

582. Феферман С. Числовые системы. Основания алгебры и анализа: пер. с англ. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1971. 440 с.

583. Философская энциклопедия: в 5 т. / глав. ред. академик Ф. В. Константинов. М.: Советская энциклопедия, 1960–1970.

584. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 томах. 7-е изд. Т. 1. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. 607 с.

585. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 томах. 3-е изд. Т. 2. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. 664 с.

586. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 томах. 5-е изд. Т. 3. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. 656 с.

587. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 1. М.: Наука, 1968. 440 с.

588. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 2. М.: Наука, 1968. 463 с.

589. Фишер Р. А. Статистические методы для исследователей. М.: Госстатиздат, 1958. 267 с.

590. Фор Р., Кофман А., Дени-Папен М. Современная математика: пер. с фр. М.: Мир, 1966. 271 с.

591. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений / пер. с англ. В. П. Ильина и Ю. И. Кузнецова. М.: Мир, 1969. 167 с.

592. Фрейденталь Х. Язык логики. М.: Наука, 1969. 136 с.

593. Френкель А. А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М.: Мир, 1966. 555 с.

594. Фридман А. А. Мир как пространство и время. М.: Наука, 1965. 112 с.

595. Халмош П. Теория меры / перевод с английского Д. А. Василькова; под ред. С. В. Фомина. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1953. 282 с.

596. Хао В., Мак-Нотон Р. Аксиоматические системы теории множеств / пер. с франц. И. Б. Погребысского; под ред. Л. А. Калужнина. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 55 с. (Б-ка сборника «Математика»).

597. Харари Ф. Теория графов. М.: Мир, 1973. 301 с.

598. Харди Г. Курс чистой математики / пер. с англ. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1949. 512 с.
599. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1951. 504 с.
600. Харди Г. Г., Литлвуд Дж. И., Пойа Д. Неравенства. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1948. 456 с.
601. Хаусдорф Ф. Теория множеств / перевод с немецкого Н. Б. Веденисова; под редакцией и с дополнениями проф. П. С. Александрова и проф. А. Н. Колмогорова. М.; Л.: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, 1937. 306 с.

602. Хемминг Р. В. Численные методы для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968. 400 с.

603. Хинчин А. Я. Восемь лекций по математическому анализу. 3-е изд. М.; Л.: Государственное издательство технико-технической литературы, 1948. 260 с.

604. Хинчин А. Я. Краткий курс математического анализа. 3-е изд. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. 628 с.

605. Хинчин А. Я. Математические методы теории массового обслуживания. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1955. 124 с.

606. Хинчин А. Я. Основные законы теории вероятностей. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1932. 84 с.

607. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 236 с.

608. Хинчин А. Я. Три жемчужины теории чисел. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 72 с.

609. Хинчин А. Я. Учение Мизеса о вероятностях и принципы физической статистики // Успехи физических наук. 1929. 9, вып. 2. С. 141–166.

610. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 112 с.
611. Хованский А. Н. Приложения цепных дробей и их обобщений к вопросам приближённого анализа. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 204 с.
612. Холл М. Комбинаторика. М.: Мир, 1970. 424 с.
613. Холл М. Комбинаторный анализ. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 99 с.
614. Хургин Я. И. Ну и что? М.: Молодая гвардия, 1970. 320 с.

615. Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г. Основы теории категорий. М.: Наука,1974. 256 с.

616. Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1932. 232 с.

617. Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках. М.; Л.: ОНТИ. Редакция технико-теоретической литературы, 1938. 470 с.

618. Цетлин М. Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М.: Наука, 1969. 316 с.

619. Циолковский К. Э. Избранные труды / ред.-сост. Б. Н. Воробьёв, В. Н. Сокольский; общая ред. акад. А. А.

Благонравова. М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1962. 535 с. (Классики науки / Акад. наук СССР).

620. Цянь-Сюэ-Сэнь. Техническая кибернетика. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1956. 462 с.

621. Чеботарёв А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. М.: Геодезиздат, 1958. 606 с.

622. Чебышёв П. Л. Избранные труды / ред. И. М. Виноградов. М.: Издательство Академии Наук СССР, 1955. 929 с.

623. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Часть 1. Одесса: Mathesis, 1913. 646 с.

624. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. Часть 2. Одесса: Mathesis, 1914. 486 с.
625. Челпанов Г. И. Учебник логики (для гимназий и самообразования). Изд. 9-е. М.; Пг.: Т-во В. В. Думнов – насл. бр. Салаевых, 1917. 204 с.
626. Ченцов Н. Н., Шклярский Д. О., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. М.: Наука, 1970. 336 с.
627. Черри К. Человек и информация. М.: Связь, 1972. 368 с.
628. Чефранов Г. В. Бесконечность и интеллект. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского университета, 1971. 176 с.

629. Чёрч А. Введение в математическую логику / пер. с английского В. С. Черняевского; под редакцией В. А. Успенского. Том 1. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1960. 484 с.

630. Чистяков В. Д. Сборник старинных задач по элементарной математике с историческими экскурсами и подробными решениями. Минск: Изд-во Мин. высшего, средн. спец. и проф. обр. БССР, 1962. 204 с.

631. Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1963. 95 с.

632. Шамбадаль П. Развитие и приложения понятия энтропии / перевод с французского. М.: Наука, 1967. 280 с.

633. Шапиро С. И. От алгоритмов – к суждениям. Эксперименты по обучению элементам математического мышления. М.: Советское радио, 1973. 288 с.

634. Шаскольская М. П., Эльцин И. А. Сборник избранных задач по физике. 2-е изд. М.: Физматгиз, 1959. 208 с.

635. Швец М. Н. О приближённых числах. Киев: Радянська школа, 1968. 127 с.

636. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента / пер. с англ. Е. Г. Коваленко; под ред. Н. П. Бусленко. М.: Мир, 1972. 382 с.

637. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1963. 832 с.

638. Шеннон К. Э., Маккарти Дж. (ред.) Автоматы. Сборник статей. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1956. 402 с.

639. Шеръ М. О безконечности въ геометріи. Теорема о параллельныхъ. М.: Типографія А. А. Стрельцова, 1915. 24 с.

640. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.

641. Шилов Г. Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М.: Наука, 1969. 429 с.

642. Шилов Г. Е. Математический анализ. Специальный курс. 2-е изд. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 436 с.

643. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Части 1–2. М.: Наука, 1970. 528 с.

644. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Часть 3. М.: Наука, 1970. 352 с.

645. Шилов Г. Е. Простая гамма. Устройство музыкальной шкалы. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. 20 с.

646. Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная (общая теория). М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1967. 220 с. Дарственная надпись: «Гелимсону Льву за успехи на IX Республиканской Олимпиаде юных математиков. Председатель Жюри профессор Николай Алексеевич

Давыдов. Ужгород, 30 марта 1969 года.» Занято третье место.

647. Шилов Г. Е., Фан Дык Тинь. Интеграл, мера и производная на линейных пространствах. М.: Наука, 1967. 192 с.

648. Шиханович Ю. А. Введение в современную математику. Начальные понятия. М.: Наука, 1965. 376 с.

649. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 1. Арифметика и алгебра. М.: Наука, 1965. 455 с.

650. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 2. Геометрия (планиметрия). М.: Государственное

издательство технико-теоретической литературы, 1952. 380 с.

651. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Часть 3. Геометрия (стереометрия). М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 267 с.

652. Шмальгаузен И. И. Кибернетические вопросы биологии. Новосибирск: Наука, 1968. 224 с.

653. Шнирельман Л. Г. Простые числа. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1940. 60 с.

654. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971. 254 с.

655. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 150 с.

656. Шубертъ Г. Математическiя развлеченiя и игры. Одесса: Mathesis, 1911. 388 с.

657. Шубников А. В., Копцик В. А. Симметрия в науке и искусстве. М.: Наука, 1972. 349 с.

658. Шустеф Ф. М., Фельдман А. М., Гуревич В. Ю. Сборник олимпиадных задач по математике. Минск, Учпедгиз БССР, 1962. 84 с.

659. Щиголев Б. М. Математическая обработка наблюдений. М.: Наука, 1969. 344 с.

660. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. 1. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 315 с.

661. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Т. 2. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 391 с.

662. Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. М.; Л.: Геодезиздат, 1949.. 580 с.

663. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1956. 415 с.

664. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1957. 368 с.

665. Эйлер Л. Интегральное исчисление. Т. 3. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958. 447 с.

666. Эйлер Л. Письма к учёным. М.; Л.: Издательство Академии Наук СССР, 1963. 400 с.

667. Эмпахер А. Сила аналогий / пер. с польск. Ф. Г. Хацянова; под ред. А. В. Шилейко. М.: Мир, 1965. 155 с.

668. Эрдейи А. Асимптотические разложения. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 128 с.

669. Эшби У. Р. Введение в кибернетику. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1959. 432 с.

670. Эшби У. Р. Конструкция мозга. Происхождение адаптивного поведения. М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1962. 399 с.

671. Яглом А. М., Яглом И. М. Вероятность и информация. Издание третье, переработанное и дополненное. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1973. 512 с.

672. Яглом И. М. Необыкновенная алгебра. М.: Наука, 1968. 72 с.

673. Яглом И. М., Яглом А. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. Задачи по комбинаторике и теории вероятностей. Задачи из разных областей математики. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1954. 544 с.

674. Яновская С. А. К теории египетских дробей // Труды Института истории естествознания. 1947. 1. С. 269–282.

675. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений / пер. с англ. М.: Мир, 1968. 458 с.

676. Arnauld A., Nicole P. La Logique Ou L′art De Penser: Contenant Outre Les Regles Communes, Plusieurs Observations Nouvelles, Propres À Former Le Jugement / Edition critique par P. Clair et F. Girbal. Paris: Presses Universitaires de France, 1965. 429 pp.

677. Cantor G. Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts. Berlin: Springer-Verlag, 1932. 489 S.

678. Cotes R. Aestimatio errorum in mixta mathesi, per variationes partim trianguli plani et sphaerici. Lemgoviae: Meyer, 1768. 224 pp.

679. Gauß C. F. Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium. Hamburgi: Sumtibus F. Perthes et I. H. Besser, 1809. 247 pp.

680. Hadamard J. S. An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field. Princeton: Princeton University Press, 1945. 145 pp.

681. Legendre A.-M. Appendice sur la méthode des moindres quarrés // Annexe à l′ouvrage Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes. Paris: Firmin-Didot, 1805. P. 72–80.

682. Leonardo da Pisa alias Fibonacci. Liber Abaci. 1202, 1228.

683. Pascal B. Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur la mesme matière (Treatise on the arithmetic triangle). Paris: Guillaume Desprez, 1665. 113 pp. (Reprinted in: Pascal B. Oeuvres / edited by L. Brunschvicg and P. Boutroux. Vol. III. Paris: Hachette, 1908. P. 433–598).

684. Poincaré H. L′invention mathématique // Enseignement mathématique. 1908. Vol. 10. P. 357–371.

685. Robinson A. Non-standard analysis. Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1966. 293 pp.

686. Vasiliev N. A. Imaginary (non-aristotelian) logic // Estratto dagli Atti dei V Congresso internationale di

Filosofia, 5–9 maggio, 1924, Napoli (Naples), 1925. P. 107–109.

687. Wittgenstein L. Logisch-philosophische Abhandlung / W. Ostwald (Hrsg.) // Annalen der Naturphilosophie. 1921. Band 14. S. 185–262.

688. Wittgenstein L. Remarks on the foundations of mathematics / edited by G. H. Von Wright, R. Rhees and G. E. M. Anscombe; translated by G. E. M. Anscombe. Oxford: Basil Blackwell, 1956. 400 pp.

689. Zadeh L. A. Fuzzy sets // Information and Control. 1965. T. 8, № 3. P. 338–353.

CONTRIBUTOR’S PROFILE & ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Name	**Gelimson Lev Grigorevic, literary and artistic pseudonym Leo Himmelsohn**
Ф.И.О. (полностью)	**Гелимсон Лев Григорьевич, литературно-художественный псевдоним Лео Гимельзон**
Degree Current position	**Ph. D. & Dr. Sc. in Engineering in the section “Physical and Mathematical Sciences” by the Highest Attestation Commission Classifier Director Director, Producer, Literary and Artistic Manager**
Учёная степень Должность	**доктор технических наук в разделе «Физико-математические науки» по Классификатору Высшей Аттестационной Комиссии директор директор, продюсер и литературно-художественный руководитель**

Institutional affiliation	**Academic Institute for Creating Universal Sciences, Munich, Germany Multilingual Literary and Musical Theater, Munich, Germany**
Место работы	**Академический институт создания всеобщих наук, Многоязычный литературно-музыкальный театр, Мюнхен, Германия**
e-mail, эл. почта	**Leohi@mail.ru**
Postal address Почтовый адрес	**Ph. D. & Dr. Sc. Lev Gelimson, Westendstrasse 68, D-80339 Munich, Germany**
Science Index (SPIN)	**8046-6818**
Scopus ID	**6505889792**
Researcher ID	**R-5007-2016**
ORCID ID	**0000-0003-0627-84**