

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 1/556

# **ОБОБЩЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В ТЕХНИКЕ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ: диссертация ... доктора технических наук: 01.02.06**

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson

Академический институт создания всеобщих наук (Мюнхен)

Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум», 1992, 1993, 2022  
ОБОБЩЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ  
ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В ТЕХНИКЕ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ:

диссертация ... доктора технических наук: 01.02.06

Гелимсон Лев Григорьевич,

доктор технических наук в разделе «Физико-математические науки» по Классификатору  
Высшей Аттестационной Комиссии,

директор, Академический институт создания всеобщих наук, Мюнхен, Германия,

E-mail: Leohi@mail.ru Web: [http://kekmir.ru/members/person\\_6149.html](http://kekmir.ru/members/person_6149.html)

**Аннотация.** Созданы и развиты иерархические математическая, метрологическая, оптико-механическая и прочностная системы принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов как теоретический фундамент для разработки теорий (с открытием и обоснованием систем принципиально новых явлений и законов) и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний и процессов, жёсткости, прочности и оптических свойств именно существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов техники высоких давлений, в частности с концентраторами напряжений, трением и взаимными сцеплением и проскальзыванием.

**Ключевые слова:** математика, метрология, механика деформируемого твёрдого тела, теория упругости, функция напряжений Лява, существенно трёхмерное цилиндрическое тело, теория прочности, критерий предельных состояний, переменное нагружение, разрушение, оптика, расфокусировка, формула Ламе, составной цилиндр, Гадолин, решение Кирша, циклически симметричная концентрация напряжений.

УДК 539.3, 539.4, 539.5

Мюнхен: Издательство Всемирной Академии наук «Коллегиум», 1992, 1993, 2022

GENERALIZATION OF ANALYTICAL METHODS FOR SOLVING STRENGTH PROBLEMS  
OF TYPICAL STRUCTURAL ELEMENTS IN HIGH PRESSURE ENGINEERING:

Dr. Sc. Dissertation in Engineering: 01.02.06

Gelimson Lev Grigorevic,

Ph. D. & Dr. Sc. in Engineering

in the section “Physical and Mathematical Sciences”

by the Highest Attestation Commission Classifier,

Director, Academic Institute for Creating Universal Sciences, Munich, Germany,

E-mail: Leohi@mail.ru Web: [http://kekmir.ru/members/person\\_6149.html](http://kekmir.ru/members/person_6149.html)

**Abstract.** The fundamentals of the hierarchical mathematical, metrological, optical-mechanical and strength systems of principally new general theories, methodologies and methods have been created and developed as a theoretical foundation for creating theories (with the discovery and justification of systems of fundamentally new phenomena and laws) and simple closed general analytical methods of rational integrated engineering investigation, design and control of the systems of the stress-strain states and processes, strength and optical properties of typical essentially three-

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 2/556

dimensional load-bearing and transparent elements and systems of various configurations in high-pressure engineering also with stress concentrators, friction and mutual adhesion and slippage.

**Keywords:** mathematics, metrology, solid mechanics, elasticity theory, Love stress function, essentially three-dimensional cylindrical body, strength theory, limit state criterion, variable loading, fracture, optics, defocusing, Lamé formula, compound cylinder, Gadolin, Kirsch solution, cyclically symmetric stress concentration. UDC 539.3, 539.4, 539.5

Publishing House of the All-World Academy of Sciences “Collegium”, Munich, 1992, 1993, 2022

## ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ (2022) НАСТОЯЩЕЙ ДОКТОРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

Второе издание (1993) настоящей докторской диссертации, представленное к её защите, было сокращено примерно вдвое по сравнению с первым изданием (1992), чтобы уменьшить объём до общепринятого для докторских диссертаций по разделу «Физико-математические науки» Классификатора Высшей Аттестационной Комиссии. Особенно сильному сокращению, а именно примерно вчетверо, подвергся список литературы – с более чем полутора тысяч наименований использованных научных трудов до приведённых 399 наименований научных трудов со ссылками в тексте диссертации. Кроме того, было резко сокращено всё изложенное в принадлежащей автору четвёртой главе (одной трети научной монографии) [216], в кандидатской диссертации автора

(Гелимсон Лев Г. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06. Киев: Ин-т проблем прочности АН УССР, 1987. 148 с.)

и в целом ряде его единоличных научных монографий [100, 354], а также статей.

В третьем издании (2022) настоящей докторской диссертации во многом восстанавливаются содержание и объём первого издания (1992), однако приводится по-прежнему сокращённый список научных трудов со ссылками в тексте диссертации по второму изданию (1993).

Академия наук Украины  
Институт проблем прочности  
Сумской физико-технологический институт  
ГЕЛИМСОН Лев Григорьевич  
УДК 539.4 : 620.193 : 621.772

ОБОБЩЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ  
ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В ТЕХНИКЕ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ

01.02.06 Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Диссертация на соискание учёной степени доктора технических наук

Научный консультант академик АН Украины, доктор технических наук, профессор

Георгий Степанович ПИСАРЕНКО

Киев 1993

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБОБЩЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРОЧНОСТИ  
ТИПОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ В ТЕХНИКЕ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ:

диссертация ... доктора технических наук: 01.02.06.....	1
ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ И ЗАДАЧ, ВЫБОР МЕТОДОВ И СРЕДСТВ ИССЛЕДОВАНИЙ.....	8
1. ИЗВЕСТНЫЕ МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ В ТЕХНИКЕ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ .....	28
1.1. Несущие, светопрозрачные и уплотнительные элементы конструкций.....	28
1.2. Способы решения задач прочности конструкций.....	39
1.3. Выводы по главе 1.....	58

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 3/556

2. СОЗДАНИЕ СИСТЕМЫ ОБЩИХ ТЕОРИЙ, МЕТОДОЛОГИЙ И МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОБЩИХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КАК ОБЩИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИКИ, МЕТРОЛОГИИ, МЕХАНИКИ И ПРОЧНОСТИ.....	59
2.1. Иерархия единства, разделения (анализа) и соединения (синтеза) общих теорий, методологий и методов постановки и решения общей математической задачи. Полная линейно-комбинационная и целочастичная (парциальная) методологии решения общих систем функциональных уравнений и аналитическая методология макроэлементов.....	65
2.2. Общий степенной метод с определением общих степенных гармонической и бигармонической функций, в частности функций напряжений.....	79
2.3. Выбор и обоснование основной расчётной схемы для развития общего (полу)степенного метода расчёта осесимметричных напряжённо-деформированных состояний трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов.	81
2.4. Определение вида функции напряжений для расчёта осесимметричных напряжённо-деформированных состояний трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов.....	82
2.5. Бигармоническая безразмерная функция напряжений Лява для сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов, полностью удовлетворяющая граничным условиям на плоских основаниях.....	91
2.6. Бигармоническая безразмерная функция напряжений Лява для кольцевых трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов, полностью удовлетворяющая граничным условиям на плоских основаниях.....	93
2.7. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, жёстко защемлённого по краю, теория и среднеквадратичный, обеспечивающий минимакс модуля и коллокационный методы минимизации невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения.....	95
2.8. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, свободно опёртого по краю.....	104
2.9. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, опёртого по окружности меньшего радиуса.....	109
2.10. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при равномерном противодействии на периферическую часть другого основания со свободной центральной частью.....	116
2.11. Двухпараметрический метод минимизации невязки осевого перемещения при сопряжении решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.....	123
2.12. Создание двухпараметрического и однопараметрического методов устранения минимизированной невязки осевого перемещения, однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения, открытие и обоснование первых трёх основных явлений и законов напряжённо-деформированного состояния существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием.....	126
2.13. Сравнение с известными аналитическими методами теории пластин и теории плит для методической, аналитической и численной проверки и оценки достоверности созданного общего (полу)степенного аналитического метода макроэлементов для	

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 4/556	
общих теорий деформирования, прочности и разрушения сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов.....	160
2.14. Численная конечно-элементная проверка и оценка достоверности общего (полу)степенного метода как (полу)степенной модификации созданной аналитической методологии макроэлементов, открытие и обоснование четвёртых основных явления и закона напряжённо-деформированного состояния существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием.....	164
2.15. Определение и анализ основного типа осесимметричных схем нагружения трёхмерного цилиндрического упругого тела, в частности светопрозрачного элемента .....	171
2.16. Сущность общего интегрального метода и как интегральной модификации созданной аналитической методологии макроэлементов.....	180
2.17. Развитие общего интегрального метода применительно к решению осесимметричных упругих задач без объёмных сил и кручения для трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов.....	181
2.18. Упругое равновесие неканонического элемента вращения.....	189
2.19. Развитие общего интегрального метода применительно к решению задачи прочности для тела сложной конфигурации.....	192
2.20. Определение основного типа схем нагружения трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, в технике высоких давлений.....	199
2.21. Поля перемещений и напряжений по аналитической методологии макроэлементов в трёхмерном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием.....	203
2.22. Общая теория предельных состояний и общая теория прочности с общей методологией учёта действительных соотношений прочностных свойств материалов, с общей методологией приведения главных напряжений к всеобщим напряжениям и с общей методологией приведения критериев предельных состояний и критериев прочности впервые к всеобщим прочностным законам природы для произвольно анизотропных тел с различными сопротивлениями растяжениям и сжатиям при любых переменных нагружениях с возможными вращениями главных направлений напряжённого состояния.....	209
2.23. Общая теория запаса с общей методологией всеобщего запаса, мультипликативной и аддитивной методологиями общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных с открытием и обоснованием явления многократного завышения подлинных запасов прочности по независимым нагрузкам обычным запасом прочности по равносильному (эквивалентному) напряжению при сложном нагружении .....	268
2.24. Выводы по главе 2.....	294
<b>3. ПРИМЕНЕНИЕ СОЗДАННОЙ СИСТЕМЫ ОБЩИХ ТЕОРИЙ, МЕТОДОЛОГИЙ И МЕТОДОВ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ТЕОРИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ, ЖЁСТКОСТИ, ОПТИКИ, ПРОЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ СПЛОШНЫХ ТРЁХМЕРНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ, В ЧАСТНОСТИ СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ЛЛЮМИНАТОРОВ ДЛЯ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ.....</b>	<b>300</b>
3.1. Создание теории прочности сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодействием.....	300
3.2. Создание общих теорий и методов обобщения критериев предельных состояний и прочности линейно-функциональным преобразованием главных напряжений с деформированием и/или движением (смещением, вращением) предельной поверхности	

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 5/556 на случай анизотропии и/или различных сопротивлений материала растяжению и сжатию для исследований прочности органического стекла при сложном напряжённом состоянии.....	316
3.3. Создание итерационного общего метода наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов, применительно к теоретическим и экспериментальным исследованиям прочности и разрушения неорганического стекла при повторно-статическом нагружении.....	332
3.4. Экспериментальная проверка достоверности созданных общего (полу)степенного метода и теорий деформирования, прочности и разрушения сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением.....	342
3.5. Создание теории влияния на оптические свойства иллюминатора напряжённо-деформированного состояния существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, открытие, обоснование и обобщение шести основных явлений и законов такого напряжённо-деформированного состояния.....	355
3.6. Метод и алгоритм комплексной оптимизации прочности, жёсткости и оптических свойств сплошного трёхмерного цилиндрического светопрозрачного элемента при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением.....	391
3.7. Методы деформационной и прочностной оптимизации промежуточного кольца между стеклоэлементом и оправой и обоснование защищённых авторскими свидетельствами на изобретения новых конструкций иллюминаторов для высоких давлений по созданным теориям деформирования, жёсткости, оптики, прочности и разрушения сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов.....	394
3.8. Выводы по главе 3.....	400
<b>4. ПРИЛОЖЕНИЕ СОЗДАННОЙ СИСТЕМЫ ОБЩИХ ТЕОРИЙ, МЕТОДОЛОГИЙ И МЕТОДОВ К ВЫДВИЖЕНИЮ ПРИНЦИПОВ И СОЗДАНИЮ МЕТОДОВ РАЦИОНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЧНОСТЬЮ СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ И НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ИХ СОЕДИНЕНИЙ СРЕДСТВАМИ УПЛОТНИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ ПРИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЯХ.....</b>	<b>402</b>
4.1. Методы рациональных изменений участков приложения высоких давлений и их ступенчатых распределений.....	402
4.2. Метод линеаризации для выделения задачи прочности паяного сотового уплотнения в связанной задаче аэроупругости.....	403
4.3. Методы иерархизации систем неопределённостей участков сцепления и проскальзывания и критических значений в осесимметричной контактной задаче с трением для упругих уплотнений с заниженными разгрузочными поясками.....	406
4.4. Методы герметизации крупногабаритных сосудов высокого давления.....	416
4.5. Рациональные конструкции уплотнений разъёмных соединений, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.....	417
4.6. Выводы по главе 4.....	418
<b>5. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПРИНЦИПИАЛЬНО ТРЁХМЕРНЫХ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ И ПРОЦЕССОВ, ПРОЧНОСТИ И ТЕХНОЛОГИЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ ТЕХНИКИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ С УЧЁТОМ ТРЕНИЯ, ВЗАИМНЫХ СЦЕПЛЕНИЯ И ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ И КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ.....</b>	<b>419</b>
5.1. Теория принципиально трёхмерного напряжённо-деформированного процесса составного цилиндра конечной длины при его тепловой сборке.....	419

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 6/556	
5.2. Теория принципиально трёхмерного напряжённо-деформированного процесса составного цилиндра конечной длины при его запрессовке.....	426
5.3. Теория оптимизации технологичности и статической и циклической прочности составного цилиндра конечной длины при его тепловой сборке, запрессовке, гидропрессовой сборке и предложенной и обоснованной именно вполне обратимой технологии сжатия-растяжения для сборки-разборки соединений с натягом, основанной на явлении поперечной деформации.....	436
5.4. Теория оптимизации составного цилиндра с учётом подлинных запасов прочности при сложном нагружении по общей методологии всеобщего запаса, мультипликативной и аддитивной методологиям общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных.....	441
5.5. Теория комплексной оптимизации составного цилиндра при наличии или отсутствии полного сжатия твердосплавного внутреннего слоя самоскреплённым (автофретированным) внешним слоем.....	443
5.6. Теория концентрации напряжений в несущих деталях сосудов высокого давления .....	449
5.7. Общая теория измерения физических величин с неоднородными статическими и динамическими распределениями и теория исправления погрешностей измерений коэффициентами мультипликации применительно к электротензометрии мест концентрации напряжений.....	457
5.8. Методы совершенствования средств экспериментальных исследований и конструкций сосудов высокого давления, защищённых авторскими свидетельствами на изобретения.....	466
5.9. Выводы по главе 5.....	470
6. СОЗДАНИЕ ТЕОРИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПРОЧНОСТИ УСЛОЖНЁННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И СОЕДИНЕНИЙ ТЕХНИКИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ.....	473
6.1. Метод циклически прочного соединения разнородных материалов с системой натягов и зазора в составном плунжере.....	475
6.2. Метод совместного учёта конструктивной анизотропии и концентрации напряжений применительно к деформированию и прочности конструктивно ортотропного цельнолитого корпуса прямого клапана.....	477
6.3. Теория циклической прочности при концентрации напряжений циклически симметричной системой отверстий применительно к ограничителю грибового клапана .....	481
6.4. Выводы по главе 6.....	496
ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ.....	498
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ СО ССЫЛКАМИ В ТЕКСТЕ (использовано свыше 1500 научных трудов).....	500
ПРИЛОЖЕНИЯ. СИСТЕМА ДАЛЬНЕЙШИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ, МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ, МЕХАНИЧЕСКИХ И ПРОЧНОСТНЫХ ОБОБЩЕНИЙ. СПРАВКИ О ПРАКТИЧЕСКОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ И АКТЫ ВНЕДРЕНИЯ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ НАСТОЯЩЕЙ ДОКТОРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ.....	516
П.1. Открытие и доказательство необходимости бигармоничности функции напряжений Лява для точного выполнения уравнений равновесия и совместности деформаций.....	516
П.2. Общая теория осесимметричного (без объёмных сил и кручения) деформирования трёхмерного цилиндрического тела, нагруженного по схеме основного типа с одним свободным торцом.....	518
П.3. Теории полной линейной зависимости и полной линейной независимости системы и полной линейности оператора (применительно к бесконечным линейным комбинациям).....	520
П.4. Всеобщая погрешность псевдорешения системы функциональных уравнений и система общих методов его оптимизации.....	522

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 7/556	
П.5. Аддитивный и мультипликативный методы определения окрестностей и запасов множества в гильбертовом пространстве.....	531
П.6. Открытие и теория явления и сущности неустойчивости знака с нарушением однозначности степени с отрицательным основанием и дробным показателем с нечётными числителем и знаменателем.....	533
П.7. Открытие и теория явления и сущности неустойчивости знака с нарушением однозначности извлечения корня как обратного действия для возведения в степень отрицательного основания с дробным показателем с нечётными числителем и знаменателем.....	534
П.8. Общая теория точечной и окрестной равносильной устойчивости.....	535
П.9. Открытие и теория явления и сущности невозможности окрестной равносильной устойчивости возведения отрицательного основания в степень.....	536
П.10. Открытие и теория явления и сущности невозможности окрестной равносильной устойчивости извлечения корня (как обратного действия для возведения в степень) из отрицательной величины.....	536
П.11. Общая теория дополнительных альтернативных новых действий.....	536
П.12. Теория альтернативного минус-умножения.....	540
П.13. Теория альтернативного минус-деления.....	543
П.14. Теория альтернативного минус-остепенения (минус-возведения в степень).....	543
П.15. Теория альтернативного вектор-остепенения (вектор-возведения в степень).....	545
П.16. Теория альтернативного минус-укоренения (минус-извлечения корня).....	545
П.17. Теория обобщения степенных функций на отрицательные основания минус-степенными функциями.....	545
П.18. Теория обобщения показательных функций на отрицательные основания минус-показательными функциями.....	546
П.19. Теория обобщения степенно-показательных функций на отрицательные основания минус-степенно-показательными функциями.....	547
П.20. Развитие теории и алгоритм аналитического приближения предельных поверхностей в пространстве приведённых напряжений.....	548
П.21. Дополнительные результаты проверки обобщённых аналитических методов решения задач прочности.....	550
П.22. Акт внедрения результатов исследований напряжённо-деформированного состояния глубоководных иллюминаторов в Ленинградском институте точной механики и оптики.....	551
П.23. Акт внедрения результатов диссертационной работы в НИПИокеангеофизика ПО «Южморгеология».....	552
П.24. Акт внедрения результатов докторской диссертации в Институте проблем прочности АН Украины.....	552
П.25. Справка об использовании результатов диссертационной работы в Сумском физико-технологическом институте.....	554
П.26. Справка об использовании результатов докторской диссертации в Научно-производственном предприятии «Сплав-Т».....	555
П.27. Акт внедрения результатов докторской диссертации в НИИкомпрессормаш.....	555
П.28. Акт внедрения результатов докторской диссертации в Украинском Государственном институте стекла.....	556

## **ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЦЕЛИ И ЗАДАЧ, ВЫБОР МЕТОДОВ И СРЕДСТВ ИССЛЕДОВАНИЙ**

Ускорение научно-технического прогресса требует интенсификации промышленных технологий и направленности теоретических и экспериментальных исследований на

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 8/556

рациональное проектирование конструкций, обладающих необходимой и достаточной прочностью при высоких удельных нагрузках в экстремальных условиях работы.

Многообразие элементов техники высоких давлений при всей многовариантности технологических решений обладает аналогией и типичностью: жёстких требований к стоимости и срокам создания, а главное, к прочности, герметичности и оптике светопрозрачных и несущих элементов конструкций с учётом тяжёлых и часто катастрофических последствий их разрушения; конструктивных форм (на основе осесимметричных), конструкционных материалов (включающих нетрадиционные хрупкие материалы типа металлокерамических твёрдых сплавов, стекла и ситалла) и средств уплотнительной техники; статических и циклических нагрузок, трёхмерных напряжённо-деформированных состояний, проблем прочности и характера разрушения; расчётных схем, направлений, методов и средств исследований.

Нормативная или прецедентная практика проектирования элементов техники высоких давлений не всегда рациональна и нуждается в совершенствовании для решения новых задач. Одним из эффективных методов поиска и разведки полезных ископаемых в Мировом океане является фотокинотелевизионная съёмка. Съёмочная аппаратура устанавливается в подводных аппаратах, включающих иллюминаторы для высоких давлений со светопрозрачными элементами из органического или неорганического стекла. В состав подводных оптических систем входят гидрообъективы, которые исправляют оптические искажения изображений подводных объектов, связанные с переходами световых лучей через границы раздела сред с различными показателями преломления. В целях универсализации гидрообъективов, упрощения изготовления светопрозрачных элементов, монтажа и юстировки подводных оптических систем границы раздела воздушной среды внутри аппарата, светопрозрачного элемента и гидросферы должны быть плоскопараллельными.

Под действием высоких давлений океанских глубин первоначально плоские оптические поверхности светопрозрачного элемента иллюминатора существенно деформируются, что обуславливает дополнительные искажения, которые не исправляются гидрообъективом. Уменьшение этих деформаций достигается заменой органического стекла неорганическим стеклом. Специфике его конструктивно-технологических свойств наилучшим образом соответствует простейшая форма светопрозрачного элемента в виде сплошного прямого кругового цилиндра с плоскопараллельными основаниями. Однако прогибы оптических поверхностей таких элементов под действием высоких давлений океанских глубин более чем на порядок превышают значения, влиянием которых на качество изображения можно было бы пренебречь. Поэтому для проектирования качественных оптических систем для высоких давлений нужно достоверно учитывать влияние напряжённо-деформированных состояний светопрозрачных элементов из стекла на прочность и оптические свойства иллюминаторов.

Из теории оптических систем известно, что зависимости между оптическими искажениями и конструктивными параметрами элементов системы должны быть выражены непременно аналитически. Однако применяемые в настоящее время при проектировании оптических иллюминаторов аналитические методы, основывающиеся на теории пластин и теории плит, не учитывают больших относительных толщин светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений и не могут с необходимой точностью и достоверностью определять действительные напряжённо-деформированные состояния таких светопрозрачных элементов. Поэтому являются актуальными создание аналитических методов расчёта напряжённо-деформированных состояний светопрозрачных элементов как существенно трёхмерных тел и разработка предложений по учёту влияния этих состояний на прочность и оптические свойства иллюминаторов для высоких давлений. Проблемы проектирования таких иллюминаторов и иллюминаторов, применяемых в химической промышленности, в физико-химических экспериментах и в других отраслях техники высоких давлений, имеют много общего.

Интенсивно развивающиеся численные и экспериментальные методы требуют аналитического испытания и, действуя лишь с постоянными, позволяют вести только



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 9/556

поверочные расчёты и исследования объектов с уже выбранными исполнительными размерами, а перебор вариантов недостаточно эффективен при решении многопараметрических задач оптимизации.

Поэтому для рационального проектирования конструкций на стадии эскизного проекта необходимы функциональные зависимости целевых параметров оптимизации от совокупностей исходных данных, выраженные непременно аналитически на основе разумного компромисса между простотой и точностью. Но известные аналитические методы зачастую либо доказывают существование решения задачи механики деформируемого твёрдого тела, ввиду сложности формул практически не позволяя довести до конца решение задачи прочности, либо относятся к не учитывающим существенной трёхмерности объектов техники высоких давлений расчётным схемам оболочек, пластин и плит.

Возможности решения непрерывно расширяющегося круга актуальных инженерных задач прочности создаются обширными интенсивными экспериментальными исследованиями и математическим моделированием прочности многообразных конструкционных материалов при экстремальных условиях (прежде всего в Институте проблем прочности АН Украины).

Однако для осуществления и эффективного использования этих возможностей требуется обобщение аналитических методов решения задач прочности применительно к типовым расчётным схемам и реальным именно существенно трёхмерным объектам в технике высоких давлений с целью создания теоретического фундамента для разработки инженерных методов расчёта напряжённо-деформированных состояний и прочности элементов конструкций различных конфигураций в качестве теорий рационального их проектирования.

Тем более необходимо и полезно создание иерархических математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов как теоретического фундамента для разработки теорий и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, прочности и оптических свойств именно существенно трёхмерных элементов конструкций различных конфигураций в технике высоких давлений, в частности линейно упругих тел вращения под осесимметричными кусочно-гладкими поверхностными нагрузками. Научные исследования в этом насущном направлении относятся к проблемам динамики, прочности машин, приборов и аппаратуры.

Настоящая докторская диссертация обобщает результаты научно-исследовательских работ, выполненных во ВНИИкомпрессормаш (1974–1981 гг., причём в лаборатории прочности конструкций, работающих под давлением, среди других использовался гидрокомпрессор на давления до 1600 МПа, что примерно в 15 раз превышает давление на дне Марианской впадины, глубочайшей в Мировом океане) и в Сумском филиале Харьковского политехнического института, Сумском физико-технологическом институте и Сумском государственном университете (1981–1994 гг.) единолично автором (теоретические исследования с двадцатилетним безаварийным опытом именно собственных аналитических методов расчёта на прочность порядка тысячи конструкций в технике высоких давлений и обработка экспериментальных данных, руководство испытанными по своим аналитическим методам численными конечно-элементными расчётами прочности внедрённых особо ответственных крупногабаритных сосудов высокого давления, в том числе для Института проблем прочности Академии Наук Украины, обоснование всех этих расчётов и организация их доскональной взыскательной проверки докторами и кандидатами наук, обсуждений и затем утверждений ИркутскНИИхимаш как головным институтом СССР по сосудам высокого давления) и при его личном участии (замысел и осуществление экспериментальных исследований) в качестве ответственного исполнителя и научного руководителя хоздоговорных и госбюджетных тем, в том числе темы 1.10.2.1-63 по Постановлению № 474 Президиума Академии Наук Украины от 27.12.1985 г. и темы 63.01.09.86-90/48-С, отнесённой Президиумом АН Украины к числу важнейших, в рамках целевой комплексной программы ГКНТ 074.01 «Мировой океан» и научного направления Сумского физико-технологического

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 10/556

института «Оптико-механические проблемы в современной глубоководной технике», утверждённого Академией Наук Украины.

Целью настоящей докторской диссертации является создание, основоположение и практически целесообразное идейное развитие иерархических математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем принципиально новых общих теорий, методологий и методов как теоретического фундамента для разработки теорий и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний и процессов, жёсткости, прочности и оптических свойств именно существенно трёхмерных типовых несущих и светопрозрачных пластичных и хрупких элементов и систем техники высоких давлений, в том числе с концентраторами напряжений, трением и взаимными сцеплением и проскальзыванием.

Основные задачи данной докторской диссертации, вытекающие из этой цели, – создание принципиально новых общих теорий, методологий и методов и их систем. Среди них находятся:

1. Математическая система принципиально новых общих теорий, методологий и методов:

1.1) теория количественных множеств с непременно точно учитываемыми произвольными (не только безразмерными числовыми) количествами наличных элементов, что необходимо для всеобщих законов сохранения, для математического моделирования произвольных совокупностей и для теории и общих методов последовательного выравнивания частных погрешностей отношений общей математической задачи между собой, с обобщением и развитием классической теории множеств Кантора, лежащей в основе современной математики;

1.2) теория общих математических задач как количественных множеств функциональных отношений (например функциональных уравнений и/или неравенств) между известными операторами над искомыми функциями известных аргументов;

1.3) теории полной линейности оператора (для бесконечной линейной комбинации) и полных линейных независимости и зависимости, при которых из аннулирования даже бесконечной линейной комбинации непременно следует или не обязано следовать соответственно аннулирование всех её коэффициентов;

1.4) теория собственной совокупности видов (классов), в частности собственного вида (класса), функций для множества операторов с глубокими и очень полезными обобщениями неподвижной точки отображения и собственной функции для оператора;

1.5) полная линейно-комбинационная методология решения общих математических задач, в частности для общих решений общим (полу)степенным методом гармонического и бигармонического уравнений в (полу)степенных рядах как собственных классах функций для операторов этих уравнений, в том числе применительно к функциям напряжений и к общему (полу)степенному аналитическому методу макроэлементов как к (полу)степенной модификации аналитической методологии макроэлементов для именно существенно трёхмерных тел;

1.6) целочастичная (парциальная) методология решения общих математических задач с возможным разбиением системы функциональных отношений решаемой задачи на возможно более полную разрешающую подсистему простейших отношений и на остаточную оценочную подсистему сложнейших отношений, в том числе применительно к общему интегральному методу и к общему интегральному аналитическому методу макроэлементов как интегральной модификации аналитической методологии макроэлементов для именно существенно трёхмерных тел;

1.7) теория простого (на единый ненулевой множитель) и сложного (на свои ненулевые множители для различных отношений) умножения системы отношений наподобие понятий простого и сложного нагружений в механике и общая теория именно дополнительных альтернативных новых действий с открытием и обоснованием явлений неустойчивости знаков и несуществования степеней с отрицательными основаниями и с теориями точечной и

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 11/556

окрестной равносильной устойчивости, минус-умножения и минус-деления, минус-остепенения (минус-возведения в степень) и минус-укоренения (минус-извлечения корня) с отделением отрицательных знаков и лишь итоговым учётом наличия отрицательности для повышения её действенности обобщением степенных, показательных и степенно-показательных функций на отрицательные основания минус-степенными, минус-показательными и минус-степенно-показательными функциями, что важно и для обобщений общего (полу)степенного метода и критериев предельных состояний и необходимо ввиду открытия лауреатом Нобелевской премии П. Бриджменом явления повышения прочности при трёхмерном равноосном сжатии.

2. Метрологическая система принципиально новых общих теорий, методологий и методов:

2.1) общие теории и методы измерения физических величин, оценки и исправления погрешностей усреднения при измерениях существенно неоднородных пространственных и/или временных статических и динамических распределений, в частности

2.1.1) теория самопогрешности с открытием явления существования и неперемного наличия естественной (не устранимой никаким совершенствованием средств измерения) самопогрешности (собственной погрешности) любой физической величины и любого реального объекта с невязкой сопряжения реального объекта и его идеальной расчётной схемы по общей теории невязок сопряжения и понятиями действительной единоразмерности и практической несоизмеримости;

2.1.2) теория искажения данных при измерениях существенно неоднородных распределений;

2.1.3) теория погрешностей усреднения при измерениях существенно неоднородных распределений;

2.1.4) теория обращения общего оператора усреднения с решением проблем существования, единственности и точного или приближённого построения такого обращения;

2.1.5) теория и методы определения коэффициентов мультипликации, восстанавливающих наибольшее значение измеряемой неоднородно распределённой величины по измеренным её значениям, которые искажены удалением, запаздыванием и усреднением ввиду неотъемлемых свойств измерительного элемента, например его инертности и конечных размеров;

2.1.6) теория и методы определения коэффициентов мультипликации при электротензометрии, в том числе мест концентрации напряжений в двумерных расчётных схемах и в трёхмерных реальных объектах различных конфигураций;

2.2) общие теории неточных псевдорешений, их наилучших квазирешений, исправляющей и обобщающей относительную погрешность всеобщей погрешности как инвариантной меры неточности, верно обобщающей нечёткую приближённость, с оценкой качества приближений и меры несовместности противоречивой задачи и с общими методами дополнительной косвенной оценки и аналитического приближения к искомому квазирешению, обобщающему точное решение, невозможное в противоречивой задаче, в том числе в переопределённой задаче обработки данных, или могущее не существовать в избранном классе функций;

2.3) общая теория запаса с общей методологией всеобщего запаса (обобщением всеобщей погрешности впервые измеряющего надёжность точности, наибольшую для суперпсевдорешения задачи), мультипликативной и аддитивной методологиями общего функционального запаса как функции индивидуальных запасов множеств значений независимых переменных в гильбертовых пространствах с обобщением для них понятий окрестности множества и запаса множества относительно допускаемого множества, с непрерывными всеобщей логикой и иерархиями псевдоправильности, псевдоточности и псевдорешений и с открытием философского закона перехода анализа как первого общенаучного метода от качественного различия к количественному измерению различий;

2.4) общие теории и методы наилучших аналитических приближений к дискретным экспериментальным данным с их разбросом при опоре именно на лучшие из них и при взвешенном учёте непременно всех данных без исключения выбросов, в том числе применительно к совершенствованию методов экспериментальных исследований

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 12/556

напряжённо-деформированных состояний и прочности конструкций при высоких давлениях, в частности

2.4.1) общая теория анализа приемлемости методов обработки данных с открытыми и доказанными принципиальными изъянами абсолютной и нелогичной относительной погрешностей и якобы незаменимого классического метода наименьших квадратов Гаусса и Лежандра, причём вне крайне узких областей приемлемости (пригодности) возможны неоднозначность, неопределённость, неинвариантность, даже извращения действительности;

2.4.2) теория и общие методы наименьших нормально взвешенных степеней с опорой на всеобщую погрешность, тогда как обладающий дюжиной взаимосвязанных принципиальных пороков в сущности и применимости метод наименьших квадратов опирается на явно недостаточную абсолютную погрешность;

2.4.3) теория и общие методы последовательного выравнивания частных погрешностей отношений общей математической задачи между собой;

2.4.4) теория и общие методы уравнивания самих отношений общей математической задачи между собой;

2.4.5) теория и общие методы целесообразного взвешивания данных для опоры как раз на лучшие из них при учёте всех данных без исключения выбросов и при возможности именно правильного использования формул аналитически простейшего классического метода наименьших квадратов с его произвольным выбрасыванием наихудших данных и его действительной опорой на самые худшие из сохраняемых данных ввиду ничтожности вклада наилучших данных в сумму квадратов отклонений, минимизируемую этим методом;

2.4.6) теория и общие методы простейших аналитических приближений именно полной кривой усталости Вёлера.

3. Оптико-механическая система принципиально новых общих теорий, методологий и методов:

3.1) теория открытых закономерных инвариантных самопредельных самоопасных безразмерных всеобщих напряжений с приведением размерных напряжений, в частности их делением на модули их одноосных пределов тех же направлений и знаков при прочих равных условиях нагружения;

3.2) теория открытой иерархичности типов схем осесимметричного (без объёмных сил и кручения) нагружения именно существенно трёхмерного сплошного или кольцевого цилиндрического тела и существования и общего метода конструктивного определения основного типа схем (с одним свободным торцом), алгебраические суммы схем которого исчерпывают общий тип, тогда как в технике высоких давлений общим является тип схем с равномерным давлением на боковую поверхность и ступенчатыми давлениями на торцы (основания), а основным является тип схем с равномерными давлениями на боковую поверхность, на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания;

3.3) общий (полу)степенной аналитический метод макроэлементов как (полу)степенная модификация аналитической методологии макроэлементов для впервые решаемых нетривиальных задач механики, прочности и оптики нагруженных именно существенно трёхмерных тел;

3.4) общий интегральный аналитический метод макроэлементов как интегральная модификация аналитической методологии макроэлементов для впервые решаемых нетривиальных задач механики, прочности и оптики нагруженных именно существенно трёхмерных тел;

3.5) теория минимизации невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения именно существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения, осуществляемой среднеквадратичным, обеспечивающим минимакс модуля и коллокационным методами;

3.6) теория и аналитические методы устранения минимизированных невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения именно существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 13/556

3.7) теории осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного и кольцевого именно существенно трёхмерных цилиндрических тел при различных условиях уравнивания;

3.8) теории принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных процессов составного цилиндра конечной длины при его тепловой сборке и запрессовке с понятиями напрягающе-деформирующего процесса нагружения, напряжённо-деформированного процесса и остаточно-рабочего простого нагружения;

3.9) теория влияния осесимметричного изгиба равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента, на его оптические свойства.

4. Прочностная система принципиально новых общих теорий, методологий и методов:

4.1) общая теория прочности материалов с открытием первых в истории всеобщих прочностных законов природы во всеобщих напряжениях, в том числе путём исправляющего и обобщающего приведения к ним известных частных критериев предельных состояний и прочности, в частности

4.1.1) теория прочности постоянно нагруженных изотропных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, и общие методы приведения напряжений к скалярным всеобщим напряжениям для таких материалов;

4.1.2) теория прочности постоянно нагруженных изотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, и общие методы приведения напряжений к скалярным всеобщим напряжениям для таких материалов;

4.1.3) теория прочности постоянно нагруженных произвольно анизотропных материалов, одинаково или различно сопротивляющихся растяжениям и сжатиям, и общие методы приведения напряжений к скалярным всеобщим напряжениям для таких материалов;

4.1.4) теория прочности переменного (с возможными вращениями главных направлений напряжённого состояния в точке во времени) нагруженных произвольно анизотропных материалов, одинаково или различно сопротивляющихся растяжениям и сжатиям (наиболее общий случай, для которого ранее не было даже предложений по формулировкам возможных критериев предельных состояний и который и ведёт именно ко всеобщим критериям предельных состояний как всеобщим прочностным законам природы), и общие методы приведения (через равноопасные циклические напряжения) напряжённых процессов (переменных программ) одноосных главных напряжений за время нагружения при постоянной их нумерации независимо от алгебраической упорядоченности их величин к постоянным векторным всеобщим напряжениям для таких материалов;

4.1.5) методология (теория и общие методы) исправления общего и частных критериев предельных состояний, в частности для учёта экспериментально установленного упрочняющего влияния равномерного всестороннего сжатия с общим понятием линейно прочного материала (и тела), для учёта именно действительных, подлинных соотношений пределов прочности материала при различных видах напряжённого состояния и для именно правильного учёта алгебраически наибольших напряжений и деформаций;

4.1.6) методология (теория и общие методы) универсализации экспериментальных данных о прочности материалов;

4.1.7) методология (теория и общие методы) универсализации известных частных критериев предельных состояний;

4.1.8) методология (теория и общие методы) открытия принципиально новых всеобщих прочностных законов природы и их иерархий;

4.2) общая теория прочности объектов с дальнейшими обобщениями всеобщих прочностных законов природы с предельных состояний также на неопредельные состояния с запасом прочности при сложном нагружении как функцией частных запасов независимых нагрузок с учётом наиболее опасного их сочетания, в частности

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 14/556

4.2.1) теория равносильной множественности любого критерия предельных состояний с доказательством произвольности мультипликативного запаса любого неопредельного состояния;

4.2.2) теория выбора (по принципу допустимой простоты из множества эквивалентов) единственного простейшего критерия предельных состояний с единственностью мультипликативного запаса любого неопредельного состояния;

4.2.3) теория мультипликативного запаса любого неопредельного состояния;

4.2.4) теория аддитивного запаса любого неопредельного состояния;

4.2.5) теория частных запасов, в том числе выражаемых через некий единый для них запас, с учётом наиболее опасного сочетания взаимно независимых нагрузок, необходимым при сложном нагружении;

4.2.6) теория выбора всеобщего критерия предельных состояний как всеобщего прочностного закона природы, наиболее подходящего для решаемой задачи прочности объекта;

4.2.7) теории прочности именно существенно трёхмерных тел различных конфигураций, в том числе с концентраторами напряжений, трением и взаимными сцеплением и проскальзыванием;

4.2.8) методология построения простых замкнутых (общих) аналитических методов решения и решений существенно трёхмерных (типов соответственно) задач механики и прочности тел различных конфигураций из пластичных и хрупких конструкционных материалов, в том числе для типовых расчётных схем и реальных объектов техники высоких давлений.

5. Методология открытия и обоснования механической, прочностной и оптической систем принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, оптики, прочности, запаса и разрушения именно существенно трёхмерных тел с уточнением и развитием классических закономерностей и методология открытия системы всеобщих явлений и законов приложением созданных математических, метрологических, оптико-механических и прочностных общих теорий, методологий и методов к впервые решаемым нетривиальным задачам для таких тел.

6. Методология проверки приемлемости созданных математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем многовариантных общих теорий, методологий и методов – внутренней проверки их многовариантностью с возможностью самопроверяемости и взаимной проверяемости и внешней проверки путём аналитических и численных сопоставлений полученных формул и численных результатов с формулами и численными результатами известных аналитических решений, численными и приемлемо обработанными экспериментальными данными.

7. Теории функционально допустимого и технологически осуществимого рационального комплексного управления напряжённо-деформированными состояниями и процессами, прочностью и оптическими свойствами именно существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов и систем различных конфигураций, в том числе с концентраторами напряжений, трением, сцеплением и проскальзыванием.

8. Методы рационального комплексного проектирования (с учётом открытых явлений и законов напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, оптики, прочности, запаса и разрушения) с внедрением эффективных именно существенно трёхмерных реальных конструкций для высокого давления, в том числе защищённых авторскими свидетельствами на изобретения.

В основе настоящей докторской диссертации лежит общий принцип допустимой простоты: при необходимости и возможности выбирается простейшее аналитическое выражение помимо заведомо несоответствующих известным данным. В задачах механики деформируемого твёрдого тела этот принцип предписывает выбирать при необходимости и возможности для произвольного напряжения простейшее статически возможное (удовлетворяющее уравнениям равновесия и граничным условиям) аналитическое представление.

Главные выдвинутые и осуществлённые идеи настоящей докторской диссертации:

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 15/556

идея произвольной количественности наличных элементов для математического моделирования произвольных совокупностей с всеобщими законами сохранения, обобщением и развитием классической теории множеств Кантора, лежащей в основе современной математики;

идея именно дополнительного альтернативного возведения в степень (минус-остепенения) умножением функции знака основания на степень модуля основания с лишь итоговым учётом отрицательности основания для обобщений степенных, показательных и степенно-показательных функций на отрицательные основания, в частности для начальных, центральных и смещённых моментов любых нецелых порядков;

идея общих математических задач как количественных множеств функциональных отношений (например функциональных уравнений или неравенств) между известными операторами над искомыми функциями известных аргументов;

идея обесконечивания линейных комбинаций для полной линейности оператора и для полноты линейной независимости и линейной зависимости;

идея собственной совокупности видов (классов), в частности собственного вида (класса), функций для множества операторов с глубокими и очень полезными обобщениями неподвижной точки отображения и собственной функции для оператора;

идея разбиения задачи на простейшую полнейшую разрешающую подзадачу и на сложнейшую остаточную оценочную подзадачу;

идея всеобщей погрешности как инвариантной меры неточности, правильно обобщающей нечёткую приближённость, с дополнительной косвенной оценкой качества псевдорешения и меры несовместности противоречивой задачи всеобщей погрешностью квазирешения (наилучшего псевдорешения) задачи;

идея окрестности и запаса произвольного множества относительно допускаемого множества;

идея общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных;

идеи всеобщего запаса, обобщением всеобщей погрешности впервые измеряющего надёжность точности, наибольшую для суперпсевдорешения задачи, всеобщей погрешностью противоречащего при точности и противоположностью всеобщей погрешности при неточности с непрерывными всеобщей логикой и иерархиями псевдоправильности, псевдоточности и псевдорешений;

идея философского закона перехода анализа как первого общенаучного метода от качественного различения к количественному измерению различий;

идеи принципиальной самопогрешности любых физической величины и реального объекта;

идея оценки и исправления погрешностей усреднения при измерениях существенно неоднородных распределений;

идея выравнивания частных погрешностей отношений общей математической задачи;

идея уравнивания отношений общей математической задачи между собой;

идея нормального взвешивания данных безотносительно нормальности их распределения для опоры как раз на лучшие из них при учёте именно всех данных без исключения выбросов;

идеи иерархичности типов схем нагружения тела и существования основного типа, алгебраические суммы схем которого исчерпывают общий тип;

идея использования полной линейной независимости степенных функций, в том числе для обобщения полиномиальных методов общим (полу)степенным методом с решениями в (полу)степенных рядах;

идеи осуществимого плоско точного неплюско приближённого выполнения граничных условий при осесимметричном изгибе сплошного и кольцевого именно существенно трёхмерных цилиндрических тел;

идея использования сдвигового напряжения как именно естественной функции напряжений для общего интегрального метода;

идеи многовариантности минимизации и устранения минимизированных невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения именно существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями нагружения такого тела,

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 16/556

осуществляемой среднеквадратичным, обеспечивающим минимакс модуля и коллокационным методами;

идея кратного снижения максимума рабочих расфокусировок изображений подводных объектов такой предварительной расфокусировкой оптической системы, которая противоположна средней рабочей расфокусировке изображений подводных объектов;

идея линейных увеличений радиального натяга на торцевых участках взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра конечной длины для равномерности их контактного давления и для равнопрочности вдоль оси с учётом принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных процессов при тепловой сборке и запрессовке составного цилиндра;

идея закономерного единства критериев предельных состояний (и критериев прочности) для различных материалов и условий нагружения как всеобщих прочностных законов природы;

идея закономерности, инвариантности, самопредельности и самоопасности безразмерного всеобщего напряжения с синхронным скалярным приведением размерного главного напряжения делением его функции на модуль функции одноосных пределов в том же направлении, в частности делением на модуль одноосного предела тех же направления и знака, в той же точке того же тела при прочих равных условиях нагружения;

идея постоянного векторного приведения к постоянному векторному всеобщему напряжению (с ординатой как амплитудой равноопасного циклического напряжения с таким же или наименее уклоняющимся средним напряжением цикла как абсциссой) напряжённого процесса (переменной программы) одноосного главного напряжения за время нагружения при постоянной нумерации главных напряжений независимо от алгебраической упорядоченности их величин;

идея использования минус-остепенения для исправления и обобщения критериев предельных состояний;

идея обобщения всеобщих прочностных законов природы с предельных состояний также на непредельные состояния с запасом прочности при сложном нагружении как функцией индивидуальных запасов взаимно независимых нагрузок с учётом их наиболее опасного сочетания;

идея существования общих аналитических методов решения задач прочности для именно существенно трёхмерных осесимметричных упругих тел при типовых схемах их нагружения;

идеи существования обобщённого аналитического метода решения каждого класса задач прочности и аналитического метода решения каждой задачи прочности с инженерной точностью и простотой, соответствующей мере сложности граничных условий задач;

идея существования функционально допустимого и технологически осуществимого рационального управления прочностью и другими основными рабочими характеристиками каждой конструкции.

Научная новизна настоящей докторской диссертации состоит в следующем:

созданы и развиты иерархические математическая, метрологическая, оптико-механическая и прочностная системы принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов как теоретический фундамент для создания теорий (с открытием и обоснованием систем принципиально новых явлений и законов) и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний и процессов, жёсткости, прочности и оптических свойств именно существенно трёхмерных типовых несущих и светопрозрачных пластичных и хрупких элементов и систем различных конфигураций в технике высоких давлений, в том числе с концентраторами напряжений, трением и взаимными сцеплением и проскальзыванием;

созданы основы теории количественных множеств с непременно точно учитываемыми произвольными (не только безразмерными числовыми) количествами наличных элементов, что необходимо для всеобщих законов сохранения, для математического моделирования произвольных совокупностей и для теории и общих методов последовательного



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 17/556

выравнивания частных погрешностей отношений общей математической задачи между собой, с обобщением и развитием классической теории множеств Кантора, лежащей в основе современной математики;

создана теория общих математических задач как количественных множеств функциональных отношений (например функциональных уравнений или неравенств) между известными операторами над искомыми функциями известных аргументов;

созданы теории полных линейности оператора (для бесконечной линейной комбинации) и линейных независимости и зависимости, при которых из аннулирования даже бесконечной линейной комбинации непременно следует или не обязательно следовать соответственно аннулирование всех её коэффициентов;

создана теория собственной совокупности видов (классов) функций, в частности собственного вида (класса) функций, для множества операторов с глубокими и полезными обобщениями неподвижной точки отображения и собственной функции для оператора;

впервые поставлена и положительно решена проблема именно необходимости бигармоничности функции напряжений Лява;

создана полная линейно-комбинационная методология решения общих математических задач, в частности для общих решений общим (полу)степенным методом гармонического и бигармонического уравнений в (полу)степенных рядах как собственных классах функций для операторов этих уравнений, в том числе применительно к функциям напряжений, к общему (полу)степенному методу и к общему (полу)степенному аналитическому методу макроэлементов как к (полу)степенной модификации аналитической методологии макроэлементов для именно существенно трёхмерных тел, и открыто явление ограничения не только снизу, но и сверху степени функции напряжений граничными условиями задачи;

создана целочастичная (парциальная) методология решения общих математических задач с возможным разбиением заданной системы функциональных отношений решаемой задачи на возможно более полную разрешающую подсистему простейших отношений и на остаточную оценочную подсистему сложнейших отношений, в том числе применительно к общему интегральному методу и к общему интегральному аналитическому методу макроэлементов как интегральной модификации аналитической методологии макроэлементов для именно существенно трёхмерных тел;

создана общая теория дополнительных альтернативных новых действий с открытием и обоснованием явлений неустойчивости знаков и несуществования степеней с отрицательными основаниями и с теориями точечной и окрестной равносильной устойчивости, минус-умножения и минус-деления, минус-остепенения (минус-возведения в степень) и минус-укоренения (минус-извлечения корня) с отделением отрицательных знаков и лишь итоговым учётом наличия отрицательности для повышения её действенности обобщением степенных, показательных и степенно-показательных функций на отрицательные основания минус-степенными, минус-показательными и минус-степенно-показательными функциями, что важно для начальных, центральных и смещённых моментов любых нецелых порядков, а также для обобщений общего (полу)степенного метода и критериев предельных состояний и необходимо ввиду открытия лауреатом Нобелевской премии П. Бриджменом явления повышения прочности при трёхмерном равноосном сжатии;

созданы общие теории неточных псевдорешений, их наилучших квазирешений, исправляющей и обобщающей относительную погрешность всеобщей погрешности как меры неточности, верно обобщающей нечёткую приближённость, с оценкой качества приближений и меры несовместности противоречивой задачи, и переопределённой в обработке данных, с общими методами дополнительной косвенной оценки и аналитического приближения к искомому квазирешению, обобщающему точное решение, невозможное в противоречивой задаче или могущее не существовать в избранном классе функций;

создана общая теория запаса с общей методологией всеобщего запаса (обобщением всеобщей погрешности впервые измеряющего надёжность точности для суперпсевдорешения задачи), мультипликативной и аддитивной методологиями общего запаса как функции

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 18/556

индивидуальных запасов множеств значений независимых переменных в гильбертовых пространствах, с непрерывными всеобщей логикой и иерархиями псевдоправильности, псевдоточности и псевдорешений и с открытием философского закона перехода анализа как первого общенаучного метода от качественного различения к количественному измерению различий;

созданы общие теории и методы измерения физических величин, оценки и исправления погрешностей усреднения при измерениях существенно неоднородных пространственных и/или временных статических и динамических распределений, в частности: теория самопогрешности с открытием явления существования и неперемного наличия естественной (не устранимой никаким совершенствованием средств измерения) самопогрешности (собственной погрешности) любой физической величины и любого реального объекта с невязкой сопряжения реального объекта и его идеальной расчётной схемы по общей теории невязок сопряжения; теория погрешностей усреднения при измерениях существенно неоднородных распределений; теория обращения линейного интегрального оператора усреднения с решением проблемы существования в случае дифференцируемости образа, проблемы единственности обращения с точностью до функций, для которых база измерительного прибора является периодом с нулевым средним интегральным их значением на периоде, и проблемы точного или приближённого построения такого обращения; теория и методы определения коэффициентов мультипликации, восстанавливающих наибольшее значение измеряемой неоднородно распределённой величины по измеренным её значениям, которые искажены удалением, запаздыванием и усреднением ввиду неотъемлемых свойств измерительного элемента, например его инертности и конечных размеров; теория и методы определения коэффициентов мультипликации при электротензометрии, в том числе мест концентрации напряжений в двумерных расчётных схемах и в трёхмерных реальных объектах различных конфигураций; созданы общие теории и методы наилучших аналитических приближений к дискретным экспериментальным данным с их разбросом при опоре именно на лучшие из них и при взвешенном учёте непременно всех данных без исключения выбросов, в том числе применительно к совершенствованию методов экспериментальных исследований напряжённо-деформированных состояний и прочности конструкций при высоких давлениях, в частности: общая теория анализа приемлемости методов обработки данных (доказаны крайняя узость областей пригодности абсолютной и относительной погрешностей и метода наименьших квадратов, их принципиальные изъяны и пороки вплоть до неинвариантности, нелогичности, двусмысленности, субъективизма исключения выбросов, опоры на худшие сохраняемые данные ввиду ничтожности вклада наилучших данных в сумму квадратов отклонений, минимизируемую этим методом, и даже извращений действительности); теория и общие методы наименьших нормально взвешенных степеней с опорой на всеобщую погрешность, тогда как обладающий дюжиной взаимосвязанных принципиальных пороков в сущности и применимости метод наименьших квадратов опирается на явно недостаточную абсолютную погрешность; теория и общие методы последовательного выравнивания частных погрешностей отношений общей математической задачи между собой; теория и общие методы уравнивания самих отношений общей математической задачи между собой; теория и общие методы целесообразного взвешивания данных для опоры непременно на лучшие из них при учёте всех данных без исключения выбросов и при возможности именно правильного использования формул аналитически простейшего классического метода наименьших квадратов с его произвольным выбрасыванием наихудших данных и его действительной опорой на самые худшие из сохраняемых данных ввиду ничтожности вклада наилучших данных в сумму квадратов отклонений, минимизируемую этим методом; теория и общие методы простейших аналитических приближений именно полной кривой усталости Вёлера;

создана теория открытых закономерных инвариантных самопредельных самоопасных безразмерных всеобщих напряжений с синхронным скалярным приведением размерного

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 19/556

главного напряжения делением его функции на модуль функции одноосных пределов в том же направлении, в частности делением на модуль одноосного предела тех же направления и знака, в той же точке того же тела при прочих равных условиях нагружения;

создана теория открытых иерархичности типов схем осесимметричного (без объёмных сил и кручения) нагружения трёхмерного сплошного или кольцевого цилиндрического тела и существования и общего метода конструктивного определения основного типа схем (с одним свободным торцом), алгебраические суммы схем которого исчерпывают общий тип, тогда как в технике высоких давлений общим является тип схем с равномерным давлением на боковую поверхность и ступенчатыми давлениями на торцы (основания), а основным является тип схем с равномерными давлениями на боковую поверхность, на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания;

создан общий (полу)степенной аналитический метод макроэлементов как (полу)степенная модификация аналитической методологии макроэлементов для впервые решаемых нетривиальных задач механики, прочности и оптики именно существенно трёхмерных тел;

создан общий интегральный аналитический метод макроэлементов как интегральная модификация аналитической методологии макроэлементов для впервые решаемых нетривиальных задач механики, прочности и оптики именно существенно трёхмерных тел;

созданы теории и аналитические методы среднеквадратичной, обеспечивающей минимум модуля и коллокационной минимизации и устранения минимизированных невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения;

созданы теории, методологии и аналитические методы решения задач о напряжённо-деформированном состоянии линейно упругого именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, осесимметрично изгибаемого равномерным давлением на одно основание с возможным равномерным давлением на боковую поверхность и удерживаемого в равновесии или жёстким защемлением боковой поверхности, или свободным опиранием по краю или по окружности меньшего радиуса, или равномерным противодействием на кольцевую периферическую часть другого основания;

созданы теории принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных процессов составного цилиндра конечной длины при его тепловой сборке и запрессовке;

созданы теории комплексной оптимизации совокупностей механических, прочностных и оптических свойств несущих и светопрозрачных существенно трёхмерных элементов и систем различных конфигураций, в том числе с концентраторами напряжений, трением и взаимными сцеплением и проскальзыванием, метод и алгоритм комплексной оптимизации именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений;

создана общая теория прочности материалов с открытием первых в истории всеобщих прочностных законов природы во всеобщих напряжениях, в том числе путём исправляющего и обобщающего приведения к ним известных частных критериев предельных состояний и прочности, в частности: теория прочности постоянно нагруженных изотропных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, и общие методы приведения напряжений к скалярным всеобщим напряжениям для таких материалов; теория прочности постоянно нагруженных изотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, и общие методы приведения напряжений к скалярным всеобщим напряжениям для таких материалов; теория прочности постоянно нагруженных произвольно анизотропных материалов, одинаково или различно сопротивляющихся растяжениям и сжатиям, и общие методы приведения напряжений к скалярным всеобщим напряжениям для таких материалов; теория прочности переменного (с возможными вращениями главных направлений напряжённого состояния в точке во времени) нагруженных произвольно анизотропных материалов, одинаково или различно сопротивляющихся растяжениям и сжатиям (наиболее общий случай, для которого ранее не было даже предложений по формулировкам возможных критериев предельных состояний и который и ведёт именно ко всеобщим критериям

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 20/556

пределных состояний как всеобщим прочностным законам природы), и общие методы постоянного векторного приведения к постоянному векторному всеобщему напряжению (с ординатой как амплитудой равноопасного циклического напряжения с таким же или наименее уклоняющимся средним напряжением цикла как абсциссой) напряжённого процесса (переменной программы) одноосного главного напряжения за время нагружения при постоянной нумерации главных напряжений независимо от алгебраической упорядоченности их величин для таких материалов; методология (теория и общие методы) исправления общего и частных критериев предельных состояний, в частности для учёта экспериментально установленного упрочняющего влияния трёхмерного равноосного сжатия, для учёта именно действительных, подлинных соотношений пределов прочности материала при различных видах напряжённого состояния и для именно правильного учёта алгебраически наибольших напряжений и деформаций; методология (теория и общие методы) универсализации экспериментальных данных о прочности материалов; методология (теория и общие методы) универсализации известных частных критериев предельных состояний; методология (теория и общие методы) открытия принципиально новых всеобщих прочностных законов природы и их иерархий;

открыта и обоснована система принципиально новых явлений и законов запасов и создана общая теория прочности объектов с дальнейшими обобщениями всеобщих прочностных законов природы с предельных состояний также на непределные состояния с запасом прочности при сложном нагружении как функцией частных запасов независимых нагрузок с учётом наиболее опасного их сочетания, в частности: теория равносильной множественности любого критерия предельных состояний с доказательством произвольности мультипликативного запаса любого непредельного состояния; теория выбора (по принципу допустимой простоты из множества эквивалентов) единственного простейшего критерия предельных состояний с единственностью мультипликативного запаса любого непредельного состояния; теория мультипликативного запаса любого непредельного состояния; теория аддитивного запаса любого непредельного состояния; теория частных запасов, в том числе выражаемых через некий единый для них запас, с учётом наиболее опасного сочетания взаимно независимых нагрузок, необходимым при сложном нагружении; теория выбора всеобщего критерия предельных состояний как всеобщего прочностного закона природы, наиболее подходящего для решаемой задачи прочности объекта; теории прочности существенно трёхмерных тел различных конфигураций, в том числе с концентраторами напряжений, трением и взаимными сцеплением и проскальзыванием;

показано, что для существования точного решения упругой задачи необходима и достаточна согласованность её граничных условий, установлена предельная роль линейного обобщения задачи Ламе и предложено дальнейшее обобщение её решения в приближённой форме;

создан метод неопределённых граничных условий в напряжениях для смешанных упругих задач в пространственной постановке;

показано, что в задаче об опёртом по краю пространственном цилиндрическом теле под равномерным давлением на одно основание радиальное и окружное напряжения достаточно точно определяются теорией пластин в отличие от теории плит, а равномерное сжатие торцов усечённого конического тела сопровождается его осесимметричным изгибом;

открыты и обоснованы системы принципиально новых явлений и законов деформирования, оптики, прочности и разрушения именно трёхмерных тел и получены существенно новые представления о напряжённо-деформированных состояниях линейно упругих трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений;

обобщены и значительно уточнены созданными общими методами результаты расчёта именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений, по сравнению с результатами расчёта на основе известных методов теории пластин и теории плит;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 21/556

обоснована достоверность созданных общих теорий, методологий и методов исследований напряжённо-деформированных состояний, жёсткости и оптики, прочности и разрушения трёхмерных цилиндрических тел аналитическим и численным сопоставлением с известными аналитическими методами и сравнением результатов использования созданных и классических и других известных аналитических, численных и экспериментальных методов; применительно к тепловой сборке составного цилиндра конечной длины открыто и обосновано явление существования её критического значения, превышение которого приводит к появлению срединного участка взаимного осевого сцепления слоёв с равномерностью контактного давления и модулей осевых напряжений между симметричными торцевыми участками взаимного осевого проскальзывания слоёв с экспоненциальным ростом контактного давления и модулей осевых напряжений к срединной плоскости;

применительно к запрессовке составного цилиндра открыты и обоснованы явление конечности усилия запрессовки при неограниченном увеличении конечной длины цилиндра и явления общей асимметрии и частной симметрии участков взаимного осевого проскальзывания, разделённых срединным участком взаимного осевого сцепления слоёв, составляющим половину длины цилиндра при равенстве коэффициентов поперечной деформации Пуассона материалов слоёв, с экспоненциальными изменениями контактного давления и осевых напряжений на всех этих участках;

обобщены установленные А. В. Гадолиным условия наилучшей сборки составного цилиндра при плоском напряжённом состоянии и статическом нагружении на трёхмерный случай конечной длины при циклическом нагружении внутренним давлением;

открыты явления и созданы методы иерархизации систем неопределённостей участков сцепления и проскальзывания и критических значений в осесимметричной термоупругой контактной задаче с трением для упругих уплотнений с заниженными разгрузочными поясками;

созданы общие методы (не)малых отверстий и сосредоточенного сопряжённого усреднения с теорией циклической прочности при концентрации напряжений циклически симметричной системой отверстий применительно к ограничителю грибкового клапана и открыто явление выравнивания равносильных (эквивалентных) напряжений на всех поверхностях всех отверстий при наличии центрального отверстия наилучшего радиуса;

предложены и обоснованы новые рациональные конструкции сосудов высокого давления, иллюминаторов, съёмочного устройства, уплотнений и гермовводов, а также способ испытания, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.

Обоснованность настоящей докторской диссертации обеспечивается опорой её общих теорий, методологий, методов и их результатов на общепринятые принципы, допущения, теории, методологии и методы математики, метрологии, механики деформируемого твёрдого тела (с теориями упругости и пластичности, оболочек, пластин и плит), прочности (с теориями и критериями статической и циклической прочности) и теории оптических систем, а также сопоставлениями полученных многовариантных основных формул и других результатов между собой и с классическими и другими известными формулами, численными и экспериментальными данными.

Создание в настоящей докторской диссертации принципиально новых общих теорий, методологий и методов основывается на общепринятых общенаучных эмпирических и теоретических методах, а также на следующих всеобщих методах познания.

Логика с её законами и принципами используется повсеместно, в том числе закон тождества, закон противоречия, закон исключённого третьего и принцип достаточного основания. Примерами применения закона противоречия и закона исключённого третьего являются доказательства ограниченности сверху степени бигармонической функции напряжений Лява методом от противоречащего. При создании и развитии общей теории запаса с дальнейшим качественным и даже количественным обобщением именно в этом порядке нарастания меры и степени, важности и сложности обобщения общей теории предельных состояний и общей

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 22/556

теории прочности с предельных состояний также на любые неопредельные (допредельные и запредельные) состояния достигнут принципиально значимый переход от общепринятой дискретной именно конечной логики к бесконечной и даже непрерывной, то есть континуальной, логике с также непрерывными иерархиями псевдоправильности, псевдоточности и псевдорешений. Открыт философский закон перехода анализа как первого общенаучного метода от качественного различия к количественному измерению различий. Анализ как первый общенаучный метод используется как двухстадийное (качественное различие и далее обобщающее и уточняющее эту качественность ещё и количественное измерение соответствующих различий) разделение различных состояний (допредельных, предельных и запредельных) по любому методу определения как выражения равносильного (эквивалентного) напряжения в точке материала нагруженного деформируемого твёрдого тела при сложном напряжённом состоянии через главные напряжения в этой точке.

Диалектика и её законы иллюстрируются новыми примерами их выражений.

Закон единства и борьбы противоположностей проявляется в алгебраическом суммировании слагаемых противоположных знаков, в частности в общей теории запасов при сложном нагружении и в продольной расфокусировке изображений подводных объектов с противоположными знаками вкладов в неё искривлений первоначально плоскопараллельных оптических поверхностей светопрозрачного элемента при его деформировании высоким давлением.

Более того, многовариантность однопараметрического и двухпараметрического методов устранения минимизированной невязки осевого перемещения и методов минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной приводит к обобщению закона единства и борьбы противоположностей законом единства и взаимной дополнителности различных предметов, которые только в частном случае могут составлять именно пару противоположностей и вовсе не обязаны бороться между собой, а могут полезно и даже гармонично дополнять друг друга, в данном случае обеспечивать самопроверяемость и взаимную проверяемость итогов и тем самым повышать их точность и надёжность.

Закон перехода количественных изменений в качественные изменения проявляется в доказательстве наличия критических значений и их иерархий, в частности для перемещений точки наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения с соответствующим изменением характера разрушения по общему (полу)степенному методу и по общему интегральному методу в задачах механики и прочности существенно трёхмерных тел и для появлений и исчезновений участков взаимных сцепления и проскальзывания в контактных задачах с трением. Критично предельное напряжение между допустимыми и разрушающими.

Закон отрицания отрицания, то есть двойного отрицания, обобщается общим законом кратного отрицания и проявляется в возможной противоположности скачков точки наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения с её возвратом в её прежнее положение на новом уровне напряжений (здесь и закон единства и борьбы противоположностей), а также в выходе исследования напряжённо-деформированного состояния за пределы механики в оптику с возвращением, расширением предмета и углублением исследования изгиба посредством ещё и кривизн в центрах оснований светопрозрачного элемента как местных характеристик изгиба в дополнение к стрелам прогиба этих оснований и их центральных частей как общим характеристикам изгиба.

Анализ и синтез (теории и опыта (практики) теоретизирования и испытания (экспериментирования); наличного, потребностей, личных и общественных интересов, условий, возможностей, способностей, желаний, целей и задач; предметов, ресурсов, средств, методов и мерил (критериев); количественности и качественности; систематизации и иерархизации предметности и общности, углубления и возвышения; существенности, новизны, открытий и изобретений), обобщение и конкретизация, а также абстрагирование (отвлечение от несущественного и извлечение существенного) применяются во многих местах, в частности в приближениях по основополагающему принципу допустимой

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 23/556

простоты, в том числе при создании общего (полу)степенного метода и общего интегрального метода.

Сравнение, различие, выделение, сопоставление и уподобление применяются во многих местах, в частности формульно, таблично, графически и параллельностью расчётов при многовариантности методов, в том числе для доказательства достигнутого обобщения и чрезвычайно существенного уточнения соответствующих результатов теории пластин и теории плит.

Дедукция (выведение) применяется во многих местах.

Научная индукция (наведение), по существу индуктивно-дедуктивный метод, используется для выяснения именно и только составляющих примерно три-четыре кратностей превышений стрел прогиба центральной части и всего полностью нагруженного основания и его кривизны в центре стрелами прогиба центральной части и всего частично нагруженного основания и его кривизной в центре соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, тогда как сами превышения доказаны дедуктивно.

Из эмпирических научных методов экспериментальные методы используются для тензометрии сосудов высокого давления, упругих уплотнений и ограничителей грибковых клапанов, для исследования прочности органического стекла и трещинообразования в неорганическом стекле, для прямого измерения прогибов и давлений разрушения светопрозрачных элементов иллюминаторов, для прямого измерения пределов упругого сопротивления цельнолитых корпусов прямооточных клапанов, для прямого измерения давления разрушения паяного сотового уплотнения.

К эмпирико-теоретическим научным методам следует отнести методы обработки данных.

Обычно используются абсолютная и относительная погрешности и общепринятый считающийся практически незаменимым метод наименьших квадратов.

Доказано, что все они обладают целым рядом принципиальных недостатков вплоть до неопределённости, неинвариантности, нелогичности, двусмысленности, субъективизма исключения выбросов, опоры на самые худшие сохраняемые данные и даже извращений действительности.

Введены безупречные всеобщая погрешность и система общих методов обработки данных, в том числе с взвешиванием по чисто формально используемому нормальному распределению безотносительно осуществления нормальности.

Это позволяет полностью отказаться от субъективного изъятия выбросов, учитывать все данные без исключения, опираться непременно на самые лучшие данные и к тому же именно правильно использовать простейшие и удобнейшие формулы метода наименьших квадратов созданным итерационным методом наименьших нормально взвешенных квадратов.

Из теоретических научных методов применяются следующие.

Принципиальность заключается в неуклонном следовании общепринятым принципам объективности, систематичности, воспроизводимости и проверяемости, а также выдвинутому основополагающему принципу допустимой простоты ещё и как методу допустимого упрощения, в том числе в основе целочастичной (парциальной) методологии решения общих систем функциональных уравнений и общего интегрального метода.

Приближение как метод применяется при доказанной невозможности точного решения и осуществляется простейшим допустимым образом, дающим настолько простые и проверяемые формулы и вычисления по ним, что при такой именно содержательной формализации достигаются неременная опора на интуицию и её творческое развитие.

Метод мысленного эксперимента осуществляется формульными и вычислительными испытаниями по аналитическим и численным методам.

Аналитические методы используются при создании общих теорий, методологий и методов и при решениях задач математики, метрологии, механики и прочности, включающих: приведение критериев предельных состояний ко всеобщим прочностным законам природы во

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 24/556

всеобщих напряжениях; определение подлинного запаса прочности при наложении (суперпозиции) взаимно независимых нагрузок по наихудшему их сочетанию; создание общих методов решения задач прочности конструкций для типовых схем их нагружения; решение задач прочности для трёхмерных тел; разработку концепций деформирования, прочности и разрушения элементов конструкций; открытие и обоснование принципиально новых явлений и законов деформирования, оптики, прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания, в частности при определении мест наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения, вероятного направления образующей первой трещины в начальный момент её развития, переходного (для опаснейшей точки) и наилучшего значений относительного давления на боковую поверхность такого тела, величины разрушающего давления; комплексную оптимизацию основных рабочих характеристик элементов конструкций и обоснование рациональных их образцов; совершенствование методов экспериментальных исследований напряжённо-деформированных состояний и прочности конструкций при высоких давлениях; определение погрешностей сопоставления расчётных и экспериментальных данных.

Численные методы применяются при анализе напряжённо-деформированных состояний сосудов высокого давления и именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических светопрозрачных элементов иллюминаторов, а также при определении основных оптических искажений, обусловливаемых деформированием таких элементов при высоких давлениях.

В качестве средств выполнения исследований выбраны:

для теоретических исследований – вычислительная техника (микрокалькуляторы и компьютеры с программным обеспечением);

для экспериментальных исследований – стендовое оборудование, включающее средства создания высокого давления (насосы и компрессоры), испытательные и тарировочные камеры с гермовводами, соединительную и регулируемую арматуру, контрольно-измерительную аппаратуру (манометры, индикаторы, тензорезисторы, тензостанции), пульты дистанционного управления, а также исследуемые объекты, инструменты, съёмочная аппаратура и защитные сооружения (боксы).

Достоверность полученных экспериментальных данных обеспечивается применением современного оборудования и измерительной техники, анализом точности измерений, достижением непротиворечивости и взаимной согласованности результатов вследствие приемлемой математической обработки, а также сопоставлением полученных экспериментальных данных с другими данными.

Практическая ценность настоящей докторской диссертации:

Создан теоретический фундамент для разработки инженерных методов расчёта напряжённо-деформированных состояний и прочности именно существенно трёхмерных тел применительно к типовым несущим и светопрозрачным элементам конструкций при высоком давлении как теорий рационального их проектирования.

Для экспериментальных исследований полезны совершенствование их средств и приложение созданных общих теорий, методологий и методов обработки данных, в том числе общий метод исправления погрешностей усреднения при измерениях неоднородных статических и динамических распределений применительно к математической обработке результатов электротензометрии в местах концентрации напряжений.

Все расчётные формулы доведены до уровня практического использования, максимально просты и в принципе не требуют непременно использования компьютеров.

Предложены и обоснованы пути существенного повышения прочностных и оптических характеристик элементов и систем техники для высокого давления, разработаны рекомендации по их проектированию и изобретён целый ряд их конструкций.

Внедрение настоящей докторской диссертации:



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 25/556

Результаты исследований иллюминаторов внедрены в Научно-исследовательском и проектном институте геофизических методов разведки океана ПО «Южморгеология» и в Ленинградском институте точной механики и оптики и позволили усовершенствовать проектирование и расчёт оптических систем для высоких давлений, повысить качество изображения подводных объектов, увеличить достоверность получаемой информации и сократить время на проведение работ по дешифрированию экспонированного фотоматериала. Сосуды высокого давления, плунжеры и другие конструкции, проектные и поверочные расчёты прочности которых автор выполнил в ходе и с использованием результатов обобщения аналитических методов решения задач прочности именно существенно трёхмерных тел для типовых элементов конструкций в технике высоких давлений, внедрены в Институте проблем прочности АН Украины, в НИИ компрессорного машиностроения, в НИИ атомного и энергетического насосостроения и во многих других организациях со значительным экономическим эффектом (данные отнесены в приложение).

Предмет защиты настоящей докторской диссертации:

1. Созданная математическая система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, среди них общие теории количественных множеств; именно дополнительных альтернативных новых действий (в том числе альтернативного возведения в степень (минус-остепенения) с обобщением степенных, показательных и степенно-показательных функций на отрицательные основания, в частности для начальных, центральных и смещённых моментов любых нецелых порядков и для обобщений общего (полу)степенного метода и критериев предельных состояний и прочности); общих математических задач; даже бесконечных полных линейности операторов, линейной независимости и линейной зависимости; собственных совокупностей классов функций для множеств операторов с общими решениями гармонического и бигармонического уравнений в являющихся собственными классами функций степенных рядах; полная линейно-комбинационная и целочастичная (парциальная) методологии и общие (полу)степенной и интегральный методы решения общих систем функциональных уравнений.

2. Созданная метрологическая система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, среди них общие теории, методологии и методы измерения физических величин; общие теории, методологии и методы оценки и исправления погрешностей усреднения при измерениях существенно неоднородных пространственных и/или временных статических и динамических распределений; общие теории, методологии и методы (супер)псевдорешений и всеобщих погрешности и запаса (с непрерывными всеобщей логикой и иерархиями псевдоправильности, псевдоточности и псевдорешений) и их оптимизации; общие теории, методологии и методы наилучших аналитических приближений к дискретным экспериментальным данным с их разбросом при опоре именно на лучшие из них и при нормально взвешенном учёте непременно всех данных безотносительно нормальности их распределения и без исключения выбросов, в том числе применительно к развитию методов экспериментальных исследований напряжённо-деформированных состояний и прочности именно существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов техники высоких давлений.

3. Созданная оптико-механическая система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, среди них общие теории всеобщих напряжений; иерархичности типов схем нагружения; минимизации и устранения невязок сопряжения; осесимметричного изгиба равномерными давлениями и его влияния на оптические свойства именно существенно трёхмерных цилиндрических тел; принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных процессов составного цилиндра конечной длины при тепловой сборке и запрессовке; комплексной оптимизации совокупностей механических, прочностных и оптических свойств именно существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов и систем различных конфигураций, в том числе с концентраторами напряжений, трением и взаимными сцеплением и проскальзыванием;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 26/556

общие (полу)степенной и интегральный методы как модификации аналитической методологии макроэлементов.

4. Созданная прочностная система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, среди них общая теория прочности материалов с открытием первых в истории всеобщих прочностных законов природы во всеобщих напряжениях, в том числе путём исправляющего и обобщающего приведения к ним известных частных критериев предельных состояний и прочности, и общая теория прочности объектов с открытием и обоснованием системы явлений и законов запасов и дальнейшими обобщениями всеобщих прочностных законов природы с предельных состояний также на неопредельные состояния с запасом прочности при сложном нагружении как функцией индивидуальных запасов взаимно независимых нагрузок с учётом их наиболее опасного сочетания.

5. Система разработанных (приложением созданных математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем общих теорий, методологий и методов) принципиально новых общих аналитических методов расчёта напряжённо-деформированных состояний и процессов, прочности и оптических свойств именно существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов конструкций в технике высоких давлений с установлением приемлемости этих методов путём аналитических и численных сопоставлений полученных формул и результатов с известными аналитическими решениями, численными и приемлемо обработанными экспериментальными данными.

6. Система впервые решённых нетривиальных задач механики, прочности, герметичности и оптики для именно существенно трёхмерных тел различных конфигураций из пластичных и хрупких конструкционных материалов с открытием систем принципиально новых явлений и законов механики, оптики, запаса и разрушения, в частности применительно к типовым расчётным схемам и реальным объектам техники высоких давлений, в том числе с концентраторами напряжений, трением и взаимными сцеплением и проскальзыванием.

7. Созданные теории рациональных комплексных проектирования существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов и управления их напряжённо-деформированными состояниями и процессами, прочностью и оптическими свойствами и новые эффективные конструкции для техники высоких давлений, в том числе защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.

#### Апробация настоящей докторской диссертации

Основные результаты исследований, обобщённых настоящей докторской диссертацией, докладывались и обсуждались на 30 Всесоюзных, межрегиональных и Международной научно-технических конференциях, в том числе на Всесоюзном научно-техническом семинаре «Оптимизация конструкции и моделирование процессов высокого давления» (Сумы, 1978), Всесоюзной научно-технической конференции «Методы и средства тензометрии и её применение в народном хозяйстве» (Кишинёв, 1979), Семинаре-совещании «Проблемы оптимизации в машиностроении» (Харьков, 1982), Четвёртой Всесоюзной конференции по оптимальному управлению в механических системах (Москва, 1982), Третьем Всесоюзном симпозиуме по импульсным давлениям (Москва, 1983), Четвёртой Всесоюзной конференции «Проблемы научных исследований в области изучения и освоения Мирового океана» (Владивосток, 1983), Всесоюзной конференции «Теоретическая и прикладная оптика» (Ленинград, 1984), Пятой Всесоюзной конференции «Технические средства изучения и освоения океана» (Ленинград, 1985), Двенадцатой Всесоюзной научно-технической конференции «Конструкция и технология получения изделий из неметаллических материалов» (Москва, 1990), Всесоюзной научно-технической конференции «Композиционные материалы в конструкциях глубоководных технических средств» (Николаев, 1991), Всесоюзном семинаре «Проблемы прочности стекла и стеклокристаллических материалов» (Константиновка, 1991), Международной научно-технической конференции «Технология и качество стекла» (Константиновка, 1993).

Полностью докладывалась и обсуждалась данная докторская диссертация на научном семинаре кафедры «Динамика и прочность машин» Харьковского политехнического

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 27/556

института (1992, октябрь), Научно-техническом проблемном совете по статической прочности Института проблем машиностроения АН Украины (1992, октябрь), тематическом семинаре № 2 «Статическая прочность» Института проблем прочности АН Украины (1992, октябрь), научном семинаре Института проблем прочности АН Украины (1993, февраль), заседании Одесского Дома учёных (1993, апрель), научном семинаре кафедры деталей машин и теории механизмов и машин Одесского института инженеров морского флота (1993, апрель), научном семинаре кафедры математической физики Киевского государственного университета (1993, июнь), кафедре сопротивления материалов и динамики и прочности машин Киевского политехнического института (1993, июнь), научном семинаре отдела термопластичности Института механики АН Украины (1993, июнь), научном семинаре Института проблем прочности АН Украины (1993, июнь).

Основное содержание настоящей докторской диссертации опубликовано в трёх научных монографиях (одна из которых на английском языке) и в 72 научных статьях (семь из которых на английском языке) и тезисах докладов [5, 94–107, 142, 144, 180, 216, 226, 229, 257, 354 и др.]. Кроме того, её разработки защищены 30 авторскими свидетельствами на изобретения [41–44, 47, 48, 50–60, 62 и др.].

Настоящая докторская диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка использованных научных трудов со ссылками в тексте и приложений с системой дальнейших математических, метрологических, механических и прочностных обобщений, справками о практическом использовании и актами внедрения основных результатов настоящей докторской диссертации.

Во введении дан анализ состояния проблемы по теме диссертации, обоснована её актуальность, указаны основные положения, вынесенные на защиту, отмечены научная новизна и практическая значимость результатов работы, поставлены цель и задачи, выбраны методы и средства исследований.

В первой главе выполнен аналитический обзор известных методов проектирования и решения задач прочности типовых несущих и светопрозрачных элементов конструкций в технике высоких давлений как преимущественно трёхмерных тел вращения.

Во второй главе создана система общих теорий, методологий и методов аналитического решения общих систем функциональных уравнений как общих задач математики, метрологии, механики и прочности.

В третьей главе созданная система общих теорий, методологий и методов применена для создания теорий деформирования, жёсткости, оптики, прочности и разрушения сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений, с теорией комплексной оптимизации иллюминаторов.

В четвёртой главе созданная система общих теорий, методологий и методов приложена к выдвиганию принципов и созданию методов рационального управления прочностью светопрозрачных и несущих элементов и их соединений средствами уплотнительной техники при высоких давлениях.

В пятой главе созданная система общих теорий, методологий и методов приложена к созданию и развитию общей теории измерения физических величин и общей теории принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных состояний и процессов, прочности и технологичности элементов и систем техники высоких давлений с учётом трения, взаимных сцепления и проскальзывания и концентрации напряжений.

В шестой главе созданная система общих теорий, методологий и методов приложена к созданию теорий деформирования и прочности усложнённых элементов и соединений техники высоких давлений.

В приложении отнесены данные о практическом использовании результатов настоящей докторской диссертации, а также система дальнейших математических, метрологических, механических и прочностных обобщений.

Автор выражает глубочайшую признательность за доброту и взыскательность, всестороннюю помощь и поддержку научному консультанту академику Георгию

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 28/556

Степановичу Писаренко. Автор искренне благодарен академику Анатолию Алексеевичу Лебедеву и академику Валерию Трофимовичу Трощенко за интерес к работе, помощь и поддержку. Автор очень признателен всем учёным, без трудов которых данная работа немислима и которые проявили к ней внимание и интерес.

## 1. ИЗВЕСТНЫЕ МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ В ТЕХНИКЕ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ

### 1.1. Несущие, светопрозрачные и уплотнительные элементы конструкций

Техника высоких давлений позволяет осуществлять и/или интенсифицировать (часто совместно с высокими температурами) многие энергетические, химические и нефтехимические производства (аммиака, карбамида, метанола, нефтепродуктов, полиэтилена, синтетических жирных спиртов и др.), получать искусственные аналоги природных веществ (алмаза, кварца и др.) либо вещества с новыми свойствами, осуществлять специальные технологические процессы, компактно хранить рабочие среды, удерживать ещё более высокие давления в сосудах с переменной внешней поддержкой и т. д. [14, 148, 170, 259, 286, 303]. Высокие давления в этих случаях создаются искусственно.

Аналогичные способы и средства локализации давлений с высоким перепадом используются и в условиях естественных высоких давлений, например в глубинах Мирового океана, и для их имитации [346, 361, 364], а также для контроля и исследований, связанных с высокими давлениями.

Наиболее типичны для этой области техники сосуды высокого давления разнообразных конструкций [9, 10, 12, 14–18, 20, 21, 24, 26, 28, 29, 31, 32, 35, 36, 40, 45, 74, 88, 114, 150, 167, 206, 365–369, 374–380, 384–392, 397, 399], отчасти показанных на рис. 1.1.

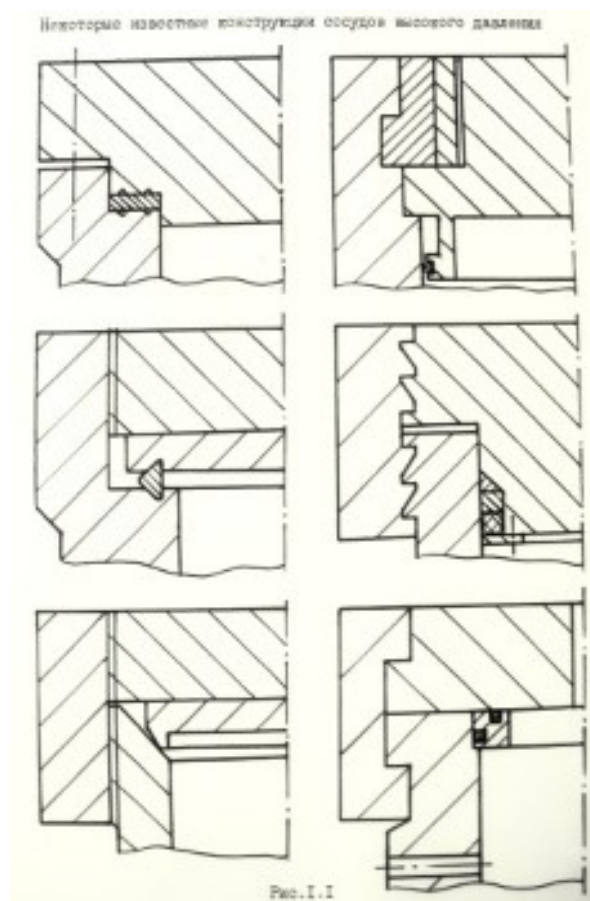


Рисунок 1.1. Некоторые известные конструкции сосудов высокого давления.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 29/556

Функционально необходимы для обеспечения прочности и герметичности такого сосуда его несущие и уплотнительные элементы. Основным (и несущим) элементом такого сосуда является его корпус преимущественно в виде толстостенного цилиндра с возможными вариациями формы. Различия в конструкциях и технологиях изготовления корпусов являются основой общепринятой классификации сосудов высокого давления [205, 217, 303, 340] на цельные (монолитные) простые или самоскреплённые (автоскреплённые, автофретированные) [66, 271] и составные, в том числе многослойные с радиальными натягами между соосными (коаксиальными) слоями [26, 87, 135, 374, 388, 390] как частный случай прессовых соединений [67, 121, 315], возможными технологиями осуществления которых являются тепловая сборка, запрессовка и гипропрессовый способ, предусматривающий создание масляной прослойки под высоким давлением на поверхности сопряжения [63]. Другими разновидностями составных сосудов являются усложнённые – рулонированные [197, 303], спирально-рулонные [303], сегментированные [391], с переменной внешней поддержкой [20], витые [16, 303] и др.

Помимо корпуса, сосуд высокого давления включает и другие несущие элементы: заглушки (крышки и днища) плоские, сферические, эллиптические и др., а также крепёжные элементы (шпильки, гайки, резьбовые втулки, муфты, закладные сухари, байонеты и другие стягивающие или ограничительные элементы). Уплотнительные элементы в технике высоких давлений принято подразделять на упругие (преимущественно стальные в форме прокладки, двухконусного obtюратора с возможными прокладками, линзового или дельта-obtюратора, волнообразного или П-образного кольца и др.) и пластичные (резиновые, фторопластовые, медные, алюминиевые и др.) [167, 198, 253, 256, 328]. К упругим уплотнениям относятся беспрокладочные с острой кромкой заглушки или корпуса [231, 256].

Эффективны составные уплотнения (радиальные, осевые и радиально-осевые), включающие упругий несущий элемент с пластичными элементами в его пазах [390].

Заглушка, смежная с ней часть корпуса, а также соответствующие уплотнительные и крепёжные элементы образуют затвор сосуда.

Известна [303] классификация затворов: затворы с принудительным сохранением герметичности (путём предварительной осевой затяжки, вследствие податливости крепёжных элементов ослабевающей с повышением внутреннего давления, что само по себе ограничивает его величину и снижает прочность сосуда, например с острой кромкой или прокладкой) и затворы с самоуплотнением, в которых действие внутреннего давления на уплотнительный элемент приводит к радиальным и/или осевым составляющим действия уплотнительного элемента на корпус и заглушку, причём эффект самоуплотнения является частичным или полным.

Однако представляется рациональным всё же выделить затворы с полным эффектом самоуплотнения, вовсе не нуждающиеся в затяжке и работающие с гарантированным осевым зазором (люфтом), что исключает предварительные напряжения и уменьшает результирующие напряжения, а также резко снижает трудоёмкость сборки и разборки затвора и облегчает их механизацию (например с помощью гидроцилиндров) и автоматизацию.

Для гарантированного уплотнения изредка разбираемых затворов могут использоваться склеивание, пайка или сварка [303].

До сих пор речь шла преимущественно о сосудах с высоким избыточным внутренним давлением. Однако аналогичны конструкции и проблемы создания (с добавлением задачи устойчивости) и сосудов, предназначенных для восприятия высоких избыточных внешних давлений, – подводных аппаратов [130, 289], элементов плавучести [153, 216], устройств низкого давления для размещения в полостях других сосудов с высоким избыточным внутренним давлением и т. д.

При необходимости или целесообразности оптического воздействия (например освещения) на область высокого давления, а также для визуального контроля и исследований этой области сосуд высокого давления снабжается иллюминаторами со светопрозрачными

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 30/556

элементами [27], удовлетворяющими высоким требованиям не только к прочности и герметичности, но и к оптическим характеристикам [346, 348].

Это наряду со спецификой свойств известных светопрозрачных материалов, прежде всего неорганического и органического стекла, делает светопрозрачные элементы наиболее слабыми звеньями сосудов высокого давления и, следовательно, определяет их прочность.

Именно поэтому светопрозрачные элементы подлежат классификационному выделению из числа несущих элементов, к которым, несомненно, относятся.

Логично классифицировать иллюминаторы [6, 8, 19, 23, 33, 34, 37–39, 83, 93, 196, 370–373, 381–383, 393, 396] (рис. 1.2) согласно геометрическим формам их светопрозрачных элементов.

В частности, оптический иллюминатор для высоких давлений является неотъемлемой частью оптической системы, удовлетворяющей высоким требованиям к качеству изображения, и предназначен для защиты человека и/или фотокинотелевизионной аппаратуры от непосредственного воздействия морской окружающей среды.

Иллюминатор включает светопрозрачный элемент, оправу, уплотнения и крепёжные детали.

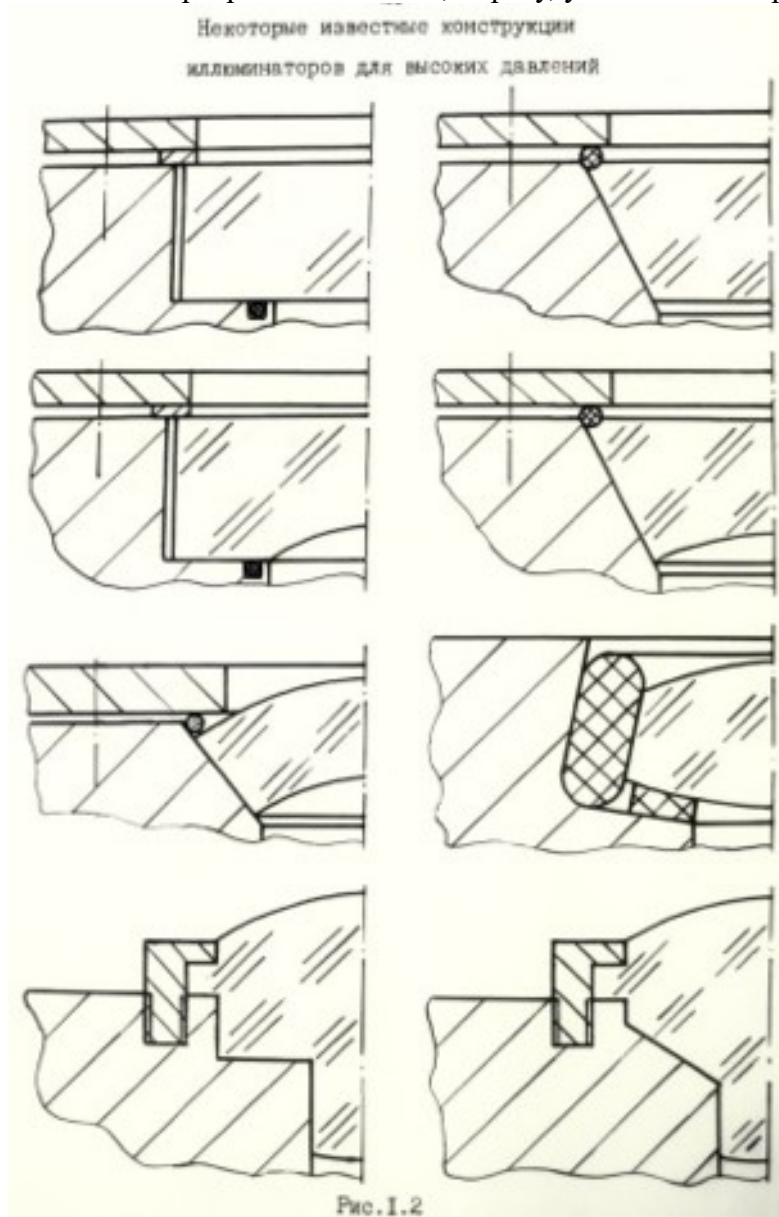


Рисунок 1.2. Некоторые известные конструкции иллюминаторов для высоких давлений со стеклоэлементами цилиндрическим, коническим, плосковогнутым, сферическим, двояковыпуклым.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 31/556

Оптические поверхности светопрозрачных элементов являются границами раздела имеющих разные показатели преломления среды под высоким давлением (например внешней морской водной среды), стекла и среды под низким давлением (обычно воздуха) со стороны (которую для единообразия будем называть стороной низкого давления, в случае подводных аппаратов – внутренней) человека и/или съёмочной аппаратуры.

Вследствие избыточного высокого давления (например внешней морской водной среды) светопрозрачный элемент деформируется, а характер его напряжённо-деформированного состояния зависит от конструктивных параметров иллюминатора и от величины действующего на него давления.

Такие светопрозрачные материалы, как неорганическое стекло, обладают рядом особенностей по сравнению с большинством конструкционных материалов, применяемых для корпусов плавучих и подводных объектов и в технике высоких давлений, например в химической промышленности [130, 169, 261, 289, 340].

Поэтому проектирование оптических иллюминаторов является одним из узловых научно-технических аспектов проблемы создания техники высоких давлений, недостаточно освещённых в специальной технической литературе [130, 289, 340].

Опыт создания иллюминаторов показывает, что их полная герметизация успешно достигается типичными методами уплотнительной техники [289, 340]. При этом непосредственное воздействие на светопрозрачный элемент эластичных уплотнительных колец, материал которых при достаточно высоких давлениях следует закону Паскаля, практически не искажает характера нагружения стеклоэлемента. Однако размещение этих колец оказывается важным с точки зрения распространения высоких гидростатических давлений на те или иные участки поверхности светопрозрачного элемента, что существенно влияет на его напряжённо-деформированное состояние. Поэтому важно отметить различные варианты размещения уплотнительных колец в иллюминаторе относительно светопрозрачного элемента – у его боковой поверхности или у периферических частей (см. рис. 1.2) его оптических поверхностей в ряде конструкций иллюминаторов [6, 8, 19, 27, 33, 37–39, 46, 196, 289, 306–313, 340, 346, 353, 367, 370–373, 375, 377, 379–384, 387, 393–395, 397].

Ввиду того, что светопрозрачные материалы весьма чувствительны к контактным нагрузкам, важны особенности силового взаимодействия стеклоэлемента с оправой на поверхности их сопряжения – периферической части оптической поверхности или боковой поверхности светопрозрачного элемента, которая выполняется цилиндрической (и может быть спаяна с оправой), конической или комбинированной (см. рис. 1.2).

Поскольку обе оптические поверхности светопрозрачного элемента являются границами раздела трёх сред (внешней среды, окружающей аппарат; материала светопрозрачного элемента; воздуха внутри аппарата) с различными показателями преломления, то формы этих поверхностей оказывают определяющее влияние на ход световых лучей, а значит, на качество изображения изучаемого объекта.

В технике высоких давлений встречаются разнообразные формы оптических поверхностей – плоскопараллельные, плосковогнутые, сферические концентричные выпукло-вогнутые, двояковыпуклые (см. рис. 1.2) и др.

Установлено [245], что никакая конструкция иллюминатора не позволяет исключить оптические искажения, и в случае высоких требований к качеству изображения приходится использовать исправляющую оптическую систему. Её параметры зависят от формы, размеров и расположения оптических поверхностей и материала светопрозрачного элемента, так что для каждого иллюминатора требуется, вообще говоря, индивидуальная исправляющая оптическая система.

Однако собственные искажения плоскопараллельного светопрозрачного элемента малы по сравнению с неустранимыми искажениями на границе плоской среды, окружающей изучаемый объект, и воздуха, зависящими лишь от показателя преломления этой среды [245]. Это открывает возможности для использования универсальных исправляющих оптических

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 32/556

систем и обеспечивает важное преимущество плоскопараллельности оптических поверхностей светопрозрачного элемента. Оно тем более возрастает в связи с возможностью их более точного исполнения, упрощением изготовления и юстировки [280] оптической системы в целом, которая сводится лишь к обеспечению параллельности оптических осей светопрозрачного элемента и исправляющей оптической системы. Кроме того, в практически важных случаях перемещения светопрозрачного элемента с плоскопараллельными оптическими поверхностями как твёрдого целого (и, возможно, других элементов оптической системы) под действием давления не ведут к поворотам осей, а значит, к нарушению юстировки. Поэтому с точки зрения качества изображения наиболее полезны светопрозрачные элементы именно с плоскопараллельными оптическими поверхностями, хотя и в этом случае деформирование оптических поверхностей под нагрузкой обуславливает расфокусировку системы [245] (рис. 1.3).

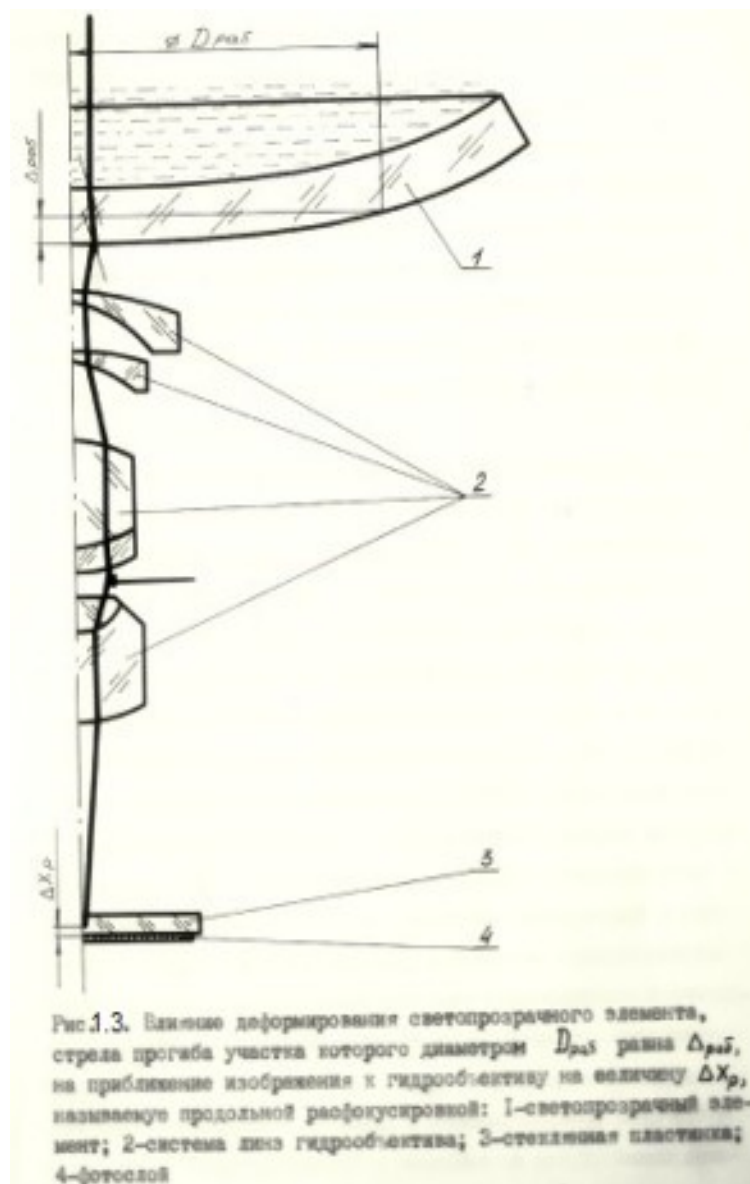


Рисунок 1.3. Влияние деформирования светопрозрачного элемента, стрела прогиба участка которого диаметром  $D_{раб}$  равна  $\Delta_{раб}$ , на приближение изображения к гидрообъективу на величину  $\Delta X_p$ , называемую продольной расфокусировкой: 1 – светопрозрачный элемент; 2 – система линз гидрообъектива; 3 – стеклянная пластина; 4 – фотослой.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 33/556

Вследствие перепада давлений светопрозрачный элемент деформируется, прогибаясь в сторону низкого давления и приближая изображение к задней поверхности объектива на величину продольной расфокусировки.

Допустимые (влиянием которых на качество изображения можно пренебречь) стрела прогиба  $[\Delta_{\text{раб}}]$  светового участка диаметром  $D_{\text{раб}}$  оптической поверхности со стороны низкого давления по [245] и продольная расфокусировка  $[\Delta x]$  по [349] составляют соответственно

$$(1.1) \\ [\Delta_{\text{раб}}] = \lambda/[2(n_g - n_a)], \\ [\Delta x] = 5 \text{ мкм},$$

где

$\lambda$  – длина волны света;

$n_g$  – показатель преломления материала светопрозрачного элемента;

$n_a$  – показатель преломления среды под низким давлением, обычно воздуха.

В то же время известно, что для восприятия перепада равномерно распределённых давлений наилучшим с точки зрения прочности является светопрозрачный элемент с выпукло-вогнутыми концентрическими сферическими поверхностями [313], в котором вне его краевой зоны осуществляется напряжённо-деформированное состояние, не связанное с изгибом (в теории оболочек [76, 112, 115, 122, 132, 146, 147, 153, 172, 192, 219, 222, 224, 255, 242, 260, 271, 302, 320] оно называется безмоментным).

Поэтому с точки зрения комплекса рабочих свойств оптические иллюминаторы с плоскопараллельными оптическими поверхностями могут считаться наилучшими, и лишь при сверхвысоких давлениях приходится прибегать к применению сферических светопрозрачных элементов, несмотря на технологические и эксплуатационные затруднения и снижение качества изображения.

Все основные научно-технические проблемы создания иллюминаторов являются общими для них.

Различия вносятся средами, окружающими изучаемые объекты, и размещением иллюминаторов в подводных аппаратах или в сосудах высокого давления.

Поэтому всюду в дальнейшем (кроме редких случаев, когда это оговорено особо) для определённости речь будет идти о подводных оптических иллюминаторах для высоких давлений.

При этом изучаемый объект и окружающая его среда, которой является вода, находятся вне обитаемого или необитаемого подводного аппарата, а люди и/или фотокинотелевизионная аппаратура – внутри аппарата.

Так как показатель преломления океанской воды мало изменяется [245] с её составом, температурой и глубиной, то исправляющие оптические системы, называемые гидрообъективами, могут быть универсальными для всех иллюминаторов с плоскопараллельными оптическими поверхностями.

Известно семейство гидрообъективов «Гидроруссар» [46, 245], созданное Ленинградским институтом точной механики и оптики. Система линз одного из них – «Гидроруссар-8» – показана на рис. 1.3.

Важно отметить, что гидростатические давления в океанских глубинах хотя и велики, но всё же ограничены величиной примерно 110 МПа (глубина Марианской впадины – 11034 м). Поэтому с точки зрения обеспечения прочности нет необходимости в использовании сферических светопрозрачных элементов и можно ограничиться светопрозрачными элементами с плоскопараллельными оптическими поверхностями [296, 297, 353].

Это положение подтверждается всей историей применения подводных иллюминаторов.

По-видимому, первый патент на подводный иллюминатор был выдан в 1889 г. в Германии, причём на протяжении четырёх десятилетий были известны лишь иллюминаторы для малых глубин с дисковыми светопрозрачными элементами малой относительной толщины из неорганического стекла.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 34/556

Первый подводный фотоснимок был сделан в 1893 г. Луи Бутаном на глубине примерно 1 м. Только в 1934 г. батисфера Биби «Век прогресса» достигла глубины 923 м, её конические светопрозрачные элементы из хрупкого кварца неоднократно разрушались.

Лишь появление и использование органического стекла, специфике свойств которого хорошо соответствует использованная ранее форма усечённого конуса, позволили резко повысить надёжность иллюминаторов и покорить максимальные глубины. В 1953 г. батискаф «Триест» с Огюстом Пикаром и Жаком Пикаром достиг глубины 3150 м. 23 января 1960 г. Жак Пикар и лейтенант ВМС США Дон Уолш совершили на батискафе «Триест» после модернизации рекордное погружение в Марианскую впадину на глубину 10916 м.

При этом усечённые конусы из органического стекла выдержали внешнее давление 110 МПа. Однако в принципе, как отмечено выше, для восприятия равномерного внешнего давления наилучшая форма стеклоэлемента – в виде сектора полой сферы с напряжённым состоянием, аналогичным безмоментному в теории оболочек [132, 192, 219, 222, 224].

Дж. Д. Стэчив экспериментально исследовал кратковременную и длительную прочность и жёсткость преимущественно сферических и конических светопрозрачных элементов из органического стекла [306–313] и установил независимость осевого перемещения центра внутренней поверхности сферического иллюминатора от конусности боковой поверхности.

Это может быть объяснено равенством осевого перемещения центра уменьшению внутреннего радиуса полой сферы полностью в предположении жёсткости и гладкости оправы. Дж. Д. Стэчивом показано, что под действием высоких гидростатических давлений светопрозрачный элемент из органического стекла весьма существенно прогибается в сторону низкого давления, что связано с низко модульностью и вязкоупругостью органического стекла. Деформирование оптических поверхностей существенно сказывается на качестве изображения, однако это влияние Дж. Д. Стэчивом не рассматривалось.

Более того, в своих экспериментах перемещение центра оптической поверхности со стороны низкого давления он измерял относительно корпуса камеры. В результате определялась сумма собственно стрелы прогиба этой оптической поверхности, осевой проекции перемещения светопрозрачного элемента как твёрдого целого вдоль конической поверхности сопряжения с оправой, а также осевых перемещений деталей испытательной камеры.

Собственно стрела прогиба оптической поверхности, являющаяся интегральной характеристикой её искривления, влияющего на качество изображения, оставалась Дж. Д. Стэчивом не определённой.

Измеренные Дж. Д. Стэчивом перемещения на порядки превышают допустимую [245] (1.1) стрелу прогиба  $[\Delta_{\text{раб}}]$  светового участка светопрозрачного элемента, при которой влиянием искривлений оптических поверхностей на качество изображения можно было бы пренебречь. Уменьшение прогибов и оптических искажений достигается заменой низко модульного и мутнеющего при высоких нагрузках органического стекла [113, 118, 166] неорганическим стеклом [1, 116, 133, 264, 335].

Такое соотношение действительных и допустимых (1.1) прогибов в случае светопрозрачного элемента из органического стекла подтверждается и расчётами по известным методам [3, 65, 66, 69, 79, 80, 82, 109, 115, 120, 127, 128, 132, 133, 155, 165, 172, 185, 191, 193, 199, 218, 220, 233, 239, 242, 243, 245, 260, 271, 285, 292, 301, 302, 304, 305, 318–321, 323, 334, 337, 358, 359]. Большие прогибы приводят к большим продольным расфокусировкам [245] и снижению качества изображения.

Никакими изменениями конструкции иллюминатора со светопрозрачным элементом из органического стекла для высоких давлений нельзя существенно уменьшить оптические искажения, поскольку они связаны с неотъемлемыми свойствами органического стекла.

И если в обитаемых аппаратах исследователь может выбрать наилучшую точку зрения, то в случае необитаемых аппаратов единственный путь повышения качества изображения – использование светопрозрачных материалов с более высоким модулем продольной упругости Юнга.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 35/556

На практике это привело к отказу от органического стекла [113, 118, 166, 245, 289, 350] и к возврату к неорганическому стеклу, специфике свойств которого лучше соответствует форма светопрозрачных элементов в виде прямого кругового цилиндра с плоскопараллельными оптическими поверхностями.

При создании иллюминаторов в технике высоких давлений используются различные светопрозрачные материалы, в том числе прозрачный ситалл, кварц, сапфир, алмаз, даже и поваренная соль [340].

Однако основными из них, применяемыми под водой, являются органическое стекло и неорганическое стекло.

Свойства некоторых их марок в соответствии с данными в [113, 116, 118, 144, 166, 293, 296, 335, 350] представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1. Оптико-механические свойства некоторых основных светопрозрачных материалов.

Стекло	Плотность $\rho$ , 1000 кг/м <sup>3</sup>	Показатель преломления $n$	Модуль Юнга $E$ , 1000 МПа	Коэффициент Пуассона $\mu$	Предел прочности при растяжении $\sigma$ , МПа	Предел прочности при изгибе $\sigma_b$ , МПа	Предел прочности при сжатии $\sigma_c$ , МПа
органическое марки ТОСП	1.18	1.49	3.03	0.365	63	–	71
неорганическое марки К8	2.52	1.52	80.6	0.209	29	60	1400

Как уже отмечалось, органическое стекло – низко модульный вязкоупругий материал [113, 118, 166, 350]. Оно допускает снижение требований к качеству сопрягаемых поверхностей оправы и стеклоэлемента, его разрушение не носит катастрофического характера, и потому органическое стекло является более приемлемым для применения в обитаемых подводных аппаратах. Механическая обработка органического стекла сравнительно нетрудоёмка. Прочность при растяжении органического стекла близка к его прочности при сжатии [144]. Однако оптические свойства органического стекла даже в исходном состоянии хуже, чем у неорганического стекла. Податливость и вязкоупругость органического стекла к тому же ведут к сравнительно большим прогибам выполненных из органического стекла светопрозрачных элементов и как следствие к значительным продольным расфокусировкам оптических систем.

Этих недостатков лишено неорганическое стекло [1, 116, 133, 264, 335], модуль продольной упругости Юнга которого примерно в 25...30 раз больше, чем модуль продольной упругости Юнга органического стекла. Неорганическое стекло как материал обладает весьма высокой жёсткостью [169, 293, 296, 335], высокой прочностью при сжатии [169, 261, 262, 264] и хорошими оптическими свойствами [245, 116] (особенно его оптические марки [116]). Однако оно трудно обрабатывается, хрупко и склонно к катастрофическому разрушению, обладает относительно низкой прочностью при растяжении, связанной с большим влиянием поверхностных дефектов, и предъявляет высокие требования к качеству поверхностей сопряжения стеклоэлемента с оправой.

По существу создание рациональных конструкций с неорганическим стеклом для высоких удельных нагрузок сводится к поиску технических решений, обеспечивающих практическое отсутствие мест существенного растяжения в неорганическом стекле.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 36/556

Известны технологические средства, повышающие сопротивление неорганического стекла разрушению при растяжении и изгибе. Это его закалка и ионообменное упрочнение. Повышает прочность неорганического стекла и его травление плавиковой кислотой [169, 261], однако оно ухудшает качество оптических поверхностей.

Значительны успехи механики разрушения, охарактеризовавшей поэтапность и длительность процесса разрушения стекла и позволившей анализировать его специфику по характеру изломов [71–73, 267, 299, 341].

В целом следует отметить, что в последнее время интенсивно изучаются прочность неорганического стекла и пути её повышения, тем более что резервы огромны, как показывает сопоставление достигаемой прочности неорганического стекла с его теоретической прочностью.

В целях повышения прочности, необходимого для высоких давлений, толщина светопрозрачных элементов выбирается соизмеримой с диаметром, а также принимаются специальные конструктивные меры, направленные на рациональное использование специфики свойств неорганического стекла [116, 139, 153, 169, 216, 227, 245, 261, 262, 264, 289, 299, 353].

Так, иллюминатор для высоких давлений без уменьшения поля зрения конструкции Х. Е. Эджертона и Л. Д. Хоудли [353], показанный на рис. 1.4, предусматривает распространение внешнего гидростатического давления на всю боковую поверхность и на периферическую часть частично нагруженного внутреннего основания стеклоэлемента и согласно исследованиям авторов работоспособен до давлений 130 МПа.

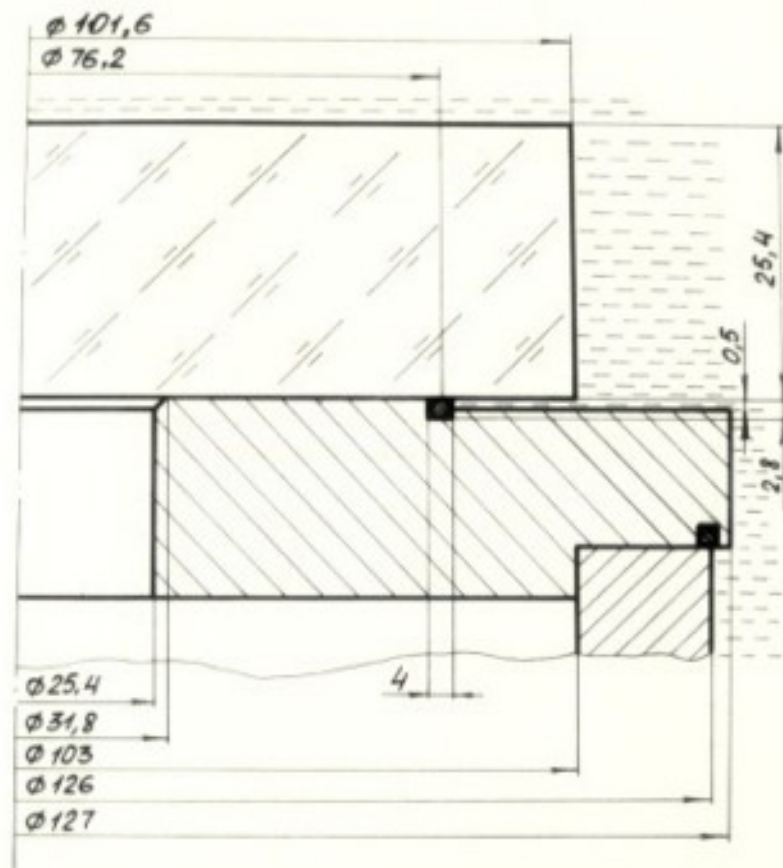


Рис. 1.4. Глубоководный иллюминатор конструкции Х.Е.Эджертона и Л.Д. Хоудли

Рисунок 1.4. Иллюминатор для высоких давлений конструкции Х. Е. Эджертона и Л. Д. Хоудли [353].

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 37/556

Обширная программа исследований конструкционной прочности неорганического стекла и сборных конструкций, включающих стеклоэлементы, с отработкой различных технических решений, в том числе с применением различных прокладок между элементами из разнородных материалов, одним из которых является неорганическое стекло [153, 169, 204, 261, 262, 264], выполнена в Институте проблем прочности АН Украины под руководством Г. С. Писаренко К. К. Амеляновичем, Е. Т. Гораликом, Г. М. Охрименко, Ю. М. Родичевым и др. [169, 261, 262]. Они исследовали влияние морской воды, колебаний влажности и температуры воздуха в зоне взаимодействия океана и атмосферы, солнечной радиации, кислорода, оброста в приповерхностных слоях моря на прочность неорганического стекла и показали опасность растягивающих и контактных напряжений в упругом до хрупкого разрушения неорганическом стекле.

Однако ещё предстоит изучение воздействия растягивающих и контактных напряжений на оптические марки неорганического стекла и на изготовленные из них светопрозрачные элементы иллюминаторов.

Полученные результаты применены при создании иллюминаторов для высоких давлений [38, 293–297] с самоуравновешиванием стеклоэлемента при действии внешнего давления на равновеликие центральную часть внешнего основания и периферическую часть частично нагруженного внутреннего основания, а также на часть боковой поверхности.

В конструкции И. И. Дьячкова, А. Л. Квитки и др. [297], показанной на рис. 1.5, использована система вспомогательных отверстий и уплотнительных колец, размещённых таким образом, что внешнее гидростатическое давление распространено на центральную часть внешнего основания (её площадь равна половине его общей площади), а также на равновеликую этой части периферическую часть частично нагруженного внутреннего основания и на большую часть боковой поверхности стеклоэлемента.

В результате, в отличие от предыдущих конструкций, стеклоэлемент удерживается в равновесии самим гидростатическим давлением и силового контакта стеклоэлемента с оправой не возникает. Это положительно влияет на прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений, тем более что огромный опыт создания сборных конструкций, включающих стеклоэлементы преимущественно оболочечного типа, накопленный Институтом проблем прочности АН УССР, показывает доминирующее влияние силовых факторов в зоне контакта стеклоэлементов с оправками на снижение прочности стеклоэлементов. По данным авторов работы [297] разрушающее давление для такого иллюминатора составляет 168 МПа и он должен выдерживать не менее 3760 циклов нагрузки давлением 59 МПа продолжительностью 1 ч или не менее 100 циклов нагрузки давлением 98 МПа продолжительностью 3 ч.

Плоскопараллельность оптических поверхностей трёхмерного цилиндрического элемента из неорганического стекла наиболее перспективна для высоких давлений по комплексу экономических, технологических и эксплуатационных соображений (возможна универсальность исправляющих оптических систем, упрощаются изготовление, сборка и юстировка [245, 280]).

Таким образом, форма светопрозрачного элемента в виде прямого кругового цилиндра, имеющего плоскопараллельные оптические поверхности, позволяет создавать конструкции иллюминаторов, рационально использующие специфику свойств неорганического стекла.

Необходимы метод комплексной оптимизации характеристик прочности, жёсткости и оптики иллюминаторов с подобными стеклоэлементами и их приемлемое конструктивное осуществление.

В заключение выделим два обстоятельства. Во-первых, неорганическое стекло весьма чувствительно к напряжённым состояниям [169, 261, 262, 264], и создание из него рациональных конструкций предъявляет высокие требования к оценке их напряжённо-деформированных состояний и прочности [267]. Во-вторых, деформирование элементов из неорганического стекла вплоть до разрушения происходит без каких-либо существенных

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 38/556 отклонений от обобщённого закона Гука. Поэтому в пределах сохранения сплошности неорганическое стекло может рассматриваться в расчётах как линейно упругий материал.

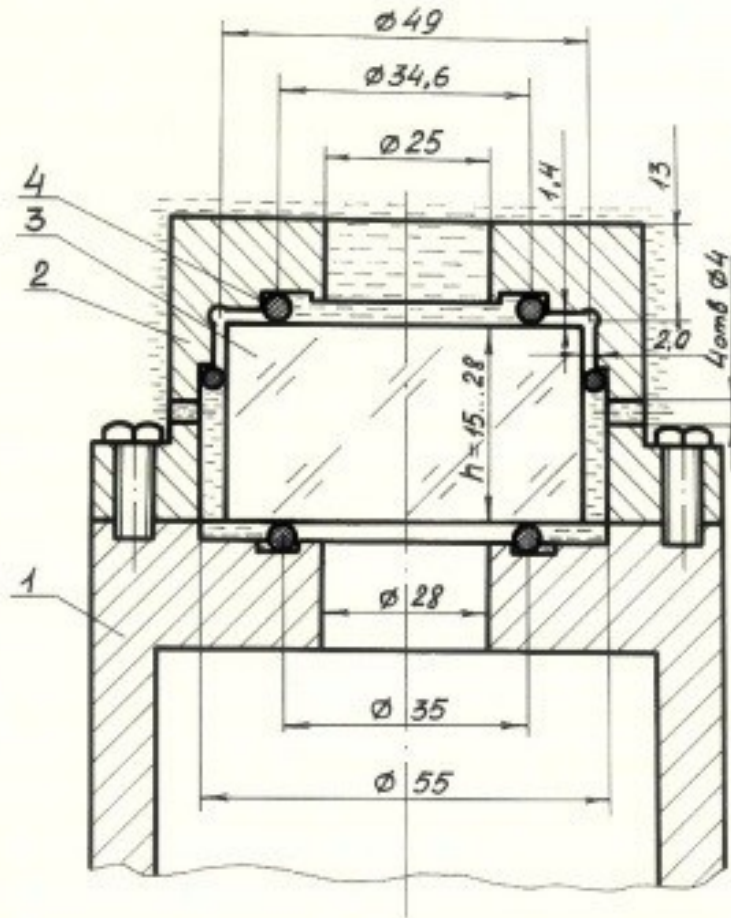


Рис. 1.5. Глубоководный иллюминатор конструкции И.И.Дьячкова, А.Л.Квитки и др. : 1-корпус; 2-фланец; 3-светопрозрачный элемент; 4-уплотнительный элемент

Рисунок 1.5. Иллюминатор для высоких давлений конструкции И. И. Дьячкова, А. Л. Квитки и др. [297]: 1 – корпус; 2 – фланец; 3 – светопрозрачный элемент; 4 – уплотнительный элемент.

Помимо иллюминаторов, сосуды высокого давления в исследовательских и промышленных целях могут снабжаться дополнительными герметичными устройствами, например герморазъёмами [385] и гермоводами изолированных проводников для передачи энергии или для электротензометрии [11, 13, 22, 25, 83]. Давления создаются насосами и компрессорами [201, 206, 266]. В поршневых их конструкциях для высокого давления взамен поршней используются цельные твердосплавные или стальные (с химико-термическим поверхностным упрочнением) плунжеры, уплотняемые сальниками в специальных камерах, составляющих стянутый вдоль оси пакет цилиндрических деталей. В качестве клапанов используются прямоточные или комбинированные, в том числе грибовые с циклически симметричной системой подпружиненных запорных элементов. Герметизация центробежных компрессоров высокого давления помимо щелевых, канавочных и лабиринтных уплотнений осуществляется и паяными сотовыми уплотнениями, нетождественными типичным

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 39/556

конструкциям с сотовыми заполнителями [232, 342]. Для крепления рабочих колёс, как и в турбостроении, судостроении и авиастроении и в других областях техники, могут использоваться прессовые посадки с гарантированным натягом при возможных комбинациях с другими методами [63].

К технике высоких давлений относятся также транспортные и технологические трубопроводы [131, 303], вспомогательная, контрольно-измерительная и управляющая аппаратура и, наконец, защитные сооружения (боксы), обеспечивающие безопасность [249, 281].

Как известно, для рационального проектирования требуется оптимизация соответствующей конструкции по критериям качества [64, 194, 250, 275, 318], определяемого совокупностью прочностных и других основных рабочих характеристик. Для техники высоких давлений с относительной малочисленностью объектов гарантированный подход [64] представляется уместнее вероятностного подхода [70], а численный анализ зависимости решений реальных многопараметрических задач от каждого из этих параметров затруднителен, и наиболее эффективны простые приближённые формулы, позволяющие анализировать подобные зависимости [64]. Соответствующая система уравнений при заданных нагрузках и параметрах конструкции должна быть замкнутой и определять фазовые переменные, характеризующие напряжённо-деформированное состояние конструкции [64].

Следовательно, для рационального проектирования конструкций в технике высоких давлений необходимы достаточно простые непременно аналитические методы комплексного решения задач механики, прочности и оптики типовых именно существенно трёхмерных цилиндрических несущих и светопрозрачных элементов, нагруженных равномерными давлениями на боковые поверхности и ступенчатыми давлениями на основания.

Именно аналитические методы не только необходимы, но и обладают существенными преимуществами перед всеми иными методами, в том числе перед развивающимися численно-аналитическими методами, использованными в настоящей диссертации для представления непрерывных эпюр и изолиний перемещений и напряжений по дискретным численным данным метода конечных элементов.

Во-первых, именно и только аналитические методы отличаются от других методов, в том числе численно-аналитических, численных и экспериментальных методов, необходимой и крайне полезной для любых научных исследований полной и безусловной, чёткой и однозначной проверяемостью результатов.

Во-вторых, именно и только аналитические методы отличаются от других методов, в том числе численно-аналитических, численных и экспериментальных методов, необходимым и крайне полезным для любых научно-технических исследований непосредственным получением непременно аналитических зависимостей целевых параметров оптимизации именно от исходных параметров решаемой задачи.

## **1.2. Способы решения задач прочности конструкций**

В сплошных (заглушки сосудов и трубопроводов, светопрозрачные элементы иллюминаторов и т. д.) и полых (корпуса, втулки, кольца, оправы и фланцы иллюминаторов и т. д.) типовых элементах конструкций при высоких давлениях осуществляются сложные напряжённые состояния. Решение задач прочности этих элементов на основе относящихся к прочности материалов экспериментальных данных, прежде всего полученных в Институте проблем прочности АН Украины под руководством А. А. Лебедева Ф. Ф. Гигиняком, Б. И. Ковальчуком, В. П. Ламашевским и др. [183, 204, 258, 268, 270, 272, 305], требует идентификации сложного напряжённого состояния в точке деформированного тела с равноопасным одноосным напряжённым состоянием (растяжением или сжатием) при помощи критериев предельных состояний и прочности, которые после подстановки опытных параметров становятся математическими моделями предельных состояний и прочности соответствующих материалов [184].

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 40/556

Анализ известных критериев предельных состояний и прочности и практики их использования [111, 238, 239, 333] показывает, что для пластичных конструкционных материалов обычно применяются третья теория прочности (критерий наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска

(1.2)

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_s$$

и четвёртая теория прочности (критерий удельной энергии формоизменения, или критерий октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки

(1.3)

$$\sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \leq \sigma_s,$$

а для хрупких материалов обычно применяются первая теория прочности (критерий наибольших нормальных напряжений) да-Винчи–Галилея–Лейбница–Ламе и критерий Кулона–Мора

(1.4)

$$\sigma_e = \sigma_1 - \chi\sigma_3 \leq \sigma_t,$$

где

$\sigma_e$  – равносильное (эквивалентное) одноосное напряжение;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ) – главные напряжения в соответствующей точке деформированного тела;

$\sigma_s, \sigma_u$  – предел текучести и предел прочности пластичного материала;

$\chi$  – доля пластичности материала тела, при условии  $\sigma_t \leq \sigma_c$

$$\chi = \sigma_t / \sigma_c;$$

$1 - \chi$  – доля хрупкости материала тела;

$\sigma_t, \sigma_c$  – пределы прочности материала тела при одноосных растяжении и сжатии соответственно.

Наилучшие результаты даёт общая теория Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева о совместном влиянии сопротивлений материала нормальным и сдвиговым нагрузкам на наступление предельного его состояния. Учёные предложили искать критерии предельных состояний и прочности в виде инвариантных по отношению к напряжённому состоянию функций сдвиговых напряжений и наибольшего нормального напряжения. Предложен, например, наиболее распространенный и удобный критерий предельных состояний

(1.5)

$$\sigma_e = (1 - \chi)\sigma_1 + 2^{-1/2}\chi[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_t$$

и как его линейное обобщение обобщённый линейный критерий предельных состояний

$$\tau_{oct} + m_1\tau_{max} = m_2,$$

где  $m_1, m_2$  – постоянные материала, определяемые из опытов при одноосных напряжённых состояниях и дающие возможность учесть неодинаковое сопротивление материала растягивающим и сжимающим нагрузкам.

Г. С. Писаренко и А. А. Лебедев отметили [238]:

«Исследование критериев разрушения материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, остаётся одним из актуальнейших вопросов механики деформируемых тел...

Вопросы количественной оценки прочности деталей машин при переменных нагрузках в условиях сложного напряжённого состояния приобретают всё большее значение. Однако надёжных критериев, позволяющих перейти от основной расчётной характеристики – предела усталости при одноосном напряжённом состоянии – к произвольной системе напряжений, в настоящее время практически не существует. Это объясняется прежде всего тем, что в общем случае нестационарного механического нагружения, когда приложенные к телу усилия изменяются во времени по разным законам, возможно бесконечное множество различных сочетаний компонентов тензора напряжений, отличающихся один от другого не только пределами изменения абсолютной величины, но и частотой пульсаций, что приводит к смещению фаз и изменению во времени направления главных осей тензора напряжений. В



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 41/556

результате создаётся ситуация, при которой задача о критериях эквивалентности в отношении усталости материала в общей постановке становится практически неразрешимой. Поэтому большинство предложенных критериев усталостной прочности установлено применительно к частным, наиболее простым случаям нагружения.»

Следует иметь в виду, что именно в строгом и точном узком смысле критерий прочности есть критерий предельных и допредельных состояний, а критерий предельных состояний есть критерий именно и только предельных состояний. Так что критерий предельных состояний есть уравнение предельной поверхности в пространстве главных напряжений, а критерий прочности есть нестрогое неравенство, выражающее эту предельную поверхность и всю её внутренность. Поэтому для изотропного материала с одинаковой прочностью  $\sigma_L$  при растяжении  $\sigma_t$  и сжатии  $\sigma_c$  ( $\sigma_L = \sigma_t = \sigma_c$ ) с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e$  как произвольной функцией  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  общий критерий предельных состояний есть

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L,$$

а общий критерий прочности есть

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_L.$$

Очевидно взаимно однозначное соответствие этого общего критерия предельных состояний и этого общего критерия прочности. Поэтому для краткости они в широком смысле с вольностью речи при очевидности для понимающих могут условно объединяться словесно, как это и сделано чуть выше, с использованием только одного формального выражения из двух, то есть или двойного равенства, или равенства с нестрогим неравенством.

Ясны соответствующие:

критерий допредельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_L,$$

критерий запредельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) > \sigma_L,$$

критерий разрушения

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \geq \sigma_L.$$

Часто конструктивные элементы работают при повторно-переменных нагрузках [161, 162, 186, 211, 225, 231, 240, 324, 325, 343, 352, 360].

При числе циклов давления в сосудах до 1000 (в крупногабаритных сосудах до 200) можно ограничиться статическим расчётом [303].

В малоцикловой области возможно определение долговечности методами [223].

Наконец, решение задачи многоцикловой усталостной прочности (при числе циклов примерно  $10^5$  и выше) проще всего может быть получено (с погрешностью в сторону увеличения запаса циклической прочности  $n_u$  по пределу прочности  $\sigma_u$  и  $n_s$  по пределу текучести  $\sigma_s$ ) по линейным приближениям Гудмена и Зодерберга соответственно диаграммы усталостной прочности Хэя [231]

(1.6)

$$n_u = (\sigma_m/\sigma_u + \sigma_a/\sigma_{-1})^{-1};$$
$$n_s = (\sigma_m/\sigma_s + \sigma_a/\sigma_{-1})^{-1},$$

где

$\sigma_m, \sigma_a$  – среднее и амплитудное напряжения цикла;

$\sigma_{-1}$  – предел усталости при симметричном цикле.

При расчёте как по напряжениям, так и по предельным нагрузкам [303] задачи прочности конструкций сводятся к математическому моделированию напряжённых состояний в их элементах. При этом решения в случае геометрической нелинейности конструкции [171, 260] или усложнённых реологических свойств материала [160, 345], нелинейности [190], пластичности [65, 66, 199, 205, 213, 217, 251, 290, 298, 338], ползучести [76, 199, 265] так или иначе основываются на результатах линейной теории упругости [109, 128, 145, 181, 185, 218, 220, 233, 235, 237, 240, 247, 292, 304, 323, 334, 337] с использованием экспериментально установленных постоянных [335].

Из числа немногих точных упругих решений практически важных задач для трёхмерных тел выделяются широко применяемые [269, 271] классические формулы Ламе для полой сферы  $r_1 \leq r \leq r_2$  [359] и полого цилиндра  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $0 \leq z \leq h$  [358], выполненных из материала с модулем продольной упругости Юнга  $E$  и коэффициентом поперечной деформации Пуассона  $\mu$  и равномерно нагруженных давлением  $p_1$  на внутреннюю поверхность  $r = r_1$  и давлением  $p_2$  на внешнюю поверхность  $r = r_2$ , а цилиндр – также равномерно распределёнными по торцам  $z = 0$  и  $z = h$  осевыми напряжениями  $\sigma_z$ .

Для полой сферы  $r_1 \leq r \leq r_2$  радиальное перемещение  $u_r(r)$

$$u_r(r) = (1 - 2\mu)E^{-1}(p_1r_1^3 - p_2r_2^3)r/(r_2^3 - r_1^3) + (1 + \mu)E^{-1}(p_1 - p_2)r_1^3r_2^3/[2r^2(r_2^3 - r_1^3)];$$

радиальное  $\sigma_r(r)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r)$  напряжения

$$\sigma_r(r) = (p_1r_1^3 - p_2r_2^3)/(r_2^3 - r_1^3) - (p_1 - p_2)r_1^3r_2^3/[r^3(r_2^3 - r_1^3)];$$

$$\sigma_t(r) = (p_1r_1^3 - p_2r_2^3)/(r_2^3 - r_1^3) + (p_1 - p_2)r_1^3r_2^3/[2r^3(r_2^3 - r_1^3)];$$

$$\sigma_r(r_1) = (p_1r_1^3 - p_2r_2^3)/(r_2^3 - r_1^3) - (p_1 - p_2)r_2^3/(r_2^3 - r_1^3) = (p_1r_1^3 - p_1r_2^3)/(r_2^3 - r_1^3) = -p_1;$$

$$\sigma_r(r_2) = (p_1r_1^3 - p_2r_2^3)/(r_2^3 - r_1^3) - (p_1 - p_2)r_1^3/(r_2^3 - r_1^3) = (-p_2r_2^3 + p_2r_1^3)/(r_2^3 - r_1^3) = -p_2;$$

$$\sigma_t(r_1) = (2p_1r_1^3 + p_1r_2^3 - 3p_2r_2^3)/[2(r_2^3 - r_1^3)];$$

$$\sigma_t(r_2) = (3p_1r_1^3 - 2p_2r_2^3 - p_2r_1^3)/[2(r_2^3 - r_1^3)].$$

Для полого цилиндра  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $0 \leq z \leq h$  радиальное перемещение

$$(1.7)$$

$$u_r(r, z) = u_r(r) = (1 - \mu)E^{-1}(p_1r_1^2 - p_2r_2^2)r/(r_2^2 - r_1^2) + (1 + \mu)E^{-1}(p_1 - p_2)r_1^2r_2^2/[r(r_2^2 - r_1^2)] - \mu E^{-1}\sigma_z r;$$

осевое перемещение (только оно зависит от  $z$ ) при условной неподвижности торца  $z = 0$

$$(1.8)$$

$$u_z(r, z) = u_z(z) = [\sigma_z/E - 2\mu E^{-1}(p_1r_1^2 - p_2r_2^2)/(r_2^2 - r_1^2)]z;$$

радиальное  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$  напряжения

$$(1.9)$$

$$\sigma_r(r, z) = \sigma_r(r) = (p_1r_1^2 - p_2r_2^2)/(r_2^2 - r_1^2) - (p_1 - p_2)r_1^2r_2^2/[r^2(r_2^2 - r_1^2)];$$

$$\sigma_t(r, z) = \sigma_t(r) = (p_1r_1^2 - p_2r_2^2)/(r_2^2 - r_1^2) + (p_1 - p_2)r_1^2r_2^2/[r^2(r_2^2 - r_1^2)].$$

Равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности (1.2)

$$\sigma_e(r, z) = \sigma_e(r) = \sigma_1(r) - \sigma_3(r) = |\sigma_t(r) - \sigma_r(r)| = 2|p_1 - p_2|r_1^2r_2^2/[r^2(r_2^2 - r_1^2)]$$

максимально на внутренней поверхности цилиндра

$$(1.10)$$

$$\sigma_{e\max}(r, z) = \sigma_{e\max}(r) = \sigma_e(r_1) = \sigma_1(r_1) - \sigma_3(r_1) = |\sigma_t(r_1) - \sigma_r(r_1)| = 2|p_1 - p_2|r_2^2/(r_2^2 - r_1^2)$$

и резко убывает к внешней поверхности цилиндра по квадратичному закону.

Ввиду

$$\lim \sigma_e(r_1) = 2|p_1 - p_2| (r_2/r_1 \rightarrow \infty)$$

неэффективно увеличение относительной толстостенности цилиндра

$$\alpha = r_2/r_1$$

сверх трёхкратной, и дальнейшее упрочнение (повышение несущей способности) цилиндра достигается не утолщением, а конструктивными и/или технологическими способами создания остаточных напряжений в цилиндре – сжимающих во внутренних слоях и растягивающих во внешних слоях.

Поскольку в технике высоких давлений их изменения, обусловленные весомостью рабочих сред, ничтожны по сравнению с самими давлениями, то реже применяется следующее линейное обобщение задачи Ламе [358] для полого цилиндра  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $0 \leq z \leq h$ , в случае

$$\sigma_z(r, z) = 0,$$

$$\sigma_r(r_1, z) = p_1z,$$

$$\sigma_r(r_2, z) = p_2z,$$

имеющее для радиального перемещения  $u_r(r, z)$ , осевого перемещения  $u_z(r, z)$ , радиального  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$  напряжений вид [165, 301]:

$$(1.11)$$

$$u_r(r, z) = -p_1E^{-1}r_1^2rz[1 - \mu + (1 + \mu)r_2^2/r^2]/(r_2^2 - r_1^2) + p_2E^{-1}r_2^2rz[1 - \mu - (1 + \mu)r_1^2/r^2]/(r_2^2 - r_1^2);$$

$$u_z(r, z) = p_1E^{-1}r_1^2\{\mu z^2 + (1 - \mu)r^2/2 + (1 + \mu)r_2^2[1/2 + \ln(r/r_2)]\}/(r_2^2 - r_1^2) - p_2E^{-1}r_2^2\{\mu z^2 + (1 - \mu)r^2/2 + (1 + \mu)r_1^2[1/2 + \ln(r/r_2)]\}/(r_2^2 - r_1^2);$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 43/556

$$\begin{aligned}\sigma_r(r, z) &= -p_1z(1 - r_2^2/r^2)r_1^2/(r_2^2 - r_1^2) + p_2z(1 - r_1^2/r^2)r_2^2/(r_2^2 - r_1^2); \\ \sigma_t(r, z) &= -p_1z(1 + r_2^2/r^2)r_1^2/(r_2^2 - r_1^2) + p_2z(1 + r_1^2/r^2)r_2^2/(r_2^2 - r_1^2).\end{aligned}$$

Классической является и относящаяся к контактным задачам [129, 134, 347] при плоском напряжённом состоянии задача А. В. Гадолина [87], не учитывающая осевых напряжений и основанная на сопряжении решений Ламе [358] для внутреннего  $r_1 \leq r \leq r_c + \delta_c$  и внешнего  $r_c \leq r \leq r_2$  слоёв собранного с натягом составного цилиндра, предназначенного для внутреннего давления  $p$ . Контактное давление  $p_{c0}$  после сборки при нулевом внутреннем давлении  $p$  пропорционально относительному радиальному натягу  $\delta_c$ :

$$(1.12) \quad p_{c0} = \{[(r_c^2 + r_1^2)/(r_c^2 - r_1^2) - \mu_1]/E_1 + [(r_2^2 + r_c^2)/(r_2^2 - r_c^2) + \mu_2]/E_2\}^{-1}\delta_c,$$

где

$E_1, \mu_1$  – модуль продольной упругости Юнга и коэффициент поперечной деформации Пуассона соответственно материала внутреннего слоя;

$E_2, \mu_2$  – модуль продольной упругости Юнга и коэффициент поперечной деформации Пуассона соответственно материала внешнего слоя.

В простейшем и важнейшем частном случае равенств модулей продольной упругости Юнга

$$E_1 = E_2 = E$$

и коэффициентов поперечной деформации Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

материалов слоёв составного цилиндра

контактное давление  $p_{c0}$  после сборки при нулевом внутреннем давлении  $p$

$$(1.13) \quad p_{c0} = E\delta_c(r_2^2 - r_c^2)(r_c^2 - r_1^2)/[2r_c^2(r_2^2 - r_1^2)],$$

а условия наилучшего проектирования

$$(1.14) \quad \begin{aligned}r_c &= r(c) = (r_1r_2)^{1/2}, \\ \delta_c &= \delta(c) = p/E,\end{aligned}$$

при этом

$$(1.15) \quad p_{c0} = (p/2)(r_2 - r_1)/(r_2 + r_1)$$

и минимум равносильного (эквивалентного) напряжения, достигающийся на внутренних поверхностях слоёв,

$$(1.16) \quad \min_{r(c), \delta(c)} \max_r \sigma_e(r) = \sigma_e(r_1) = \sigma_e(r_c + 0) = pr_2/(r_2 - r_1)$$

составляет долю

$$(1 + r_1/r_2)/2$$

от аналогичной величины (1.10) для цельного цилиндра при

$$\begin{aligned}p_1 &= p, \\ p_2 &= 0.\end{aligned}$$

При этом не учитывается взаимное осевое сцепление слоёв.

Поэтому решение А. В. Гадолина [87] является точным только для плоского напряжённого состояния, то есть для торцов или при бесконечном уменьшении коэффициента трения или отношения длины к радиусу сопряжения слоёв составного цилиндра.

Х. Л. Пью [205] обобщил условия наилучшего проектирования (1.14) на случай различных упругих постоянных  $E_1$  и  $E_2$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  и пределов текучести  $\sigma_{s1}$  и  $\sigma_{s2}$  материалов слоёв составного цилиндра:

$$(1.17) \quad \begin{aligned}r_c &= (\sigma_{s1}/\sigma_{s2})^{1/4}(r_1r_2)^{1/2}, \\ \delta_c &= (1/2)[\sigma_{s2} - (r_2/r_1)(\sigma_{s1}\sigma_{s2})^{1/2}][[(1 - \mu_1^2)E_1^{-1}(r_c^2 + r_1^2)/(r_c^2 - r_1^2) + (1 - \mu_2^2)E_2^{-1}(r_2^2 + r_c^2)/(r_2^2 - r_c^2) - \mu_1(1 + \mu_1)/E_1 + \mu_2(1 + \mu_2)/E_2] - (1 - \mu_1^2)E_1^{-1}[\sigma_{s1} + \sigma_{s2} - 2(r_1/r_2)(\sigma_{s1}\sigma_{s2})^{1/2}]r_1^2/(r_c^2 - r_1^2)].\end{aligned}$$

В простейшем и важнейшем частном случае равенств модулей продольной упругости Юнга

$$E_1 = E_2 = E$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 44/556

и коэффициентов поперечной деформации Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

материалов слоёв составного цилиндра

наилучший относительный радиальный натяг  $\delta_c$

$$\delta_c = 2(p/E)[1 - (r_1/r_2)(\sigma_{s1}/\sigma_{s2})^{1/2}]/[1 + \sigma_{s1}/\sigma_{s2} - 2(r_1/r_2)(\sigma_{s1}/\sigma_{s2})^{1/2}]$$

и запас прочности каждого из слоёв (ввиду возможного различия пределов текучести  $\sigma_{s1}$  и  $\sigma_{s2}$  материалов слоёв приравниваются между собой именно запасы прочности по пределам текучести, а не эквивалентные напряжения)

$$n_s = n_{s1} = n_{s2} = [(\sigma_{s1} + \sigma_{s2})/2 - (r_1/r_2)(\sigma_{s1}\sigma_{s2})^{1/2}]/p.$$

И здесь не учитывается взаимное осевое сцепление слоёв.

Поэтому и решение Х. Л. Пью [205] является точным только для плоского напряжённого состояния, то есть для торцов или при бесконечном уменьшении коэффициента трения или отношения длины к радиусу сопряжения.

В. Д. Лубенец [189] учёл влияние осевых напряжений в собранном тепловым способом составном цилиндре в предположении его неограниченной длины (плоская деформация), равносильном допущению о полном взаимном сцеплении слоёв на поверхности сопряжения. Принято равенство осевых деформаций слоёв при сборке, нагружении давлением и логарифмическом температурном поле. При отсутствии перепада температур в простейшем и важнейшем частном случае равенств модулей продольной упругости Юнга

$$E_1 = E_2 = E$$

и коэффициентов поперечной деформации Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

материалов слоёв составного цилиндра

контактное давление  $p_{c0}$  после сборки при нулевом внутреннем давлении  $p$

$$(1.18)$$

$$p_{c0} = [1/(1 - \mu^2)]E\delta_c(r_2^2 - r_c^2)(r_c^2 - r_1^2)/[2r_c^2(r_2^2 - r_1^2)],$$

что отличается от классической формулы (1.13) наличием первой дроби  $[1/(1 - \mu^2)]$ , соответствующей переходу от плоского напряжённого состояния к плоской деформации и для стали ( $\mu = 0.3$ ) примерно равной 1.1. Проблема торцевых зон при этом не ставилась.

Аналогичное решение изложено в [223] с указанием применимости вне торцевых зон длиной  $2.5[r_1(r_2 - r_1)]^{1/2}$

независимо от коэффициента трения. Как и в других известных решениях, не ставятся задачи для самих этих торцевых зон, альтернативной технологии сборки (запрессовки) и циклического нагружения.

Технологический анализ тепловой сборки и запрессовки выполнен П. И. Орловым [228]. Действительный абсолютный радиальный натяг рекомендуется увеличивать по сравнению с расчётным на 50...60 % суммарной высоты микронеровностей сопрягаемых поверхностей. Срезание микровыступов при запрессовке уменьшает коэффициент трения сравнительно с таковым при горячей сборке в 1.3...2.5 раза.

Известно, что для решения задачи прочности важно качественно увеличение числа слоёв с одного до двух, а дальнейшее увеличение числа слоёв важно лишь количественно, так как сводится к последовательности задач для двухслойных цилиндров, анализом которых можно ограничиться без потери общности.

Решения задач для других конструктивных способов создания остаточных напряжений [68] в толстостенных цилиндрах изложены в [205, 217, 303, 340].

Из технологических способов упрочнения цилиндров (термоскрепления, дорнования, поверхностного пластического деформирования обкаткой роликами или гидродробеструйной обработкой, химико-термической обработки, других механических, физических и химических способов) выделяется классический и применительно к технике высоких давлений, по-видимому, наиболее эффективный – самоскрепление (автоскрепление, автофретирование). Среди известных решений для него [140, 151, 176] есть и относящееся к линейному упрочнению материала с модулем пластичности  $E_p$  (параметр упрочнения [271])

$$\lambda = 1 - E_p/E.$$

Давлению самоскрепления  $p_0$  соответствует радиус упругопластической границы  $r_0$ .  
В относительных радиусах

$$\begin{aligned}\alpha &= r_2/r_1, \\ \gamma &= r_0/r_1, \\ \rho &= r/r_1\end{aligned}$$

давление самоскрепления  $p_0$

$$(1.19) \\ p_0 = 3^{-1/2} \sigma_s [(1 - \lambda - 1/\alpha^2) \gamma^2 + \lambda + 2\lambda \ln \gamma].$$

После сброса давления самоскрепления  $p_0$  остаточные радиальное  $\sigma_{r0}$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_{t0}$  напряжения в пластической зоне ( $1 \leq \rho \leq \gamma$ )

$$(1.20) \\ \begin{aligned}\sigma_{r0} &= -p_0 + 3^{-1/2} \sigma_s [(1 - \lambda) \gamma^2 (1 - 1/\rho^2) + 2\lambda \ln \rho] + p_0 (\alpha^2/\rho^2 - 1)/(\alpha^2 - 1), \\ \sigma_{t0} &= -p_0 + 3^{-1/2} \sigma_s [2\lambda + (1 - \lambda) \gamma^2 (1 + 1/\rho^2) + 2\lambda \ln \rho] - p_0 (\alpha^2/\rho^2 + 1)/(\alpha^2 - 1)\end{aligned}$$

и в упругой зоне ( $\gamma \leq \rho \leq \alpha$ )

$$(1.21) \\ \begin{aligned}\sigma_{r0} &= -p_0 + 3^{-1/2} \sigma_s [\gamma^2 - \gamma^2/\rho^2 - \lambda(\gamma^2 - 1) + 2\lambda \ln \gamma] + p_0 (\alpha^2/\rho^2 - 1)/(\alpha^2 - 1), \\ \sigma_{t0} &= -p_0 + 3^{-1/2} \sigma_s [\gamma^2 + \gamma^2/\rho^2 - \lambda(\gamma^2 - 1) + 2\lambda \ln \gamma] - p_0 (\alpha^2/\rho^2 + 1)/(\alpha^2 - 1).\end{aligned}$$

Полная пластическая перегрузка ( $r_0 = r_2$ ) цилиндра из идеально пластического материала происходит при давлении [303]

$$p_s = \sigma_s \ln(r_2/r_1),$$

а нижней границей давления разрушения является [303]

$$p_u = \sigma_u \ln(r_2/r_1).$$

Математическое ожидание давления разрушения может быть получено переходом от третьей к четвёртой теории прочности:

$$p_{ue} = (2/3^{1/2}) \sigma_u \ln(r_2/r_1).$$

Типичным концентратором напряжений в цилиндре является поперечное отверстие. В предположениях радиальной его ориентации и малости его радиуса относительно внутреннего радиуса цилиндра Дж. Моррисон наложением (суперпозицией) решений Ламе [358] и Кирша [319, 321] для одноосного растяжения неограниченной пластины с круглым отверстием установил коэффициент 2.5 концентрации равносильного (эквивалентного) напряжения (по третьей теории прочности независимо от толстостенности цилиндра

$$\alpha = r_2/r_1),$$

наибольшего в точках пересечения поверхности отверстия, внутренней поверхности цилиндра и плоскости, содержащей их оси [205]:

$$(1.22)$$

$$\sigma_{e\max} = 3\sigma_t - \sigma_z + p - \sigma_r = [3(\alpha^2 + 1)/(\alpha^2 - 1) - 1/(\alpha^2 - 1) + 1 - (-1)]p = [5\alpha^2/(\alpha^2 - 1)]p = 2.5\sigma_e(r_1).$$

Вопрос о влиянии отношения радиусов отверстия и полости цилиндра на коэффициент концентрации остаётся открытым. Теоретический анализ и тензометрия Дж. Джердина [355, 356] дали обратную зависимость, в [223] есть свидетельства как обратной, так и прямой зависимости, а электротензометрия М. А. Лошкарёва [188] привела к прямой зависимости, причём все они далеки от постоянных. Последние результаты связаны с не учитываемым различным влиянием усреднения деформаций по площади измерительной решётки тензорезистора (отнюдь не малобазного) и с экстраполяцией влияния её удаления от точки с наибольшей деформацией.

Концентрацию напряжений в корпусах (уже осесимметричную) создаёт изменение сечений в осевом направлении с возможными галтелями. Оценка номинальных напряжений в подобных задачах может быть осуществлена методами [68, 82, 117, 223, 230, 288], а коэффициентов концентрации напряжений, преимущественно благодаря плоским аналогам, методами [78, 141, 210, 212, 214, 236, 282, 357].

Вообще при решении задач прочности упругих несущих и светопрозрачных элементов конструкций в технике высоких давлений [148, 150, 215, 243, 273] преимущественно

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 46/556

используются методы сопротивления материалов [242, 302], теории пластин и оболочек [146, 158, 172, 173, 255, 285, 320], хотя и показано, что принятие в последней гипотез Кирхгофа-Лява влечёт погрешность порядка отношения толщины к другому линейному размеру [221]. В частности, используются методы расчёта пластин, изгибаемых равномерными давлениями и свободно опёртых либо жёстко защемлённых по контуру [68, 79, 80, 115, 120, 154] или свободно опёртых по концентричной окружности меньшего радиуса [79, 80], а также решения для изгиба равномерными давлениями круглых плит, свободно опёртых или жёстко защемлённых по боковым поверхностям [3, 132, 191, 195, 319, 321]. По-видимому, менее известно решение задачи об изгибе круглой пластины равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания [80, 351].

Для расчётной схемы круглой пластины, свободно опёртой по краю и изгибаемой равномерным давлением на одно из оснований при свободном другом основании [80, 260, 319–321], введём обозначения (рис. 1.6, а):



Рис. 1.6. Расчётная схема круглой пластины, свободно опёртой (а) и жёстко защемленной (б) по краю.

Рисунок 1.6. Расчётная схема круглой пластины, свободно опёртой (а) или жёстко защемлённой (б) по краю.

$a$  – радиус пластины;

$r$  – текущий радиус;

$\rho = r/a$  – относительный текущий радиус;

$h$  – толщина пластины;

$z$  – текущая осевая координата, отсчитываемая от срединной поверхности пластины в сторону её основания, свободного от давления;

$E, \mu$  – модуль продольной упругости Юнга и коэффициент поперечной деформации Пуассона материала пластины соответственно;

$D = Eh^3/(12(1 - \mu^2))$  – цилиндрическая жёсткость пластины;

$Q_r(r)$  – интенсивность радиальной поперечной силы на единицу длины цилиндрического сечения пластины;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 47/556

$M_r(r)$  – интенсивность радиального изгибающего момента на единицу длины цилиндрического сечения пластины;

$\sigma_r(r, z) = 12M_r(r)z/h^3$  – радиальное напряжение;

$M_t(r)$  – интенсивность окружного (тангенциального) изгибающего момента на единицу длины цилиндрического сечения пластины;

$\sigma_t(r, z) = 12M_t(r)z/h^3$  – окружное (тангенциальное) напряжение;

$u_r(r, z)$  – радиальное перемещение точки  $(r, z)$ ;

$u_z(r, z)$  – осевое перемещение точки  $(r, z)$  относительно точки  $(a, 0)$  края пластины.

Тогда

$$\begin{aligned} u_z(r, z) &= pa^4(1 - \rho^2)((5 + \mu)/(1 + \mu) - \rho^2)/(64D); \\ M_r(r) &= pa^2(3 + \mu)(1 - \rho^2)/16; \\ M_t(r) &= pa^2(3 + \mu - (1 + 3\mu)\rho^2)/16. \end{aligned}$$

Прогиб пластины

$$u_z(r, 0) = (3/16)(1 - \mu^2)(p/E)(a^2 - r^2)((5 + \mu)a^2/(1 + \mu) - r^2)/h^3$$

максимален в центре  $r = 0$ :

$$(1.23)$$

$$u_z(0, 0) = (3/16)(1 - \mu)(5 + \mu)(p/E)a^4/h^3.$$

Радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения

$$\sigma_r(r, z) = (3/4)(3 + \mu)pz(a^2 - r^2)/h^3;$$

$$\sigma_t(r, z) = (3/4)pz((3 + \mu)a^2 - (1 + 3\mu)r^2)/h^3$$

максимальны и равны между собой в центре поверхности низкого давления:

$$(1.24)$$

$$\sigma_r(r, h/2) = \sigma_t(r, h/2) = (3/8)(3 + \mu)pa^2/h^2.$$

Здесь и в дальнейшем (если это не оговаривается особо) в формулы не вводятся элементарные поправки на обжатие боковой поверхности равномерным давлением. Такой подход не только упрощает формулы, но и вследствие своего единообразия позволяет проводить сопоставление различных методов расчёта.

Расчётная схема свободно опёртой по краю пластины (здесь и в дальнейшем подразумеваются осесимметричная задача теории упругости без объёмных сил и без кручения и равномерное распределение давления) является простейшей из тех, которые хотя бы качественно отражают характер деформирования светопрозрачного элемента. Эта расчётная схема основана на гипотезе нерастяжимости срединной поверхности и на гипотезе прямых нормалей, что оправдано при

$$u_z(0, 0) \ll h \ll a.$$

С. А. Алексеев [3] вскрыл физические основы погрешностей теории пластин, связанные с принятием гипотезы прямых нормалей [219, 224, 320].

Во-первых, нормали к срединной плоскости не только поворачиваются в соответствии с её прогибом, но и сдвигаются, утрачивая перпендикулярность к деформированной срединной поверхности.

Количественный учёт сдвига нормалей выполнили С. П. Тимошенко и С. Войновский-Кригер [320] также для жёсткого защемления края, а применительно к расчётной схеме свободного опирания края дали формулу

$$(1.25)$$

$$u_z(0, 0) = (3/16)(1 - \mu)(5 + \mu)(p/E)a^4/h^3 + (1/4)(3 + \mu)(p/E)a^2/h,$$

отличающуюся от формулы (1.23) вторым слагаемым, которое пренебрежимо мало лишь при  $h \ll a$ .

Во-вторых, нормали искривляются в связи с изменением вдоль них напряжённого состояния и эффектом поперечных деформаций от сжимающего осевого напряжения, изменяющегося с толщиной, что описывается коэффициентом поперечной деформации Пуассона  $\mu$ . Эффект искривления нормалей пренебрежимо мал лишь при

$$\mu \ll 1.$$

В-третьих, длины нормалей изменяются в соответствии с обобщённым законом Гука.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 48/556

Пока толщина пластины мала по сравнению с минимальным характерным размером её оснований, отступления от гипотезы прямых нормалей невелики и теория пластин применима. Однако у светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений толщина – одного порядка величины с диаметром.

Поэтому результаты С. А. Алексева [3] позволяют предположить, что и в случае граничных условий, характерных для светопрозрачного элемента, но не рассматриваемых известными замкнутыми решениями теории упругости, максимальные напряжения занижаются теорией пластин в гораздо меньшей степени, чем прогибы, и что теория пластин неприемлема для расчёта светопрозрачных элементов иллюминаторов для высоких давлений.

Поскольку для светопрозрачных элементов толщина  $h$  и радиус  $a$  – величины одного порядка, то следует ожидать наличия погрешности, связанной со значительной относительной толщиной светопрозрачного элемента.

Поправка на толщину сплошного цилиндрического элемента предложена и в работе [260]:

(1.26)

$$u_z(0, 0) = (3/16)(1 - \mu)(5 + \mu)(p/E)a^4/h^3 + (21/160)(1 - \mu)(5 + \mu)(p/E)a^2/h.$$

Среди известных более точна расчётная схема сплошного цилиндрического элемента, поддерживаемого по боковой поверхности через механизм сдвигового напряжения [3, 69, 127, 191, 195].

Метод теории упругости предполагает отказ от характерных для сопротивления материалов упрощающих гипотез.

Однако даже в рассматриваемом случае простых геометрии тела и характера нагрузки совершенно удовлетворительное решение отсутствует.

Весьма интересны общие методы решения задач теории упругости с помощью функций напряжений [69, 165, 177, 191, 195, 276, 321].

В частности, если геометрия тела и приложенная нагрузка осесимметричны без объёмных сил и без кручения, то вводится функция напряжений Лява  $L(r, z)$  [195]. Радиальное  $u_r(r, z)$  и осевое  $u_z(r, z)$  перемещения, радиальное  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$ , осевое  $\sigma_z(r, z)$  и сдвиговое  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжения определяются однозначно через функцию напряжений Лява  $L(r, z)$  с помощью линейных дифференциальных операторов:

(1.27)

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= -(2G)^{-1} \partial^2 L(r, z) / (\partial r \partial z); \\ u_z(r, z) &= (2G)^{-1} (2(1 - \mu) \nabla^2 - \partial^2 / \partial z^2) L(r, z); \\ \sigma_r(r, z) &= (\partial / \partial z) (\mu \nabla^2 - \partial^2 / \partial r^2) L(r, z); \\ \sigma_t(r, z) &= (\partial / \partial z) (\mu \nabla^2 - r^{-1} \partial / \partial r) L(r, z); \\ \sigma_z(r, z) &= (\partial / \partial z) ((2 - \mu) \nabla^2 - \partial^2 / \partial z^2) L(r, z); \\ \tau_{rz}(r, z) &= (\partial / \partial r) ((1 - \mu) \nabla^2 - \partial^2 / \partial z^2) L(r, z), \end{aligned}$$

где

$G = E / (2(1 + \mu))$  – модуль сдвига;

$\nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2 + r^{-1} \partial / \partial r + \partial^2 / \partial z^2$  – оператор Лапласа.

Бигармоничность функции напряжений Лява

$$\nabla^2 \nabla^2 L(r, z) = 0$$

обеспечивает [195] точное выполнение уравнений равновесия

$$\partial \sigma_r(r, z) / \partial r + \partial \tau_{rz}(r, z) / \partial z + r^{-1} (\sigma_t(r, z) - \sigma_r(r, z)) = 0;$$

$$\partial \tau_{rz}(r, z) / \partial r + \partial \sigma_z(r, z) / \partial z + r^{-1} \tau_{rz}(r, z) = 0$$

и уравнений совместности деформаций в напряжениях

$$(\partial / \partial r) (\sigma_t(r, z) - \mu (\sigma_r(r, z) + \sigma_z(r, z))) + (1 + \mu) r^{-1} (\sigma_t(r, z) - \sigma_r(r, z)) = 0;$$

$$r \partial^2 / \partial z^2 (\sigma_t(r, z) - \mu (\sigma_r(r, z) + \sigma_z(r, z))) - 2(1 + \mu) \partial \tau_{rz}(r, z) / \partial z + (\partial / \partial r) (\sigma_z(r, z) - \mu (\sigma_r(r, z) + \sigma_t(r, z))) = 0.$$

С. П. Тимошенко и Дж. Гудьер [321] для решения задачи об изгибе равномерным давлением круглой плиты, свободно опертой по краю, индуктивным путём показали возможность использования шестой степени функции напряжений Лява в виде наложения (суперпозиции) нескольких элементарных решений, дающего неустранимую невязку  $\sigma_r(a, z)$ . В работе [321] они получены с помощью перехода к полярной системе координат и полиномов Лежандра.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 49/556

Коэффициенты при этих решениях выбираются удовлетворяющими граничным условиям на обоих торцах (плоских основаниях). Кроме того, аннулируется (приравнивается нулю) интеграл, которым выражается изгибающий момент на краю. При выборе системы координат согласно рисунку 1.6, а формулы для осевого перемещения  $u_z(r, 0)$ , радиального  $\sigma_r(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений принимают вид

$$(1.28)$$

$$u_z(r, 0) = (3/16)(1 - \mu^2)(p/E)(a^2 - r^2)((5 + \mu)a^2/(1 + \mu) - r^2)/h^3 + (3/40)(8 + \mu + \mu^2)(p/E)(a^2 - r^2)/h;$$

$$\sigma_r(r, z) = (3/4)(3 + \mu)pz(a^2 - r^2)/h^3 - (3/20)(2 + \mu)pz/h + (2 + \mu)pz^3/h^3;$$

$$\sigma_z(r, z) = p(-1/2 + (3/2)z/h - z^3/h^3);$$

$$\tau_{rz}(r, z) = -3pr/h(1/4 - z^2/h^2).$$

Известен лишь частичный анализ этого решения. В работе [321] отмечено, что граничное условие тождественного аннулирования радиального напряжения на краю  $\sigma_r(a, z)$  выполняется лишь в смысле равенств нулю среднего и изгибающего момента, и указано, что использование для функции напряжений Лява  $L(r, z)$  более высокой степени, чем шестая, позволяет получить решения задач с более сложными распределениями нагрузок и вообще граничными условиями. Однако остались нераскрытыми вопросы о возможности уточнить полученное приближённое решение с использованием той же шестой степени функции напряжений Лява либо путём её повышения.

Следовательно, известные методы не дают исчерпывающего решения задачи.

Более того, возникает проблема принципиальной полноты класса решений, даваемых всевозможными бигармоническими функциями напряжений Лява. Действительно, А. Ляв [195] показал, что если функция  $L(r, z)$  бигармонична, то все уравнения равновесия и совместности деформаций выполняются точно. Однако, насколько известно, ни он, ни другие исследователи даже не ставили обратной проблемы: пусть все эти уравнения выполнены точно для некоторых распределений перемещений и напряжений в пространстве или области безотносительно граничных условий; непременно ли при этом существует некая функция  $L(r, z)$  такая, что эти распределения выражаются через неё с помощью тех же операторов (1.27). Если существование подобной функции необязательно, то названный класс решений принципиально неполон и подлежит расширению другими методами. Другими словами, бигармоничность функции Лява, как известно, лишь достаточна для точного выполнения уравнений равновесия и совместности деформаций, но проблематично, является ли и необходимым для этого условием при (1.27) бигармоничность подобной функции.

В работах [191, 319] оценены поправки к теории тонких пластин в формулах для осевого перемещения  $u_z(0, 0)$  и радиального напряжения  $\sigma_r(0, 0)$  и сделан вывод о малых погрешностях теории тонких пластин при

$$h/(2a) \leq 0.1.$$

Для светопрозрачного элемента с жёстко закреплённым краем теория тонких пластин, основанная на упрощающих гипотезах о характере деформирования, в системе координат согласно рис. 1.6, б даёт следующее решение:

$$u_z(r, z) = pa^4(1 - \rho^2)^2/(64D);$$

$$M_r(r) = pa^2(1 + \mu - (3 + \mu)\rho^2)/16;$$

$$M_t(r) = pa^2(1 + \mu - (1 + 3\mu)\rho^2)/16;$$

$$u_z(r, 0) = (3/16)(1 - \mu^2)(p/E)(a^2 - r^2)^2/h^3;$$

$$\sigma_r(r, z) = (3/4)p((1 + \mu)a^2 - (3 + \mu)r^2)z/h^3;$$

$$\sigma_t(r, z) = (3/4)p((1 + \mu)a^2 - (1 + 3\mu)r^2)z/h^3.$$

Максимальные значения перемещений и напряжений

$$(1.29)$$

$$u_z(0, 0) = (3/16)(1 - \mu^2)(p/E)a^4/h^3;$$

$$\sigma_r(a, -h/2) = (3/4)pa^2/h^2.$$

Уточнённая формула имеет вид

$$(1.30)$$

$$u_z(0, 0) = (3/16)(1 - \mu^2)(p/E)a^4/h^3 + (5/8)(1 - \mu^2)(p/E)a^2/h.$$

Учёт сдвига нормалей даёт

$$(1.31) \\ u_z(r, 0) = (3/16)(1 - \mu^2)(p/E)(a^2 - r^2)^2/h^3 + (3/4)(1 + \mu)(p/E)(a^2 - r^2)/h.$$

Второе слагаемое в формуле (1.31) является поправочным к теории тонких пластин, оно несущественно лишь при

$$h \ll a.$$

В работе [319] также отмечено, что формула (1.31) совпадает с результатом, полученным в работе [195] методами теории упругости.

В работах [3, 191, 195] предложены различные подходы к решению задачи об изгибе круглой плиты с жёстко защемлённым краем и различные варианты удовлетворения граничных условий на краю. По существу эти варианты сводятся к одному:

$$\int_{-h/2}^{h/2} u_z(a, z) dz = 0; \\ u_z(a, h/2) = 0.$$

В работе [3] приведены следующие формулы:

$$(1.32) \\ u_r(r, z) = - (3/4)(1 - \mu^2)(p/E)(1 - r^2/a^2 - (2 - \mu)(1 - 4z^2/h^2)h^2/a^2)/(3(1 - \mu))a^2rz/h^3; \\ u_z(0, z) = (3/16)(1 - \mu^2)(p/E)(1 + (8 - \mu)h^2/(3(1 - \mu)a^2) - (4\mu/(1 - \mu) + 4\mu(4 + \mu)h^2/(3(1 - \mu)^2a^2))a^4/h^3; \\ \sigma_r(a, -h/2) = (3/4)p(1 - \mu(4 - 3\mu + \mu^2)h^2/(3(1 - \mu)^2a^2))a^2/h^2; \\ \sigma_r(a, h/2) = - (3/4)p(1 + \mu^2(1 + \mu)h^2/(3(1 - \mu)^2a^2))a^2/h^2.$$

В работе [3] оценены погрешности теории тонких пластин. Поправка составляет для прогиба 13 % при  $h/a = 1/5$  и 53 % при  $h/a = 2/5$ ;

для наибольшего растягивающего напряжения 12 % при  $h/a = 2/5$ ;

для наибольшего сжимающего напряжения 2 % при  $h/a = 2/5$ .

Следовательно, при относительной толщине  $h/a$  не более  $2/5$  теория тонких пластин определяет достаточно надёжно только напряжения, но не прогибы.

Предложен и развит символический метод А. И. Лурье решения задач о слое и плите, приведено решение для случая  $u_r(a, z) = 0$  путём разложения перемещений в бесконечные ряды с использованием цилиндрических функций Бесселя [191]. Символический метод с решением для жёсткого защемления нашёл своё дальнейшее развитие в работе [123].

В работе [3] дана классификация направлений в теории плит и рассмотрены шарнирное опирание и своеобразное закрепление края при равномерном давлении.

В. И. Блох разработал метод решения задачи о нагружении плиты с приближённым выполнением граничных условий на боковых поверхностях применительно к решению задач о различных условиях опирания кольцевой плиты, предложил общее решение осесимметричной задачи через бигармоническую функцию напряжений, выделил алгебраические части формул, содержащих ряды функций Бесселя, и привёл соответствующие выражения для напряжений, содержащие несколько произвольных постоянных и позволяющие решить задачу о сплошном или полом цилиндре с равномерными давлениями на торцах [69]. Ряд общих подходов к решению задач для сплошных и в особенности полых цилиндрических тел изложен в работах [132, 165]. Во всех указанных трудах отсутствует достаточно полное изложение решений для изгиба равномерным давлением на одно основание круглой плиты, свободно опертой или жёстко защемлённой по краю (боковой поверхности). В лучшем случае приводятся некоторые формулы, показывающие применимость теории тонких пластин при отношении толщины к диаметру не более 0.1. Не оценивается погрешность в удовлетворении граничных условий на боковой поверхности. Не рассматриваются различные способы приближённого выполнения этих условий. Совершенно не рассматриваются плиты с толщиной порядка диаметра, характерной для светопрозрачных элементов для высоких давлений. Решения, содержащие бесконечные ряды цилиндрических функций Бесселя, неудобны для практического использования, особенно при усложнении граничных условий, учитывающих действительную опору.

В то же время нет попыток рассмотреть сколько-нибудь общее представление функции Лява, которое дало бы в известном смысле лучшее из элементарных решений задачи о

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 51/556

деформировании именно существенно трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Пожалуй, ещё важнее следующее обстоятельство.

Во всех известных решениях одностороннее равномерное давление на торец (плоское основание) уравнивается сдвиговым напряжением на боковой поверхности сплошного цилиндрического элемента.

Для жёстко закреплённого края в действительности дело обстоит именно так.

Если же сплошной цилиндрический элемент свободно опёрт, как это обычно бывает, то давление на торец уравнивается контактным давлением опоры на другой торец.

Расчётная схема частично оправдывалась бы только в том случае, если бы сплошной цилиндрический элемент самым краем контактировал с узкой опорой.

Однако такая опора удобна для расчётной схемы, а не для светопрозрачного элемента: его несущая способность оказывается малой вследствие разрушения края.

Реально могут использоваться два варианта опирания.

В первом варианте опирания узкая зона контакта светопрозрачного элемента с опорой полезна лишь для аннулирования прогиба центра сплошного цилиндрического элемента за счёт прогиба края, а для этого зона контакта должна быть удалена от края на некоторое расстояние, подлежащее определению.

Отсутствие прогиба центра светопрозрачного элемента полезно тем, что при давлении практически не изменяются оптические свойства светопрозрачного элемента и не ухудшается качество изображения.

Второй вариант опирания имеет целью снижение контактного давления опоры на сплошной цилиндрический элемент путём увеличения ширины контакта.

В этом случае с опорой контактирует кольцевая часть торца сплошного цилиндрического элемента от края до центрального круга – светового сечения.

Ясно, что в обоих случаях известные решения для толстых плит принципиально неприемлемы.

Поэтому приведём имеющиеся решения, основанные на упрощающих гипотезах теории тонких пластин, позволяющие учесть действительные условия опирания [80, 351].

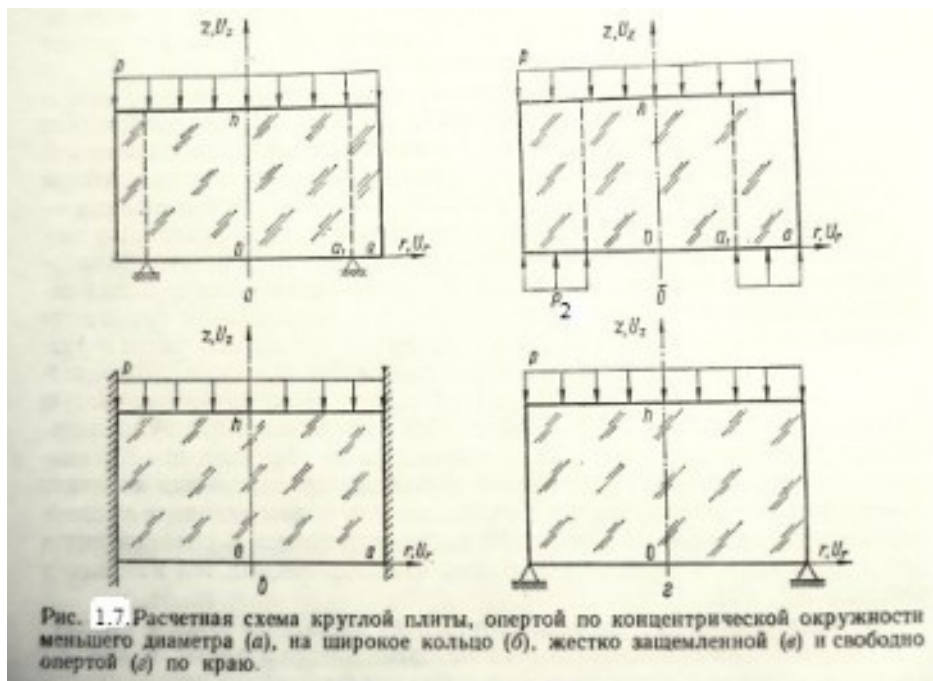


Рисунок 1.7. Расчётная схема круглой плиты или пластины, опёртой по концентрической окружности меньшего радиуса (а), с повышенным равномерным периферическим противодействием (б), жёстко закреплённой (в) или свободно опёртой (г) по краю.

На рис. 1.7, а показана расчётная схема круглой плиты или пластины под равномерным давлением, свободно опёртой по концентричной окружности меньшего радиуса  $a_1$ . Здесь и далее, если явно не оговорено иное, текущая осевая координата  $z$  отсчитывается от основания плиты или пластины, хотя бы частично свободного от давления, в сторону её основания полностью под давлением, а осевое перемещение  $u_z(r, z)$  с положительным направлением от частично нагруженного основания к полностью нагруженному основанию отсчитывается относительно условно неподвижного края  $(a_1, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного основания. В принятой системе координат с учётом соответствующих формул для радиального напряжения

$$\sigma_r(r, z) = 6M_r(r)(1 - 2z/h)/h^2$$

и для окружного (тангенциального) напряжения

$$\sigma_t(r, z) = 6M_t(r)(1 - 2z/h)/h^2$$

и при дополнительном обозначении

$$\beta = a_1/a$$

расчётные формулы [80, 351] для круглой пластины имеют следующий вид:

$$(1.33)$$

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  круглой пластины

$$u_z(r, z) = -pa^4((1 + \mu)\rho^4 - 2(1 + 3\mu + 2(1 - \mu)\beta^2 + 4(1 + \mu)\ln\beta)\rho^2 + 2(1 + 3\mu)\beta^2 + (3 - 5\mu)\beta^4 + 8(1 + \mu)\beta^2\ln\beta)/(64D(1 + \mu));$$

$$u_z(0, z) = -pa^4(2(1 + 3\mu)\beta^2 + (3 - 5\mu)\beta^4 + 8(1 + \mu)\beta^2\ln\beta)/(64D(1 + \mu));$$

$$u_z(a_1, z) = 0;$$

$$M_r(r) = pa^2(- (3 + \mu)\rho^2 + 1 + 3\mu + 2(1 - \mu)\beta^2 + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_r(0) = pa^2(1 + 3\mu + 2(1 - \mu)\beta^2 + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_r(a_1) = pa^2((1 + 3\mu)(1 - \beta^2) + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_t(r) = pa^2((1 + 3\mu)(1 - \rho^2) + 2(1 - \mu)\beta^2 + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_t(0) = pa^2(1 + 3\mu + 2(1 - \mu)\beta^2 + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_t(a_1) = pa^2(1 + 3\mu + (1 - 5\mu)\beta^2 + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = - (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a_1^2a^2/h^4 + (3/16)(1 - \mu)(3 - 5\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu)^2(a_1^2a^2/h^4)\ln(a/a_1) + ((3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/a_1))r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/a_1) - (3/8)(3 + \mu)r^2/h^2 + (- (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/a_1) + (3/4)(3 + \mu)r^2/h^2)z/h;$$

$$\sigma_t(r, z)/p = (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/a_1) - (3/8)(1 + 3\mu)r^2/h^2 + (- (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/a_1) + (3/4)(1 + 3\mu)r^2/h^2)z/h;$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  круглой пластины

$$u_z(r, z) = -pa^4((1 + \mu)\rho^4 + 2(3 + \mu - 2(1 - \mu)\beta^2 - 4(1 + \mu)\ln\beta - 4(1 + \mu)\ln(\rho/\beta))\rho^2 - 2(3 + \mu)\beta^2 + (3 - 5\mu)\beta^4 + 8(1 + \mu)\beta^2(2\ln\beta - \ln\rho))/(64D(1 + \mu));$$

$$u_z(a_1, z) = 0;$$

$$u_z(a, z) = -pa^4(7 + 3\mu - 2(5 - \mu)\beta^2 + (3 - 5\mu)\beta^4 + 16(1 + \mu)\beta^2\ln\beta)/(64D(1 + \mu));$$

$$M_r(r) = pa^2((3 + \mu)(1 - \rho^2) + 2(1 - \mu)\beta^2(1 - 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\ln\rho)/16;$$

$$M_r(a_1) = pa^2((1 + 3\mu)(1 - \beta^2) + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_r(a) = 0;$$

$$M_t(r) = pa^2(5\mu - 1 - (1 + 3\mu)\rho^2 + 2(1 - \mu)\beta^2(1 + 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\ln\rho)/16;$$

$$M_t(a_1) = pa^2(1 + 3\mu + (1 - 5\mu)\beta^2 + 4(1 + \mu)\ln\beta)/16;$$

$$M_t(a) = pa^2(1 - \mu)(2\beta^2 - 1)/8;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = - (3/16)(1 - \mu)(3 - 5\mu)a_1^4/h^4 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a_1^2a^2/h^4 - (3/2)(1 - \mu^2)(a_1^2a^2/h^4)\ln(a_1^2/(ah)) + (3/2)(1 - \mu^2)(a_1^2a^2/h^4)\ln(r/h) + ((3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)(a^2/h^2)\ln(a/h))r^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)(a^2/h^2)(r^2/h^2)\ln(r/h) - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = - (3/4)(1 - \mu)a_1^2a^2/(h^2r^2) + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(3 + \mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/h) + (3/2)(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(r/h) - (3/8)(3 + \mu)r^2/h^2 + ((3/2)(1 - \mu)a_1^2a^2/(h^2r^2) - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(3 + \mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(a/h) - 3(1 + \mu)(a^2/h^2)\ln(r/h) + (3/4)(3 + \mu)r^2/h^2)z/h;$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 53/556

$$\sigma_r(r, z)/p = (3/4)(1 - \mu)a_1^2 a^2 / (h^2 r^2) + (3/4)(1 - \mu)a_1^2 / h^2 + (3/8)(-1 + 5\mu)a^2 / h^2 - (3/2)(1 + \mu)(a^2 / h^2) \ln(a/h) + (3/2)(1 + \mu)(a^2 / h^2) \ln(r/h) - (3/8)(1 + 3\mu)r^2 / h^2 + (- (3/2)(1 - \mu)a_1^2 a^2 / (h^2 r^2) - (3/2)(1 - \mu)a_1^2 / h^2 - (3/4)(-1 + 5\mu)a^2 / h^2 + 3(1 + \mu)(a^2 / h^2) \ln(a/h) - 3(1 + \mu)(a^2 / h^2) \ln(r/h) + (3/4)(1 + 3\mu)r^2 / h^2) z / h.$$

На рис. 1.7, б показана расчётная схема круглой плиты или пластины, опёртой на широкое кольцо меньшим радиусом  $a_1$  и большим радиусом  $a$ . Предполагается равномерное вдоль радиуса контактное давление

$$p_2 = pa^2 / (a^2 - a_1^2)$$

опоры на плиту или пластину. Для круглой пластины эта расчётная схема является суперпозицией (наложением) двух следующих расчётных схем [80, 351]:

1) расчётной схемы свободно опёртой по краю круглой пластины радиусом  $a$ , нагруженной давлением  $p$  на верхнее основание:

$$u_z(r, z) = -pa^4(1 - \rho^2)((5 + \mu)/(1 + \mu) - \rho^2)/(64D);$$

$$M_r(r) = pa^2(3 + \mu)(1 - \rho^2)/16;$$

$$M_t(r) = pa^2(3 + \mu - (1 + 3\mu)\rho^2)/16;$$

2) расчётной схемы свободно опёртой по краю круглой пластины радиусом  $a$ , нагруженной давлением  $-p_2$  на периферическую часть верхнего основания:

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  круглой пластины

$$u_z(r, z) = -p_2 a^4 (-2\rho^2(3 + \mu - 4\beta^2 + (1 - \mu)\beta^4 - 4\beta^2(1 + \mu)\ln\beta) + 5 + \mu - 4(3 + \mu)\beta^2 + (7 + 3\mu)\beta^4 - 4(1 + \mu)\beta^4 \ln\beta) / (64D(1 + \mu));$$

$$u_z(0, z) = -p_2 a^4 (5 + \mu - 4(3 + \mu)\beta^2 + (7 + 3\mu)\beta^4 - 4(1 + \mu)\beta^4 \ln\beta) / (64D(1 + \mu));$$

$$u_z(a_1, z) = -p_2 a^4 (-6\beta^2 - 2\mu\beta^2 + 8\beta^4 - 2(1 - \mu)\beta^6 + 8\beta^4(1 + \mu)\ln\beta + 5 + \mu - 4(3 + \mu)\beta^2 + (7 + 3\mu)\beta^4 - 4(1 + \mu)\beta^4 \ln\beta) / (64D(1 + \mu));$$

$$M_r(r) = p_2 a^2 (3 + \mu - 4\beta^2 + (1 - \mu)\beta^4 + 4\beta^2(1 + \mu)\ln\beta) / 16;$$

$$M_r(0) = p_2 a^2 (3 + \mu - 4\beta^2 + (1 - \mu)\beta^4 + 4\beta^2(1 + \mu)\ln\beta) / 16;$$

$$M_r(a_1) = p_2 a^2 (3 + \mu - 4\beta^2 + (1 - \mu)\beta^4 + 4\beta^2(1 + \mu)\ln\beta) / 16;$$

$$M_t(r) = p_2 a^2 (3 + \mu - 4\beta^2 + (1 - \mu)\beta^4 + 4\beta^2(1 + \mu)\ln\beta) / 16;$$

$$M_t(0) = p_2 a^2 (3 + \mu - 4\beta^2 + (1 - \mu)\beta^4 + 4\beta^2(1 + \mu)\ln\beta) / 16;$$

$$M_t(a_1) = p_2 a^2 (3 + \mu - 4\beta^2 + (1 - \mu)\beta^4 + 4\beta^2(1 + \mu)\ln\beta) / 16;$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  круглой пластины

$$u_z(r, z) = -p_2 a^4 ((1 + \mu)\rho^4 - 2((3 + \mu)(1 - 2\beta^2) + (1 - \mu)\beta^4 - 4(1 + \mu)\beta^2 \ln\rho)\rho^2 - 4(1 + \mu)\beta^4 \ln\rho + 5 + \mu - 4(3 + \mu)\beta^2 + 2(1 - \mu)\beta^4) / (64D(1 + \mu));$$

$$u_z(a_1, z) = -p_2 a^4 ((1 + \mu)\rho^4 - 2((3 + \mu)(1 - 2\beta^2) + (1 - \mu)\beta^4 - 4(1 + \mu)\beta^2 \ln\rho)\rho^2 - 4(1 + \mu)\beta^4 \ln\rho + 5 + \mu - 4(3 + \mu)\beta^2 + 2(1 - \mu)\beta^4) / (64D(1 + \mu));$$

$$u_z(a, z) = -p_2 a^4 ((1 + \mu)\rho^4 - 2((3 + \mu)(1 - 2\beta^2) + (1 - \mu)\beta^4 - 4(1 + \mu)\beta^2 \ln\rho)\rho^2 - 4(1 + \mu)\beta^4 \ln\rho + 5 + \mu - 4(3 + \mu)\beta^2 + 2(1 - \mu)\beta^4) / (64D(1 + \mu));$$

$$M_r(r) = p_2 a^2 ((3 + \mu)(1 - \rho^2) + (1 - \mu)\beta^4(1 - 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\beta^2 \ln\rho) / 16;$$

$$M_r(a_1) = p_2 a^2 ((3 + \mu)(1 - \rho^2) + (1 - \mu)\beta^4(1 - 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\beta^2 \ln\rho) / 16;$$

$$M_r(a) = p_2 a^2 ((3 + \mu)(1 - \rho^2) + (1 - \mu)\beta^4(1 - 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\beta^2 \ln\rho) / 16;$$

$$M_t(r) = p_2 a^2 (3 + \mu - (1 + 3\mu)\rho^2 + (1 - \mu)\beta^4(1 + 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\beta^2 \ln\rho - 4(1 - \mu)\beta^2) / 16;$$

$$M_t(a_1) = p_2 a^2 (3 + \mu - (1 + 3\mu)\rho^2 + (1 - \mu)\beta^4(1 + 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\beta^2 \ln\rho - 4(1 - \mu)\beta^2) / 16;$$

$$M_t(a) = p_2 a^2 (3 + \mu - (1 + 3\mu)\rho^2 + (1 - \mu)\beta^4(1 + 1/\rho^2) + 4(1 + \mu)\beta^2 \ln\rho - 4(1 - \mu)\beta^2) / 16.$$

Итоговые (для суперпозиции обеих расчётных схем) формулы для осевого перемещения  $u_z(r, z)$ , радиального  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$  напряжений:

$$(1.34)$$

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  круглой пластины

$$u_z(r, z)E/(ph) = - (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 - (3/2)(1 - \mu^2)(a_1^4 a^2 / (h^4(a^2 - a_1^2))) \ln(a/a_1) + ((3/8)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)(a_1^2 a^2 / (h^2(a^2 - a_1^2))) \ln(a/a_1)) r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = (1 - 2z/h)((3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)(a_1^2 a^2 / (h^2(a^2 - a_1^2))) \ln(a/a_1) - (3/8)(3 + \mu)r^2/h^2);$$

$$\sigma_t(r, z)/p = (1 - 2z/h)((3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)(a_1^2 a^2 / (h^2(a^2 - a_1^2))) \ln(a/a_1) - (3/8)(1 + 3\mu)r^2/h^2);$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  круглой пластины

$$u_z(r, z)E/(ph) = - (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a_1^4/(a^2(a^2 - a_1^2)) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4 a^2 / (h^4(a^2 - a_1^2)) + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4 a^2 / (h^4(a^2 - a_1^2)) \ln(a/h) - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4 a^2 / (h^4(a^2 - a_1^2)) \ln(r/h) + ((3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^4 / (h^2(a^2 - a_1^2)) - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4 a^2 / (h^4(a^2 - a_1^2))) \ln(a/a_1) + ((3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^4 / (h^2(a^2 - a_1^2)) - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4 a^2 / (h^4(a^2 - a_1^2))) \ln(r/h) - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4 a^2 / (h^4(a^2 - a_1^2)) r^2/h^2 + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4 a^2 / (h^4(a^2 - a_1^2)) r^4/h^4;$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 54/556

$$\begin{aligned} & a_1^2)) - (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) + (3/2)(1 - \mu^2) a_1^2 a^2 \ln(a/h) / (h^2(a^2 - a_1^2)) r^2 / h^2 - (3/2)(1 - \mu^2) (a_1^2 / h^2 \\ & a^2 / (a^2 - a_1^2)) (r^2 / h^2) \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2) a^2 / (a^2 - a_1^2) r^4 / h^4; \\ \sigma_r(r, z) / p = & (1 - 2z/h) ((3/8) a_1^4 a^2 / (h^2(a^2 - a_1^2) r^2) - (3/8)(1 - \mu) a_1^4 / (h^2(a^2 - a_1^2)) + (3/2)(1 + \mu) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - \\ & a_1^2) \ln(a/r) - (3/8)(3 + \mu) a_1^2 (a^2 - r^2) / (h^2(a^2 - a_1^2))); \\ \sigma_z(r, z) / p = & (1 - 2z/h) (- (3/8) a_1^4 a^2 / (h^2(a^2 - a_1^2) r^2) - (3/8)(1 - \mu) a_1^4 / (h^2(a^2 - a_1^2)) + (3/2)(1 + \mu) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - \\ & a_1^2) \ln(a/r) + (3/8)(1 - 5\mu) a_1^2 / h^2 a^2 / (a^2 - a_1^2) + (3/8)(3 + \mu) a^2 r^2 / (h^2(a^2 - a_1^2))). \end{aligned}$$

Известны различные подходы к расчёту оптических свойств плоских светопрозрачных элементов. В работах [245, 289] учитывается прогиб сплошного цилиндрического элемента как свободно опертой по краю пластины, в остальных случаях деформация стеклоэлемента вообще не учитывается.

При этом оказывается, что в воздухе плоский светопрозрачный элемент не влияет на изображение бесконечно удалённых предметов, а при конечном не слишком малом удалении влияет слабо. Вода увеличивает на треть масштаб изображения и уменьшает на треть поле зрения, однако считается, что сам стеклоэлемент и в этом случае вносит несущественные изменения, как и в воздухе [245].

Эти четыре основные расчётные схемы изгиба цилиндрических тел вместе с некоторыми основными формулами для перемещений и напряжений приведены в табл. 1.2. В ней и всюду в дальнейшем приняты следующие обозначения:

$p$  – гидростатическое давление;

$E, \mu$  – модуль продольной упругости Юнга и коэффициент поперечной деформации Пуассона материала сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента;

$h, a, a_1$  – толщина и радиус сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента, и радиус ненагруженной центральной части его частично нагруженного внутреннего основания;

$r, z$  – цилиндрические координаты: текущий радиус и текущая осевая координата, отсчитываемая от частично нагруженного внутреннего основания в сторону внешнего основания полностью под давлением среды;

$u_r(r, z)$  – радиальное перемещение точки  $(r, z)$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента;

$u_z(r, z)$  – осевое перемещение точки  $(r, z)$  элемента относительно точки  $(a_1, 0)$  края ненагруженной части частично нагруженного внутреннего основания сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента;

$\sigma_r(r, z), \sigma_t(r, z), \sigma_z(r, z), \tau_{rz}(r, z)$  – радиальное, тангенциальное (окружное), осевое и сдвиговое напряжения в точке  $(r, z)$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента.

Для случаев поддержки по краю формулы классической теории пластин сопровождаются известными поправками А. Лява [195], С. П. Тимошенко [321], А. И. Лурье [191], А. С. Вольмира [260], С. А. Алексеева [3] без исследования собственных погрешностей и пределов применимости (отмечено лишь в [191], что боковая поверхность плиты значительно меньше её основания). Для остальных расчётных схем подобных уточнений, по-видимому, не имеется.

Сопоставление этих расчётных схем с условиями опирания светопрозрачных элементов в действительных конструкциях иллюминаторов показывает, что к действительности ближе других четвертая схема по теории пластин с равномерным противодействием на периферическую часть основания со свободной центральной частью, однако для этой схемы никаких известных уточнений не имеется и можно ожидать её пригодности лишь для сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента, малой относительной толщины и неприемлемости четвертой схемы по теории пластин для сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в том числе светопрозрачного элемента, большой относительной толщины, характерной для иллюминаторов для высоких давлений.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 55/556

Таблица 1.2. Основные известные формулы для изгибаемых равномерными давлениями круглых пластин и плит. Известные аналитические решения для изгиба цилиндрических тел. В левом столбце – четыре расчётные схемы для следующих способов удержания равновесия в порядке сверху вниз:  
свободное опирание края;  
жёсткое защемление края;  
опирание по окружности меньшего радиуса;  
равномерное противодавление на периферическую часть основания со свободной центральной частью.

Таблица 1.2. Основные известные формулы для изгибаемых равномерными давлениями круглых пластин и плит

Схема нагружения	Стрела прогиба и максимум напряжений по теории пластин	Уточнение А.С.Вельмира	Уточнение С.П.Тимшенко	Уточнения А.И.Дурье, А.Лява, С.А.Алексеева
	$u_z(0,0) = -\frac{3}{16}(1-\mu)(5+\mu)\frac{p}{E}\frac{a^4}{h^3}$ $\epsilon_r(0,0) = \frac{3}{8}(3+\mu)\frac{a^2}{h^2}p$	$-\frac{21}{160}(1-\mu)(5+\mu)\frac{p}{E}\frac{a^4}{h^3}$	$-\frac{1}{4}(3+\mu)\frac{p}{E}\frac{a^4}{h^3}$	$-\frac{3}{40}(8+\mu+\mu^2)\frac{p}{E}\frac{a^4}{h^3}$ $\frac{1}{20}(2+\mu)p$
	$u_z(0,0) = -\frac{3}{16}(1-\mu^2)\frac{p}{E}\frac{a^4}{h^3}$ $\epsilon_r(a,h) = \frac{3}{4}\frac{a^2}{h^2}p$	$-\frac{5}{8}(1-\mu^2)\frac{p}{E}\frac{a^4}{h^3}$	$-\frac{3}{4}(1+\mu)\frac{p}{E}\frac{a^4}{h^3}$	$-\frac{1}{4}(1+\mu)(2-\mu-\frac{1+\mu}{4}\frac{h^2}{a^2})\frac{p}{E}\frac{a^4}{h^3}$ $-\frac{1}{4}\mu\frac{4-3\mu+\mu^2}{(1-\mu)^2}p$
	$u_z(0,0) = [-\frac{3}{2}(1-\mu)(1+3\mu)\frac{a^4}{h^3} - \frac{3}{16}(1-\mu) \times (3-5\mu)\frac{a^4}{h^3} + \frac{3}{2}(1-\mu^2)\frac{a^4}{h^3} \ln\frac{a}{a_1}] \frac{p}{E}h$ $\epsilon_r(0,0) = [\frac{3}{4}(1-\mu)\frac{a^2}{h^2} + \frac{3}{8}(1+3\mu)\frac{a^2}{h^2} - \frac{3}{2}(1+\mu)\frac{a^2}{h^2} \ln\frac{a}{a_1}] p$	—	—	—
	$u_z(0,0) = [-\frac{3}{16}(1-\mu)(1-3\mu)\frac{a^4}{h^3} - \frac{3}{2}(1-\mu^2)\frac{a^4}{h^3} \ln\frac{a}{a_1}] \frac{p}{E}h$ $\epsilon_r(0,0) = [\frac{3}{8}(1-\mu)\frac{a^2}{h^2} + \frac{3}{2}(1+\mu)\frac{a^2}{h^2} \ln\frac{a}{a_1}] p$	—	—	—

Правда, для самоуравновешенной равномерными давлениями круглой плиты при подобных граничных условиях известен метод И. Снеддона [291], основанный на преобразованиях Фурье. Однако условия на боковой поверхности И. Снеддон не рассматривает вовсе, откуда следует, что его метод едва ли даст уточнение по сравнению с теорией пластин. К тому же в методе И. Снеддона утрачено такое преимущество решений по теории пластин, как простота. Например, для осевого перемещения метод И. Снеддона ведёт к формуле:

$$u_z(r, z) = - (p/E)z + (1 + \mu)(p/E)a_1 a / (a^2 - a_1^2) \int_0^\infty \zeta^{-1} [a_1 J_1(a\zeta) - a J_1(a_1\zeta)] J_0(\zeta r) \{ (\text{sh}\zeta h - \zeta h)^{-1} [ - \zeta h/2 \text{sh}(\zeta h/2) \text{ch}(\zeta(z - h/2)) - 2(1 - \mu) \text{ch}(\zeta h/2) \text{ch}(\zeta(z - h/2)) + \zeta(z - h/2) \text{ch}(\zeta h/2) \text{sh}(\zeta(z - h/2))] + (\text{sh}\zeta h + \zeta h)^{-1} [\zeta h/2 \text{ch}(\zeta h/2) \text{sh}(\zeta(z - h/2)) + 2(1 - \mu) \text{sh}(\zeta h/2) \text{sh}(\zeta(z - h/2)) - \zeta(z - h/2) \text{sh}(\zeta h/2) \text{ch}(\zeta(z - h/2))] \} d\zeta,$$

где

$$J_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i / [i!(i+n)!] (x/2)^{2i+n}$$

есть функция Бесселя n-го порядка, здесь n = 0, n = 1. Использовать такое решение каким-либо образом на практике не представляется возможным, не случайно сам И. Снеддон назвал его формальным.

Аналогичны и многие другие известные результаты, по существу лишь доказывающие теорему существования упругого решения [331, 332].

В работе [127] предложен вывод результатов для толстой плиты при жёстком защемлении края из формул для пластины, рассмотрена эллиптическая и как частный случай круговая

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 56/556

форма плиты, приведены формулы для изгибающих моментов и напряжений в центрах торцов и оценена погрешность теории тонких пластин.

Немало известных решений относятся к иным, чем в технике высоких давлений, граничным условиям, однако представляют большой методический интерес. Б. Г. Галёркин [89] сопоставил напряжения в прямоугольной плите с полученными по теории пластин и сделал вывод о применимости последней для расчёта плит с отношением толщины к наименьшему размеру в плане до  $1/3$ , однако из самой работы и других изложенных здесь результатов следует, что этот вывод относится лишь к напряжениям, но не к прогибам. Что касается перемещений, то ещё раз отметим, что, как показал С. А. Алексеев [3] в анализе решения задачи об изгибе круглой плиты с жёстко защемлённым краем, поправка к стреле прогиба составляет 53 % величины, подсчитанной по теории пластин, уже при отношении толщины к диаметру, равном  $1/5$  (поправка же к максимальным напряжениям в этом случае составляет 12 %).

Отметим, что авторы известных работ по теории плит [3, 69, 127, 132, 191, 195, 254, 263, 276, 319, 321] рассматривают их относительную (делённую на минимальный характерный размер основания) толщину большей, чем это характерно для теории пластин, но значительно меньшей, чем единица.

В целом с методической точки зрения интересны работы Б. Г. Галёркина [89], С. Г. Гутмана [127], А. И. Лурье [191], В. К. Прокопова [254], В. Т. Гринченко и А. Ф. Улитко [123], В. И. Блоха [69], М. А. Колтунова, Ю. Н. Васильева и В. А. Черных [165], В. Г. Рекача [276], Л. Г. Доннелла [132]. Специально посвящена исследованиям перемещений и напряжений в светопрозрачном элементе иллюминатора использующая метод Б. Н. Жемочкина [133] в теории плит, лежащих на упругом основании, работа В. Ф. Клёнова [155]. Но и предложенная им методика расчёта не рассматривает иллюминатор комплексно с учётом его оптических свойств, значительно уступает теории пластин в простоте, не учитывает трёхмерности светопрозрачных элементов и не пригодна для иллюминаторов для высоких давлений. Правда, можно ожидать, что для таких иллюминаторов справедлив основанный на неприемлемых решениях вывод [243] о малом влиянии напряжённого состояния в стеклоэлементах на показатели преломления, поскольку напряжения определяются используемыми в настоящее время методами с меньшими погрешностями, чем перемещения, а главное, потому, что речь идёт об изменениях этих показателей преломления, на три порядка меньших, чем они сами.

В целом следует отметить, что не имеется разработанных методик, пригодных для расчёта прочности, жёсткости и оптических свойств светопрозрачных элементов иллюминаторов как существенно трёхмерных тел, характерные толщины которых имеют один порядок с диаметрами. Более того, даже отсутствуют аналитические методы расчёта, которые могли бы лечь в основу таких методик.

Правда, в последние годы И. И. Дьячков, А. Л. Квитка и др. [293–297] выполнили расчёты перемещений и напряжений в светопрозрачных элементах целого ряда конструкций иллюминаторов для высоких давлений по методу конечных элементов (МКЭ), при котором детально учтены граничные условия и существенная трёхмерность стеклоэлемента. Эти расчёты представляют большой интерес, позволяют проанализировать каждую конструкцию в отдельности, показывают [294] неприемлемость известных решений для расчёта стеклоэлементов иллюминаторов для высоких давлений, однако не дают возможности оценить парциальное влияние каждого из конструктивных параметров, выделить главные из них и построить целевые функции для оптимизации конструкций иллюминаторов для высоких давлений.

Кроме того, из теории оптических систем известно [317], что для решения задачи выбора конструктивных параметров оптической системы необходимо знать непременно аналитические зависимости между значениями оптических искажений и конструктивными параметрами системы и что решение этой задачи представляет наибольшие трудности для создания новых оптических систем.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 57/556

Поскольку в случае плоскопараллельных оптических поверхностей стеклоэлементов применяются универсальные гидрообъективы с известными конструктивными параметрами, то нужно определить аналитические зависимости оптических искажений от остальных существенных конструктивных параметров, которыми являются лишь искривления оптических поверхностей стеклоэлементов под действием внешнего давления. Эти зависимости должны быть определены аналитически через конструктивные параметры иллюминатора для высоких давлений и через величину внешнего давления. Далее можно получить аналитические зависимости искажений оптической системы, включающей иллюминатор для высоких давлений и гидрообъектив, от внешнего давления, конструктивных параметров иллюминатора для высоких давлений и конструктивных параметров гидрообъектива. Подстановка в эти зависимости значений рабочего давления, величин искажений и конструктивных параметров даёт аналитические зависимости между конструктивными параметрами самого иллюминатора для высоких давлений, то есть оптический аспект технической задачи защиты гидрообъектива от внешнего давления при обеспечении заданного качества изображения.

Что касается прочностного аспекта этой же задачи, то он решается с помощью аналитических зависимостей уже компонентов тензора напряжений в каждой точке светопрозрачного элемента как слабейшего звена иллюминатора для высоких давлений от его конструктивных параметров. Определение равносильного (эквивалентного) напряжения по той или иной теории прочности (для хрупких материалов типа неорганического стекла представляются приемлемыми первая теория прочности, критерий Кулона–Мора и критерий Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева [111, 204, 238, 239, 242, 302, 318, 333]) приводит к известным предельным напряжениям для одноосных состояний или к допускаемым напряжениям, определяемым через предельные напряжения с помощью коэффициентов запаса. Аналогично исчерпывается жёсткостный аспект той же технической задачи.

Для получения аналитических решений используются также методы теории функций комплексного переменного [163, 179, 193, 212, 248], возмущения [125], вариационные [81, 147, 207] и др. в [69, 75, 77, 82, 92, 122, 127, 133, 155, 159, 164, 244, 254, 260, 271, 274, 300, 329, 330, 339, 398 и др.].

Методом конечных элементов (МКЭ) [85, 86, 137, 152, 202, 227, 327] и для иллюминаторов [134, 293–297], методом граничных элементов [124] и другими численными методами [344] анализируются объекты с выбранными размерами и показывается ограниченность известных аналитических методов. Важным преимуществом численных методов является возможность учесть такие подробности, как, например, фаски, существенные в контактных задачах (их учёт аналитическими методами неоправданно затруднителен). Однако затруднение пооперационного контроля ограничивает роль опыта исследователя и требует алгоритмической однозначности программируемых соотношений и досконального аналитического тестирования на классах задач, аналогичных решаемой задаче.

Кроме того, при использовании численных методов труднее оценить парциальное влияние каждого из входных параметров, выделить главные из них и построить целевую функцию для оптимизации конструкции путём изменения входных параметров, а перебор вариантов в многопараметрических задачах затруднителен и может не уловить тенденцию изменения критериальных параметров и упустить экстремум. Не случайно в теории оптических систем подчёркивается, что для решения задачи выбора конструктивных параметров такой системы необходимо знать непременно аналитические зависимости между значениями искажений и конструктивными параметрами системы и что решение этой задачи представляет наибольшие трудности при создании новых оптических систем [317].

В целом складывается достаточно единое мнение, что и аналитические, и численные методы полезны и незаменимы, причём дополняют друг друга. Не случайно появление и развитие полуаналитических методов [126].

Из экспериментальных методов исследований напряжённо-деформированных состояний [7, 13, 30, 49, 114, 157, 241, 252, 314, 322, 350] в технике высоких давлений чаще всего

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 58/556

используется электротензометрия [143, 156, 326]. Однако и эти методы, будучи полезными и необходимыми, сами по себе принципиально недостаточны для рационального проектирования ввиду невозможности изменения входных параметров и выделения парциальных их влияний, а также вследствие искажённости измерительной информации. Применительно к электротензометрии интенсивно исследуются погрешности технологического характера, связанные с влиянием давления, подложки, соединительных проводов, тензометрической аппаратуры в целом, однако обычно оставляются в стороне погрешности тензометрии в зонах высоких градиентов деформаций, связанные с удалением измерительной решётки тензорезистора от точки с наибольшей деформацией, а также обусловленные усреднением деформаций по площади измерительной решётки. Это не относится к ведущимся независимо от автора исследованиям [284]. Однако они ограничиваются аналитическими приближениями численных результатов при отсутствии давлений и не предназначены для техники высоких давлений. Более того, и в метрологии [136], и в теории погрешностей [209] погрешности при измерениях неоднородных распределений, насколько известно, остаются вне поля зрения.

Таким образом, существующие методы решения задач прочности не всегда вполне достаточны для рационального проектирования в технике высоких давлений и нуждаются в дополнениях приемлемыми и достаточно простыми аналитическими методами. В частности, для проектирования иллюминаторов для высоких давлений недостаёт аналитического метода расчёта напряжений и перемещений в светопрозрачном элементе с учётом его трёхмерности.

### 1.3. Выводы по главе 1

1. Несущие и светопрозрачные элементы конструкций различных конфигураций в технике высоких давлений обладают общностью и аналогией геометрических форм, конструкционных материалов, характерных нагрузок, расчётных схем и проблем прочности.
2. Для рационального проектирования конструкций необходимы функциональные зависимости целевых параметров оптимизации от совокупностей исходных параметров, выраженные непременно в аналитической форме на основе разумного компромисса между простотой и точностью.
3. Известные аналитические методы не обеспечивают приемлемого решения многих задач прочности именно существенно трёхмерных конструкций в технике высоких давлений.
4. Для рационального проектирования в технике высоких давлений необходимо обобщение аналитических методов решения задач прочности применительно к типовым именно существенно трёхмерным цилиндрическим элементам конструкций, нагруженным кусочно-равномерными давлениями, в частности равномерными давлениями на боковые поверхности и ступенчатыми давлениями на основания.

## 2. СОЗДАНИЕ СИСТЕМЫ ОБЩИХ ТЕОРИЙ, МЕТОДОЛОГИЙ И МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОБЩИХ СИСТЕМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КАК ОБЩИХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИКИ, МЕТРОЛОГИИ, МЕХАНИКИ И ПРОЧНОСТИ

Система общих теорий, методологий и методов предусматривает единство и даже синергию функционального анализа и синтеза теорий, методологий и методов.

Замечание. Функциональный анализ в классической математике сложился так, что его следовало бы назвать бесконечномерным функциональным анализом. В настоящей докторской диссертации имеется в виду точный и поэтому правильный наиболее общий смысл понятия функционального анализа как анализа с функциональной точки зрения без неоправданных априорных ограничений, в частности именно бесконечномерностью, хотя в приложениях она часто осуществляется апостериорно. Поэтому из сложившегося в

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 59/556

классической математике ближе к методу настоящего рассмотрения скорее теория функций, чем функциональный анализ. Кроме того, здесь рассматривается именно синергия функциональных анализа и синтеза теорий, методологий и методов. Главное, целевым предметом настоящего рассмотрения являются именно теории, методологии и методы, а отнюдь не функции и не их разновидности наподобие функционалов, операторов и мер в классической математике, используемые здесь именно и только методически, а не предметно. Общие математические теории и методологии синергии функционального анализа и синтеза методов и методологий рассматривают произвольные теорию, методологию или метод как функцию, или отображение, задач, решаемых этими теорией, методологией или методом.

Определение. Задачей является частично неизвестный предмет, в частности система, то есть предмет, некоторые части и связи которого не полностью известны, тогда как остальные части и связи могут быть полностью известными.

Это определение является общим не только для задач поиска неизвестных, но и для задач на построение (с поиском заранее неизвестного построения) и для задач на доказательство (с поиском заранее неизвестной системы умозаключений).

Областью определения, или множеством определения, этой функции (одного переменного в простейшем случае) является класс решаемых задач. Множеством значений этой функции является множество решений этих задач.

Одним из значений независимой переменной, а именно аргумента этой функции, является одна задача из класса решаемых задач. Этому значению независимой переменной соответствует одно из значений зависимой переменной, а именно самой этой функции, являющееся множеством всех решений именно этой задачи, то есть полным решением этой задачи.

Такая функция одного переменного соответствует простейшему случаю дважды изолированного решения каждой из задач решаемого класса (ровно по одной) одной теорией, одной методологией или одним методом.

Если сразу решается одной теорией, одной методологией или одним методом целая система задач решаемых классов, то общие математические теории и методологии синергии функционального анализа и синтеза теорий, методологий и методов рассматривают такую теорию, такую методологию или такой метод как функцию системы переменных, часто недопустимо упрощённо называемую функцией многих переменных. Эти переменные могут оказаться зависимыми, то есть не вполне свободными, однако и тогда могут рассматриваться как свободные при условии дополнительного наложения их взаимосвязей.

Если для решения задачи или системы задач используется целая система теорий, методов и методологий, то эта система рассматривается как система функций общими математическими теориями и методологиями синергии функционального анализа и синтеза теорий, методологий и методов.

Таким образом, общие математические теории и методологии синергии функционального анализа и синтеза теорий, методологий и методов рассматривают теории, методологии и методы и их системы как функции и системы функций соответственно. Именно этот определённый изоморфизм систем функций и систем теорий, методологий и методов и позволяет строить названную синергию функционального анализа и синтеза теорий, методологий и методов.

В частности, хорошо известно понятие сужения функции.

Определение. Сужением функции называется эта же функция на подмножестве множества её определения.

Пользуясь этим известным определением, введём обратное, или противоположное, общее понятие расширения функции, в частных случаях встречающееся в классической математике как аналитическое продолжение функции.

Определение. Расширением функции называется функция, для которой расширяемая функция является сужением.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 60/556

Следствие. Множество определения расширения функции является надмножеством множества определения расширяемой функции.

Следствие. Отношения сужения и расширения функций соответствуют отношениям подмножества и надмножества множеств определения этих функций при условии сохранения всех общих пар прообразов и соответствующих образов.

Общие математические теории и методологии синергии функционального анализа и синтеза теорий, методологий и методов рассматривают теории, методологии и методы и их системы как функции и системы функций соответственно и используют этот определённый изоморфизм систем функций и систем теорий, методологий и методов для построения соответствующих понятий и отношений систем теорий, методологий и методов следующим образом.

Определение. Участием (специализацией) системы теорий, методологий и методов называется эта же система теорий, методологий и методов на подмножестве множества её определения.

Пользуясь этим определением, введём обратное, или противоположное, известное общее понятие обобщения системы теорий, методологий и методов.

Определение. Обобщением системы теорий, методологий и методов называется система теорий, методологий и методов, для которой обобщаемая система теорий, методологий и методов является участием (специализацией).

Следствие. Множество определения обобщения системы теорий, методологий и методов является надмножеством множества определения обобщаемой системы теорий, методологий и методов.

Следствие. Отношения участия (специализации) и обобщения систем теорий, методологий и методов соответствуют отношениям подмножества и надмножества множеств определения этих систем теорий, методологий и методов при условии сохранения всех общих пар прообразов и соответствующих образов.

В частности, хорошо известно и понятие сложной функции, или композиции функций, или функции от функции.

Определение. Сложной функцией, или композицией функций, называется внешняя функция от внутренней функции.

Следствие. Множество значений внутренней функции сложной функции определения расширения функции является подмножеством множества определения внешней функции сложной функции.

Определение. Сложной надсистемой теорий, методологий и методов называется система систем теорий, методологий и методов.

Дальнейшие построения во многом подобны предыдущим.

Начнём с аналогов арифметических, теоретико-множественных и логических действий.

Определение. Суммой, объединением и дизъюнкцией теорий, методологий и методов называется система их возможно совместного приложения к решению системы задач.

По аналогии с элементарными, или стандартными, функциями, уравнениями и их совокупностями как бесструктурными системами (алгебраическими, тригонометрическими, показательными, рядообразующими, теоретико-числовыми и другими) строятся элементарные, или стандартные, методы и методологии (алгебраические, тригонометрические, показательные, рядообразующие, теоретико-числовые и другие) решения таких задач, в том числе таких уравнений и их систем. То же относится к таким преобразованиям, которым соответствуют методы и методологии таких преобразований.

Системам координат для графиков функций соответствуют для теорий, методологий и методов системы испытательных, или тестовых, задач как единичных векторов, или ортов, методической и методологической системы координат. В пределах допустимости непременно наиболее простые системы испытательных, или тестовых, задач своими решениями достаточно наглядно вскрывают общие закономерности сущности и действительности теорий, методологий и методов.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 61/556

Предельным переходам, в том числе в дескриптивной теории функций, дифференцированию и интегрированию функций соответствуют методы и методологии предельных переходов любых предметов, в том числе оконечивания и обесконечивания (например тел в контактных задачах, пластины в задаче Кирша, толщины стенки полого цилиндра в формулах Ламе, длины составного цилиндра (с плоским напряжённым состоянием при бесконечно малой длине, плоским деформированным состоянием при бесконечно большой длине и трёхмерностью напряжённо-деформированного состояния при конечной длине), числа циклов при усталости, числа уравнений их системы, числа элементов линейных комбинаций), а также непрерывность теорий, методологий и методов, теории, методологии и методы определения, выражения и ускорения (увеличения скорости) сходимости к пределу, дифференцирования и интегрирования.

Метрической теории функций соответствуют методологии измерения и количественного и качественного оценивания теорий, методологий и методов по мере их приемлемости, глубины и сложности, по широте класса решаемых задач, по скорости сходимости и качеству решений, по преодоленным затруднениям, по сложности и объёмам описаний алгоритмов.

Теории приближения функций соответствуют методологии измерения и количественного и качественного оценивания теорий, методологий и методов приближения и количественного и качественного оценивания погрешностей, в том числе абсолютной и относительной погрешностей и метода наименьших квадратов, по мере их приемлемости, а также методологии создания принципиально новых теорий, методологий и методов высокоскоростного высокоточного приближения и количественного и качественного оценивания погрешностей.

Однозначности функций соответствует инвариантность итогов применения теорий, методологий и методов при равносильных преобразованиях решаемой задачи.

Общие математические теории и методологии синергии функционального анализа и синтеза теорий, методологий и методов естественно делят теории, методологии и методы на инвариантные и на неинвариантные.

Определение. Система теорий, методологий и методов называется инвариантной, если и только если для любой задачи, решаемой этой системой, и для любых равносильных преобразований этой задачи итог решения этой задачи этой системой один и тот же (инвариантен).

Определение. Система теорий, методологий и методов называется неинвариантной, если и только если существуют такая задача, решаемая этой системой, и такое равносильное преобразование этой задачи, которое изменяет итог решения этой задачи этой системой.

Замечание. Неинвариантность является грубейшим изъяном теории, методологии и метода. Однако отсюда ещё не следуют их полная бесполезность и даже вредоносность как непременно вводящих в заблуждение. Их можно и даже нужно именно эффективно использовать как условно применимые и иногда пригодные при неперемных дополнительных условиях. Таковыми являются должное сужение области применения, исключение возможностей проявления неинвариантности путём приемлемого ограничения допускаемых равносильных преобразований, а также неперемное сравнение получаемых итогов с итогами, которые даются именно инвариантными теориями, методологиями и методами.

Именно общие математические теории и методологии синергии функционального анализа и синтеза теорий, методологий и методов открыли нечёткость приближённости и целые системы вопиющих принципиальных изъянов основополагающих в классической математике абсолютной и относительной погрешностей и метода наименьших квадратов. Ввиду особой важности и для удобства рассмотрим здесь эти системы принципиальных изъянов.

Открыто и доказано, что само понятие приближения, в частности приближённого отношения, в том числе приближённого равенства, не универсально, условно, субъективно и является нечётким и плохо определённым, что доказывается возможностью сколь угодно малого различия между приближением и неприближением при любой попытке добиться именно

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 62/556

чёткого их различия между собой (как парадокс неустрашимого противоречия между непрерывностью погрешности и дискретностью, а именно грубейшей двоичностью, классификации. Он даже бесконечно сильнее связанного с неопределённостью понятия кучи дважды различно дискретного знаменитого древнегреческого парадокса кучи: одно зерно не составляет кучи зерна, два зерна не составляют кучи зерна, и так далее, миллион зёрен составляют кучу зерна; какое именно по счёту зерно делает ещё не кучу зерна уже кучей зерна). Действительно, если для определённости, простоты и наглядности примера ориентироваться, скажем, на инженерную точность, а именно на допускаемую инженерную относительную погрешность 10 %, и полагать вначале, что левая часть отношения меньше единичной правой части, то на первом этапе с шагом длиной  $1/10^1$  отношение  $0.9 \approx 1$  ещё можно считать именно приближением, в данном случае приближённым равенством, и использовать указанный знак  $\approx$  приближённого равенства. А вот отношение  $0.8 \neq 1$  уже нельзя считать именно приближением, в данном случае приближённым равенством, и нельзя использовать знак  $\approx$  приближённого равенства, так что приходится считать отношение  $0.8 \neq 1$  неприближением, просто неравенством и использовать указанный знак  $\neq$  неравенства. То есть на примере этих двух отношений модуль разности приближения и неприближения на первом этапе составляет  $|0.9 - 0.8| = 1/10^1$ . На втором этапе отрезок  $[0.8, 0.9]$  разбивается на 10 шагов длиной  $1/10^2$  и выбирается тот шаг, который от неприближения ведёт к приближению. Если продолжать настаивать ровно на десяти процентах допустимой относительной погрешности, то это шаг  $[0.89, 0.9]$ . То есть модуль разности приближения и неприближения на втором этапе составляет  $|0.9 - 0.89| = 1/10^2$ . Продолжая этот процесс далее, получаем на этапе с номером n шаг  $[0.9 - 1/10^n, 0.9]$  длиной  $1/10^n$  и модуль разности приближения и неприближения  $|0.9 - (0.9 - 1/10^n)| = 1/10^n$ , систему вложенных отрезков с единственной неподвижной точкой 0.9 и сколь угодно малый шаг между неприближением и приближением. Если, наоборот, полагать, что левая часть отношения больше единичной правой части, то аналогично получится единственная неподвижная точка 1.1. В итоге для нестрогой (включающей и точность) приближённости отношения с наперёд заданной единичной правой частью и наперёд заданной относительной погрешностью 10 % необходима и достаточна, что естественно, принадлежность левой части отношения отрезку  $[0.9, 1.1]$ , причём сколь угодно малый выход левой части отношения за пределы этого отрезка ведёт к переходу от приближения к неприближению. На произвольный общий случай любой пары действительных значений этот частный пример обобщается очевидным линейным преобразованием, чем и завершается доказательство.

Полезно обобщить отношения дизъюнктивными или конъюнктивными соединениями знаков отношений и/или модификаторов отношений с известными дизъюнктивными частными случаями  $\leq$  ( $\leq$ ) и  $\geq$  ( $\geq$ ). В частности, произвольное отношение R конъюнктивно обобщается формальным (проблематичным; верным или неверным) отношением R? с добавлением вопрошающего (формализующего, проблематизирующего, вводящего независимость от осуществления, истинности) модификатора ?, например справа или слева на том же уровне или нижним либо верхним указателем (индексом). В частности, отношение = равенства обобщается отношением =? приравнивания (формального, проблематичного равенства, верного или неверного). А отношения  $<$ ,  $>$ ,  $\leq$ ,  $\geq$  строгого или нестрогого неравенства обобщаются отношениями  $<?$ ,  $>?$ ,  $\leq?$ ,  $\geq?$  формального (проблематичного, верного или неверного) строгого или нестрогого неравенства соответственно. Полезными примерами дизъюнктивных соединений знаков отношений являются  $\approx$ ,  $\approx?$ ,  $\approx?$ .

Абсолютная погрешность формального (условного, независимого от истинности, что обозначается знаком вопроса, в данном случае после знака равенства) приравнивания сама по себе недостаточна для выражения и оценивания качества приближения и к тому же не однозначна (не является инвариантом), так как при равносильном умножении формального (условного, независимого от истинности) приравнивания на ненулевое число умножается на его абсолютную величину:

$$\Delta_{1000 \approx? 999} = \Delta_{1 \approx? 0} = 1,$$

$$\Delta_{10 \Rightarrow 0} = 10.$$

Относительная погрешность принципиально не соответствует своему замыслу о собственных пределах между нулём и единицей, нелогична в смысле произвольного выхватывания лишь одного элемента равенства для модуля в знаменателе, необоснованна в смысле игнорирования необходимого (для осуществления своего замысла) неравенства треугольника, а поэтому неправильна, определена лишь для двухэлементного формального (условного, независимого от истинности) приравнивания, для него двузначна (двусмысленна), вопреки замыслу может превышать единицу и быть бесконечной и вообще неопределённой при большем двух числе элементов приравнивания (в последних двух примерах ниже):

$$\delta_{a \Rightarrow b, a} = \|a - b\|/\|a\| \neq \|a - b\|/\|b\| = \delta_{a \Rightarrow b, b},$$

$$\delta_{1 \Rightarrow 0, 0} = 1/0 = \infty,$$

$$\delta_{1 \Rightarrow -1, 1} = \delta_{1 \Rightarrow -1, -1} = 2,$$

$$\delta_{100 - 99 \Rightarrow 0} ?, \delta_{1 - 2 + 3 - 4 \Rightarrow -1} ?$$

При этом относительная погрешность никоим образом не отрицается, напротив, именно правильно используется в пределах её применимости. В частности, здесь показано избавление относительной погрешности от её двусмысленности посредством параметризации выбранным выражением  $a$  или  $b$  для модуля (нормы) в знаменателе. Для двухэлементного формального равенства  $a \Rightarrow b$  это даёт взамен единственной двусмысленной относительной погрешности  $\delta$  две (по числу элементов формального равенства) различные однозначные относительные погрешности  $\delta_{a \Rightarrow b, a}$  и  $\delta_{a \Rightarrow b, b}$  при сохранении остальных указанных недостатков.

Метод наименьших квадратов Лежандра и Гаусса имеет целую систему взаимосвязанных основополагающих принципиальных изъянов и пороков и крайне узкие области применимости и тем более приемлемости и пригодности:

1) не пригоден при не совпадающих физических размерностях (единицах) решаемой задачи. Например, если одно из уравнений решаемой их совокупности как бесструктурной системы составлено на основе закона сохранения энергии, а другое уравнение той же совокупности составлено на основе закона сохранения импульса, или количества движения, то предусмотренная методом наименьших квадратов сумма квадратов разностей частей всех уравнений совокупности лишена всякого смысла. Разумеется, можно предварительно привести все уравнения решаемой их совокупности к одной физической размерности, общей для всех этих уравнений. Однако такое приведение может быть выполнено разными способами. Например, уравнение на основе закона сохранения энергии можно разделить на скорость или на её половину, можно разделить на одну скорость, а можно и на другую скорость. Но итог по методу наименьших квадратов более чем существенно зависит от способа такого приведения решаемой совокупности уравнений к физической размерности, общей (единой) для всех этих уравнений, и поэтому вообще лишён объективного смысла;

2) неинвариантен, меняет не проверяемый итог при равносильных преобразованиях решаемой задачи, например переопределённой системы двух уравнений в разрешённом виде – первоначальной, с умножением только первого уравнения на 10 и с умножением только второго уравнения на 10, причём в обоих последних случаях итог приближается к точному решению одного лишь умножаемого на 10 уравнения:

$$x = 1 \wedge x = 2 \rightarrow x = 3/2;$$

$$10x = 10 \wedge x = 2 \rightarrow x = 102/101;$$

$$x = 1 \wedge 10x = 20 \rightarrow x = 201/101;$$

3) необоснованно полагается, как и математическая статистика, на абсолютную погрешность и аналитически простейшую вторую степень усреднения;

4) неустойчив к наклону (изображения на координатной плоскости к оси абсцисс) системы данных (с разбросом) и приближающей её прямой или кривой, к вращению системы данных (с разбросом), способен почти игнорировать значительную и даже преимущественную часть решаемой задачи, минимизирует сумму квадратов отклонений, например разностей частей

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 64/556

уравнений их системы, и поэтому на самом деле опирается именно на самые худшие сохраняемые данные (ещё и с субъективизмом и нечёткостью разделения всех данных на сохраняемые и учитываемые данные и на удаляемые и полностью игнорируемые выбросы) с их преимущественным вкладом в эту сумму и пренебрегает самыми лучшими данными с их ничтожным вкладом в эту сумму, а возведение в квадрат резко усиливает эти различия вкладов соответствующих отклонений, так что метод наименьших квадратов часто ведёт к предсказуемым неприемлемости, извращениям и парадоксам:

приближение  $y = kx$  двух точек (1, 1), (10, 15) на координатной плоскости даёт парадоксальное сочетание большей абсолютной погрешности  $\Delta_{(1, 1)}$  приближения малых данных и меньшей абсолютной погрешности  $\Delta_{(10, 15)}$  приближения больших данных:

$$k = 151/101,$$

$$\Delta_{(1, 1)} = 51/101,$$

$$\Delta_{(10, 15)} = 5/101;$$

5) не предусматривает никакого улучшения получаемого не оцениваемого псевдорешения, а просто объявляет его единственно возможным наподобие истины в последней инстанции.

Методы обработки данных математически строго проанализированы и для любого математического моделирования обобщены общими теориями и методами наилучших аналитических приближений к дискретным экспериментальным данным с их разбросом при опоре именно на лучшие из них и при взвешенном учёте непременно всех данных без исключения выбросов, в том числе применительно к совершенствованию методов экспериментальных исследований напряжённо-деформированных состояний и прочности конструкций при высоких давлениях.

Особенные полезность и даже ценность общих математических теорий и методологий синергии функционального анализа и синтеза теорий, методологий и методов заключаются именно в этой синергии. Причём имеют место естественные разделение и соединение действенности. Например, в данном случае функциональный анализ теорий, методологий и методов открыл целые системы взаимосвязанных основополагающих принципиальных изъянов и пороков и крайне узкие области применимости и тем более приемлемости и пригодности абсолютной и относительной погрешностей и метода наименьших квадратов. А функциональный синтез теорий, методологий и методов изобрёл отчасти приведённые ниже теории, методологии и методы, свободные от этих изъянов. В частности, общие математические теории и методологии уравновешивания устраняют потерю смысла при не совпадающих физических размерностях (единицах) решаемой задачи и обеспечивают действенный учёт всех её частей и инвариантность итога при её равносильных преобразованиях. А общие математические теории и методологии уточняющего взвешивания обеспечивают опору именно на самые лучшие данные. То есть учитываются все данные без исключения выбросов, причём чем лучше данные, тем больше их вклад в общий результат. В этом принципиальное отличие от метода наименьших квадратов, минимизирующего сумму квадратов отклонений с преимущественным вкладом именно наихудших сохраняемых данных и ничтожным вкладом самых лучших данных.

Условно пригодный, не универсальный, неинвариантный, нелогичный, произвольно субъективно отсекающий выбросы как наиболее неприятную часть данных, на деле опирающийся на вносящие большой вклад в минимизируемую сумму квадратов именно наихудшие сохраняемые данные и почти пренебрегающий вносящими малый вклад в минимизируемую сумму квадратов именно наилучшими данными, могущий вести к неприемлемости и даже к извращениям действительности, произвольно ограничивающийся аналитически удобнейшей второй степенью, вообще не улучшающий свой получаемый итог и совсем не оценивающий его качество, по существу единственный широко применяемый для решения переопределённых задач с превышением числа неизвестных числом уравнений решаемой системы, в частности любых задач аналитического приближения дискретных данных, классический метод наименьших квадратов Лежандра и «короля математики» Гаусса математически строго проанализирован, исправлен и для любого математического



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 65/556

моделирования обобщён безусловно пригодным, универсальным, инвариантным, логичным, широко применимым, при выборе аналитически удобнейшей второй степени именно правильно использующим формулы метода наименьших квадратов, последовательно (итерационно) улучшающим свои получаемые итоги и правильно оценивающим их качество, успешно применимым для решения переопределённых задач с превышением числа неизвестных числом уравнений решаемой системы, в частности любых задач аналитического приближения дискретных данных, методом наименьших нормированных степеней, в частности квадратов, в том числе безусловно пригодным, универсальным, инвариантным, логичным, широко применимым, лишённым произвольного субъективизма отсекающего выбросов как наиболее неприятной части данных, полностью и наилучшим образом учитывающим непрерывно все данные решаемой задачи, на деле опирающимся на вносящие наибольший вклад в минимизируемую сумму степеней, в частности квадратов, именно наилучшие данные, при выборе аналитически удобнейшей второй степени именно правильно использующим формулы метода наименьших квадратов, последовательно (итерационно) улучшающим свои получаемые итоги и правильно оценивающим их качество, успешно применимым для решения переопределённых задач с превышением числа неизвестных числом уравнений решаемой системы, в частности любых задач аналитического приближения дискретных данных, методом наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов.

## **2.1. Иерархия единства, разделения (анализа) и соединения (синтеза) общих теорий, методологий и методов постановки и решения общей математической задачи. Полная линейно-комбинационная и целочастичная (парциальная) методологии решения общих систем функциональных уравнений и аналитическая методология макроэлементов**

Иерархия единства, разделения (анализа) и соединения (синтеза) общих теорий, методологий и методов постановки и решения общей математической задачи в настоящей докторской диссертации является следующей:

- 1) искомая предметность;
- 2) соотносительность;
- 3) функциональность;
- 4) множественность и систематичность;
- 5) однородность и разнородность;
- 6) параметризация и специализация;
- 7) полная (возможно, бесконечная) линейная комбинационность и целочастичность (парциальность);
- 8) степенность и раздвоенность;
- 9) аналитическая макроэлементность.

На высшем первом уровне иерархии находится искомая предметность задачи как хотя бы отчасти неизвестного предмета. Сюда относится всеобщая предметная методология решения задачи как хотя бы отчасти неизвестного предмета именно с наибольшей общностью как задачи, так и её методологии решения.

На втором уровне иерархии находится соотносительность частей задачи как отношений (например равенства или неравенства, то есть уравнений или неравенств). Сюда относится общая соотносительная методология решения задачи, состоящей из отношений, например уравнений и/или неравенств. На этом уровне именно единства соотносительности нет раздвоения иерархии.

На третьем уровне иерархии находится функциональность искомого неизвестного задачи, состоящей из отношений, например уравнений и/или неравенств. Сюда относится общая функциональная методология решения задачи, состоящей из отношений, например

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 66/556

уравнений и/или неравенств, в которой искомыми неизвестными являются функции. На этом уровне именно единства функциональности нет раздвоения иерархии.

На четвёртом уровне иерархии как начало её раздвоения находятся множественность задачи как множества и систематичность задачи как системы. Сюда относятся общая множественная методология решения задачи как множества (так называемой системы), например уравнений и/или неравенств, то есть их множества без их отношений, например упорядоченности, условий или неравноправности, и общая системная методология решения задачи как подлинной системы, например уравнений и/или неравенств, то есть их множества с их отношениями, например упорядоченностью, условиями или неравноправностью.

На пятом уровне иерархии как продолжение её раздвоения находятся однородность и разнородность частей задачи как множества или системы, например уравнений и/или неравенств. Сюда относятся соответственно раздвоению иерархии общая однородная методология решения задачи как однородного множества (так называемой системы) отношений, например уравнений и/или неравенств, в которой искомыми неизвестными являются функции, и общая разнородная методология решения задачи как разнородной подлинной системы отношений, например уравнений и/или неравенств, в которой искомыми неизвестными являются функции.

На шестом уровне иерархии как продолжение её раздвоения находятся параметризация однородности и специализация разнородности частей задачи как множества или системы, например уравнений и/или неравенств. Сюда относятся соответственно раздвоению иерархии общая параметрическая методология решения задачи как множества (так называемой системы) отношений, например уравнений и/или неравенств, в которой искомыми неизвестными являются параметры функций, и общая специализирующая методология решения задачи как соответствующей специализации разнородности подлинной системы отношений, например уравнений и/или неравенств, в которой искомыми неизвестными являются функции.

На седьмом уровне иерархии как продолжение её раздвоения находятся полная (возможно, бесконечная) линейная комбинационность параметризации однородности и целочастичность (парциальность) специализации разнородности частей задачи как множества или системы, например уравнений и/или неравенств. Сюда относятся соответственно раздвоению иерархии полная линейно-комбинационная методология решения задачи как множества (так называемой системы) отношений, например уравнений и/или неравенств, в которой искомыми неизвестными являются коэффициенты как параметры функций как полных (возможно, бесконечных) линейных комбинаций известных вполне линейно независимых координатных функций собственных классов, и целочастичная (парциальная) методология решения задачи как соответствующей специализации разнородности разбиением на различно используемые части подлинной системы отношений, например уравнений и/или неравенств, в которой искомыми неизвестными являются функции.

На восьмом уровне иерархии как завершение её раздвоения находятся степенность линейной комбинационности параметризации однородности и интегральная (разрешающе-оценивающая) раздвоенность целочастичности (парциальности) специализации разнородности частей задачи как множества или системы, например уравнений и/или неравенств. Сюда относятся соответственно раздвоению иерархии общий (полу)степенной метод решения задачи как множества (так называемой системы) отношений, например уравнений и/или неравенств, в которой искомыми неизвестными являются коэффициенты как параметры степенных рядов как функций (полных (возможно, бесконечных) линейных комбинаций произведений степеней как известных вполне линейно независимых координатных функций собственных классов), и общий интегральный (разрешающе-оценивающий) метод решения задачи как соответствующей специализации разнородности разбиением на различно используемые разрешающую и оценивающую (оценочную) части подлинной системы отношений, например уравнений и/или неравенств, в которой искомыми неизвестными являются функции.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 67/556

На девятом уровне иерархии как её объединение находится аналитическая макроэлементность степенности линейной комбинационности параметризации однородности и интегральной (разрешающе-оценивающей) раздвоенности целочастичности (парциальности) специализации разнородности частей задачи как множества или системы, например уравнений и/или неравенств. Сюда относится соответственно объединению иерархии аналитическая методология макроэлементов как объединение общего (полу)степенного аналитического метода макроэлементов и общего интегрального аналитического метода макроэлементов как соответствующих частных случаев общего (полу)степенного метода и общего интегрального метода для задач с общей областью определения искомых функций, которая рассматривается как единый макроэлемент или как соединение макроэлементов.

Продолжают эту иерархию частные типы задач и отдельные задачи и соответствующие общие и частные теории, методологии и методы их решения.

Для цели и задач настоящей докторской диссертации особенно важно развить созданные полную линейно-комбинационную и целочастичную (парциальную) методологии и следующие из них соответственно общие (полу)степенной и интегральный методы решения общих систем функциональных уравнений, а также аналитическую методологию макроэлементов и являющиеся её (полу)степенной и интегральной модификациями общие (полу)степенной и интегральный аналитические методы макроэлементов.

Определение напряжённо-деформированных состояний элементов конструкций обычно сводится к решению интегральных и/или дифференциальных (обыкновенных и в частных производных) уравнений, их так называемых систем (в действительности множеств) и соответствующих краевых задач с начальными и/или граничными условиями [4, 84, 108, 149, 207–209, 234, 235]. Чистые и смешанные системы линейных и нелинейных алгебраических и неалгебраических (трансцендентных), дифференциальных, интегральных и других уравнений, а также неравенств и иных отношений, математически строго проанализированы и для любого математического моделирования обобщены произвольной системой функциональных отношений как общей математической задачей с известными операторами над искомыми функциями известных аргументов. Обобщением их всех создана теория общих математических задач как систем функциональных отношений

$$R_{\lambda} \{L_{\lambda} [f_{\varphi} [z_{\omega}]]\} (\lambda \in \Lambda),$$

в частности функциональных уравнений

(2.1)

$$L_{\lambda} [f_{\varphi} [z_{\omega}]] = 0 (\lambda \in \Lambda),$$

где

$R_{\lambda}$  – индексированные заданные отношения;

$L_{\lambda}$  – индексированные заданные операторы;

$f_{\varphi}$  – индексированные искомые функции;

$z_{\omega}$  – индексированные заданные независимые переменные;

$\Lambda, \Phi, \Omega$  – множества индексов  $\lambda, \varphi, \omega$  соответственно;

$[z_{\omega}]$  – совокупность индексированных элементов, в частности аргументов неизвестных функций.

Создана теория собственной совокупности видов (классов), в частности собственного вида (класса), функций для множества операторов, основанная на следующей иерархии определений.

Общее определение. Собственной для множества операторов называется такая совокупность видов (классов) функций, за пределы которой это множество операторов не выводит, то есть если все функции-прообразы для этого множества операторов принадлежат этой совокупности видов (классов) функций, то непременно все функции-образы как значения, принимаемые каждым из операторов этого их множества при этих функциях-прообразах, принадлежат этой же совокупности видов (классов) функций.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 68/556

Частное определение. Собственным для множества операторов называется такой вид (класс) функций, за пределы которого это множество операторов не выводит, то есть если все функции-прообразы для этого множества операторов принадлежат этому виду (классу) функций, то непременно все функции-образы как значения, принимаемые каждым из операторов этого их множества при этих функциях-прообразах, принадлежат этому же виду (классу) функций.

Единичное определение. Собственным для оператора от одной функции называется такой вид (класс) функций, за пределы которого этот оператор не выводит, то есть если функция-прообраз для этого оператора принадлежит этому виду (классу) функций, то непременно функция-образ как значение, принимаемое этим оператором при этой функции-прообразе, принадлежит этому же виду (классу) функций.

Теорема. Это единичное определение является трёхуровневым сужением этого общего определения.

Доказательство. При переходе от этого общего определения к этому частному определению имеет место сужение на один уровень: от целой совокупности видов (классов) функций к одному виду (классу) функций. При переходе от этого частного определения к этому единичному определению имеет место сужение на два уровня: от целого множества операторов к одному оператору и от одного оператора от произвольной системы функций к одному оператору от одной функции. В итоге при переходе от этого общего определения к этому единичному определению имеет место сужение на целых три уровня, что и требовалось доказать.

Определение с уточнениями классического определения. Собственной для оператора от одной функции называется такая функция-прообраз, за пределы непременно постоянной пропорциональности которой этот оператор не выводит, то есть если функция-образ как значение, принимаемое этим оператором при этой функции-прообразе, непременно постоянно пропорциональна этой функции-прообразу для этого оператора, то есть равна произведению этой функции-прообраза на постоянную, которая называется собственным значением для оператора.

Замечание. Последнее определение равносильно (эквивалентно) сущности и содержанию соответствующего классического определения с двумя его уточнениями по явлению и форме посредством добавлений предлога «для». Во-первых, классическая математика использует понятие собственной функции оператора, способное вводить в заблуждение, поскольку функция оператора логично должна обозначать функцию от оператора вопреки замыслу, согласно которому берётся не функция от оператора, а оператор от функции, что и выражается в последнем определении понятием собственной функции для оператора. Во-вторых, классическая математика использует понятие собственного значения оператора, способное вводить в заблуждение, поскольку значение оператора логично должно обозначать значение, принимаемое оператором, то есть функцию-образ как значение оператора от функции-прообраза, вопреки замыслу, согласно которому собственное значение оператора есть постоянный коэффициент, на который следует умножить собственную функцию для оператора как функцию-прообраз, чтобы получить функцию-образ, что и выражается в последнем определении понятием собственного значения для оператора.

Теорема. Это последнее определение является двухуровневым сужением этого единичного определения.

Доказательство. Во-первых, при переходе от этого единичного определения к этому последнему определению имеет место сужение на один уровень: от целого вида (класса) функций к одной функции. Во-вторых, согласно этому единичному определению из принадлежности функции-прообраза собственному для оператора виду (классу) функций непременно следует принадлежность функции-образа как значения, принимаемого этим оператором при этой функции-прообразе, этому же собственному для оператора виду (классу) функций, однако никоим образом не требуется существование такого именно постоянного значения, произведение которого на функцию-прообраз даёт функцию-образ,

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 69/556

что требуется этим последним определением. То есть для всех ненулевых значений функции-прообраза отношение функции-образа к функции-прообразу может быть любым переменным согласно этому единичному определению, однако должно быть непременно постоянным значением согласно этому последнему определению. Поэтому и для каждой отдельной функции-прообраза при переходе от этого единичного определения к этому последнему определению имеет место сужение на один уровень от любого переменного отношения функции-образа к функции-прообразу для всех ненулевых значений функции-прообраза к непременно постоянному значению того же отношения при том же условии отличия знаменателя от нуля. В итоге при переходе от этого единичного определения к этому последнему определению имеет место сужение на два уровня, что и требовалось доказать.

Замечание. То есть при единственности уравнения, оператора и функции собственный для множества операторов согласно этому общему определению единый вид (класс) функций сводится согласно этому единичному определению к собственному виду (классу) функций для оператора, каждая из которых (прообраз) преобразуется им в функцию (образ) того же вида (класса), не обязательно пропорциональную прообразу, так что собственным видом (классом) функций для оператора обобщается известное понятие собственной функции для оператора. А главное, в отличие от собственных функций, ортонормированных базисов и неортогональных фундаментальных решений, собственные виды (классы) функций для многих линейных операторов очевидны и дают именно общие решения систем функциональных уравнений в собственных видах (классах) функций.

Замечание. Анализ понятия собственной функции для оператора показывает, что оно является обобщением понятия неподвижной точки отображения, образ которой совпадает с ней как прообразом, причём эту точку следует понимать беспредельно общо, то есть не только как обычную геометрическую точку с нулевыми размерами, а как элемент области определения отображения. Тогда становится понятным, что собственная функция для оператора есть обобщение неподвижной точки оператора, поскольку собственное значение оператора есть постоянная, не обязательно равная единице. Ведь по определению собственной функции для оператора оператор преобразует эту собственную функцию как прообраз в образ, равный произведению этой собственной функции на это собственное значение. Эти классические понятия и соответствующие методы и теории чрезвычайно полезны, особенно для исследований операторов. Однако собственные функции для операторов являются далеко не самыми простыми, так что разложения решений соответствующих уравнений по собственным функциям для операторов этих уравнений оказываются усложнёнными. Поэтому чрезвычайно полезно такое дальнейшее обобщение понятия неподвижной точки, что под ней понимается любое подмножество области определения отображения, которое преобразуется этим отображением само в себя (не обязательно на себя) и в этом смысле является собственным для этого отображения, тем самым не выходящего за пределы этого подмножества. В частном случае оператора как отображения функция-прообраз как элемент собственного (для этого оператора) множества, или класса, функций преобразуется этим оператором в некую функцию-образ как элемент этого же множества, или класса, причём образ не обязан быть ни пропорциональным (с постоянным числовым коэффициентом) прообразу, что свойственно собственной функции для оператора, ни тем более именно равным прообразу (с единичностью этого коэффициента), что свойственно обычной одноэлементной неподвижной точке. Следовательно, это обобщение понятия неподвижной точки отображения является также обобщением понятия собственной функции для оператора. В простейшем частном случае единственного уравнения как условия аннулирования единственного линейного оператора множество, или класс, всех степенных рядов как достаточно общих и достаточно простых функций очевидным образом является собственным множеством, или классом, функций для этого оператора, преобразующего любой степенной ряд в некий степенной ряд этого же множества, или класса, причём образ не обязан быть ни пропорциональным (с постоянным числовым коэффициентом) прообразу, что свойственно собственной функции для оператора,

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 70/556

ни тем более именно равным прообразу (с единичностью этого коэффициента), что свойственно обычной одноэлементной неподвижной точке. В более общем указанном в диссертации частном случае системы функциональных уравнений собственной называется такая система множеств, или классов, функций, которая соответствующей системой операторов преобразуется в (не обязательно на) себя, то есть эта система операторов не выводит за пределы этой системы множеств, или классов, функций.

Использование теорем единственности разложений функций в ряды математически строго проанализировано и для любого математического моделирования обобщено полной линейно-комбинационной методологией решения общих математических задач, основанной на понятиях полной линейности оператора и полных линейных независимости и зависимости (при учёте даже бесконечных линейных комбинаций), при которых из аннулирования даже бесконечной линейной комбинации непременно следует или не обязательно следовать соответственно аннулирование всех её коэффициентов, в частности для общих решений общим (полу)степенным методом гармонического и бигармонического уравнений в (полу)степенных рядах как собственных классах функций для операторов этих уравнений, в том числе применительно к функциям напряжений и к общему (полу)степенному аналитическому методу макроэлементов как к (полу)степенной модификации аналитической методологии макроэлементов для именно существенно трёхмерных тел.

Полная линейно-комбинационная методология предусматривает явное определение общего решения системы функциональных уравнений (2.1) в совокупности классов искомых функций, собственной для системы операторов (2.1), каждый из которых принимает значения из своего класса конечных или бесконечных линейных комбинаций вполне линейно независимых координатных функций (то есть даже бесконечная линейная их комбинация обращается в нуль только при аннулировании всех её коэффициентов). При этом каждое из  $n_A$  уравнений (2.1) сводится к своей подсистеме условий аннулирования конечной или бесконечной линейной комбинации, являющейся значением оператора этого уравнения.

Если класс каждой искомой функции  $f_\alpha$  является параметрическим ( $a_\alpha$  – числовой параметр с индексом  $\alpha$ ,  $A$  – множество индексов  $\alpha$ )

(2.2)

$$F_\Phi \{ [_{\omega \in \Omega} Z_\omega], [_{\alpha \in A} a_\alpha] \},$$

то система функциональных уравнений (2.1) сводится к системе уравнений относительно совокупности числовых параметров (2.2).

Если параметрический класс каждой искомой функции является множеством линейных комбинаций своих вполне линейно независимых координатных функций, а все операторы (2.1) вполне линейны относительно преобразуемых конечных или бесконечных линейных комбинаций, то получаемая система уравнений относительно коэффициентов совокупности линейных комбинаций из классов искомых функций линейна.

Если система координатных функций каждого из этих классов базисна [138], то получаемое решение исчерпывающе, а если она полна [138], то может быть получено приближённое решение с любой наперёд заданной точностью в виде совокупности конечных линейных комбинаций координатных функций соответствующих классов.

В частном случае одноэлементности множеств  $\Phi$  и  $\Lambda$  и значений оператора  $L$  единственного уравнения

$$L \{ f [_{\omega \in \Omega} Z_\omega] \} = 0$$

в своей области определения собственная для системы операторов совокупность классов искомых функций сводится к собственному классу функций для оператора, каждая из которых отображается им в некоторую функцию того же класса (в данном случае в линейную комбинацию координатных функций класса), не обязательно пропорциональную прообразу, что обобщает известное понятие собственной функции для оператора. А главное, в отличие от собственных функций, ортонормированных базисов и неортогональных фундаментальных решений [4, 84, 108, 149, 207–209], собственные классы функций для многих линейных

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 71/556

операторов очевидно, что облегчает явное решение получаемых систем функциональных уравнений по принципу допустимой простоты.

Полиномиальные методы решения упругих задач математически строго проанализированы и обобщены общим (полу)степенным методом, в частности общим (полу)степенным аналитическим методом макроэлементов как (полу)степенной модификацией аналитической методологии макроэлементов для впервые решаемых нетривиальных задач механики, прочности и оптики нагруженных именно существенно трёхмерных тел.

Все различные произведения степеней координат с целыми показателями образуют вполне линейно независимую систему. Если класс степенных рядов является собственным классом функций для совокупности операторов системы функциональных уравнений (2.1), то полная линейно-комбинационная методология даёт как свой частный случай общий степенной метод решения системы функциональных уравнений (2.1).

Общий степенной метод в дальнейшем будет приложен к достижению впервые именно общих решений гармонического и бигармонического уравнений в степенных рядах.

Применительно к решению трёхмерной упругой задачи в декартовой прямоугольной системе координат в форме Папковича-Нейбера [233] для точного выполнения всех уравнений равновесия и совместности деформаций достаточна гармоничность трёх функций напряжений. В осесимметричной задаче теории упругости без объёмных сил и кручения в цилиндрической системе координат для точного выполнения всех уравнений равновесия и совместности деформаций достаточна бигармоничность функции напряжений Лява [195].

Если искомые функции имеют общую область определения, которую целесообразно рассмотреть или как единый макроэлемент, или как соединение макроэлементов, то общий (полу)степенной метод решения общих систем функциональных уравнений даёт как свой частный случай общий (полу)степенной аналитический метод макроэлементов.

Общий (полу)степенной аналитический метод макроэлементов в дальнейшем будет приложен к осесимметричной задаче теории упругости без объёмных сил и кручения в цилиндрической системе координат.

Приближённые методы с неполным удовлетворением условий решаемой задачи математически строго проанализированы и для любого математического моделирования обобщены целочастичной (парциальной) методологией решения общих математических задач с возможностью различного использования разных условий решаемой задачи, в том числе применительно к общему интегральному методу и к общему интегральному аналитическому методу макроэлементов как интегральной модификации аналитической методологии макроэлементов для именно существенно трёхмерных тел.

Целочастичная (парциальная) методология в самом общем виде разбивает решаемую задачу на различно используемые части (подзадачи), в частности предмет на подпредметы, систему на подсистемы, множество на подмножества, систему или множество отношений, например уравнений или неравенств, на подсистемы или подмножества соответствующих отношений, в том числе функциональных, в которых искомыми неизвестными являются функции. Целочастичная (парциальная) методология применительно к системе функциональных уравнений (2.1) разбивает эту систему на различно используемые подсистемы функциональных уравнений.

Возможно и сочетание целочастичной (парциальной) методологии с полной линейно-комбинационной методологией, используемой для явного отыскания аналитического решения некоторых из тех подзадач, на которые целочастичная (парциальная) методология разбивает решаемую задачу.

Приближённые методы решения упругих задач математически строго проанализированы и обобщены общим интегральным методом, в частности общим интегральным аналитическим методом макроэлементов как интегральной модификацией аналитической методологии макроэлементов, для впервые решаемых нетривиальных задач механики, прочности и оптики нагруженных именно существенно трёхмерных тел.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 72/556

Если, в частности, целочастичная (парциальная) методология разбивает решаемую задачу именно на две различно используемые части (подзадачи), одна из которых используется как разрешающая, а другая часть – как оценивающая (оценочная), то целочастичная (парциальная) методология даёт как свой частный случай общий интегральный (разрешающе-оценивающий) метод.

Общий интегральный метод в самом общем виде разбивает решаемую задачу именно на две различно используемые части (подзадачи), одна из которых используется как разрешающая, а другая часть – как оценивающая (оценочная), в частности разбивает предмет на разрешающий и оценивающий (оценочный) подпредметы, систему на разрешающую и оценивающую (оценочную) подсистемы, множество на разрешающее и оценивающее (оценочное) подмножества, систему или множество отношений, например уравнений или неравенств, на разрешающую и оценивающую (оценочную) подсистемы или на разрешающее и оценивающее (оценочное) подмножества соответствующих отношений, в том числе функциональных, в которых искомыми неизвестными являются функции.

Общий интегральный метод применительно к системе функциональных уравнений (2.1) заключается в её разбиении на две подсистемы функциональных уравнений. Первая, разрешающая подсистема функциональных уравнений наиболее полно включает самые простые уравнения и позволяет явно отыскать решение подсистемы как псевдорешение (частичное решение) системы, однозначность которого обеспечивается по принципу допустимой простоты. Вторая, оценочная подсистема функциональных уравнений вовсе не участвует (в отличие от известных поэтапных подходов) в формировании псевдорешения (частичного решения) системы функциональных уравнений и используется только для оценки его погрешности. Возможно включение в первую, разрешающую подсистему также лишь частично (например в среднем или коллокационно) удовлетворяемых уравнений заданной системы функциональных уравнений, тогда они в исходном виде подлежат включению во вторую, оценочную подсистему функциональных уравнений. Неоднозначность разбиения системы функциональных уравнений на разрешающую и оценочную подсистемы функциональных уравнений влечёт естественную неединственность (многовариантность) приближённых решений и их самопроверяемость и взаимную проверяемость.

Общий интегральный метод развивает и обобщает известные подходы с точным первоначальным выполнением или определяющих уравнений, или граничных условий.

Возможно и сочетание общего интегрального метода с общим (полу)степенным методом, используемым для явного отыскания (в классах (полу)степенных рядов) аналитического решения разрешающей подсистемы как псевдорешения (частичного решения) системы функциональных уравнений.

Если искомые функции имеют общую область определения, которую целесообразно рассмотреть или как единый макроэлемент, или как соединение макроэлементов, то общий интегральный метод решения общих систем функциональных уравнений даёт как свой частный случай общий интегральный аналитический метод макроэлементов.

Общий интегральный аналитический метод макроэлементов в дальнейшем будет приложен к осесимметричной задаче теории упругости без объёмных сил и кручения в цилиндрической системе координат.

Узко применимое нечёткое понятие приближённого отношения математически строго проанализировано и для любого математического моделирования обобщено универсальным чётким понятием формального (независимого от истинности) отношения. В частности, узко применимое нечёткое понятие приближённого равенства математически строго проанализировано и для любого математического моделирования обобщено универсальным чётким понятием приравнивания как формального (независимого от истинности) равенства.

Создан и общий метод косвенной (дополнительно к известной прямой) оценки неточности псевдорешения, в частности приближённого решения, средней относительной погрешностью неудовлетворения уравнений задачи при его подстановке (с обобщением оценки по невязке).



Исходным является развитие проведённого выше анализа принципиальных изъянов относительной погрешности.

Известный метод оценки точности даже двухэлементного формального числового равенства (верного или нет, для чего вводится новое обозначение знаком равенства с вопросительным знаком справа) вида

$$a = ? b$$

относительной погрешностью, то есть дробями типа

$$\delta_a = |a - b|/|a|$$

и

$$\delta_b = |a - b|/|b|,$$

неоднозначен ввиду выбора знаменателя и неприемлем при его близости к нулю.

Условно пригодная, не универсальная, нелогичная, двусмысленная, вопреки замыслу могущая превышать единицу и быть неограниченной относительная погрешность как метод оценивания математически строго проанализирована, исправлена и для любого математического моделирования обобщена безусловно пригодной, универсальной, логичной, однозначной, по замыслу всегда в пределах от нуля до единицы благодаря неравенству треугольника всеобщей погрешностью как методом оценивания.

Дополнительно к верно используемой в пределах применимости относительной погрешности в настоящей диссертации как инвариантная мера неточности, правильно обобщающей нечёткую приближённость, введена всеобщая погрешность со значениями на отрезке [0, 1], в частности линейная, квадратичная и с максимумом, с учётом частного случая неравенства Коши–Буняковского для знаменателей и с введённым альтернативным делением

$$(2.3)$$

$$E_{a=?b} = \|a - b\| / (\|a\| + \|b\|) \geq E_{a=?b, Q} = \|a - b\| / [2(\|a\|^2 + \|b\|^2)]^{1/2} \geq E_{a=?b, M} = \|a - b\| / (2 \max\{\|a\|, \|b\|\})$$

$$((a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2), a_i = \|A_i\|, b_i = 1, i = 1, 2, \dots, n;$$

$$c//d = c/d \text{ при } c \neq 0; c//d = 0 \text{ при } c = 0 \text{ и любом } d, \text{ даже нулевым или не существующем):}$$

$$E_{0=?0} = 0; E_{0=?0, Q} = 0; E_{0=?0, M} = 0;$$

$$E_{1=?0} = 1; E_{1=?0, Q} = 1/2^{1/2}; E_{1=?0, M} = 1/2;$$

$$E_{a=?0} = 1 (a \neq 0); E_{a=?0, Q} = 1/2^{1/2} (a \neq 0); E_{a=?0, M} = 1/2 (a \neq 0);$$

$$E_{1=?-1} = 1; E_{1=?-1, Q} = 1; E_{1=?-1, M} = 1;$$

$$E_{a=?-a} = 1 (a \neq 0); E_{a=?-a, Q} = 1 (a \neq 0); E_{a=?-a, M} = 1 (a \neq 0);$$

$$E_{a=?b} = 1 (a \geq 0 \geq b, a > b); E_{a=?b, Q} = E_{a=?a^2/b, Q} (a \neq 0 \neq b).$$

По принципу допустимой простоты выбирается именно линейная всеобщая погрешность  $E_{a=?b}$ , тем более что она всегда не меньше квадратичной  $E_{a=?b, Q}$  и  $E_{a=?b, M}$  с максимумом и поэтому даёт непременно более жёсткую оценку неточности и чрезвычайно естественно и безупречно обобщается на любое количество  $n$  алгебраических слагаемых в левой части формального равенства с нулевой правой частью, в частности комплексных чисел, векторов и функций:

$$\sum_{i=1}^n a_i = ? 0; E_{\sum_{i=1}^n a_i = ? 0} = \|\sum_{i=1}^n a_i\| / \|\sum_{i=1}^n |a_i|\| \in [0, 1].$$

Однако линейная всеобщая погрешность  $E_{a=?b}$  нечувствительно единична при отсутствии одинаковых знаков  $a$  и  $b$ . Бесконечно малую чувствительность при отсутствии одинаковых знаков  $a$  и  $b$  можно придать линейной всеобщей погрешности  $E_{a=?b}$  добавлением к её знаменателю строго положительной бесконечно малой  $\varepsilon$  с избавлением от потребности в именно альтернативном делении, с возможным переходом к пределу по строго положительной бесконечно малой  $\varepsilon$  и с возможностью естественного обобщения на любое количество  $n$  алгебраических слагаемых в левой части формального равенства с нулевой правой частью, в частности комплексных чисел, векторов и функций:

$$E_{a=?b, \varepsilon} = \|a - b\| / (\|a\| + \|b\| + \varepsilon) \in [0, 1],$$

$$E_{a=?b} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|a - b\| / (\|a\| + \|b\| + \varepsilon) = \|a - b\| / (\|a\| + \|b\|) \in [0, 1],$$

$$E_{a=?b} = \|a - b\| / (\|a\| + \|b\| + 0) = \|a - b\| / (\|a\| + \|b\|) \in [0, 1];$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = ? 0; E_{\sum_{i=1}^n a_i = ? 0, \varepsilon} = \|\sum_{i=1}^n a_i\| / (\|\sum_{i=1}^n |a_i|\| + \varepsilon) \in [0, 1],$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = ? 0; E_{\sum_{i=1}^n a_i = ? 0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|\sum_{i=1}^n a_i\| / (\|\sum_{i=1}^n |a_i|\| + \varepsilon) = \|\sum_{i=1}^n a_i\| / \|\sum_{i=1}^n |a_i|\| \in [0, 1],$$

$$\sum_{i=1}^n a_i = ? 0; E_{\sum_{i=1}^n a_i = ? 0} = \|\sum_{i=1}^n a_i\| / (\|\sum_{i=1}^n |a_i|\| + 0) = \|\sum_{i=1}^n a_i\| / \|\sum_{i=1}^n |a_i|\| \in [0, 1].$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 74/556

При отсутствии перехода к пределу линейная всеобщая погрешность  $E_\varepsilon$  с использованием строго положительной бесконечно малой  $\varepsilon$  оказывается не постоянной, а бесконечно мало переменной, или почти постоянной, или квазиконстантой, определяемой как величина, для которой существует такая постоянная, являющаяся пределом этой величины, что разность между этими величиной и постоянной является бесконечно малой. Подобная ситуация обычна для конечных пределов. Необычна здесь переменная, хотя и бесконечно мало переменная, оценка  $E_\varepsilon$  постоянного предмета. Пределом линейной всеобщей погрешности  $E_\varepsilon$  с использованием строго положительной бесконечно малой  $\varepsilon$  оказывается линейная всеобщая погрешность  $E$  без использования строго положительной бесконечно малой  $\varepsilon$  и поэтому с использованием альтернативного деления во избежание деления нуля на нуль.

При потребности в конечной чувствительности при отсутствии одинаковых знаков  $a$  и  $b$  могут использоваться несколько более сложные и дающие более мягкую оценку неточности квадратичная всеобщая погрешность  $E_{a \approx b, Q}$  или всеобщая погрешность  $E_{a \approx b, M}$  с максимумом. Для любого количества  $n$  действительных алгебраических слагаемых в левой части формального равенства

$$\sum_{i=1}^n a_i \approx 0$$

с нулевой правой частью можно каждое из слагаемых расположить в той части формального равенства, в которой действительное алгебраическое слагаемое непременно неотрицательно, затем просуммировать каждую из этих частей, обозначить сумму в левой части через  $a$  и сумму в правой части через  $b$ , а теперь применить соответствующую формулу

$$E_{a \approx b, Q} = \|a - b\| / [2(\|a\|^2 + \|b\|^2)]^{1/2} \in [0, 1],$$

$$E_{a \approx b, M} = \|a - b\| / (2 \max\{\|a\|, \|b\|\}) \in [0, 1]$$

для двух элементов формального равенства. Для любого количества  $n$  алгебраических слагаемых, в частности комплексных чисел, векторов и функций, в левой части формального равенства

$$\sum_{i=1}^n a_i \approx 0$$

с нулевой правой частью можно определить квадратичную всеобщую погрешность  $E_{\sum_{a(i=1,2,\dots,n)} \approx 0, Q}$  или всеобщую погрешность  $E_{\sum_{a(i=1,2,\dots,n)} \approx 0, M}$  с максимумом как максимум двухэлементных квадратичных всеобщих погрешностей  $E_{a \approx b, Q}$  или максимум двухэлементных всеобщих погрешностей  $E_{a \approx b, M}$  с максимумом для конечного множества всевозможных распределений  $n$  алгебраических слагаемых по частям формального равенства, причём для каждого из распределений следует просуммировать каждую из этих частей, обозначить сумму в левой части через  $a$  и сумму в правой части через  $b$ , а теперь применить соответствующую формулу

$$E_{a \approx b, Q} = \|a - b\| / [2(\|a\|^2 + \|b\|^2)]^{1/2} \in [0, 1],$$

$$E_{a \approx b, M} = \|a - b\| / (2 \max\{\|a\|, \|b\|\}) \in [0, 1]$$

для двух элементов формального равенства. Но также можно и сразу применить более общую соответствующую формулу

$$\sum_{i=1}^n a_i \approx 0; E_{\sum_{a(i=1,2,\dots,n)} \approx 0, Q} = \|\sum_{i=1}^n a_i\| / (n \sum_{i=1}^n \|a_i\|^2)^{1/2} \in [0, 1],$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \approx 0; E_{\sum_{a(i=1,2,\dots,n)} \approx 0, M} = \|\sum_{i=1}^n a_i\| / (n \max\{\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_n\|\}) \in [0, 1],$$

причём первую из них с учётом частного случая неравенства Коши–Буняковского.

Наряду с обычной нелогичной двусмысленной относительной погрешностью выше были дополнительно предложены две хотя бы частично усовершенствованные именно однозначные относительные погрешности:

левочастная относительная погрешность

$$\delta_{a \approx b, a} = \|a - b\| / \|a\|;$$

правочастная относительная погрешность

$$\delta_{a \approx b, a} = \|a - b\| / \|b\|.$$

Их дальнейшее усовершенствование достигается исключением деления нуля на нуль благодаря использованию введённого альтернативного деления:

левочастная альтернативно относительная погрешность

$$\delta_{a \approx b, a, //} = \|a - b\| / \|a\| \in [0, +\infty);$$

правочастная альтернативно относительная погрешность

$$\delta_{a \approx b, a, //} = \|a - b\| / \|b\| \in [0, +\infty).$$

В последних формулах справа указаны множества значений соответствующих относительных погрешностей. Стремление их к плюс бесконечности осуществляется при стремлении буквы в знаменателе к нулю, тогда как другая буква сохраняет конечное ненулевое значение. Нелогичность обычной и этих двух относительных погрешностей заключается в том, что у них в числителе используются оба элемента формального равенства, а в знаменателе только один из этих элементов при отсутствии какой бы то ни было зависимости от другого элемента. Поэтому дальнейшее логичное усовершенствование относительных погрешностей осуществляется заменой (в знаменателе) нормы одного из элементов формального равенства некоторой функцией именно норм

$$c = \|a\|, \\ d = \|b\|$$

обоих элементов формального равенства, причём равной общему значению этих норм при условии равенства норм обоих элементов формального равенства. Таковы, в частности, классические средние двух неотрицательных чисел  $c, d$  с классическими неравенствами между этими средними:

среднее гармоническое, усовершенствованное исключением деления нуля на нуль благодаря использованию введённого альтернативного деления,

$$H = 2cd / (c + d);$$

среднее геометрическое

$$G = (cd)^{1/2};$$

среднее арифметическое

$$A = (c + d) / 2;$$

среднее квадратическое

$$Q = [(c^2 + d^2) / 2]^{1/2}; \\ H \leq G \leq A \leq Q.$$

Такова также функция минимума

$$m = \min\{c, d\}$$

этих чисел, которая не больше всех этих средних. Действительно, одно из этих входящих в эту функцию симметрично двух неотрицательных чисел  $c, d$  не больше другого и можно обозначить их так, что  $c \leq d$ . Тогда

$$m = \min\{c, d\} = c \leq 2cd / (c + d) = H,$$

поскольку

$$c(c + d) \leq c(d + d) = 2cd.$$

Такова также функция максимума

$$M = \max\{c, d\}$$

этих чисел, которая не меньше всех этих средних. Действительно, одно из этих входящих в эту функцию симметрично двух неотрицательных чисел  $c, d$  не больше другого и можно обозначить их так, что  $c \leq d$ . Тогда

$$M = \max\{c, d\} = d \geq [(c^2 + d^2) / 2]^{1/2} = Q,$$

поскольку

$$2d^2 \geq c^2 + d^2.$$

Следовательно, получается цепочка нестрогих неравенств в порядке неубывания

$$m \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq M.$$

В итоге наряду с обычной нелогичной двусмысленной относительной погрешностью и двумя хотя бы частично усовершенствованными именно однозначными относительными погрешностями дополнительно предлагаются ещё шесть следующих хотя бы частично усовершенствованных именно однозначных относительных погрешностей в порядке невозрастания ввиду неубывания знаменателей:

относительная погрешность с минимумом

$$\delta_{a \approx b, m} = \|a - b\| / \min\{\|a\|, \|b\|\};$$

относительная погрешность со средним гармоническим

$$\delta_{a=?b, H} = \|a^2 - b^2\|/(2\|ab\|);$$

относительная погрешность со средним геометрическим

$$\delta_{a=?b, G} = \|a - b\|/\|ab\|^{1/2};$$

относительная погрешность со средним арифметическим

$$\delta_{a=?b, A} = \|a - b\|/[(\|a\| + \|b\|)/2] = 2\|a - b\|/(\|a\| + \|b\|);$$

относительная погрешность со средним квадратическим

$$\delta_{a=?b, Q} = \|a - b\|/[(\|a\|^2 + \|b\|^2)/2]^{1/2} = 2\|a - b\|/[2(\|a\|^2 + \|b\|^2)]^{1/2};$$

относительная погрешность с максимумом

$$\delta_{a=?b, M} = \|a - b\|/\max\{\|a\|, \|b\|\};$$

$$\delta_{a=?b, m} \geq \delta_{a=?b, H} \geq \delta_{a=?b, G} \geq \delta_{a=?b, A} \geq \delta_{a=?b, Q} \geq \delta_{a=?b, M}.$$

Их дальнейшее усовершенствование достигается исключением деления нуля на нуль благодаря использованию введённого альтернативного деления:

альтернативно относительная погрешность с минимумом

$$\delta_{a=?b, m, //} = \|a - b\|/\min\{\|a\|, \|b\|\} \in [0, +\infty);$$

альтернативно относительная погрешность со средним гармоническим

$$\delta_{a=?b, H, //} = \|a^2 - b^2\|/(2\|ab\|) \in [0, +\infty);$$

альтернативно относительная погрешность со средним геометрическим

$$\delta_{a=?b, G, //} = \|a - b\|/\|ab\|^{1/2} \in [0, +\infty);$$

альтернативно относительная погрешность со средним арифметическим

$$\delta_{a=?b, A, //} = \|a - b\|/[(\|a\| + \|b\|)/2] = 2\|a - b\|/(\|a\| + \|b\|) = 2E_{a=?b} \in [0, 2];$$

альтернативно относительная погрешность со средним квадратическим

$$\delta_{a=?b, Q, //} = \|a - b\|/[(\|a\|^2 + \|b\|^2)/2]^{1/2} = 2\|a - b\|/[2(\|a\|^2 + \|b\|^2)]^{1/2} = 2E_{a=?b, Q} \in [0, 2];$$

альтернативно относительная погрешность с максимумом

$$\delta_{a=?b, M, //} = \|a - b\|/\max\{\|a\|, \|b\|\} = 2E_{a=?b, M} \in [0, 2];$$

$$\delta_{a=?b, m, //} \geq \delta_{a=?b, H, //} \geq \delta_{a=?b, G, //} \geq \delta_{a=?b, A, //} \geq \delta_{a=?b, Q, //} \geq \delta_{a=?b, M, //}.$$

В этих формулах, кроме последней, справа указаны множества значений соответствующих относительных погрешностей. Стремление их к плюс бесконечности осуществляется при стремлении одной буквы к нулю, тогда как другая буква сохраняет конечное ненулевое значение. В трёх формулах относительные погрешности со средним арифметическим, со средним квадратическим и с максимумом оказываются именно точными удвоениями соответствующих всеобщих погрешностей (линейной, квадратичной и с максимумом), а наибольшее с учётом неравенства треугольника значение 2 достигается при условии противоположности ненулевых значений букв

$$b = -a \neq 0.$$

Таким образом, в настоящей диссертации полностью сохраняются и правильно используются в узких пределах применимости, приемлемости и пригодности только для достаточно хороших приближений и даже развиваются, совершенствуются и дополняются известные относительная погрешность, способ её оценки и формула для её определения; при этом непрерывно дополнительно к правильно используемой в пределах её применимости относительной погрешности в настоящей диссертации введена всеобщая погрешность без каких бы то ни было ограничений применимости, приемлемости и пригодности для именно любых формальных (условных, независимых от истинности) приравнений, то есть для любых как приближений, так и неприближений, как инвариантная мера неточности, правильно обобщающей нечёткую приближённость. Для двухэлементных приближённых равенств всеобщая погрешность примерно вдвое меньше относительной погрешности, что следует иметь в виду и непременно правильно учитывать. Такое соотношение является прямым следствием принципиального недостатка именно и только относительной погрешности, которая в модуле (норме) числителя правильно учитывает все элементы формального равенства, а для модуля (нормы) знаменателя принципиально нелогично, произвольно и необоснованно выхватывает только один из элементов формального равенства и полностью игнорирует неравенство треугольника, необходимое для осуществления

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 77/556

замысла относительной погрешности о её неперменной принадлежности отрезку между нулём и единицей.

Обобщение всеобщей погрешности для системы функциональных уравнений (2.1) при

$$(2.4) \quad \delta_{\Lambda} = (n_{\Lambda}^{-1} \sum_{\lambda \in \Lambda} g^{(\lambda)} \delta_{\lambda}^{g^{(\Lambda)}})^{1/g^{(\Lambda)}} (g(\lambda) > 0, g(\Lambda) > 0)$$

с общей для всех функций  $f_{\varphi}$  произвольной областью определения  $Z_{\lambda}$  и со значениями  $z_{\omega}$ ,  $f_{\varphi}$  и  $L_{\lambda}$  из соответствующих линейных нормированных пространств с их индексами  $\omega$ ,  $\varphi$  и  $\lambda$  даёт среднюю всеобщую погрешность функционального равенства (2.1)

$$(2.5) \quad g^{(\lambda)} \delta_{\lambda} = \{ \lim_{Z'(\lambda) \rightarrow Z(\lambda)} V_{Z'(\lambda)}^{-1} \int_{Z'(\lambda)} \|L_{\lambda}[f_{\varphi \in \Phi} f_{\varphi[\omega \in \Omega Z_{\omega}]]\|_{\lambda}^{g^{(\lambda)}} / \sup_{Z'(\lambda)} \|L_{\lambda}[f_{\varphi \in \Phi} f'_{\varphi[\omega \in \Omega Z_{\omega}]]\|_{\lambda}^{g^{(\lambda)}} dV_{Z'(\lambda)} \}^{1/g^{(\Lambda)}},$$

причём точная верхняя грань  $\sup_{Z'(\lambda)}$  берётся по множеству всех таких функций  $f'_{\varphi[\omega \in \Omega Z_{\omega}]}$ , что

$$\|f'_{\varphi[\omega \in \Omega Z_{\omega}]\|_{\varphi} = \|f_{\varphi[\omega \in \Omega Z_{\omega}]\|_{\varphi},$$

с приближением области

$$Z(\lambda) = Z_{\lambda}$$

её подмножествами

$$Z'(\lambda) = Z'_{\lambda}$$

конечной меры (объёма)  $V_{Z'(\lambda)}$ .

Средняя всеобщая погрешность (2.5) упрощённо оценивается дробью

$$(2.6) \quad \delta_{\lambda} = \text{med}_{Z(\lambda)} \|L_{\lambda}[f_{\varphi \in \Phi} f_{\varphi[\omega \in \Omega Z_{\omega}]]\|_{\lambda} / \sup'_{Z(\lambda)} \|L_{\lambda}[f_{\varphi \in \Phi} f'_{\varphi[\omega \in \Omega Z_{\omega}]]\|_{\lambda}.$$

В правой части формулы (2.6) числитель  $\text{med}_{Z(\lambda)}$  – некоторое наиболее просто вычисляемое среднее по области значение нормы левой части равенства (2.1), включающей все его элементы, а знаменатель  $\sup'_{Z(\lambda)}$  – точная верхняя грань по области

$$Z(\lambda) = Z_{\lambda}$$

суммы норм всех алгебраических слагаемых элементов равенства (2.1) непременно в исходном виде до возможного приведения подобных.

Разумеется, наряду с этой косвенной оценкой погрешностей приближённых решений желательна и прямая оценка погрешностей приближённых решений.

Более того, в настоящей диссертации это пожелание выполнено везде, где только можно.

Известный метод прямой оценки погрешностей приближённых решений основан на сопоставлении получаемого приближённого решения или с точным, или с гораздо более точным приближённым решением.

Но точным или гораздо более точным приближённым решением надо располагать, и поэтому нет возможности оценить методом прямой оценки погрешностей приближённых решений точность именно наилучшего известного приближённого решения.

Например, известны прямые оценки точности решений задач теории пластин именно и только в тех случаях, когда имеются решения соответствующих задач более точной теории плит.

Но нет известных прямых оценок решений задач теории плит, потому что известно по существу очень мало достаточно простых и поэтому практически применимых решений нетривиальных существенно трёхмерных задач теории упругости.

В настоящей диссертации именно дополнительно к известному методу прямой оценки погрешностей приближённых решений предложен и используется ещё и другой подход – метод косвенной оценки погрешностей неточных псевдорешений как метод прямого оценивания погрешности неудовлетворения, соответствующей каждому из уравнений подсистемы, названной нами оценочной, при подстановке неточных псевдорешений.

И метод косвенной оценки погрешностей неточных псевдорешений в принципе применим к достаточно широкому априорно не указуемому классу задач, хотя используется здесь для сравнительно узкого класса задач по нуждам настоящей диссертации.

Метод косвенной оценки погрешностей неточных псевдорешений позволяет дать косвенные оценки погрешностей впервые получаемых приближённых решений нетривиальных задач для именно существенно трёхмерных тел.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 78/556

А сами эти решения открывают возможность уточнить известные прямые оценки точности решений задач теории пластин по решениям задач теории плит, а главное, именно впервые дать прямые оценки точности решений задач теории плит.

Важно, что этот дополнительный метод косвенной оценки погрешностей неточных псевдорешений, в частности приближённых решений, как метод прямого оценивания погрешности неудовлетворения, соответствующей каждому из уравнений подсистемы, названной нами оценочной, даёт именно не зависящие от соотношений размеров деформируемого твёрдого тела универсальные оценки погрешности приближённых решений по общему интегральному методу.

Поэтому есть основания полагать, что точность решений по общему интегральному методу для именно существенно трёхмерных тел примерно соответствует точности решений теории пластин для пластин.

Кроме того, сложность решений по общему интегральному методу для именно существенно трёхмерных тел примерно соответствует сложности решений теории пластин для пластин.

Если искомые функции имеют общую область определения, которую целесообразно рассмотреть или как единый макроэлемент, или как соединение макроэлементов, то полная линейно-комбинационная методология решения общих систем функциональных уравнений даёт как свой частный случай полную линейно-комбинационную методологию макроэлементов.

Если искомые функции имеют общую область определения, которую целесообразно рассмотреть или как единый макроэлемент, или как соединение макроэлементов, то целочастичная (парциальная) методология решения общих систем функциональных уравнений даёт как свой частный случай целочастичную (парциальную) методологию макроэлементов.

Соединение полной линейно-комбинационной и целочастичной (парциальной) методологий макроэлементов для решения систем функциональных уравнений позволяет создать общую аналитическую методологию макроэлементов в линейно-комбинационной и целочастичной (парциальной) модификациях соответственно. Этими модификациями являются полная линейно-комбинационная и целочастичная (парциальная) методологии макроэлементов соответственно.

Соединение общего (полу)степенного аналитического метода макроэлементов и общего интегрального аналитического метода макроэлементов для решения систем функциональных уравнений позволяет создать аналитическую методологию макроэлементов в (полу)степенной и интегральной модификациях соответственно. Этими модификациями являются общий (полу)степенной аналитический метод макроэлементов и общий интегральный аналитический метод макроэлементов соответственно. Они решают сходные задачи с аналогичными результатами и дополняют друг друга, но могут рассматриваться и как относительно самостоятельные общие аналитические методы макроэлементов.

## **2.2. Общий степенной метод с определением общих степенных гармонической и бигармонической функций, в частности функций напряжений**

Сущность общего степенного метода можно показать на примерах его приложений к нахождению впервые именно общих степенных решений гармонического и бигармонического уравнений, то есть в степенных рядах, являющихся собственными классами функций для операторов этих уравнений.

Приложение общего степенного метода к решению гармонического уравнения и через него трёхмерной упругой задачи в декартовой прямоугольной системе координат через три гармонические функции в форме Папковича-Нейбера [233] основано на том, что класс степенных рядов – собственный для оператора гармонического уравнения

(2.7)

$$\nabla^2 A(x, y, z) = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2)A(x, y, z) = 0,$$

где

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 - \text{оператор Лапласа,}$$

с исходным общим видом решения

$$(2.8)$$

$$A(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ijk} x^i y^j z^k$$

при неопределённых числовых коэффициентах  $a_{ijk}$  как искомым неизвестных параметрах.

Подстановка (2.8) в (2.7) даёт последовательно решаемую систему уравнений относительно коэффициентов  $a_{ijk}$

$$(2.9)$$

$$(i+2)(i+1)a_{i+2,j,k} + (j+2)(j+1)a_{i,j+2,k} + (k+2)(k+1)a_{i,j,k+2} = 0 \quad (i, j, k = 0, 1, 2, \dots)$$

и редукционную по  $i$  формулу ( $[M] = \text{entier } M$  – целая часть числа  $M$ )

$$(2.10)$$

$$a_{ijk} = (-1)^{[i/2]} [i/2]! (i!j!k!)^{-1} \sum_{m=0}^{[i/2]} (j+2m)! (k+2[i/2]-2m)! (m!([i/2]-m)!)^{-1} a_{i-2[i/2],j+2m,k+2[i/2]-2m} \\ (i, j, k = 0, 1, 2, \dots).$$

Подстановка (2.10) в (2.8) даёт впервые достигаемое именно общее степенное решение

$$(2.11)$$

$$A(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{[i/2]} [i/2]! (i!j!k!)^{-1} \sum_{m=0}^{[i/2]} (j+2m)! (k+2[i/2]-2m)! (m!([i/2]-m)!)^{-1} a_{i-2[i/2],j+2m,k+2[i/2]-2m} x^i y^j z^k$$

гармонического уравнения (2.7) в собственном для оператора этого уравнения классе (2.8) степенных рядов через две двойные числовые последовательности  $a_{0jk}$  при чётном  $i$  и  $a_{ijk}$  при нечётном  $i$ , конечное при конечности этих обеих двойных числовых последовательностей.

Проблема сходимости подобных рядов разрешима при конкретизации их и области определения и снимается при замене рядов конечными суммами в приближениях.

Приложение общего степенного метода к решению бигармонического уравнения и через него осесимметричной упругой задачи без объёмных сил и кручения в цилиндрической системе координат через бигармоническую функцию напряжений Лява [195] основано на том, что класс степенных рядов – собственный для оператора бигармонического уравнения

$$(2.12)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 L(r, z) = (\partial^2/\partial r^2 + r^{-1} \partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2)^2 L(r, z) = 0,$$

где

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1} \partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2 - \text{оператор Лапласа,}$$

с исходным общим видом решения

$$(2.13)$$

$$L(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} r^i z^j$$

при неопределённых числовых коэффициентах  $a_{ij}$  как искомым неизвестных параметрах.

Подстановка (2.13) в (2.12) даёт последовательно решаемую систему уравнений относительно коэффициентов  $a_{ij}$

$$(2.14)$$

$$16(i+1)^2(i+2)^2 a_{i+2,j} + 8(i+1)^2(j+1)(j+2) a_{i+1,j+2} + (j+1)(j+2)(j+3)(j+4) a_{i,j+4} = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots)$$

и редукционную по  $i$  формулу (квадратные скобки имеют обычное объединяющее значение)

$$(2.15)$$

$$a_{ij} = (-1)^{i+1} i!^{-2} j!^{-1} 2^{-2i} (2i+j-2)! [4i a_{1,2i+j-2} + (2i+j-1)(2i+j)(i-1) a_{0,2i+j}] \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots),$$

доказываемую математической индукцией по  $i$ .

Для единообразия формул условно полагаем при  $M < 0$

$$M! = 1$$

и

$$a_{1M} = 0.$$

Подстановка (2.15) в (2.13) даёт впервые достигаемое именно общее решение бигармонического уравнения (2.12) в собственном для оператора этого уравнения классе (2.13) степенных рядов и тем самым общее степенное представление

$$(2.16)$$

$L(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+1} i!^{-2} j!^{-1} 2^{-2i} (2i+j-2)! [4i a_{1,2i+j-2} + (2i+j-1)(2i+j)(i-1) a_{0,2i+j}] r^{2i} z^j$  осесимметричной бигармонической функции и, в частности, функции напряжений Лява в осесимметричной упругой задаче без объёмных сил и кручения через две простые числовые последовательности  $a_{0,2i+j}$  при чётном  $i$  и  $a_{1,2i+j-2}$  при нечётном  $i$ , конечное при конечности этих обеих простых числовых последовательностей.

Проблема сходимости подобных рядов разрешима при конкретизации их и области определения и снимается при замене рядов конечными суммами в приближениях.

Для единообразия формул условно полагаем

$$1/(-1)! = 0.$$

Применением дифференциальных операторов (1.27) устанавливаем формулы для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений в осесимметричной упругой задаче без объёмных сил и кручения:

$$(2.17)$$

$$u_r(r, z) = (1 + \mu) E^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+1} (2i+j+1)! i!^{-2} j!^{-1} 2^{1-2i} a_{1,2i+j+1} + (-1)^{i+1} (2i+j+3)! (i-1)!^{-1} (i+1)!^{-1} j!^{-1} 2^{-1-2i} a_{0,2i+j+3} r^{2i+1} z^j;$$

$$u_z(r, z) = (1 + \mu) E^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^i i!^{-2} j!^{-1} [(i+2-2\mu)(2i+j)! 2^{-2i} a_{1,2i+j} + (i+1-2\mu)(2i+j+2)! 2^{-2i} a_{0,2i+j+2}] r^{2i} z^j;$$

$$(2.18)$$

$$\sigma_r(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+1} i!^{-2} j!^{-1} 2^{-1-2i} \{4(2i+1-2\mu)(2i+j+1)! a_{1,2i+j+1} + [2(i-\mu) - i/(i+1)](2i+j+3)! a_{0,2i+j+3}\} r^{2i} z^j;$$

$$\sigma_t(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+1} i!^{-2} j!^{-1} 2^{-1-2i} \{4(1-2\mu)(2i+j+1)! a_{1,2i+j+1} + [(1-2\mu)i - 2\mu](i+1)^{-1} (2i+j+3)! a_{0,2i+j+3}\} r^{2i} z^j;$$

$$(2.19)$$

$$\sigma_z(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^i i!^{-2} j!^{-1} 2^{-2i} [4(i+2-\mu)(2i+j+1)! a_{1,2i+j+1} + (i+1-\mu)(2i+j+3)! a_{0,2i+j+3}] r^{2i} z^j;$$

$$(2.20)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{i+1} i!^{-1} (i+1)!^{-1} j!^{-1} 2^{-1-2i} [4(i+2-\mu)(2i+j+2)! a_{1,2i+j+2} + (i+1-\mu)(2i+j+4)! a_{0,2i+j+4}] r^{2i+1} z^j.$$

Принципиальная новизна и практическая ценность общего (полу)степенного метода заключается в получении и применении именно общих решений задач в (полу)степенных рядах, в данном случае в получении и применении общего представления осесимметричной бигармонической функции, которое может быть использовано в данной задаче как для функции напряжений Лява, так и для осевого напряжения взамен известных [165, 195, 321] частных представлений, не только не носящих исчерпывающего характера, но и обладающих каждое весьма ограниченными, а в совокупности неясными возможностями удовлетворения граничным условиям решаемых задач. В противоречащем случае, чтобы не утратить общности, приходится использовать взамен (2.16) заведомо более общее представление (2.13), вынуждающее обеспечивать бигармоничность функции  $L(r, z)$  в каждой решаемой задаче отдельно, что препятствует получению общих результатов и резко увеличивает трудоёмкость решения даже конкретных задач прочности. Новые возможности достигнутого общего представления (2.16) подобны таковым при введении рядов в дополнение к замкнутым алгебраическим суммам конечных множеств слагаемых.

### 2.3. Выбор и обоснование основной расчётной схемы для развития общего (полу)степенного метода расчёта осесимметричных напряжённо-деформированных состояний трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов

В рациональной конструкции иллюминатора для высоких давлений поле зрения не должно сужаться, и потому давление внешней среды в такой конструкции действует на всю поверхность внешнего основания светопрозрачного элемента.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 81/556

Если учесть нежелательность значительных силовых контактов стеклоэлементов с деталями из других материалов, то представляется также рациональным удерживать светопрозрачный элемент в равновесии благодаря действию гидростатического давления соответствующей величины на кольцевую периферическую часть поверхности частично нагруженного внутреннего основания.

В связи с малостью отношения пределов прочности неорганического стекла при растяжении и сжатии полезно обжатие стеклоэлемента приложенным к его боковой поверхности гидростатическим давлением.

При этом существует наилучшее значение отношения величины этого давления к величине внешнего давления, зависящее от конструктивных параметров иллюминатора и, вообще говоря, не равное единице.

Удовлетворяющая этим требованиям конструкция иллюминатора для высоких давлений и схема нагружения его светопрозрачного элемента показаны на рис. 2.1.

Отношения давлений на периферическую часть частично нагруженного внутреннего основания и на боковую поверхность к внешнему давлению на всю поверхность внешнего основания светопрозрачного элемента поддерживаются автоматически двумя двухступенчатыми поршнями с соответствующими отношениями площадей поперечных сечений ступеней.

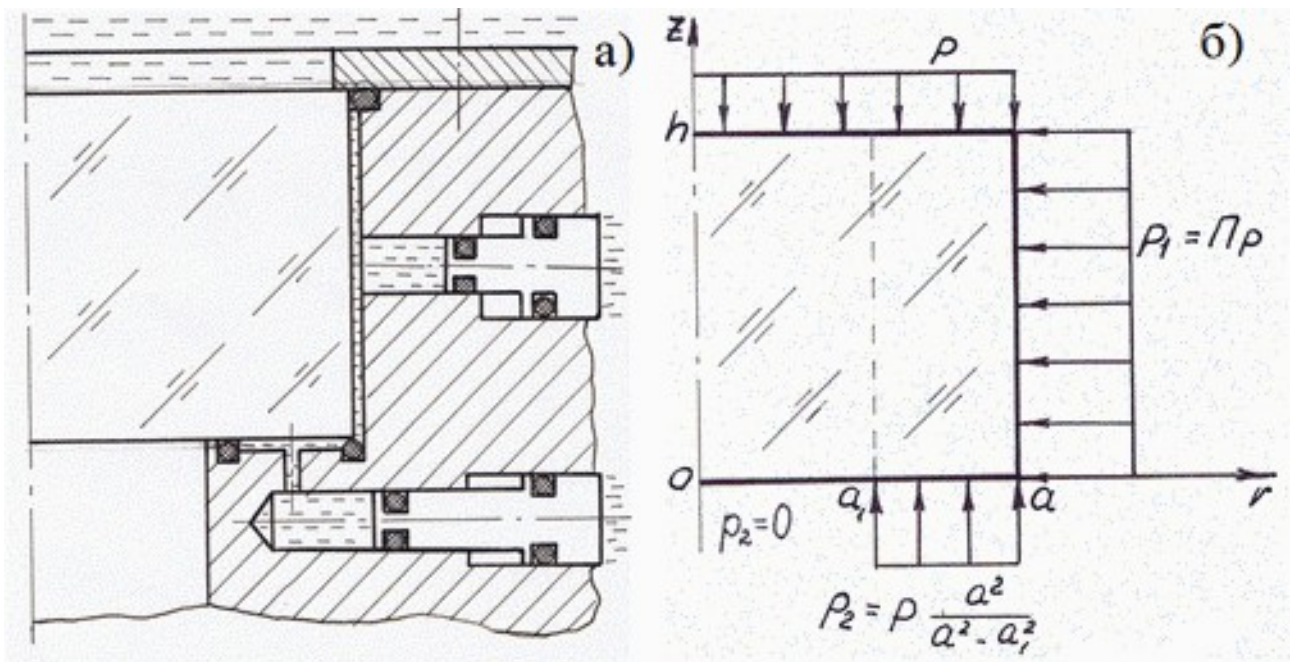


Рисунок 2.1. Рассматриваемая конструкция (а) иллюминатора для высоких давлений и схема нагружения (б) его светопрозрачного элемента.

Существенными отличиями такого иллюминатора от конструкций с силовыми контактами стеклоэлементов с оправами являются отсутствие трения между ними и равномерное распределение давления

$$(2.21) \quad p_2 = p a^2 / (a^2 - a_1^2)$$

на периферическую часть частично нагруженного внутреннего основания стеклоэлемента.

Применение приведённой расчётной схемы, не учитывающей особенностей взаимодействия стеклоэлементов с оправами и уплотнительными кольцами, ведёт к погрешностям, которые, как показано в дальнейшем путём сопоставления расчётных и экспериментальных результатов, невелики.

Принятие условия (2.21) наряду с общепринятыми допущениями линейной теории упругости делает вполне определённым выбор расчётной схемы и позволяет исследовать деформирование светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений независимо от его оправы и получить универсальное замкнутое решение методом функций напряжений Лява [195].

## 2.4. Определение вида функции напряжений для расчёта осесимметричных напряжённо-деформированных состояний трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов

По принципу наложения (суперпозиции) в линейной теории упругости можно отделить для дальнейшего учёта часть напряжённо-деформированного состояния трёхмерного цилиндрического тела (элемента) от действия давления  $p_1$  на боковую поверхность тела (элемента). Эта часть определяется решением Ламе [358] для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений в сплошном цилиндре [191, 195, 358]:

$$(2.22)$$

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= - (1 - \mu) r p_1 / E; \\ u_z(r, z) &= 2 \mu z p_1 / E; \\ \sigma_r(r, z) &= - p_1; \\ \sigma_t(r, z) &= - p_1; \\ \sigma_z(r, z) &= 0; \\ \tau_{rz}(r, z) &= 0. \end{aligned}$$

Остаётся определить напряжённо-деформированное состояние трёхмерного цилиндрического тела (элемента) при  $p_1 = 0$  (см. рис. 2.1). Поскольку при  $r = a_1$  на внутреннем основании  $z = 0$  есть скачок осевого напряжения  $\sigma_z(r, z)$  и в решении этой задачи методом теории пластин [80, 351] приводятся различные выражения в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  и в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$ , то в целях получения замкнутого аналитического решения представляется логичным мысленное рассечение сплошного трёхмерного цилиндрического тела соосной (коаксиальной) цилиндрической поверхностью  $r = a_1$  на круглую центральную часть радиусом  $a_1$  и кольцевую периферическую часть внутренним радиусом  $a_1$  и внешним радиусом  $a$ . Смысл рассечения заключается в том, что будут построены решения отдельно для круглой центральной  $0 \leq r \leq a_1$  и кольцевой периферической  $a_1 \leq r \leq a$  частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела и последует сопряжение этих решений на поверхности  $r = a_1$ .

Для упрощения используем безразмерные величины

$$(2.23)$$

$$\begin{aligned} \rho &= r/h; \\ \zeta &= z/h; \\ b &= a_1/h; \\ c &= a/h; \\ u_\rho(\rho, \zeta) &= u_r(r, z)(1 + \mu)^{-1} E / (p h); \\ u_\zeta(\rho, \zeta) &= u_z(r, z)(1 + \mu)^{-1} E / (p h); \\ \sigma_\rho(\rho, \zeta) &= \sigma_r(r, z) / p; \\ \sigma_\varphi(\rho, \zeta) &= \sigma_t(r, z) / p; \\ \sigma_\zeta(\rho, \zeta) &= \sigma_z(r, z) / p; \\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) &= \tau_{rz}(r, z) / p; \\ \Lambda(\rho, \zeta) &= L(r, z) / (p h^3) = L(h\rho, h\zeta) / (p h^3), \end{aligned}$$

где

$L(r, z)$  – бигармоническая размерная функция напряжений Лява [195];

$\Lambda(\rho, \zeta)$  – бигармоническая безразмерная функция напряжений Лява.

Оператор Лапласа (2.12) принимает безразмерный вид

(2.24)

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial\rho^2 + \rho^{-1}\partial/\partial\rho + \partial^2/\partial\zeta^2.$$

Безразмерные перемещения и напряжения выражаются через бигармоническую

(2.25)

$$\nabla^2\nabla^2\Lambda(\rho, \zeta) = 0$$

безразмерную функцию напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  с помощью следующих из (1.27) безразмерных линейных дифференциальных операторов:

(2.26)

$$\begin{aligned} u_\rho(\rho, \zeta) &= -\partial^2\Lambda(\rho, \zeta)/(\partial\rho\partial\zeta); \\ u_\zeta(\rho, \zeta) &= (2(1-\mu)\nabla^2 - \partial^2/\partial\zeta^2)\Lambda(\rho, \zeta); \\ \sigma_\rho(\rho, \zeta) &= (\partial/\partial\zeta)(\mu\nabla^2 - \partial^2/\partial\rho^2)\Lambda(\rho, \zeta); \\ \sigma_\varphi(\rho, \zeta) &= (\partial/\partial\zeta)(\mu\nabla^2 - \rho^{-1}\partial/\partial\rho)\Lambda(\rho, \zeta); \\ \sigma_\zeta(\rho, \zeta) &= (\partial/\partial\zeta)((2-\mu)\nabla^2 - \partial^2/\partial\zeta^2)\Lambda(\rho, \zeta); \\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) &= (\partial/\partial\rho)((1-\mu)\nabla^2 - \partial^2/\partial\zeta^2)\Lambda(\rho, \zeta). \end{aligned}$$

Условия равновесия и совместности деформаций выполняются тождественно благодаря условию бигармоничности безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$ .

Остаётся удовлетворить этому условию и граничным условиям:

(2.27)

$$\begin{aligned} \nabla^2\nabla^2\Lambda(\rho, \zeta) &= 0; \\ \sigma_\rho(c, \zeta) &= 0; \\ \tau_{\rho\zeta}(c, \zeta) &= 0; \\ \sigma_\zeta(\rho, 0) &= 0, \quad 0 \leq \rho < b; \\ \sigma_\zeta(\rho, 0) &= -p_2/p = -a^2/(a^2 - a_1^2), \quad b \leq \rho \leq c; \\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, 0) &= 0; \\ \sigma_\zeta(\rho, 1) &= -1; \\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, 1) &= 0; \\ u_\rho(b-0, \zeta) &= u_\rho(b+0, \zeta); \\ u_\zeta(b-0, \zeta) &= u_\zeta(b+0, \zeta); \\ \sigma_\rho(b-0, \zeta) &= \sigma_\rho(b+0, \zeta); \\ \sigma_\varphi(b-0, \zeta) &= \sigma_\varphi(b+0, \zeta); \\ \sigma_\zeta(b-0, \zeta) &= \sigma_\zeta(b+0, \zeta); \\ \tau_{\rho\zeta}(b-0, \zeta) &= \tau_{\rho\zeta}(b+0, \zeta). \end{aligned}$$

Известные замкнутые решения теории пластин и теории плит и общий степенной метод обобщаются общим полустепенным методом с любыми конечными разложениями бигармонических безразмерных функций напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для круглой центральной и кольцевой периферической частей (сплошного центрального и кольцевого периферического трёхмерных цилиндрических элементов) по произвольному числу неотрицательных степеней любой из двух переменных осесимметричной задачи теории упругости с коэффициентами в виде совершенно произвольных четырежды дифференцируемых функций другой переменной. Такими ввиду асимметрии сущностей и отсутствия взаимозаменяемости ролей обеих переменных  $\rho$  и  $\zeta$  осесимметричной задачи являются две принципиально различные разновидности представлений:

(2.28)

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n f_i(\zeta)\rho^i,$$

(2.29)

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n g_i(\rho)\zeta^i.$$

Рассмотрим вначале представление (2.28).

Условие бигармоничности (2.25)

$$\nabla^2\nabla^2\Lambda(\rho, \zeta) = f_1(\zeta)\rho^{-3} + [2(\partial^2/\partial\zeta^2)f_1(\zeta) + 9f_3(\zeta)]\rho^{-1} + \sum_{i=0}^n [( \partial^4/\partial\zeta^4)f_i(\zeta) + 2(i+2)^2(\partial^2/\partial\zeta^2)f_{i+2}(\zeta) + (i+2)^2(i+4)^2f_{i+4}(\zeta)]\rho^i = 0,$$

в котором тождественно по  $\zeta$

$$f_i(\zeta) = 0 \quad (i > n),$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 84/556

приводит движением от меньших  $n$  к большим к тождественному аннулированию  $f_i(\zeta)$  со всеми нечётными индексами:

$$f_1(\zeta) = f_3(\zeta) = f_5(\zeta) = \dots = f_{2[(n-1)/2]+1}(\zeta) = 0,$$

где  $[x]$  – целая часть действительного числа  $x$ .

Заменяя  $[n/2]$  на  $n$ , получаем из (2.28) менее общее представление

$$(2.30)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n f_i(\zeta) \rho^{2i}.$$

Опять-таки из условия бигармоничности (2.25), но, в отличие от предыдущего случая, двигаясь от больших  $n$  к меньшим, получаем условие

$$(\partial^4/\partial\zeta^4)f_n(\zeta) = 0,$$

откуда  $f_n(\zeta)$  – произвольный многочлен третьей степени от  $\zeta$ ; затем выясняем, что  $f_{n-1}(\zeta)$  – произвольный многочлен пятой степени от  $\zeta$ , и т. д. То есть  $f_i(\zeta)$  – произвольный многочлен степени  $2n + 3 - 2i$  от  $\zeta$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). В конечном счёте  $f_0(\zeta)$  – произвольный многочлен степени  $2n + 3$  от  $\zeta$ . Так что из (2.30) получаем ещё менее общее представление

$$(2.31)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n+3-2i} a_{ij} \zeta^j.$$

Заметим, что мы до сих пор пользовались лишь некоторыми следствиями бигармоничности  $\Lambda(\rho, \zeta)$ , в то время как она не только приводит дедуктивно от представления (2.28) к представлению (2.31), но и накладывает на коэффициенты общего вида  $a_{ij}$  с любыми индексами представления (2.31) линейные зависимости согласно тождеству по  $\rho$  и  $\zeta$ :

$$(2.32)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n+1-2i} [(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)a_{i,j+4} + 8(i+1)^2(j+1)(j+2)a_{i+1,j+2} + 16(i+1)^2(i+2)^2 a_{i+2,j}] \zeta^j = 0.$$

Переходим теперь к выполнению граничных условий (2.27) и попытаемся удовлетворить первым двум из них – тождествам по  $\zeta$ :

$$\sigma_\rho(c, \zeta) = 0;$$

$$\tau_{\rho\zeta}(c, \zeta) = 0.$$

Представление (2.31) даёт

$$(2.33)$$

$$\sigma_\rho(c, \zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} c^{2i} \sum_{j=1}^{2n+1-2i} \{ [4(i+1)^2 j \mu - (2i+2)(2i+1)j] a_{i+1,j} + (j+2)(j+1)j \mu a_{i,j+2} \} \zeta^{j-1} = 0;$$

$$(2.34)$$

$$\tau_{\rho\zeta}(c, \zeta) = \sum_{i=1}^n c^{2i-1} \sum_{j=0}^{2n+1-2i} [8i(i+1)^2(1-\mu)a_{i+1,j} - 2i(j+1)(j+2)\mu a_{i,j+2}] \zeta^j = 0.$$

Для точного выполнения условия бигармоничности  $\Lambda(\rho, \zeta)$  и граничных условий на боковой поверхности  $\rho = c$  коэффициенты общего вида  $a_{ij}$  с любыми индексами представления (2.31) должны удовлетворять системе из трёх групп линейных зависимостей согласно тождествам (2.32) – (2.34).

В частности, тождество (2.32) при  $i = n - 1, j = 0$  даёт

$$24a_{n-1,4} + 16n^2 a_{n2} = 0,$$

откуда

$$a_{n-1,4} = -(2/3)n^2 a_{n2}.$$

Последовательное в порядке убывания  $i$  рассмотрение тождества (2.32) при

$$i = n - k, j = 2k + 2 \quad (k = 2, 3, 4, \dots, n)$$

ведёт к строго доказываемым по методу математической индукции редуцированным формулам по  $j$ :

$$(2.35)$$

$$a_{n-k,2k+2} = (-1)^k 2^{2k} / (2k+1)! n!^2 / (n-k)!^2 a_{n2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Выражение (2.34) при  $i = 1, j = 2n - 2$  приводит к соотношению

$$32(1-\mu)a_{2,2n-2} - 2(2n-1)2n\mu a_{1,2n} = 0,$$

которое совместно с (2.35) при  $k = n - 2$  и  $k = n - 1$  даёт

$$a_{n2} = 0.$$

С учётом (2.35)

$$(2.36)$$

$$a_{n-k,2k+2} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Последовательное (в порядке убывания  $i$ ) рассмотрение тождества (2.32) при

$$i = n - k, j = 2k + 3 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n)$$

приводит к редукционным по  $j$  формулам

$$a_{n-k,2k+3} = (-1)^k 3! 2^{2k} (k+1) / (2k+3)! n!^2 / (n-k)!^2 a_{n3} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Затем из (2.34) при  $i = 1, j = 2n - 1$  получаем  $a_{n3} = 0$ , так что

$$(2.37)$$

$$a_{n-k,2k+3} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Совершенно аналогично приходим к соотношениям

$$a_{n-k,2k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n);$$

$$a_{n-k,2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

которые совместно с (2.36) и (2.37) ведут к редукции  $n$  в представлении (2.31) и в конечном счёте к тождеству  $\Lambda(\rho, \zeta) = 0$ , что в принципе не позволяет выполнить граничные условия на основаниях.

Тем самым строго доказано, что граничные условия на боковой поверхности независимо от условий на основаниях не могут быть выполнены точно.

То есть возможны лишь приближённые замкнутые аналитические решения задачи с условиями (2.27) и принятым граничным условиям на боковой поверхности при условии (2.25) бигармоничности  $\Lambda(\rho, \zeta)$  можно удовлетворить лишь приближённо (осуществимо лишь плоско точное неплюско приближённое выполнение граничных условий).

Представляется логичным при сохранении условия (2.25) бигармоничности  $\Lambda(\rho, \zeta)$  изучить возможность точного выполнения граничных условий (2.27) на основаниях ( $\zeta = 0$  и  $\zeta = 1$ ).

Из (2.31) благодаря (2.26) получаем:

$$\sigma_{\zeta}(\rho, \zeta) = 6(1 - \mu)a_{n3}\rho^{2n} + \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n-2i} [4(i+1)^2(j+1)(2-\mu)a_{i+1,j+1} + (j+1)(j+2)(1-\mu)a_{i,j+3}] \zeta^j;$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = -\rho^{2n-1} (4n\mu a_{n2} + 12n\mu a_{n3}\zeta) + \sum_{i=1}^{n-1} \rho^{2i-1} \sum_{j=0}^{2n+1-2i} [8i(i+1)^2(1-\mu)a_{i+1,j} - 2i(j+1)(j+2)\mu a_{i,j+2}] \zeta^j.$$

Тождества (2.27) по  $\rho$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, 0) = 0,$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, 1) = 0$$

дают

$$a_{n2} = 0,$$

$$a_{n3} = 0,$$

Тождества (2.27) по  $\rho$

$$\sigma_{\zeta}(\rho, 0) = -p_2/\rho, \quad b \leq \rho \leq c,$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, 1) = 0$$

при  $i = n - 1$  дают систему соотношений

$$4n^2(2 - \mu)a_{n1} + 2(1 - \mu)a_{n-1,3} = 0,$$

$$4n^2(1 - \mu)a_{n1} - 6\mu a_{n-1,3} = 0$$

с ненулевым главным определителем, откуда

$$a_{n1} = 0,$$

$$a_{n-1,3} = 0.$$

Теперь путём последовательного применения (2.32) приходим к условиям

$$a_{n-k,2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

$$a_{n-k,2k+2} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

$$a_{n-k,2k+3} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

что ведёт к понижению степеней многочленов  $f_i(\zeta)$  на три в представлении (2.31):

$$(2.38)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n-2i} a_{ij} \zeta^j.$$

Заметим, что представление (2.38) получено чисто дедуктивным путём из (2.28)

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n f_i(\zeta) \rho^i.$$

Теперь рассмотрим (2.29)

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n g_i(\rho) \zeta^i$$

как другую разновидность представления безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$ .

Условие её бигармоничности (2.25)

$$\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n \{ (\partial^4 / \partial \rho^4) g_i(\rho) + 2\rho^{-1} (\partial^3 / \partial \rho^3) g_i(\rho) - \rho^{-2} (\partial^2 / \partial \rho^2) g_i(\rho) + \rho^{-3} (\partial / \partial \rho) g_i(\rho) + 2(i+1)(i+2) [(\partial^2 / \partial \rho^2) g_{i+2}(\rho) + \rho^{-1} (\partial / \partial \rho) g_{i+2}(\rho)] + (i+1)(i+2)(i+3)(i+4) g_{i+4}(\rho) \} \zeta^i = 0,$$

в котором теперь тождественно по  $\rho$

$$g_i(\rho) = 0 \quad (i > n),$$

ведёт к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $g_i(\rho)$ .

Последовательное (в направлении убывания  $i$ ) её решение даёт

$$g_i(\rho) = \sum_{j=0}^{1+(n-i)/2} (a_{ij} \rho^{2j} + b_{ij} \rho^{2j} \ln \rho) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

где и далее

$$[(n-i)/2]$$

есть обозначенная с помощью квадратных скобок целая часть числа

$$(n-i)/2.$$

Преобразуем полученное представление:

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n \zeta^i \sum_{j=0}^{1+(n-i)/2} (a_{ij} \rho^{2j} + b_{ij} \rho^{2j} \ln \rho) = \sum_{j=0}^{2j+i \leq n+2} (a_{ij} \rho^{2j} + b_{ij} \rho^{2j} \ln \rho) \zeta^i.$$

Меняя ролями  $i$  и  $j$ , а также заменяя  $n+1$  на  $n$ , получаем

$$(2.39)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{2n-2i} (a_{ij} \rho^{2i} + b_{ij} \rho^{2i} \ln \rho) \zeta^j = \sum_{i=0}^n \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n-2i} (a_{ij} + b_{ij} \ln \rho) \zeta^j.$$

Нетрудно видеть, что представление (2.39) более общее, чем (2.38), получаемое в случае

$$b_{ij} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 2i).$$

Поэтому представления (2.28) и (2.29) сводятся к единому представлению (2.39).

Изложенное выше относится и к круглой центральной, и к кольцевой периферической частям трёхмерного цилиндрического тела (элемента). Они различаются тем, что безразмерный радиус  $\rho$  в круглой центральной части может обращаться в нуль, а в кольцевой периферической части не может обращаться в нуль.

Ввиду представления (2.39) можно ожидать, что для круглой центральной части трёхмерного цилиндрического тела (элемента) все  $b_{ij}$  обращаются в нуль:

$$b_{ij} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 2i),$$

и представление (2.39) сводится к представлению (2.38). Строгое доказательство таково.

Тождество по  $\zeta$

$$u_r(0, \zeta) = 0$$

даёт тождество по  $\zeta$

$$\sum_{j=1}^{2n} b_{0j} \zeta^{j-1} = 0,$$

откуда

$$b_{0j} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, 2n).$$

Конечность  $u_\zeta(0, \zeta)$  приводит к равенствам

$$(j+1)(j+2)(1-2\mu)b_{0j+2} + 8(1-\mu)b_{1j} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, 2n-2),$$

которые вместе с предыдущими позволяют найти

$$b_{1j} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, 2n-2).$$

Наконец, условия бигармоничности (2.25)

$$(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)b_{i,j+4} + 8(i+1)^2(j+1)(j+2)b_{i+1,j+2} + 16(i+1)^2(i+2)^2b_{i+2,j} = 0$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n-2; j = 0, 1, 2, \dots, 2n-4-2i)$$

устанавливают:

при  $i = 0; j = 0, 1, 2, \dots, 2n-4$

$$b_{2j} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, 2n-4);$$

при  $i = 1; j = 0, 1, 2, \dots, 2n-6$

$$b_{3j} = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \dots, 2n-6);$$

и так далее, наконец,

при  $i = n-2; j = 0$

$$b_{n0} = 0.$$

Следовательно, для круглой центральной части трёхмерного сплошного цилиндрического тела

$$\Lambda(\rho, \zeta) = b_{00} \ln \rho + \sum_{i=0}^n \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n-2i} a_{ij} \zeta^j.$$

Однако первое слагаемое не сохраняется дифференциальными операторами (2.26) и не влияет на перемещения и напряжения, поэтому его можно опустить без всякого ограничения общности.

В итоге действительно получаем, что безразмерная функция напряжений  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для круглой центральной части трёхмерного цилиндрического тела (элемента) имеет вид (2.38).

Для кольцевой периферической же части трёхмерного сплошного цилиндрического тела эти соображения не имеют места и должно использоваться более общее представление (2.39).

Продолжим совместное рассмотрение круглой центральной и кольцевой периферической частей трёхмерного сплошного цилиндрического тела и установим степени представления (2.39).

Обозначим

$$(2.40)$$

$$n(a) = \max \{i: a_{i0} \neq 0\},$$

$$(2.41)$$

$$n(b) = \max \{i: b_{i0} \neq 0\},$$

так что в (2.39)

$$a_{ij} = 0, 2i + j > 2n(a),$$

$$b_{ij} = 0, 2i + j > 2n(b).$$

Нет оснований требовать равенства

$$n(a) = n(b),$$

что привело бы к ограничению общности.

Представление (2.39) с учётом обозначений (2.40) и (2.41) может быть выражено и так:

$$(2.42)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^{n(a)} \sum_{j=0}^{2n(a)-2i} a_{ij} \rho^{2i} \zeta^j + \sum_{i=0}^{n(b)} \sum_{j=0}^{2n(b)-2i} b_{ij} \rho^{2i} \ln \rho \zeta^j.$$

Однако пока удобнее равносильно пользоваться самим представлением (2.39) при вытекающих из обозначений (2.40) и (2.41) дополнительных условиях

$$a_{ij} = 0, 2i + j > 2n(a),$$

$$b_{ij} = 0, 2i + j > 2n(b).$$

Представление (2.39) применительно к условию бигармоничности (2.25) и граничным условиям на основаниях даёт:

$$(2.43)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{2n-4-2i} \{[(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)a_{i,j+4} + 8(i+1)^2(j+1)(j+2)a_{i+1,j+2} + 16(i+1)^2(i+2)^2a_{i+2,j} + 8(i+1)(j+2)b_{i+1,j+2} + 16(i+1)(i+2)(2i+3)b_{i+2,j}] \rho^{2i} + [(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)b_{i,j+4} + 8(i+1)^2(j+1)(j+2)b_{i+1,j+2} + 16(i+1)^2(i+2)^2b_{i+2,j}] \rho^{2i} \ln \rho\} \zeta^j;$$

$$\sigma_{\zeta}(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{2n-3-2i} \{[(1-\mu)(j+1)(j+2)(j+3)a_{i,j+3} + 4(2-\mu)(i+1)^2(j+1)a_{i+1,j+1} + 4(2-\mu)(i+1)(j+1)b_{i+1,j+1}] \rho^{2i} + [(1-\mu)(j+1)(j+2)(j+3)b_{i,j+3} + 4(2-\mu)(i+1)^2(j+1)b_{i+1,j+1}] \rho^{2i} \ln \rho\} \zeta^j;$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{2n-2-2i} \{[-2\mu i(j+1)(j+2)a_{i,j+2} + 8(1-\mu)i(i+1)^2a_{i+1,j} - \mu(j+1)(j+2)b_{i,j+2} + 4(1-\mu)(i+1)(3i+1)b_{i+1,j}] \rho^{2i-1} + [-2\mu i(j+1)(j+2)b_{i,j+2} + 8(1-\mu)i(i+1)^2b_{i+1,j}] \rho^{2i-1} \ln \rho\} \zeta^j.$$

Рассмотрим вначале в каждой из правых частей последних трёх равенств выражения во вторых квадратных скобках (не содержащие коэффициентов вида  $a_{ij}$  с любыми индексами).

Из условий (2.25) бигармоничности безразмерной функции напряжений  $\Lambda(\rho, \zeta)$  и из условий постоянств осевого  $\sigma_{\zeta}(\rho, \zeta)$  и сдвигового  $\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta)$  напряжений на обоих торцах  $\zeta = 0$  и  $\zeta = 1$

$$\sigma_{\zeta}(\rho, 0) = \text{constant};$$

$$\sigma_{\zeta}(\rho, 1) = \text{constant};$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, 0) = \text{constant};$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, 1) = \text{constant}$$

получим:

$$(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)b_{i,j+4} + 8(i+1)^2(j+1)(j+2)b_{i+1,j+2} + 16(i+1)^2(i+2)^2b_{i+2,j} = 0$$

$$(i = 0, 1, \dots, n(b) - 2; j = 0, 1, 2, \dots, 2n(b) - 4 - 2i);$$

$$6(1-\mu)b_{i3} + 4(2-\mu)(i+1)^2b_{i+1,1} = 0 (i = 0, 1, 2, \dots, n(b) - 2);$$

$$\sum_{j=1}^{2n(b)-3-2i} [(1-\mu)(j+1)(j+2)(j+3)b_{i,j+3} + 4(2-\mu)(i+1)^2(j+1)b_{i+1,j+1}] = 0 (i = 0, 1, 2, \dots, n(b) - 2);$$

$$-4\mu ib_{i2} + 8(1-\mu)i(i+1)^2b_{i+1,0} = 0 (i = 1, 2, 3, \dots, n(b) - 1);$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 88/556

$$\sum_{j=1}^{2n(b)-2-2i} [-2\mu i(j+1)(j+2)b_{i,j+2} + 8(1-\mu)i(i+1)^2 b_{i+1,j}] = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n(b)-2).$$

Легко доказать методом математической индукции две формулы, обеспечивающие редукцию по  $j$ :

$$b_{i,2k} = (-1)^{k+1} 2^{2k} / (2k)! (i+k)!^2 / i!^2 (k-\mu) / \mu b_{i+k,0} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n(b); k = 0, 1, 2, \dots, n(b)-i);$$

$$b_{i,2k+1} = (-1)^k 2^{2k} / (2k+1)! (i+k)!^2 / i!^2 (k+1-\mu) / (1-\mu) b_{i+k,1}$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n(b)-1; k = 0, 1, 2, \dots, n(b)-1-i).$$

Применение их даёт:

$$\mu^{-1} \sum_{k=3}^{n(b)-i} (-1)^k 2^{2k} / (2k-3)! (i+k)!^2 (k-2) b_{i+k,0} + (1-\mu)^{-1} \sum_{k=2}^{n(b)-1-i} (-1)^{k+1} 2^{2k-1} / (2k-3)! (i+k)!^2 b_{i+k,1} = 0$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n(b)-3);$$

$$\mu^{-1} \sum_{k=2}^{n(b)-i} (-1)^k 2^{2k-1} / (2k-3)! (i+k)!^2 b_{i+k,0} + (1-\mu)^{-1} \sum_{k=1}^{n(b)-1-i} (-1)^{k+1} 2^{2k} / (2k-1)! (i+k)!^2 b_{i+k,1} = 0$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n(b)-2).$$

Если  $n(b) \geq 3$ , то эти соотношения при  $i = n(b) - 3$  и  $i = n(b) - 2$  соответственно приводят к системе линейных однородных уравнений

$$(2.44)$$

$$32/3 \mu^{-1} n^2(b) b_{n(b),0} + 8(1-\mu)^{-1} b_{n(b)-1,1} = 0;$$

$$8\mu^{-1} n^2(b) b_{n(b),0} + 4(1-\mu)^{-1} b_{n(b)-1,1} = 0$$

с ненулевым главным определителем, откуда

$$b_{n(b),0} = 0$$

вопреки принятому определению (2.41) числа  $n(b)$ .

Следовательно, методом от противоречащего доказано, что

$$n(b) \leq 2.$$

Следует отметить, что при выполнении этого неравенства верхние пределы суммирования в соотношении, приводящем к первому из уравнений системы (2.44), оказываются меньше нижних, левая часть этого уравнения аннулируется и противоречие исчезает.

Допустим, что  $n(a) \geq 4$ .

Рассмотрим теперь те из выражений в первых квадратных скобках трёх последних равенств (2.43) для  $\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta)$ ,  $\sigma_\zeta(\rho, \zeta)$ ,  $\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta)$ , где встречаются лишь коэффициенты общего вида  $b_{ij}$  с любыми индексами при  $2i + j > 4$  (все они равны нулю ввиду установленного ограничения  $n(b) \leq 2$ ) и поэтому остаются лишь коэффициенты общего вида  $a_{ij}$  с любыми индексами.

Система уравнений относительно коэффициентов общего вида  $a_{ij}$  с любыми индексами имеет вид:

$$(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)a_{i,j+4} + 8(i+1)^2(j+1)(j+2)a_{i+1,j+2} + 16(i+1)^2(i+2)^2 a_{i+2,j} = 0$$

$$(i = 0, 1, \dots, n(a)-2; 0 \leq j = 3-2i, 4-2i, \dots, 2n(a)-4-2i);$$

$$6(1-\mu)a_{i3} + 4(2-\mu)(i+1)^2 a_{i+1,1} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n(a)-2);$$

$$\sum_{j=1}^{2n(a)-3-2i} [(1-\mu)(j+1)(j+2)(j+3)a_{i,j+3} + 4(2-\mu)(i+1)^2(j+1)a_{i+1,j+1}] = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n(a)-2);$$

$$-4\mu i a_{i2} + 8(1-\mu)i(i+1)^2 a_{i+1,0} = 0 \quad (i = 3, 4, \dots, n(a)-1);$$

$$\sum_{j=1}^{2n(a)-2-2i} [-2\mu i(j+1)(j+2)a_{i,j+2} + 8(1-\mu)i(i+1)^2 a_{i+1,j}] = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n(a)-2).$$

По методу математической индукции устанавливаем подобные предыдущим для коэффициентов общего вида  $b_{ij}$  с любыми индексами с дополнительным естественным увеличением нижних пределов для  $i$  две формулы для коэффициентов общего вида  $a_{ij}$  с любыми индексами, обеспечивающие редукцию по  $j$ :

$$a_{i,2k} = (-1)^{k+1} 2^{2k} / (2k)! (i+k)!^2 / i!^2 (k-\mu) / \mu a_{i+k,0} \quad (i = 3, 4, \dots, n(a)-1; k = 0, 1, 2, \dots, n(a)-i);$$

$$a_{i,2k+1} = (-1)^k 2^{2k} / (2k+1)! (i+k)!^2 / i!^2 (k+1-\mu) / (1-\mu) a_{i+k,1}$$

$$(i = 2, 3, \dots, n(a)-2; k = 0, 1, 2, \dots, n(a)-1-i).$$

Получаем соотношения:

$$\mu^{-1} \sum_{k=3}^{n(a)-i} (-1)^k 2^{2k} / (2k-3)! (i+k)!^2 (k-2) a_{i+k,0} + (1-\mu)^{-1} \sum_{k=2}^{n(a)-1-i} (-1)^{k+1} 2^{2k-1} / (2k-3)! (i+k)!^2 a_{i+k,1} = 0$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n(a)-3);$$

$$\mu^{-1} \sum_{k=2}^{n(a)-i} (-1)^k 2^{2k-1} / (2k-3)! (i+k)!^2 a_{i+k,0} + (1-\mu)^{-1} \sum_{k=1}^{n(a)-1-i} (-1)^{k+1} 2^{2k} / (2k-1)! (i+k)!^2 a_{i+k,1} = 0$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n(a)-2).$$

Принимая в них соответственно  $i = n(a) - 3$  и  $i = n(a) - 2$ , приходим к системе линейных однородных уравнений

$$(2.45)$$



$$32/3 \mu^{-1} n^2(a) a_{n(a)0} + 8(1 - \mu)^{-1} a_{n(a)-1,1} = 0;$$

$$8\mu^{-1} n^2(a) a_{n(a)0} + 4(1 - \mu)^{-1} a_{n(a)-1,1} = 0$$

с ненулевым главным определителем, откуда  $a_{n(a)0} = 0$  вопреки принятому определению (2.40) числа  $n(a)$ .

Следовательно, методом от противоречащего доказано, что

$$n(a) \leq 3.$$

Следует отметить, что при выполнении этого неравенства верхние пределы суммирования в соотношении, приводящем к первому из уравнений системы (2.45), оказываются меньше нижних, левая часть этого уравнения аннулируется и противоречие исчезает.

То есть в разложении бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  полностью отсутствуют слагаемые с безразмерным радиусом  $\rho$  более чем в шестой степени и содержащие  $\ln \rho$  слагаемые с безразмерным радиусом  $\rho$  более чем в четвёртой степени.

В итоге из представлений (2.28) и (2.29) получаем следующие два равносильных вида бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$ :

$$(2.46)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{6-2i} a_{ij} \rho^{2i} \zeta^j + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^{4-2i} b_{ij} \rho^{2i} \ln \rho \zeta^j,$$

или

$$(2.47)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{6-2i} (a_{ij} \rho^{2i} + b_{ij} \rho^{2i} \ln \rho) \zeta^j \quad (b_{ij} = 0 \text{ при } 2i + j > 4),$$

открывающие путь к полному удовлетворению условию бигармоничности безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  и граничным условиям на плоскопараллельных основаниях круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела (сплошного центрального и кольцевого периферического трёхмерных цилиндрических элементов).

Итак, из весьма общих представлений (2.28) и (2.29) чисто дедуктивно получены виды (2.46) и (2.47) бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для сплошного центрального и кольцевого периферического трёхмерных цилиндрических элементов, на торцы (плоские основания) которых действуют нормальные равномерно распределённые усилия.

Коэффициенты общих видов  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  с любыми индексами выбираются в соответствии с этими усилиями и условиями на боковых поверхностях.

Выше уже было доказано, что такое представление, вообще говоря, не позволяет обеспечить точное удовлетворение любых наперёд заданных граничных условий на боковых поверхностях.

Поэтому в конкретных задачах эти условия удовлетворяются приближённо, а именно с точностью до невязок, аналогичных невязкам сопряжения, рассмотренным в работе Л. Б. Цвика [339].

Поскольку граничные условия на торцах (плоских основаниях) для сплошного и кольцевого трёхмерных цилиндрических элементов выполняются точно, то погрешности решения в целом характеризуются обобщаемыми также на невыполнение граничных условий невязками на боковых поверхностях, подлежащими минимизации.

Прежде чем переходить к решению конкретных задач, выявим различия в бигармонических безразмерных функциях напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для сплошного и кольцевого трёхмерных цилиндрических элементов.

Поскольку в сплошном трёхмерном цилиндрическом элементе компоненты напряжённо-деформированного состояния непрерывны на оси, то можно ожидать, что в представлении для сплошного трёхмерного цилиндрического элемента должны отсутствовать неалгебраические слагаемые, содержащие  $\ln \rho$  (то есть для всех коэффициентов общего вида  $b_{ij}$  с любыми индексами имеет место аннулирование  $b_{ij} = 0$ ), что строго доказано выше:

$$(2.48)$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{6-2i} a_{ij} \rho^{2i} \zeta^j,$$

так что функция напряжений Лява оказывается степенной.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 90/556

Для кольцевого трёхмерного цилиндрического элемента эти соображения не имеют места и требуется рассматривать более общие полученные представления с неалгебраическими слагаемыми с  $\ln r$  (так что функция напряжений Лява оказывается полустепенной). Необходимость их учёта показывается известными решениями для кольцевых пластин.

Решения же и для круглой пластины, опёртой по окружности меньшего радиуса либо на широкое кольцо с равномерным противодействием, показывают, что и для таких случаев опирания сплошного трёхмерного цилиндрического элемента понадобится исходить из общего полустепенного представления (2.46) бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$ .

Выше определены исходные виды бигармонических безразмерных функций напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для сплошного и кольцевого трёхмерных цилиндрических элементов.

Результаты получены дедуктивно, причём лишь из частичного использования бигармоничности и граничных условий на торцах (плоских основаниях).

Оставив временно открытым вопрос о возможностях наилучшего выполнения граничных условий на боковых поверхностях, определим бигармонические безразмерные функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для сплошного (рис. 2.2, а) и кольцевого (рис. 2.2, б) трёхмерных цилиндрических элементов, именно полностью удовлетворяющие граничным условиям на торцах (плоских основаниях).

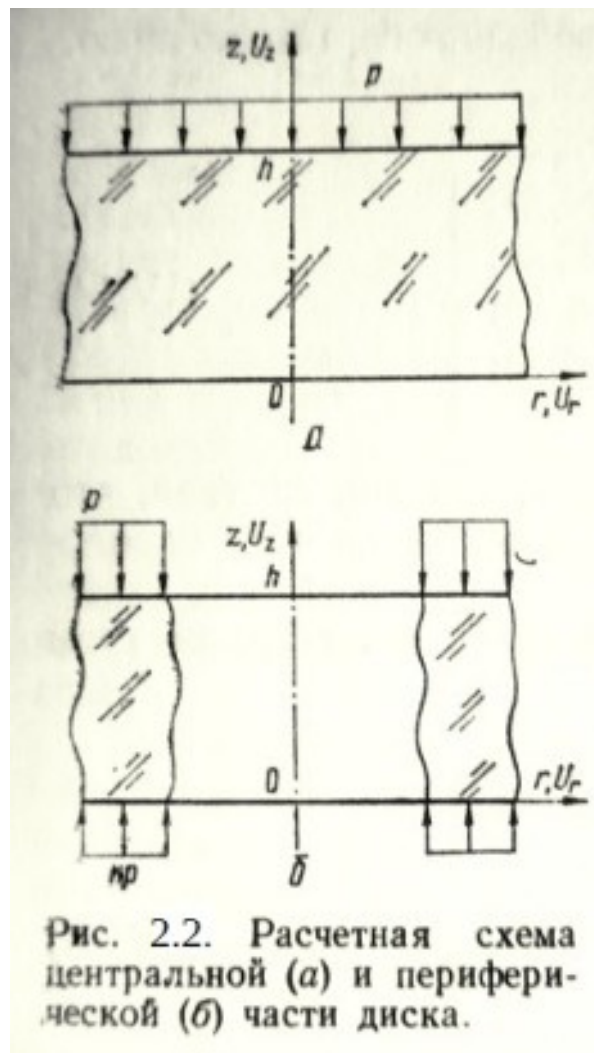


Рисунок 2.2. Расчётная схема круглой центральной (а) и кольцевой периферической (б) частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

## 2.5. Бигармоническая безразмерная функция напряжений Лява для сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов, полностью удовлетворяющая граничным условиям на плоских основаниях

В соответствии с изложенным выше для сплошного трёхмерного цилиндрического тела и для круглой центральной части сплошного трёхмерного цилиндрического тела исходным является полученное представление (2.48) бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  при аннулировании  $b_{ij} = 0$  всех коэффициентов общего вида  $b_{ij}$  с любыми индексами:

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{6-2i} a_{ij} \rho^{2i} \zeta^j.$$

По соображениям удобства и наглядности приведём развёрнутую запись представления (2.48):

$$\Lambda(\rho, \zeta) = a_{00} + a_{01}\zeta + a_{02}\zeta^2 + a_{03}\zeta^3 + a_{04}\zeta^4 + a_{05}\zeta^5 + a_{06}\zeta^6 + \rho^2(a_{10} + a_{11}\zeta + a_{12}\zeta^2 + a_{13}\zeta^3 + a_{14}\zeta^4) + \rho^4(a_{20} + a_{21}\zeta + a_{22}\zeta^2) + \rho^6 a_{30}.$$

Получаем по (2.25) и (2.26)

$$\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) = (24a_{04} + 16a_{12} + 64a_{20}) + (120a_{05} + 48a_{13} + 64a_{21})\zeta + (360a_{06} + 96a_{14} + 64a_{22})\zeta^2 + \rho^2(24a_{14} + 64a_{22} + 576a_{30});$$

$$\sigma_{\zeta}(\rho, \zeta) = [4(2 - \mu)a_{11} + 6(1 - \mu)a_{03}] + [8(2 - \mu)a_{12} + 24(1 - \mu)a_{04}]\zeta + [12(2 - \mu)a_{13} + 60(1 - \mu)a_{05}]\zeta^2 + [16(2 - \mu)a_{14} + 120(1 - \mu)a_{06}]\zeta^3 + \rho^2\{[16(2 - \mu)a_{21} + 6(1 - \mu)a_{13}] + [32(2 - \mu)a_{22} + 24(1 - \mu)a_{14}]\zeta\};$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = \rho\{[32(1 - \mu)a_{20} - 4\mu a_{12}] + [32(1 - \mu)a_{21} - 12\mu a_{13}]\zeta + [32(1 - \mu)a_{22} - 24\mu a_{14}]\zeta^2\} + \rho^3[144(1 - \mu)a_{30} - 8\mu a_{22}].$$

Бигармоничность безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  даёт четыре уравнения:

(2.49)

$$\begin{aligned} 24a_{04} + 16a_{12} + 64a_{20} &= 0; \\ 120a_{05} + 48a_{13} + 64a_{21} &= 0; \\ 360a_{06} + 96a_{14} + 64a_{22} &= 0; \\ 24a_{14} + 64a_{22} + 576a_{30} &= 0. \end{aligned}$$

Граничные условия на торцах

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta}(\rho, 0) &= 0; \\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, 0) &= 0; \\ \sigma_{\zeta}(\rho, 1) &= -1; \\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, 1) &= 0 \end{aligned}$$

дают ещё 7 уравнений:

(2.50)

$$\begin{aligned} 4(2 - \mu)a_{11} + 6(1 - \mu)a_{03} &= 0; \\ 16(2 - \mu)a_{21} + 6(1 - \mu)a_{13} &= 0; \\ 32(1 - \mu)a_{20} - 4\mu a_{12} &= 0; \\ 144(1 - \mu)a_{30} - 8\mu a_{22} &= 0; \\ 8(2 - \mu)a_{12} + 24(1 - \mu)a_{04} + 12(2 - \mu)a_{13} + 60(1 - \mu)a_{05} + 16(2 - \mu)a_{14} + 120(1 - \mu)a_{06} &= -1; \\ 32(2 - \mu)a_{22} + 24(1 - \mu)a_{14} &= 0; \\ 32(1 - \mu)a_{21} - 12\mu a_{13} + 32(1 - \mu)a_{22} - 24\mu a_{14} &= 0. \end{aligned}$$

Итак, 16 коэффициентов представления (2.48) бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для сплошного трёхмерного цилиндрического тела и для круглой центральной части сплошного трёхмерного цилиндрического тела должны удовлетворять 11 уравнениям системы (2.49) и (2.50).

Одно из этих уравнений (например предпоследнее) линейно зависит от остальных, и ранг системы равен 10.

В результате эта бигармоническая безразмерная функция напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  принимает вид:

(2.51)

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 92/556

$$\Lambda(\rho, \zeta) = a_{00} + a_{01}\zeta + a_{02}\zeta^2 - 2/3 (2 - \mu)/(1 - \mu) a_{11}\zeta^3 - 8/3 (2 - \mu)/\mu a_{20}\zeta^4 + (3 - \mu)/20 \zeta^5 - (3 - \mu)/60 \zeta^6 + \rho^2[a_{10} + a_{11}\zeta + 8(1 - \mu)/\mu a_{20}\zeta^2 - (2 - \mu)/4 \zeta^3 + (2 - \mu)/8 \zeta^4] + \rho^4[a_{20} + 3(1 - \mu)/32 \zeta - 3(1 - \mu)/32 \zeta^2] - \mu/192 \rho^6.$$

Благодаря формуле (2.51) получаем выражения для безразмерных радиального  $u_\rho(\rho, \zeta)$  и осевого  $u_\zeta(\rho, \zeta)$  перемещений ( $C_1$  – произвольная постоянная)

(2.52)

$$u_\rho(\rho, \zeta) = \rho[-2a_{11} - 32(1 - \mu)/\mu a_{20}\zeta + 3(2 - \mu)/2 \zeta^2 - (2 - \mu)\zeta^3] + \rho^3[-3(1 - \mu)/8 + 3(1 - \mu)/4 \zeta];$$

$$u_\zeta(\rho, \zeta) = C_1 + 4\mu/(1 - \mu) a_{11}\zeta + 32a_{20}\zeta^2 - (1 + \mu)\zeta^3 + (1 + \mu)/2 \zeta^4 + \rho^2[16(1 - \mu)/\mu a_{20} + 3\mu/2 \zeta - 3\mu/2 \zeta^2] - 3(1 - \mu)/16 \rho^4$$

и для безразмерных радиального  $\sigma_\rho(\rho, \zeta)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_\varphi(\rho, \zeta)$ , осевого  $\sigma_\zeta(\rho, \zeta)$  и сдвигового  $\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta)$  напряжений

(2.53)

$$\sigma_\rho(\rho, \zeta) = -2(1 + \mu)/(1 - \mu) a_{11} - 32(1 + \mu)/\mu a_{20}\zeta + 3(2 + \mu)/2 \zeta^2 - (2 + \mu)\zeta^3 + \rho^2[-3(3 + \mu)/8 + 3(3 + \mu)/4 \zeta];$$

$$\sigma_\varphi(\rho, \zeta) = -2(1 + \mu)/(1 - \mu) a_{11} - 32(1 + \mu)/\mu a_{20}\zeta + 3(2 + \mu)/2 \zeta^2 - (2 + \mu)\zeta^3 + \rho^2[-3(1 + 3\mu)/8 + 3(1 + 3\mu)/4 \zeta];$$

$$\sigma_\zeta(\rho, \zeta) = -3\zeta^2 + 2\zeta^3;$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) = \rho(3\zeta - 3\zeta^2).$$

Общее число коэффициентов в представлении (2.48) бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) и для круглой центральной части сплошного трёхмерного цилиндрического тела равно 16.

Ранг системы 11 уравнений (2.49) и (2.50) равен 10.

Поэтому в представлении (2.51) есть 6 произвольных коэффициентов:  $a_{00}$ ,  $a_{01}$ ,  $a_{02}$ ,  $a_{10}$ ,  $a_{11}$ ,  $a_{20}$ .

При этом два из них  $a_{00}$ ,  $a_{01}$  исчезают при применении дифференциальных операторов (2.26), не влияют на перемещения (2.52) и напряжения (2.53) и являются несущественными.

Ещё два  $a_{02}$ ,  $a_{10}$  из этих коэффициентов становятся излишними при введении постоянной  $C_1$ , характеризующей осевое перемещение сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) и круглой центральной части сплошного трёхмерного цилиндрического тела как абсолютно твёрдого тела.

В отличие от предыдущих, коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{20}$  являются существенными и влияют на безразмерные радиальное  $u_\rho(\rho, \zeta)$  и осевое  $u_\zeta(\rho, \zeta)$  перемещения и на безразмерные радиальное  $\sigma_\rho(\rho, \zeta)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_\varphi(\rho, \zeta)$  напряжения.

А безразмерные осевое  $\sigma_\zeta(\rho, \zeta)$  и сдвиговое  $\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta)$  напряжения определяются однозначно и независимо от этих постоянных  $a_{11}$  и  $a_{20}$ .

Коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{20}$  выбираются так, чтобы наилучшим образом выполнялись граничные условия на боковой поверхности.

При этом условие бигармоничности и граничные условия на основаниях выполнены точно при любых значениях постоянных  $a_{11}$ ,  $a_{20}$  и  $C_1$ .

Сами эти постоянные – пока произвольные – остаются в запасе для наилучшего приближённого удовлетворения приближённого решения граничным условиям на боковой поверхности сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента), а в задаче для круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела – в целях сопряжения по безразмерному радиусу  $\rho = b$  с решением для кольцевой периферической части.

## 2.6. Бигармоническая безразмерная функция напряжений Лява для кольцевых трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов, полностью удовлетворяющая граничным условиям на плоских основаниях

В случае кольцевого трёхмерного цилиндрического тела (элемента) и кольцевой периферической части сплошного трёхмерного цилиндрического тела исходим из более общего представления бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  (2.46)

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{6-2i} a_{ij} \rho^{2i} \zeta^j + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^{4-2i} b_{ij} \rho^{2i} \ln \rho \zeta^j,$$

или (2.47)

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^{6-2i} (a_{ij} \rho^{2i} + b_{ij} \rho^{2i} \ln \rho) \zeta^j \quad (b_{ij} = 0 \text{ при } 2i + j > 4).$$

По соображениям удобства и наглядности приведём представления (2.46) или (2.47) бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  в развёрнутом виде:

$$\Lambda(\rho, \zeta) = a_{00} + a_{01}\zeta + a_{02}\zeta^2 + a_{03}\zeta^3 + a_{04}\zeta^4 + a_{05}\zeta^5 + a_{06}\zeta^6 + \ln \rho (b_{00} + b_{01}\zeta + b_{02}\zeta^2 + b_{03}\zeta^3 + b_{04}\zeta^4) + \rho^2 (a_{10} + a_{11}\zeta + a_{12}\zeta^2 + a_{13}\zeta^3 + a_{14}\zeta^4) + \rho^2 \ln \rho (b_{10} + b_{11}\zeta + b_{12}\zeta^2) + \rho^4 (a_{20} + a_{21}\zeta + a_{22}\zeta^2) + \rho^4 \ln \rho b_{20} + \rho^6 a_{30}.$$

Находим по (2.25) и (2.26)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) &= (64a_{20} + 16a_{12} + 24a_{04} + 96b_{20} + 16b_{12}) + (64a_{21} + 48a_{13} + 120a_{05})\zeta + (64a_{22} + 96a_{14} + 360a_{06})\zeta^2 + \ln \rho (64b_{20} + 16b_{12} + 24b_{04}) + \rho^2 (576a_{30} + 64a_{22} + 24a_{14}); \\ \sigma_{\zeta}(\rho, \zeta) &= [4(2 - \mu)a_{11} + 6(1 - \mu)a_{03} + 4(2 - \mu)b_{11}] + [8(2 - \mu)a_{12} + 24(1 - \mu)a_{04} + 8(2 - \mu)b_{12}]\zeta + [12(2 - \mu)a_{13} + 60(1 - \mu)a_{05}]\zeta^2 + [16(2 - \mu)a_{14} + 120(1 - \mu)a_{06}]\zeta^3 + \ln \rho \{ [4(2 - \mu)b_{11} + 6(1 - \mu)b_{03}] + [8(2 - \mu)b_{12} + 24(1 - \mu)b_{04}]\zeta \} + \rho^2 \{ [16(2 - \mu)a_{21} + 6(1 - \mu)a_{13}] + [32(2 - \mu)a_{22} + 24(1 - \mu)a_{14}]\zeta \}; \\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) &= \rho^{-1} \{ [4(1 - \mu)b_{10} - 2\mu b_{02}] + [4(1 - \mu)b_{11} - 6\mu b_{03}]\zeta + [4(1 - \mu)b_{12} - 12\mu b_{04}]\zeta^2 \} + \rho \{ [32(1 - \mu)a_{20} - 4\mu a_{12} + 32(1 - \mu)b_{20} - 2\mu b_{12}] + [32(1 - \mu)a_{21} - 12\mu a_{13}]\zeta + [32(1 - \mu)a_{22} - 24\mu a_{14}]\zeta^2 \} + \rho \ln \rho [32(1 - \mu)b_{20} - 4\mu b_{12}] + \rho^3 [144(1 - \mu)a_{30} - 8\mu a_{22}]. \end{aligned}$$

С учётом бигармоничности (2.25)

$$\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) = 0$$

безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  и граничных условий на торцах (постоянная  $K_2$  относится к общему случаю, а применительно к нашему светопрозрачному элементу иллюминатора (2.21)  $K_2 = p_2/\rho = a^2/(a^2 - a_1^2)$ )

$$(2.54)$$

$$\sigma_{\zeta}(\rho, 0) = -K_2;$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, 0) = 0;$$

$$\sigma_{\zeta}(\rho, 1) = -1;$$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, 1) = 0$$

получаем систему из 17 уравнений:

$$64a_{20} + 16a_{12} + 24a_{04} + 96b_{20} + 16b_{12} = 0;$$

$$64a_{21} + 48a_{13} + 120a_{05} = 0;$$

$$64a_{22} + 96a_{14} + 360a_{06} = 0;$$

$$64b_{20} + 16b_{12} + 24b_{04} = 0;$$

$$576a_{30} + 64a_{22} + 24a_{14} = 0;$$

$$4(2 - \mu)a_{11} + 6(1 - \mu)a_{03} + 4(2 - \mu)b_{11} = -K_2;$$

$$4(2 - \mu)b_{11} + 6(1 - \mu)b_{03} = 0;$$

$$16(2 - \mu)a_{21} + 6(1 - \mu)a_{13} = 0;$$

$$4(1 - \mu)b_{10} - 2\mu b_{02} = 0;$$

$$32(1 - \mu)a_{20} - 4\mu a_{12} + 32(1 - \mu)b_{20} - 2\mu b_{12} = 0;$$

$$32(1 - \mu)b_{20} - 4\mu b_{12} = 0;$$

$$144(1 - \mu)a_{30} - 8\mu a_{22} = 0;$$

$$4(2 - \mu)a_{11} + 6(1 - \mu)a_{03} + 4(2 - \mu)b_{11} + 8(2 - \mu)a_{12} + 24(1 - \mu)a_{04} + 8(2 - \mu)b_{12} + 12(2 - \mu)a_{13} + 60(1 - \mu)a_{05} + 16(2 - \mu)a_{14} + 120(1 - \mu)a_{06} = -1;$$

$$8(2 - \mu)b_{12} + 24(1 - \mu)b_{04} = 0;$$

$$\begin{aligned} 32(2 - \mu)a_{22} + 24(1 - \mu)a_{14} &= 0; \\ 4(1 - \mu)b_{11} - 6\mu b_{03} + 4(1 - \mu)b_{12} - 12\mu b_{04} &= 0; \\ 32(1 - \mu)a_{21} - 12\mu a_{13} + 32(1 - \mu)a_{22} - 24\mu a_{14} &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы приводит к следующему виду бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$ :

$$(2.55) \quad \Lambda(\rho, \zeta) = a_{00} + a_{01}\zeta + a_{02}\zeta^2 + [-K_2/(6(1 - \mu)) - 2/3(2 - \mu)/(1 - \mu)a_{11} + 16/3(2 - \mu)/\mu b_{20}]\zeta^3 - [8/3(2 - \mu)/\mu a_{20} + 4(2 - \mu)/\mu b_{20}]\zeta^4 - (K_2 - 1)(3 - \mu)/20\zeta^5 + (K_2 - 1)(3 - \mu)/60\zeta^6 + \ln\rho[b_{00} + b_{01}\zeta + 2(1 - \mu)/\mu b_{10}\zeta^2 + 16/3(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^3 - 8/3(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^4] + \rho^2\{a_{10} + a_{11}\zeta + [8(1 - \mu)/\mu a_{20} + 4(1 - \mu)/\mu b_{20}]\zeta^2 + (K_2 - 1)(2 - \mu)/4\zeta^3 - (K_2 - 1)(2 - \mu)/8\zeta^4\} + \rho^2 \ln\rho[b_{10} - 8(1 - \mu)/\mu b_{20}\zeta + 8(1 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^2] + \rho^4[a_{20} - 3(K_2 - 1)(1 - \mu)/32\zeta + 3(K_2 - 1)(1 - \mu)/32\zeta^2] + \rho^4 \ln\rho b_{20} + (K_2 - 1)\mu/192\rho^6.$$

С учётом (2.26) и (2.55) запишем выражения для безразмерных радиального  $u_\rho(\rho, \zeta)$  и осевого  $u_\zeta(\rho, \zeta)$  перемещений ( $C_2$  – произвольная постоянная, поглотившая сумму  $8(1 - \mu)a_{10} + 2(1 - 2\mu)a_{02} + 8(1 - \mu)b_{10}$ )

$$(2.56) \quad \begin{aligned} u_\rho(\rho, \zeta) &= \rho^{-1}[-b_{01} - 4(1 - \mu)/\mu b_{10}\zeta - 16(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^2 + 32/3(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^3] + \rho[-2a_{11} + 8(1 - \mu)/\mu b_{20} - 32(1 - \mu)/\mu(a_{20} + b_{20})\zeta - 3(K_2 - 1)(2 - \mu)/2\zeta^2 + (K_2 - 1)(2 - \mu)\zeta^3] + \rho \ln\rho[16(1 - \mu)/\mu b_{20} - 32(1 - \mu)/\mu b_{20}\zeta] + \rho^3[3(K_2 - 1)(1 - \mu)/8 - 3(K_2 - 1)(1 - \mu)/4\zeta]; \\ u_\zeta(\rho, \zeta) &= C_2 + [-K_2(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + 4\mu/(1 - \mu)a_{11} - 32b_{20}]\zeta + (32a_{20} + 48b_{20})\zeta^2 + (K_2 - 1)(1 + \mu)\zeta^3 - (K_2 - 1)(1 + \mu)/2\zeta^4 + \ln\rho[4(1 - \mu)/\mu b_{10} - 32b_{20}\zeta + 32b_{20}\zeta^2] + \rho^2[16(1 - \mu)/\mu a_{20} + 8(1 - \mu)/\mu b_{20} - 3(K_2 - 1)\mu/2\zeta + 3(K_2 - 1)\mu/2\zeta^2] + 16(1 - \mu)/\mu b_{20}\rho^2 \ln\rho - 3(1 - \mu)/16\rho^4 \end{aligned}$$

и для безразмерных радиального  $\sigma_\rho(\rho, \zeta)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_\phi(\rho, \zeta)$ , осевого  $\sigma_\zeta(\rho, \zeta)$  и сдвигового  $\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta)$  напряжений

$$(2.57) \quad \begin{aligned} \sigma_\rho(\rho, \zeta) &= \rho^2[b_{01} + 4(1 - \mu)/\mu b_{10}\zeta + 16(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^2 - 32/3(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^3] - K_2\mu/(1 - \mu) - 2(1 + \mu)/(1 - \mu)a_{11} + 8(3 + \mu)/\mu b_{20} - [32(1 + \mu)/\mu a_{20} + 32(2 + \mu)/\mu b_{20}]\zeta - 3(K_2 - 1)(2 + \mu)/2\zeta^2 + (K_2 - 1)(2 + \mu)\zeta^3 + \ln\rho[16(1 + \mu)/\mu b_{20} - 32(1 + \mu)/\mu b_{20}\zeta] + \rho^2[3(K_2 - 1)(3 + \mu)/8 - 3(K_2 - 1)(3 + \mu)/4\zeta]; \\ \sigma_\phi(\rho, \zeta) &= \rho^2[-b_{01} - 4(1 - \mu)/\mu b_{10}\zeta - 16(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^2 + 32/3(2 - \mu)/\mu b_{20}\zeta^3] - K_2\mu/(1 - \mu) - 2(1 + \mu)/(1 - \mu)a_{11} + 8(1 + 3\mu)/\mu b_{20} - [32(1 + \mu)/\mu a_{20} + 32(2 + \mu)/\mu b_{20}]\zeta - 3(K_2 - 1)(2 + \mu)/2\zeta^2 + (K_2 - 1)(2 + \mu)\zeta^3 + \ln\rho[16(1 + \mu)/\mu b_{20} - 32(1 + \mu)/\mu b_{20}\zeta] + \rho^2[3(K_2 - 1)(1 + 3\mu)/8 - 3(K_2 - 1)(1 + 3\mu)/4\zeta]; \\ \sigma_\zeta(\rho, \zeta) &= -K_2 + 3(K_2 - 1)\zeta^2 - 2(K_2 - 1)\zeta^3; \\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) &= [32\mu^{-1}b_{20}\rho^{-1} + 3(K_2 - 1)\rho](-\zeta + \zeta^2). \end{aligned}$$

В представлении (2.55) бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  было 25 неопределённых коэффициентов.

После решения системы из 17 уравнений, два из которых оказались линейно зависимыми от остальных, остались 10 коэффициентов:  $a_{00}, a_{01}, b_{00}, a_{02}, a_{10}, a_{11}, a_{20}, b_{01}, b_{10}, b_{20}$ .

Первые три  $a_{00}, a_{01}, b_{00}$  из них не сохраняются дифференциальными операторами (2.26), не влияют на перемещения (2.56) и на напряжения (2.57) и являются несущественными.

Последующие два коэффициента  $a_{02}, a_{10}$  поглощаются постоянным слагаемым  $C_2$ , вводимым для аннулирования осевого перемещения  $u_\zeta(\rho, \zeta)$  на одной окружности.

В отличие от предыдущих, коэффициенты  $a_{11}, a_{20}, b_{01}, b_{10}, b_{20}$  являются существенными и влияют на безразмерные радиальное  $u_\rho(\rho, \zeta)$  и осевое  $u_\zeta(\rho, \zeta)$  перемещения и на безразмерные радиальное  $\sigma_\rho(\rho, \zeta)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_\phi(\rho, \zeta)$  напряжения.

Безразмерное осевое напряжение  $\sigma_\zeta(\rho, \zeta)$  определяется однозначно и независимо от этих постоянных  $a_{11}, a_{20}, b_{01}, b_{10}, b_{20}$ .

А безразмерное сдвиговое напряжение  $\tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta)$  зависит от постоянной  $b_{20}$ .

При этом условие бигармоничности (2.25) и граничные условия на основаниях (2.54) выполнены точно при любых значениях постоянных  $a_{11}, a_{20}, b_{01}, b_{10}, b_{20}$  и  $C_2$ .

Сами эти постоянные – пока произвольные – остаются в запасе для наилучшего приближённого удовлетворения аналитического решения граничным условиям на боковых поверхностях, то есть на поверхности сопряжения по безразмерному радиусу  $\rho = b$  круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 95/556

тела (круглого центрального и кольцевого периферического трёхмерных цилиндрических элементов) и на внешней цилиндрической поверхности безразмерным радиусом  $\rho = c$  кольцевой периферической части сплошного трёхмерного цилиндрического тела (кольцевого трёхмерного цилиндрического элемента).

Итак, решение задач об изгибе равномерным давлением круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела (круглого центрального и кольцевого периферического трёхмерных цилиндрических элементов) сводится к выполнению граничных условий на боковых поверхностях. Варианты их удовлетворения излагаются далее для всех четырёх расчётных схем таблицы 1.2.

Для удобства вначале рассматривается жёсткое защемление края сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента).

## **2.7. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, жёстко защемлённого по краю, теория и среднеквадратичный, обеспечивающий минимакс модуля и коллокационный методы минимизации невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения**

Теории осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание круглой пластины и круглой плиты, жёстко защемлённых по краю, математически строго проанализированы и обобщены теорией осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного существенно трёхмерного цилиндрического тела, жёстко защемлённого по краю.

Жёсткое защемление края именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, соответствует второй сверху расчётной схеме в левом столбце таблицы 1.2.

Именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело радиусом  $a$  и высотой (толщиной)  $h$  нагружено равномерным давлением  $p$  на верхнее основание  $z = h$  и удерживается в равновесии жёстким защемлением края (боковой поверхности)  $r = a$ .

Граничные условия для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений, осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) радиусом  $a$  и толщиной  $h$  с жёстко защемлённым краем показаны на рис. 1.7, в:

(2.58)

$$\sigma_z(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r \leq a);$$

$$\sigma_z(r, h) = -p \quad (0 \leq r \leq a);$$

$$\tau_{rz}(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r \leq a);$$

$$\tau_{rz}(r, h) = 0 \quad (0 \leq r \leq a);$$

$$u_r(a, z) = 0 \quad (0 \leq z \leq h);$$

$$u_z(a, z) = 0 \quad (0 \leq z \leq h).$$

Поскольку две постоянные  $a_{11}$  и  $a_{20}$  есть и в формулах (2.51) – (2.53) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента), и в формулах (2.55) – (2.57) для кольцевого трёхмерного цилиндрического тела (элемента) как для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, и могут принимать для них различные значения, то в формулах (2.51) – (2.53) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) для различения обозначим:

(2.59)

$$x = a_{11},$$

$$y = a_{20}.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 96/556

Точное решение для жёсткого защемления края сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) требует аннулировать радиальное  $u_r(r, z)$  и осевое  $u_z(r, z)$  перемещения боковой поверхности  $r = a$  тождественно по  $z$ :

$$\begin{aligned} u_r(a, z) &= 0, \\ u_z(a, z) &= 0. \end{aligned}$$

Используем прежние безразмерные обозначения, в том числе безразмерный радиус сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента)  $c = a/h$ , кроме лишних здесь

$$b = a_1/h.$$

Тогда формулы (2.52) дают безразмерные радиальное  $u_p(\rho, \zeta)$  и осевое  $u_z(\rho, \zeta)$  перемещения боковой поверхности  $\rho = c$ :

$$\begin{aligned} u_p(c, \zeta) &= c[-2x - 32(1 - \mu)/\mu y\zeta + 3(2 - \mu)/2 \zeta^2 - (2 - \mu)\zeta^3] + c^3[-3(1 - \mu)/8 + 3(1 - \mu)/4 \zeta] = -3(1 - \mu)c^3/8 - 2cx + [3(1 - \mu)c^3/4 - 32(1 - \mu)/\mu cy]\zeta + 3(2 - \mu)/2 c\zeta^2 - (2 - \mu)c\zeta^3; \\ u_z(c, \zeta) &= C_1 + 4\mu/(1 - \mu) x\zeta + 32y\zeta^2 - (1 + \mu)\zeta^3 + (1 + \mu)/2 \zeta^4 + c^2[16(1 - \mu)/\mu y + 3\mu/2 \zeta - 3\mu/2 \zeta^2] - 3(1 - \mu)/16 c^4 = -3(1 - \mu)c^4/16 + 16(1 - \mu)/\mu c^2y + C_1 + [3\mu/2 c^2 + 4\mu/(1 - \mu) x]\zeta + [-3\mu c^2/2 + 32y]\zeta^2 - (1 + \mu)\zeta^3 + (1 + \mu)/2 \zeta^4. \end{aligned}$$

Эти формулы показывают невозможность аннулировать тождественно по  $\zeta$  ни безразмерное радиальное  $u_p(c, \zeta)$ , ни безразмерное осевое  $u_z(c, \zeta)$  перемещения боковой поверхности  $\rho = c$ , так как  $2 - \mu$ ,  $c$  и  $1 + \mu$  отличны от нуля. Поэтому решение может быть лишь приближённым.

Выбор

$$C_1 = 3(1 - \mu)c^4/16 - 16(1 - \mu)/\mu c^2y$$

обеспечивает отсутствие безразмерного осевого перемещения края нижнего основания

$$u_z(c, 0) = 0.$$

Как и выше, здесь и в дальнейшем используется понятие невязок сопряжения (Л. Б. Цвик [339]) как разностей выражений одноимённых величин, в частности перемещений и напряжений, для разных частей тела, имеющих общую границу, в точках этой границы, обобщается это понятие на случай границ целого тела с заданными граничными условиями посредством разностей граничных условий и соответствующих значений величин в точках этих границ и применяются различные рациональные методы минимизации невязок сопряжения.

Методы приближённого выполнения граничных условий математически строго проанализированы и обобщены теорией минимизации невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения, осуществляемой среднеквадратичным, обеспечивающим минимакс модуля и коллокационным методами.

Две постоянные  $x$  и  $y$  могут быть использованы для минимизации безразмерных радиального  $u_p(c, \zeta)$  и осевого  $u_z(c, \zeta)$  перемещений боковой поверхности  $\rho = c$ .

Роли невязок по этим двум безразмерным перемещениям различны.

Невязка по безразмерному радиальному перемещению  $u_p(c, \zeta)$  оказывает существенное влияние на напряжённо-деформированное состояние сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) в целом.

Влияние невязки по безразмерному осевому перемещению  $u_z(c, \zeta)$  резко убывает при удалении от края  $\rho = c$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента), несущественно для безразмерных радиального перемещения  $u_p(\rho, \zeta)$ , радиального  $\sigma_r(\rho, \zeta)$  и тангенциального (окружного)  $\sigma_\varphi(\rho, \zeta)$  напряжений и мало значимо даже для однозначно определяемых выполненными точно граничными условиями на торцах

$$\sigma_\zeta(\rho, 0), \tau_{r\zeta}(\rho, 0), \sigma_\zeta(\rho, 1), \tau_{r\zeta}(\rho, 1)$$

осевого  $\sigma_\zeta(\rho, \zeta)$  и сдвигового  $\tau_{r\zeta}(\rho, \zeta)$  напряжений, а интеграл  $\int_0^1 \tau_{r\zeta}(\rho, \zeta) d\zeta$  однозначно определяется выполненными точно уравнениями равновесия.

Кроме того, и в работах [3, 191] безразмерное осевое перемещение  $u_z(c, \zeta)$  боковой поверхности  $\rho = c$  аннулируется также лишь при одном значении  $\zeta$ , что и сделано здесь посредством выбора значения постоянной  $C_1$ .



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 97/556

Поэтому выбор обеих оставшихся постоянных  $x$  и  $y$  используем для минимизации [106] безразмерного радиального перемещения  $u_r(c, \zeta)$  боковой поверхности  $r = c$ .

В дальнейшем потребуется минимизировать на отрезке  $[0, 1]$  аналогичные многочлены третьей степени относительно  $\zeta$ , в которых свободный член  $A$  и коэффициент  $B$  при  $\zeta$  изменяются, а коэффициенты при  $\zeta^2$  и  $\zeta^3$  постоянны и относятся друг к другу как  $3:(-2)$ .

Метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения в данном случае на отрезке  $[0, 1]$  минимизирует многочлен

(2.60)

$$Q(\zeta) = A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3$$

минимизацией функции  $M(A, B)$  как делённого на длину отрезка, в данном случае единичную, интеграла от квадрата функции, в данном случае от квадрата многочлена  $Q(\zeta)$  (2.60) на этом отрезке  $[0, 1]$ :

$$M(A, B) = (1 - 0)^{-1} \int_0^1 Q^2(\zeta) d\zeta = \int_0^1 (A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3)^2 d\zeta$$

( $-\infty < A < +\infty, -\infty < B < +\infty$ ).

При стремлении модулей аргументов  $A$  или  $B$  к плюс бесконечности функция  $M(A, B)$  стремится к плюс бесконечности.

Точная нижняя грань ограниченной снизу нулём неотрицательной функции  $M(A, B)$  существует и ввиду непрерывности этой функции непременно принимается ею при некоторых парах конечных значений аргументов  $A$  и  $B$ , а поэтому является именно минимумом этой функции.

Необходимое условие любого экстремума дифференцируемой функции  $M(A, B)$  во внутренних точках промежутков для каждого из обоих аргументов  $A$  и  $B$  есть аннулирование всех её частных производных по её аргументам в отдельности, то есть в данном случае пары аргументов  $A$  и  $B$  система двух уравнений:

$$\partial M(A, B) / \partial A = 0;$$

$$\partial M(A, B) / \partial B = 0.$$

$$(\partial / \partial A) \int_0^1 (A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3)^2 d\zeta = \int_0^1 (\partial / \partial A)(A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3)^2 d\zeta = 2 \int_0^1 (A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3) d\zeta = 2(A + B/2 + 1 - 1/2) = 2A + B + 1;$$

$$(\partial / \partial B) \int_0^1 (A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3)^2 d\zeta = \int_0^1 (\partial / \partial B)(A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3)^2 d\zeta = 2 \int_0^1 (A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3) \zeta d\zeta = 2 \int_0^1 (A\zeta + B\zeta^2 + 3\zeta^3 - 2\zeta^4) \zeta d\zeta = 2(A/2 + B/3 + 3/4 - 2/5) = A + 2B/3 + 7/10.$$

$$2A + B + 1 = 0;$$

$$A + 2B/3 + 7/10 = 0.$$

Эта система двух уравнений с ненулевым главным определителем имеет единственное решение

(2.61)

$$A = 0.1;$$

$$B = -1.2,$$

которое поэтому и обеспечивает требуемую среднеквадратичную минимизацию многочлена  $Q(\zeta)$  (2.60) на отрезке  $[0, 1]$ .

Метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей обеспечивает в данном случае минимакс (минимум по совокупности значений постоянных  $A$  и  $B$  максимума по  $\zeta$ ) абсолютной величины многочлена  $Q(\zeta)$  (2.60) на отрезке  $[0, 1]$ .

Производная

$$(\partial / \partial \zeta) Q(\zeta) = (\partial / \partial \zeta)(A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3) = B + 6\zeta - 6\zeta^2 = -6(\zeta^2 - \zeta - B/6)$$

многочлена  $Q(\zeta)$  обращается в нуль при каждом из двух значений аргумента  $\zeta$

$$\zeta_1 = (1 - (1 + 2B/3)^{1/2})/2,$$

$$\zeta_2 = (1 + (1 + 2B/3)^{1/2})/2.$$

При  $B \leq -3/2$  разность

$$Q(0) - Q(1) = -1 - B \geq 1/2$$

и поэтому не меньшее половины последней разности значение

$$\max\{|Q(\zeta)|: 0 \leq \zeta \leq 1\} \geq 1/4.$$

При  $-3/2 < B < 0$  имеет место именно строгая упорядоченность

$$0 < \zeta_1 < \zeta_2 < 1$$

и в точке  $\zeta_1$  достигается минимум, в точке  $\zeta_2$  – максимум многочлена  $Q(\zeta)$ .

Полагая

$$t = (1 + 2B/3)^{1/2},$$

так что

$$\begin{aligned} 0 < t < 1, \\ \zeta_1 &= (1 - t)/2, \\ \zeta_2 &= (1 + t)/2, \end{aligned}$$

рассматриваем также минимум

$$Q(\zeta_1) = Q[(1 - t)/2] = A - 1/4 + 3t^2/4 - t^3/2$$

и максимум

$$Q(\zeta_2) = Q[(1 + t)/2] = A - 1/4 + 3t^2/4 + t^3/2$$

многочлена  $Q(\zeta)$  именно во внутренних точках отрезка  $[0, 1]$ .

При  $t = 1/2$  имеют место на концах и в этих внутренних точках отрезка  $[0, 1]$  значения многочлена  $Q(\zeta)$

$$\begin{aligned} Q(0) &= Q(3/4) = A, \\ Q(1) &= Q(1/4) = A - 1/8, \end{aligned}$$

так что именно и только при

$$A = 1/16$$

как половине разностей

$$Q(0) - Q(1) = Q(3/4) - Q(1/4) = A - (A - 1/8) = 1/8$$

достигается значение

$$\max\{|Q(\zeta)|: 0 \leq \zeta \leq 1\} = 1/16.$$

Если  $0 < t < 1/2$ , то разность

$$Q(0) - Q(1) = 1/2 - 3t^2/2 > 1/8$$

и поэтому не меньше половины последней разности значение

$$\max\{|Q(\zeta)|: 0 \leq \zeta \leq 1\} > 1/16.$$

При  $1/2 < t < 1$  разность

$$Q(\zeta_2) - Q(\zeta_1) = Q[(1 + t)/2] - Q[(1 - t)/2] = t^3 > 1/8$$

и поэтому не меньше половины последней разности значение

$$\max\{|Q(\zeta)|: 0 \leq \zeta \leq 1\} > 1/16.$$

При  $B \geq 0$  разность

$$Q(1) - Q(0) = 1 + B \geq 1$$

и поэтому не меньше половины последней разности значение

$$\max\{|Q(\zeta)|: 0 \leq \zeta \leq 1\} \geq 1/2.$$

В итоге искомым минимакс (минимум по совокупности значений постоянных  $A$  и  $B$  максимума по  $\zeta$  абсолютной величины многочлена  $Q(\zeta)$  на отрезке  $[0, 1]$ ) составляет

$$\min_{A,B} \max_{0 \leq \zeta \leq 1} |Q(\zeta)| = 1/16$$

при совокупности условий

$$\begin{aligned} (2.62) \\ A &= 1/16, \\ B &= -9/8. \end{aligned}$$

Возможен и третий априорно разумный метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием пары из четырёх значений – среднего, на торцах и посередине отрезка  $[0, 1]$ :

$$\int_0^1 Q(\zeta) d\zeta, Q(0), Q(1/2), Q(1),$$

что в данном случае минимизации многочлена  $Q(\zeta)$  даёт одинаковые итоги при любом выборе этой пары и аннулирует сразу все четыре указанных значения.

Для примера докажем это для аннулирования первой пары, что даёт совместно два условия:

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q(\zeta) d\zeta &= 0; \\ Q(0) &= 0. \end{aligned}$$

Они по формуле (2.60) дают соответственно:

$$A + B/2 + 3/3 - 2/4 = 0;$$

$$(2.63)$$

$$A = 0,$$

откуда

$$B = -1.$$

Тогда, что и требовалось доказать, аннулируется и последняя пара из четырёх значений

$$Q(1/2) = A + B/2 + 3/4 - 2/8 = 0;$$

$$Q(1) = A + B + 3 - 2 = 0.$$

Иные априорно разумные известные подходы к минимизации многочлена  $Q(\zeta)$  (2.60) на отрезке  $[0, 1]$  по существу не вносят ничего нового по сравнению с рассмотренными выше тремя методами.

В частности, к первому методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения сводится аннулирование интегрального среднего  $\int_0^1 Q(\zeta) d\zeta$  и момента  $\int_0^1 Q(\zeta) \zeta d\zeta$  [320].

Результаты минимизации невязок сопряжения по всем трём методам представим в единой записи с помощью числа  $m$ :

$$(2.64)$$

$m = 1/5$  по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения;

$m = 1/8$  по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей;

$m = 0$  по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

Тем самым сразу для всех трёх методов минимизации невязок сопряжения достигается единообразная запись обеспечивающих минимизацию многочлена  $Q(\zeta)$  (2.60) на отрезке  $[0, 1]$  значений постоянных  $A$  и  $B$ :

$$(2.65)$$

$$A = m/2;$$

$$B = -(1 + m).$$

Итак, минимизация  $u_r(c, \zeta)$  приводит к системе двух линейных уравнений относительно  $x, y$

$$-3(1 - \mu)c^3/8 - 2cx = m(2 - \mu)c/4;$$

$$3(1 - \mu)c^3/4 - 32(1 - \mu)/\mu cy = -(1 + m)(2 - \mu)c/2,$$

откуда

$$x = -m(2 - \mu)/8 - 3(1 - \mu)c^2/16;$$

$$y = (1 + m)\mu(2 - \mu)/[64(1 - \mu)] + 3\mu c^2/128.$$

Теперь по формулам (2.52) и (2.53) находятся выражения для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , окружного (тангенциального)  $\sigma_t(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений, которые представляются в размерных координатах:

$$(2.66)$$

$$u_r(r, z)E/(ph) = \{m(1 + \mu)(2 - \mu)/4 + (3/8)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - [(m - 1)(1 + \mu)(2 - \mu)/2 + (3/4)(1 - \mu^2)a^2/h^2]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h + [-3(1 - \mu^2)/8 + (3/4)(1 - \mu^2)z/h]r^3/h^3;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = -(1/4)(m + 1)(1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)a^4/h^4 - [m\mu(1 + \mu)(1 - \mu/2)/(1 - \mu) + (3/4)\mu(1 + \mu)a^2/h^2]z/h + [(1/2)(m + 1)\mu(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu) + (3/4)\mu(1 + \mu)a^2/h^2]z^2/h^2 - (1 + \mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [(m + 1)(1 + \mu)(2 - \mu)/4 + (3/8)(1 - \mu^2)a^2/h^2 + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - \mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = (1/4)m(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu) + (3/8)(1 + \mu)a^2/h^2 - [(m + 1)(1 + \mu)(1 - \mu/2)/(1 - \mu) + (3/4)(1 + \mu)a^2/h^2]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + [-(3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_t(r, z)/p = (1/4)m(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu) + (3/8)(1 + \mu)a^2/h^2 - [(m + 1)(1 + \mu)(1 - \mu/2)/(1 - \mu) + (3/4)(1 + \mu)a^2/h^2]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + [-(3/8)(1 + 3\mu) + (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_z(r, z)/p = -3z^2/h^2 + 2z^3/h^3;$$

$$\tau_{rz}(r, z)/p = (3z/h - 3z^2/h^2)r/h.$$

В таблице 2.1 наглядно сопоставлены известные и предложенные методы упругого расчёта при изгибе равномерным давлением на одно основание именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, жёстко защемлённого по боковой поверхности.

Рассмотрены безразмерная стрела прогиба и безразмерное максимальное напряжение.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 100/556

По общим формулам определены и численные значения при  
 $a = 55 \text{ мм}; h = 60 \text{ мм}; \mu = 0.2$   
 (последнее соответствует оптическому стеклу).

Таблица 2.1. Безразмерные стрела прогиба и наибольшее напряжение при изгибе равномерным давлением на одно основание именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, жёстко закреплённого по боковой поверхности.

Метод расчёта и номер формулы	Безразмерная характеристика изгиба	
	Стрела прогиба	Наибольшее напряжение
	$-u_z(0, 0)E/(ph)$	$\sigma_r(0, 0)/p = \sigma_r(a, h)/p$
Теория тонких пластин, таблица 1.2	0.127	0.630
Метод среднеквадратичной минимизации невязок, (2.66)	$0.127 + 0.544 = 0.671$	$0.378 + 0.135 = 0.513$ $0.630 - 0.135 = 0.495$
Метод минимаксов модулей невязок сопряжения, (2.66)	$0.127 + 0.510 = 0.637$	$0.378 + 0.084 = 0.462$ $0.630 - 0.250 - 0.084 = 0.296$
Метод коллокационной минимизации невязок, (2.66)	$0.127 + 0.454 = 0.581$	$0.378 + 0 = 0.378$ $0.630 - 0.250 = 0.380$

Относительные поправки к теории тонких пластин показаны на рисунке 2.3. Нумерация методов минимизации невязок сопряжения на рисунке 2.3 справедлива и для последующих аналогичных рисунков.

Все уточняющие методы минимизации невязок сопряжения дают формулы одинаковой степени сложности, ненамного большей, чем сложность формул теории тонких пластин. Во всех случаях ей соответствует первое слагаемое формул по методам минимизации невязок сопряжения.

Все уточняющие методы минимизации невязок сопряжения обобщают теорию тонких пластин. Она является предельным случаем этих методов при  
 $h \ll a$ .

Все предложенные методы минимизации невязок сопряжения дают формулы, отличающиеся лишь коэффициентами в одном из уточняющих слагаемых. Поэтому отношения разностей значений, получаемых по этим формулам, не зависят от  $a$ ,  $h$  и  $\mu$ .

Среди предложенных методов наибольшее значение стрелы прогиба даёт метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, промежуточное значение стрелы прогиба – метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей, наименьшее значение стрелы прогиба – метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

Отношение наибольшего значения стрелы прогиба к её наименьшему значению лежит в довольно узком интервале между единицей при  
 $h \ll a$ ,

то есть для очень тонких пластин, и 1.2 при

$$a \ll h,$$

то есть для круглых стержней.

Метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей даёт промежуточное значение стрелы прогиба, которое делит промежуток между её крайними значениями в отношении 3:5, если считать от большего значения.

Теория тонких пластин многократно, примерно в 5 раз, занижает стрелу прогиба при характерной для светопрозрачного элемента для высоких давлений относительной толщине.

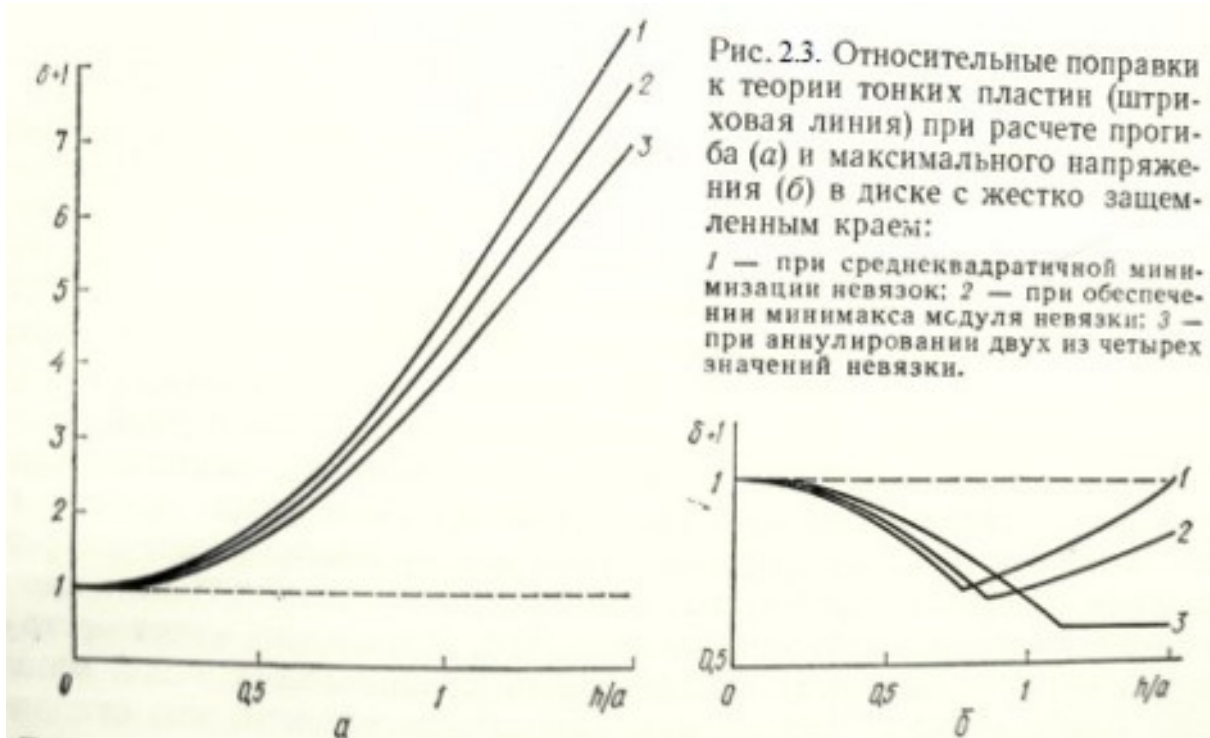


Рис. 2.3. Относительные поправки к теории тонких пластин (штриховая линия) при расчёте прогиба (а) и максимального напряжения (б) в диске с жёстко закреплённым краем:

1 — при среднеквадратичной минимизации невязок; 2 — при обеспечении минимакса модуля невязки; 3 — при аннулировании двух из четырёх значений невязки.

Рисунок 2.3. Относительные поправки к теории тонких пластин (штриховая линия с единичной ординатой) при расчёте стрелы прогиба (а) и максимального напряжения (б) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, с жёстко закреплённым краем:

- 1 — по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения;
- 2 — по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей;
- 3 — по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений — среднего, на торцах и посередине.

Согласно теории тонких пластин максимально всегда напряжение

$$\sigma_r(a, h).$$

Предлагаемые методы минимизации невязок сопряжения показывают, что это верно лишь при

$$a^2/h^2 > (8/3)\mu/(1 - \mu)^2 + (4/3)m(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu)^2.$$

Если в этом соотношении имеет место равенство, то максимальны

$$\sigma_r(a, h) = \sigma_r(0, 0) = \sigma_r(0, 0).$$

Если смысл последнего неравенства меняется на противоположный, то максимальны уже

$$\sigma_r(0, 0) = \sigma_r(0, 0).$$

Поскольку в неравенство для  $a^2/h^2$  входит характеристика  $m$  метода минимизации невязок сопряжения, то критическое (соответствующее знаку равенства) значение  $a/h$  зависит от метода минимизации невязок сопряжения и при  $\mu = 0.2$  составляет:

1.316 по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения;

1.181 по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей;

0.912 по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений — среднего, на торцах и посередине.

Теория тонких пластин завышает максимальные напряжения при

$$a^2/h^2 > (2/3)m(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu)^2,$$

даёт верный результат, если имеет место равенство, и занижает максимальные напряжения, если смысл этого неравенства меняется на противоположный.

При первых двух методах минимизации невязок сопряжения могут быть все три возможности, а при третьем методе минимизации невязок сопряжения – лишь первая. Однако действительное распределение напряжений при точном выполнении условия жёсткого защемления однозначно, а три предложенных метода минимизации невязок сопряжения приводят к различным приближениям.

Поэтому, по меньшей мере для реальных относительных толщин, можно считать, что теория тонких пластин завышает максимальные напряжения.

Это безусловно имеет место при  $h/a < 1.491$  (правая часть соответствует методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения при  $\mu = 0.2$ ).

Для оценки завышения укажем, что отношение максимальных напряжений по предложенным методам к таковым по теории тонких пластин составляет

$$\max \left\{ (1 + \mu)/2 + (1/3)m(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu) h^2/a^2; 1 - (4/3)\mu/(1 + \mu) h^2/a^2 - (1/3)m(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu) h^2/a^2 \right\} \geq (1 + \mu)/2 + (1/4)m(1 - \mu^2)(2 - \mu)/[2\mu + m(1 + \mu)(2 - \mu)].$$

Знак равенства имеет место при равенстве между собой выражений в последних фигурных скобках, то есть при

$$a^2/h^2 = (8/3)\mu/(1 - \mu)^2 + (4/3)m(1 + \mu)(2 - \mu)/(1 - \mu)^2.$$

Указанное отношение максимальных напряжений оказывается не менее чем

0.704 по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения,

0.682 по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и

0.6 по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине

$$(\mu = 0.2).$$

Верхней границей указанного отношения напряжений практически можно считать 1, так что напряжения в первом приближении определяются уже теорией тонких пластин, тем более что погрешность идёт в увеличение запаса прочности.

Поскольку граничные условия на торцах именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, выполнены точно, а влияние неточности в определении осевого перемещения  $u_z(a, z)$  боковой поверхности  $r = a$  имеет лишь местное значение, то погрешность решения характеризуется отклонением от нуля радиального перемещения  $u_r(a, z)$  боковой поверхности  $r = a$  (кривые I рисунка 2.4).

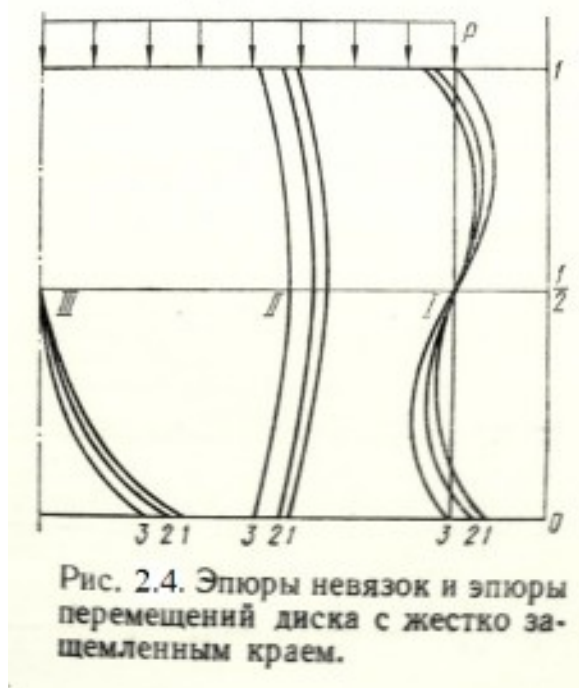


Рис. 2.4. Эпюры невязок и эпюры перемещений диска с жестко за-  
щемленным краем.

Рисунок 2.4. Эпюры невязок и эпюры перемещений именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) с жёстко зашщёмлённым краем.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 103/556

Полезно провести сопоставление радиального перемещения  $u_r(a, z)$  боковой поверхности  $r = a$  со стрелой прогиба

$$u_z(a, z) - u_z(0, z)$$

(кривые II рисунка 2.4), изменяющейся по толщине именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), и с относительным радиальным перемещением точек оси (кривые III рисунка 2.4)

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} (a/r)u_r(r, z).$$

Последнее произведение имеет действительный физический смысл: оно пропорционально тангенциальной (окружной) деформации. Кроме того, при  $r = a$  оно обращается в радиальное перемещение  $u_r(a, z)$  боковой поверхности  $r = a$ .

Поэтому сопоставление с величиной этого предела также служит некоторой характеристикой влияния погрешности на краю именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) на его центральную часть.

На рисунке 2.4 в одинаковом масштабе показаны эпюры указанных величин (кривые I, II, III) в безразмерном представлении после умножения на  $E/(ph)$ .

Эпюра так умноженного радиального перемещения  $u_r(a, z)E/(ph)$  боковой поверхности  $r = a$  построена на краю именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), остальные две эпюры – на его оси.

Эпюра предела

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} (a/r)u_r(r, z)$$

показана лишь на отрезке  $[0, h/2]$ , поскольку она центрально симметрична относительно точки  $r = 0, z = h/2$ .

Исходные числовые данные:

$$a = 55 \text{ мм};$$

$$h = 60 \text{ мм};$$

$$\mu = 0.2 \text{ (оптическое стекло)}.$$

Кривые нумеруются в порядке следования методов минимизации невязок сопряжения.

Характеристические значения невязок соответствуют аннулированию и локальным экстремумам многочлена  $Q(\zeta)$  (2.60) при трёх методах минимизации невязок сопряжения.

Эпюры невязок сопряжения на краю сопоставлены с эпюрами перемещений на оси.

Наиболее целесообразен метод минимизации невязок сопряжения обеспечением минимаксов их модулей, затем метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения.

Уступает первым двум методам метод коллокационной минимизации невязок сопряжения.

Отмечается иной характер эпюры стрелы прогиба: не центральная, а зеркальная относительно срединной плоскости симметрия.

Кривые 1, 2, 3 эпюры стрелы прогиба идут со сдвигом вдоль радиуса, а не веерообразно.

## **2.8. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, свободно опёртого по краю**

Теории осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание круглой пластины и круглой плиты, свободно опёртых по краю, математически строго проанализированы и обобщены теорией осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного существенно трёхмерного цилиндрического тела, свободно опёртого по краю.

Свободное опирание края именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) соответствует первой сверху расчётной схеме в левом столбце таблицы 1.2.

Сплошное трёхмерное цилиндрическое тело радиусом  $a$  и высотой (толщиной)  $h$  нагружено равномерным давлением  $p$  на верхнее основание  $z = h$  и удерживается в равновесии свободным опиранием края  $r = a$  нижнего основания  $z = 0$ .

Граничные условия для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), свободно опёртого по краю, показаны на рис. 1.7, г:

(2.67)

$$\begin{aligned}\sigma_z(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \sigma_z(r, h) &= -p \quad (0 \leq r \leq a); \\ \tau_{rz}(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \tau_{rz}(r, h) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \sigma_r(a, z) &= 0 \quad (0 \leq z \leq h); \\ u_z(a, 0) &= 0.\end{aligned}$$

Точное решение для свободного опирания края именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) требует аннулировать осевое перемещение  $u_z(a, 0)$  края  $r = a$  ненагруженного плоского основания  $z = 0$  и радиальное напряжение  $\sigma_r(a, z)$  на боковой поверхности  $r = a$  тождественно по  $z$ .

Аннулирование сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(a, z)$  на боковой поверхности  $r = a$  не предусматривается, так как считается, что именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело удерживается в равновесии как раз этим сдвиговым напряжением на боковой поверхности  $r = a$ .

Поскольку две постоянные  $a_{11}$  и  $a_{20}$  есть и в формулах (2.51) – (2.53) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента), и в формулах (2.55) – (2.57) для кольцевого трёхмерного цилиндрического тела (элемента) как для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, и могут принимать для них различные значения, то в формулах (2.51) – (2.53) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) для различения используются прежние обозначения (2.59):

$$\begin{aligned}x &= a_{11}, \\ y &= a_{20}.\end{aligned}$$

Используются прежние безразмерные обозначения, в том числе постоянная  $C_1$  и безразмерный радиус

$$c = a/h$$

сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента), кроме лишних здесь

$$b = a_1/h.$$

Тогда формулы (2.52) дают безразмерные перемещения.

Применяются формулы (2.51) – (2.53) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) и указанные два последних граничных условия (2.67) (см. рисунок 1.7, г).

Тогда на боковой поверхности  $\rho = c$  безразмерное радиальное напряжение

$$\sigma_\rho(c, \zeta) = -3(3 + \mu)c^2/8 - 2(1 + \mu)/(1 - \mu)x + [3(3 + \mu)c^2/4 - 32(1 + \mu)/\mu y]\zeta + 3(2 + \mu)/2 \zeta^2 - (2 + \mu)\zeta^3$$

для точного решения должно быть тождественно равно нулю.

Но это невозможно, так как  $2 + \mu \neq 0$ . Поэтому решение может быть лишь приближённым.

Как и выше, минимизация безразмерного радиального напряжения  $\sigma_\rho(c, \zeta)$  на боковой поверхности  $\rho = c$  осуществляется выбором тех же двух постоянных  $x$  и  $y$ .

Опять задача сводится к минимизации многочлена  $Q(\zeta)$  (2.60) на отрезке  $[0, 1]$ .

Результаты минимизации по всем трём методам минимизации невязок сопряжения приводятся в единой записи с помощью формул (2.64) и (2.65).

Из соответствующей безразмерному радиальному напряжению  $\sigma_\rho(c, \zeta)$  на боковой поверхности  $\rho = c$  системы двух линейных уравнений относительно  $x, y$

$$\begin{aligned}-3(3 + \mu)c^2/8 - 2(1 + \mu)/(1 - \mu)x &= m(2 + \mu)/4; \\ 3(3 + \mu)c^2/4 - 32(1 + \mu)/\mu y &= -(1 + m)(2 + \mu)/2\end{aligned}$$

находятся

$$\begin{aligned}x &= -m(1 - \mu)(2 + \mu)/(8(1 + \mu)) - 3(1 - \mu)(3 + \mu)c^2/(16(1 + \mu)); \\ y &= (1 + m)\mu(2 + \mu)/(64(1 + \mu)) + 3\mu(3 + \mu)c^2/(128(1 + \mu)); \\ C_1 &= -(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)c^2/(4(1 + \mu)) - 3(1 - \mu)(5 + \mu)c^4/(16(1 + \mu)).\end{aligned}$$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 105/556

Формулы для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений сплошного трёхмерного цилиндрического тела представляются в размерных координатах:

(2.68)

$$u_r(r, z)E/(ph) = \{m(1 - \mu)(2 + \mu)/4 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 - [(m + 1)(1 - \mu)(2 + \mu)/2 + (3/4)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h + [-3(1 - \mu^2)/8 + (3/4)(1 - \mu^2)z/h]r^3/h^3;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = -(1/4)(m + 1)(1 - \mu)(2 + \mu)a^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu)(5 + \mu)a^4/h^4 - [m\mu(2 + \mu)/2 + (3/4)\mu(3 + \mu)a^2/h^2]z/h + [(m + 1)\mu(2 + \mu)/2 + (3/4)\mu(3 + \mu)a^2/h^2]z^2/h^2 - (1 + \mu)^2z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4 + [(m + 1)(1 - \mu)(2 + \mu)/4 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = m(2 + \mu)/4 + (3/8)(3 + \mu)a^2/h^2 - [(m + 1)(2 + \mu)/2 + (3/4)(3 + \mu)a^2/h^2]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + [-(3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_t(r, z)/p = m(2 + \mu)/4 + (3/8)(3 + \mu)a^2/h^2 - [(m + 1)(2 + \mu)/2 + (3/4)(3 + \mu)a^2/h^2]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + [-(3/8)(1 + 3\mu) + (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_z(r, z)/p = -3z^2/h^2 + 2z^3/h^3;$$

$$\tau_{rz}(r, z)/p = (3z/h - 3z^2/h^2)r/h.$$

В таблице 2.2 сопоставлены известные и предложенные методы расчёта именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) при свободном опирании края. Рассмотрены безразмерная стрела прогиба и безразмерное максимальное напряжение. Определены и численные значения при

$$a = 55 \text{ мм}; h = 60 \text{ мм}; \mu = 0.2 \text{ (оптическое стекло)}.$$

Таблица 2.2. Безразмерные стрела прогиба и наибольшее напряжение при изгибе равномерным давлением на одно основание именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) при свободном опирании края.

Метод расчёта и номер формулы	Безразмерная характеристика изгиба	
	Стрела прогиба	Наибольшее напряжение
	$-u_z(0, 0)E/(ph)$	$\sigma_r(0, 0)/p = \sigma_t(0, 0)/p$
Теория тонких пластин, таблица 1.2	0.551	1.008
Метод среднеквадратичной минимизации невязок, (2.68)	$0.551 + 0.444 = 0.995$	$1.008 + 0.110 = 1.118$
Метод минимаксов модулей невязок сопряжения, (2.68)	$0.551 + 0.416 = 0.967$	$1.008 + 0.069 = 1.077$
Метод коллокационной минимизации невязок, (2.68)	$0.551 + 0.370 = 0.921$	$1.008 + 0 = 1.008$

Относительные поправки к теории тонких пластин показаны на рисунке 2.5.

Все уточняющие методы минимизации невязок сопряжения дают формулы одинаковой степени сложности, ненамного большей, чем сложность формул теории тонких пластин. Ей соответствует первое слагаемое формул всех уточняющих методов минимизации невязок сопряжения.

Все уточняющие методы минимизации невязок сопряжения обобщают теорию тонких пластин. Она является предельным случаем этих методов при

$$h \ll a.$$

Все предложенные методы минимизации невязок сопряжения дают формулы, отличающиеся лишь коэффициентами в уточняющих слагаемых.

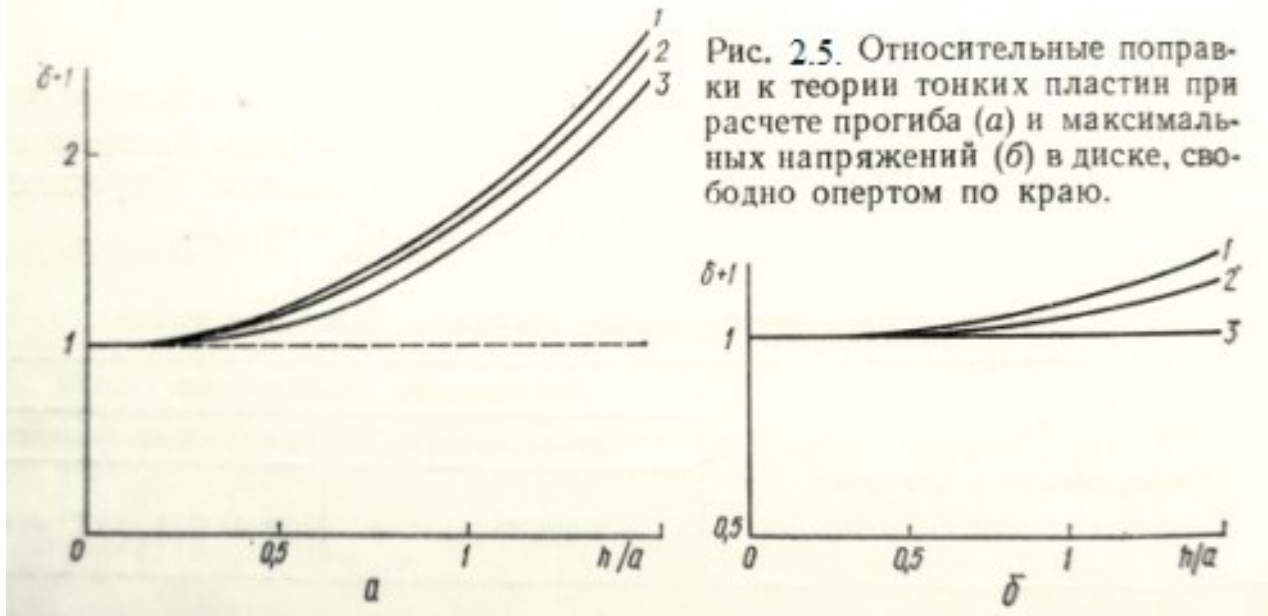


Рис. 2.5. Относительные поправки к теории тонких пластин при расчёте прогиба (а) и максимальных напряжений (б) в диске, свободно опертом по краю.

Рисунок 2.5. Относительные поправки к теории тонких пластин (штриховая линия с единичной ординатой) при расчёте стрелы прогиба (а) и максимальных напряжений (б) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, свободно опертого по краю.

Поэтому отношения разностей значений, получаемых по этим формулам, не зависят от  $a$ ,  $h$  и  $\mu$ .

Среди предложенных методов минимизации невязок сопряжения наибольшие значения стрелы прогиба и максимального напряжения даёт метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, промежуточные значения – метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей, наименьшие значения – метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

Отношение этих наибольшего и наименьшего значений для стрелы прогиба лежит в довольно узком интервале между 1 при

$$h \ll a,$$

то есть для очень тонких пластин, и 1.2 при

$$a \ll h,$$

то есть для очень толстых сплошных трёхмерных цилиндрических тел (элементов).

Теоретически аналогичное отношение для максимального напряжения лежит в интервале от 1 при

$$h \ll a,$$

то есть для очень тонких пластин, до плюс бесконечности при

$$a \ll h,$$

то есть для очень толстых сплошных трёхмерных цилиндрических тел (элементов).

Однако в широком диапазоне относительных толщин, характерных для светопрозрачных элементов для высоких давлений, оба указанных отношения составляют примерно 1.1.

Во всех случаях метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей даёт промежуточный результат, при этом отрезок между крайними значениями делится в отношении 3:5, если считать от большего значения.

Теория тонких пластин в случае именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) весьма значительно занижает стрелу прогиба и в меньшей степени максимальные напряжения.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevič Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 107/556

При характерных для иллюминаторов для высоких давлений относительных толщинах светопрозрачных элементов результаты занижаются примерно в 1.8 и 1.1 раза соответственно.

Поскольку граничные условия на основаниях трёхмерного цилиндрического тела (элемента) выполнены точно, то погрешность решения характеризуется отклонением от нуля радиального напряжения на боковой поверхности  $\sigma_r(a, z)$  в сравнении с радиальным и равным ему тангенциальным (окружным) напряжениями на оси

$$\sigma_r(0, z) = \sigma_t(0, z).$$

Такое сопоставление даёт завышенную оценку погрешности, поскольку отклонение на краю в среднем нулевое и его влияние уменьшается к оси.

На рисунке 2.6 в прежнем масштабе показаны определённые по формулам (2.68) эпюры относительных напряжений, построенные на отрезке  $[0, h]$  прямой  $r = a$  (эпюры I величины  $\sigma_r(a, z)/p$  и построенные на отрезке  $[0, h/2]$  оси эпюры II величины

$$\sigma_r(0, z)/p = \sigma_t(0, z)/p,$$

центральные симметричные относительно точки

$$r = 0, z = h/2).$$

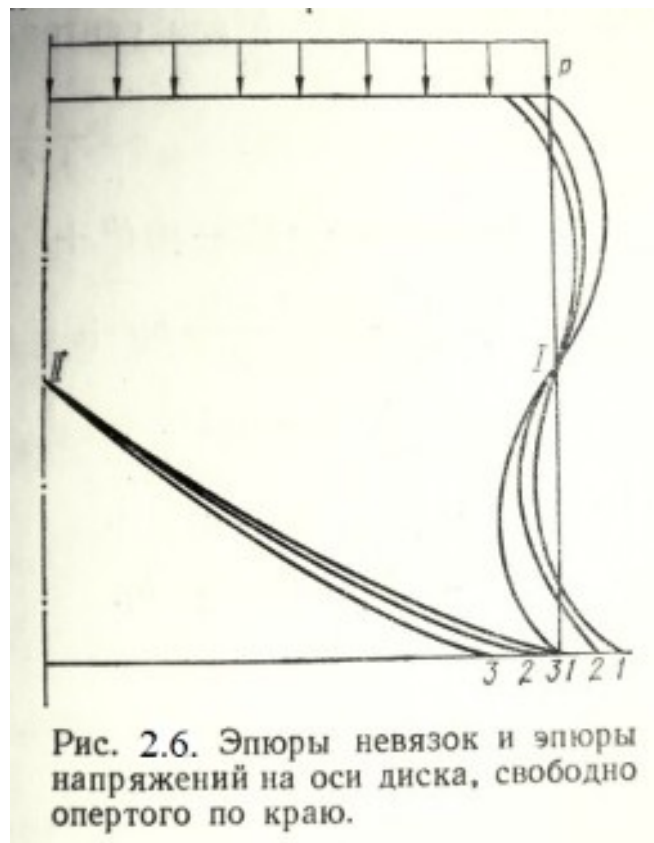


Рисунок 2.6. Эпюры невязок и эпюры напряжений на оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), свободно опертого по краю.

Числовые значения при каждом из трёх методов минимизации невязок сопряжения определены при

$$\begin{aligned} a &= 55 \text{ мм,} \\ h &= 60 \text{ мм,} \\ \mu &= 0.2 \end{aligned}$$

(оптическое стекло).

Оказывается, что даже при столь большой относительной толщине погрешность решения невелика по сравнению с максимальными напряжениями.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 108/556

Сопоставление трёх методов минимизации невязок сопряжения показывает, что погрешность минимальна (кривые 2) и в абсолютном, и в относительном смысле при методе минимизации невязок сопряжения обеспечением минимакса модуля радиального напряжения  $\sigma_r(a, z)$ .

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) такой подход и наиболее логичен, поскольку радиальное напряжение  $\sigma_r(r, z)$  распределяется нелинейно по толщине и его определение по моменту является весьма условным.

Немного большие напряжения даёт метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, совпадающий с аннулированием среднего значения и изгибающего момента (кривые 1).

Дальше от кривых 2 по сравнению с кривыми 1 в противоположную сторону стоят кривые 3, соответствующие методу коллокационной минимизации невязок сопряжения (аннулированию четырёх значений – среднего, на торцах и посередине).

Последовательности кривых монотонны по каждую сторону от середины  $z = h/2$  толщины, в середине толщины кривые совпадают, а при переходе через неё последовательность меняется на обратную.

Кривые на краю и в центре идут в одной и той же самой последовательности.

Более того, промежутки (отсчитываемые вдоль радиуса) между эпюрами на краю и эпюрами на оси совпадают.

Это не случайно.

При всех трёх методах минимизации невязок сопряжения величины  $\sigma_r(a, z)$  получаем

$$\sigma_r(0, z)/p - \sigma_r(r, z)/p = (3/8)(3 + \mu)(1 - 2z/h)r^2/h^2.$$

Итак, удовлетворительны все три метода минимизации невязок сопряжения.

Наихудший из них – третий (метод коллокационной минимизации невязок сопряжения с аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине); кривые 3 наиболее удалены от остальных двух), наилучший в сопоставлении с максимальными напряжениями на оси – второй (метод минимизации невязок сопряжения обеспечением минимакса модуля; относительная погрешность не превышает 6.2 %).

Наилучший в сопоставлении с полным распределением напряжений на оси – первый (метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения; относительная погрешность – менее 9.7 % у нижнего торца).

## **2.9. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, опёртого по окружности меньшего радиуса**

Теория осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание круглой пластины, свободно опёртой по окружности меньшего радиуса, математически строго проанализирована и обобщена теорией осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного существенно трёхмерного цилиндрического тела, свободно опёртого по окружности меньшего радиуса.

Граничные условия для осевого  $u_z(r, z)$  перемещения, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле (элементе), опёртом на узкое кольцо радиусом  $a_1$  ( $0 < a_1 < a$ ), показаны на рис. 1.7, а:

$$(2.69) \\ \begin{aligned} \sigma_z(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \sigma_z(r, h) &= -p \quad (0 \leq r \leq a); \\ \tau_{rz}(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \tau_{rz}(r, h) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a); \\ \sigma_r(a, z) &= 0 \quad (0 \leq z \leq h); \\ \tau_{rz}(a, z) &= 0 \quad (0 \leq z \leq h); \\ u_z(a_1, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Используется общепринятый метод сечений.

Именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело радиусом  $a$  пересекается соосной цилиндрической поверхностью радиусом  $a_1$  на круглую центральную часть 1 (сплошной трёхмерный цилиндрический элемент) радиусом  $a_1$  и кольцевую периферическую часть 2 (кольцевой трёхмерный цилиндрический элемент) радиусами  $a_1$  и  $a$ .

Обозначаются

$$b = a_1/h$$

и, как и прежде,

$$c = a/h.$$

Поскольку две постоянные  $a_{11}$  и  $a_{20}$  есть и в формулах (2.51) – (2.53) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента), и в формулах (2.55) – (2.57) для кольцевого трёхмерного цилиндрического тела (элемента) как для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, и могут принимать для них различные значения, то в формулах (2.51) – (2.53) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) для различения используются прежние обозначения (2.59):

$$x = a_{11},$$

$$y = a_{20}.$$

Чтобы не смешивать одноимённые перемещения и напряжения для круглой центральной 1 и кольцевой периферической 2 частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, целиком, возможно добавление к обозначениям перемещений и напряжений индекса 1 для круглой центральной части 1 и индекса 2 для кольцевой периферической части 2 сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) целиком.

Для изгиба равномерным давлением на одно основание опёртого по окружности меньшего радиуса именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, в первом уравнении (2.54)

$$K_2 = 0.$$

Вводятся произвольные суммарные (с поглощением других наличных постоянных, в данном случае

$$- 3(1 - \mu)/16 b^4 + 16(1 - \mu)/\mu b^2 y$$

и

$$8(1 - \mu)a_{10} + 2(1 - 2\mu)a_{02} + 8(1 - \mu)b_{10} + 4(1 - \mu)/\mu b_{10} \ln b + 16(1 - \mu)/\mu a_{20} b^2 + 8(1 - \mu)/\mu b_{20} b^2 + 16(1 - \mu)/\mu b_{20} b^2 \ln b - (3/16)(1 - \mu)b^4$$

соответственно) постоянные  $C_1$  и  $C_2$  для осевых перемещений в соотношения (2.52) и (2.53) для круглой центральной части 1 и в соотношения (2.56) и (2.57) для кольцевой периферической части 2 именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Одноимённые выражения для безразмерных радиального  $u_r(\rho, \zeta)$  и осевого  $u_z(\rho, \zeta)$  перемещений и для безразмерных радиального  $\sigma_r(\rho, \zeta)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_\phi(\rho, \zeta)$ , осевого  $\sigma_z(\rho, \zeta)$  и сдвигового  $\tau_{r\zeta}(\rho, \zeta)$  напряжений при  $\rho = b$  приводятся для наглядности сопоставлений попарно – сначала для круглой центральной части 1 и вслед за этим для кольцевой периферической части 2 именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$\begin{aligned} u_{r1}(b, \zeta) &= - 2bx - (3/8)(1 - \mu)b^3 + [- 32(1 - \mu)/\mu by + (3/4)(1 - \mu)b^3]\zeta + (3/2)(2 - \mu)b\zeta^2 - (2 - \mu)b\zeta^3; \\ u_{r2}(b, \zeta) &= - b_{01}b^{-1} - 2a_{11}b + 8(1 - \mu)/\mu b_{20}b - (3/8)(1 - \mu)b^3 + 16(1 - \mu)/\mu b_{20}b \ln b + [- 4(1 - \mu)/\mu b_{10} b^{-1} - \\ & 32(1 - \mu)/\mu (a_{20} + b_{20})b - 32(1 - \mu)/\mu b_{20}b \ln b + (3/4)(1 - \mu)b^3]\zeta + [- 16(2 - \mu)/\mu b_{20} b^{-1} + (3/2)(2 - \\ & \mu)b]\zeta^2 + [(32/3)(2 - \mu)/\mu b_{20} b^{-1} - (2 - \mu)b]\zeta^3; \\ u_{z1}(b, \zeta) &= C_1 + 4\mu/(1 - \mu) x\zeta + (3/2)\mu b^2\zeta + 32y\zeta^2 - (3/2)\mu b^2\zeta^2 - (1 + \mu)\zeta^3 + (1/2)(1 + \mu)\zeta^4; \\ u_{z2}(b, \zeta) &= C_2 + [4\mu/(1 - \mu) a_{11} - 32b_{20} - 32b_{20} \ln b + (3/2)\mu b^2]\zeta + [32a_{20} + 48b_{20} + 32b_{20} \ln b - (3/2)\mu b^2]\zeta^2 \\ & - (1 + \mu)\zeta^3 + (1/2)(1 + \mu)\zeta^4; \end{aligned}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 110/556

$$\sigma_{\rho 1}(b, \zeta) = -2(1 + \mu)/(1 - \mu) x - (3/8)(3 + \mu)b^2 + [-32(1 + \mu)/\mu y + (3/4)(3 + \mu)b^2]\zeta + (3/2)(2 + \mu)\zeta^2 - (2 + \mu)\zeta^3;$$

$$\sigma_{\rho 2}(b, \zeta) = b_{01}b^{-2} - 2(1 + \mu)/(1 - \mu) a_{11} + 8(3 + \mu)/\mu b_{20} + 16(1 + \mu)/\mu b_{20} \ln b - (3/8)(3 + \mu)b^2 + [4(1 - \mu)/\mu b_{10}b^{-2} - 32(1 + \mu)/\mu a_{20} - 32(2 + \mu)/\mu b_{20} - 32(1 + \mu)/\mu b_{20} \ln b + (3/4)(3 + \mu)b^2]\zeta + [16(2 - \mu)/\mu b_{20}b^{-2} + (3/2)(2 + \mu)]\zeta^2 + [-(32/3)(2 - \mu)/\mu b_{20}b^{-2} - (2 + \mu)]\zeta^3;$$

$$\sigma_{\varphi 1}(b, \zeta) = -2(1 + \mu)/(1 - \mu) x - (3/8)(1 + 3\mu)b^2 + [-32(1 + \mu)/\mu y + (3/4)(1 + 3\mu)b^2]\zeta + (3/2)(2 + \mu)\zeta^2 - (2 + \mu)\zeta^3;$$

$$\sigma_{\varphi 2}(b, \zeta) = -b_{01}b^{-2} - 2(1 + \mu)/(1 - \mu) a_{11} + 8(1 + 3\mu)/\mu b_{20} + 16(1 + \mu)/\mu b_{20} \ln b - (3/8)(1 + 3\mu)b^2 + [-4(1 - \mu)/\mu b_{10}b^{-2} - 32(1 + \mu)/\mu a_{20} - 32(1 + 2\mu)/\mu b_{20} - 32(1 + \mu)/\mu b_{20} \ln b + (3/4)(1 + 3\mu)b^2]\zeta + [-16(2 - \mu)/\mu b_{20}b^{-2} + (3/2)(2 + \mu)]\zeta^2 + [(32/3)(2 - \mu)/\mu b_{20}b^{-2} - (2 + \mu)]\zeta^3;$$

$$\sigma_{\zeta 1}(b, \zeta) = -3\zeta^2 + 2\zeta^3;$$

$$\sigma_{\zeta 2}(b, \zeta) = -3\zeta^2 + 2\zeta^3;$$

$$\tau_{\rho \zeta 1}(b, \zeta) = b(3\zeta - 3\zeta^2).$$

$$\tau_{\rho \zeta 2}(b, \zeta) = (32\mu^{-1}b_{20}b^{-1} - 3b)(-\zeta + \zeta^2).$$

Чтобы решение для целого именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, было точным, необходимы тождественные по  $\zeta$  равенства

$$u_{\rho 1}(b, \zeta) = u_{\rho 2}(b, \zeta),$$

$$u_{\zeta 1}(b, \zeta) = u_{\zeta 2}(b, \zeta),$$

$$\sigma_{\rho 1}(b, \zeta) = \sigma_{\rho 2}(b, \zeta),$$

$$\tau_{\rho \zeta 1}(b, \zeta) = \tau_{\rho \zeta 2}(b, \zeta).$$

Кроме того, на внешнем краю  $\rho = c$  кольцевой периферической части 2 целого именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, должны тождественно аннулироваться безразмерные радиальное и сдвиговое напряжения:

$$\sigma_{\rho 2}(c, \zeta) = b_{01}c^{-2} - 2(1 + \mu)/(1 - \mu) a_{11} + 8(3 + \mu)/\mu b_{20} + 16(1 + \mu)/\mu b_{20} \ln c - (3/8)(3 + \mu)c^2 + [4(1 - \mu)/\mu b_{10}c^{-2} - 32(1 + \mu)/\mu a_{20} - 32(2 + \mu)/\mu b_{20} - 32(1 + \mu)/\mu b_{20} \ln c + (3/4)(3 + \mu)c^2]\zeta + [16(2 - \mu)/\mu b_{20}c^{-2} + (3/2)(2 + \mu)]\zeta^2 + [-(32/3)(2 - \mu)/\mu b_{20}c^{-2} - (2 + \mu)]\zeta^3;$$

$$\tau_{\rho \zeta 2}(c, \zeta) = (32\mu^{-1}b_{20}c^{-1} - 3c)(-\zeta + \zeta^2).$$

Из выражений для безразмерных радиальных перемещений  $u_{\rho 1}(b, \zeta)$  и  $u_{\rho 2}(b, \zeta)$ , радиальных напряжений  $\sigma_{\rho 1}(b, \zeta)$  и  $\sigma_{\rho 2}(b, \zeta)$  и сдвиговых напряжений  $\tau_{\rho \zeta 1}(b, \zeta)$  и  $\tau_{\rho \zeta 2}(b, \zeta)$  при  $\rho = b$  видно, что необходимо условие

$$b_{20} = 0.$$

В то же время на внешнем краю  $\rho = c$  кольцевой периферической части 2 целого именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, аннулирование безразмерного сдвигового напряжения  $\tau_{\rho \zeta 2}(c, \zeta)$  требует в таком случае условия

$$c = 0,$$

а аннулирование безразмерного радиального напряжения  $\sigma_{\rho 2}(c, \zeta)$  требует условия

$$2 + \mu = 0.$$

Невозможность выполнения последних двух условий показывает, что построить точное решение не удаётся.

Приближённое решение получается следующим образом.

Аннулирование безразмерного сдвигового напряжения  $\tau_{\rho \zeta 2}(c, \zeta)$  выполняется точно принятием

$$b_{20} = (3/32)\mu c^2.$$

Аннулировать остальные невязки удаётся лишь приближённо – последовательным применением каждого из трёх методов минимизации невязок сопряжения.

Формулы приводятся в единой записи с учётом соотношений (2.64) и (2.65).

Минимизация безразмерного радиального напряжения  $\sigma_{\rho 2}(c, \zeta)$  на внешнем краю  $\rho = c$  кольцевой периферической части 2 именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, даёт

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 111/556

$$a_{11} = - (1/2)m(1 - \mu)/(1 + \mu) + (1/2)(1 - \mu)/(1 + \mu) b_{01}c^2 + (3/16)(1 - \mu)(3 + \mu)/(1 + \mu) c^2 + (3/4)(1 - \mu)c^2 \ln c;$$

$$a_{20} = (1/16)(1 + m)\mu/(1 + \mu) + (1/8)(1 - \mu)/(1 + \mu) b_{01}c^2 - (3/128)\mu(5 + 3\mu)/(1 + \mu) c^2 - (3/32)\mu c^2 \ln c.$$

Минимизация невязки безразмерного радиального напряжения  $\sigma_{r2}(b, \zeta) - \sigma_{r1}(b, \zeta)$  приводит к формулам

$$x = - (1/2)m(1 - \mu)/(1 + \mu) - (1/2)(1 - \mu)/(1 + \mu) b_{01}(c^2 - b^2)/(c^2b^2) + (1/8)m(1 - \mu)(2 - \mu)/(1 + \mu) c^2/b^2 - (3/16)(1 - \mu)(3 + \mu)/(1 + \mu) c^2 + (3/4)(1 - \mu)c^2 \ln(c/b);$$

$$y = (1/16)(1 + m)\mu/(1 + \mu) - (1/8)(1 - \mu)/(1 + \mu) b_{10}(c^2 - b^2)/(c^2b^2) - (3/128)\mu(5 + 3\mu)/(1 + \mu) c^2 - (3/32)\mu c^2 \ln(c/b).$$

Аналогично минимизируется невязка безразмерного радиального перемещения  $u_{r2}(b, \zeta)$  и получаются

$$b_{01} = (1/4)m(2 - \mu)c^2 - (3/4)(1 - \mu)b^2c^2;$$

$$b_{10} = - (1/8)(1 + m)\mu(2 - \mu)/(1 - \mu) c^2 + (3/8)\mu b^2c^2.$$

Теперь находятся

$$x = - (1/8)m(1 - \mu)(2 + \mu)/(1 + \mu) - (3/16)(1 - \mu)(1 + 3\mu)/(1 + \mu) c^2 + (3/8)(1 - \mu)^2/(1 + \mu) b^2 + (3/4)(1 - \mu)c^2 \ln(c/b);$$

$$y = (1/64)(1 + m)\mu(2 + \mu)/(1 + \mu) + (3/128)\mu(1 + 3\mu)/(1 + \mu) c^2 + (3/64)\mu(1 - \mu)/(1 + \mu) b^2 - (3/32)\mu c^2 \ln(c/b);$$

$$a_{11} = - (1/8)m(1 - \mu)(2 + \mu)/(1 + \mu) - (3/8)(1 - \mu)^2/(1 + \mu) b^2 + (3/16)(1 - \mu)(3 + \mu)/(1 + \mu) c^2 + (3/4)(1 - \mu)c^2 \ln c;$$

$$a_{20} = (3/160)\mu(2 + \mu)/(1 + \mu) + (3/64)\mu(1 - \mu)/(1 + \mu) b^2 - (3/128)\mu(5 + 3\mu)/(1 + \mu) c^2 - (3/32)\mu c^2 \ln c.$$

Кроме того, из выражения для безразмерного радиального перемещения  $u_{r2}(b, \zeta)$  и из соотношения для безразмерного осевого перемещения

$$u_{z2}(b, 0) = 0$$

следуют

$$C_1 = - (1/4)(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)/(1 + \mu) b^2 - (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)/(1 + \mu) b^2c^2 - (3/16)(1 - \mu)(3 - 5\mu)/(1 + \mu) b^4 + (3/2)(1 - \mu)b^2c^2 \ln(c/b);$$

$$C_2 = - (1/4)(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)/(1 + \mu) b^2 - (3/16)(1 - \mu)(3 - 5\mu)/(1 + \mu) + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)/(1 + \mu) b^2c^2 - (3/2)(1 - \mu)b^2c^2 \ln(b^2/c) + (1/2)(1 + m)(2 - \mu)c^2 \ln b.$$

Формулы для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, представляются в размерных координатах:

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента)

$$(2.70)$$

$$u_r(r, z)E/(ph) = \{m(1 - \mu)(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/a_1) + [- (1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)/2 - (3/2)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h + [- (3/8)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu^2)z/h]r^3/h^3;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = - (1/4)(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a_1^2a^2/h^4 - (3/16)(1 - \mu)(3 - 5\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a/a_1) + [- m\mu(2 + \mu)/2 - (3/2)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z/h + [(1 + m)\mu(2 - \mu)/2 + (3/2)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z^2/h^2 - (1 + \mu)z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)z^4/h^4 + [- (1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)/4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = m(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1) + [- (1 + m)(2 + \mu)/2 - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + [- (3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_t(r, z)/p = m(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 + 3\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1) + [- (1 + m)(2 + \mu)/2 - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + [- (3/8)(1 + 3\mu) + (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_z(r, z)/p = - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3;$$

$$\tau_{rz}(r, z)/p = (3z/h - 3z^2/h^2)r/h;$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента)

$$(2.71)$$

$$u_r(r, z)E/(ph) = \{-(1/4)m(1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 + [(1/2)(1 + m)(1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4]z/h - (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 z^2/h^2 + (1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 z^3/h^3\}h/r + \{m(1 - \mu)(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)^2a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) + [-(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)/2 - (3/2)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/4)(1 - \mu)^2a^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 (1 - 2z/h)r/h \ln(r/h) - (3/8)(1 - \mu^2)(1 - 2z/h)r^3/h^3;$$

$$u_z(r, z)E/(ph) = -(1/4)(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)a_1^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu)(3 - 5\mu)a_1^4/h^4 + (3/8)(1 - \mu)(3 + 5\mu)a_1^2a^2/h^4 - (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a_1^2/(ah)) + (1/2)(1 + m)(1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 \ln(a/h) + [-m\mu(2 + \mu)/2 - (3/2)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + [(1 + m)\mu(2 + \mu)/2 + (3/2)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z^2/h^2 - (1 + \mu)^2z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4 + [-(1/2)(1 + m)(1 + \mu)(2 - \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z/h + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [(1 + m)(1 - \mu)(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4;$$

$$\sigma_r(r, z)/p = \{(1/4)m(2 - \mu)a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu)a_1^2a^2/h^4 + [-(1/2)(1 + m)(2 - \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu)a_1^2a^2/h^4]z/h + (3/2)(2 - \mu)a^2/h^2 z^2/h^2 - (2 - \mu)a^2/h^2 z^3/h^3\}h^2/r^2 + m(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(3 + \mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h) + [-(1 + m)(2 + \mu)/2 - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(3 + \mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 (1 - 2z/h) \ln(r/h) + [-(3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_z(r, z)/p = \{-(1/4)m(2 - \mu)a^2/h^2 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2a^2/h^4 + [(1/2)(1 + m)(2 - \mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu)a_1^2a^2/h^4]z/h - (3/2)(2 - \mu)a^2/h^2 z^2/h^2 + (2 - \mu)a^2/h^2 z^3/h^3\}h^2/r^2 + m(2 + \mu)/4 + (3/4)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/8)(-1 + 5\mu)a^2/h^2 - (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h) + [-(1 + m)(2 + \mu)/2 - (3/2)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/4)(-1 + 5\mu)a^2/h^2 + 3(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 (1 - 2z/h) \ln(r/h) + [-(3/8)(1 + 3\mu) + (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2;$$

$$\sigma_z(r, z)/p = -3z^2/h^2 + 2z^3/h^3;$$

$$\tau_{rz}(r, z)/p = (-3a^2z/h^3 + 3a^2z^2/h^4)h/r + (3z/h - 3z^2/h^2)r/h.$$

С точки зрения оптических свойств именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, рациональным представляется аннулирование прогиба центра поверхности низкого давления. Согласно второй из формул (2.70) при этом

$\ln(a/a_1) = (1/4)(1 + 3\mu)/(1 + \mu) + (1/8)(3 - 5\mu)/(1 + \mu) a_1^2/a^2 + (2/3)(1/4)(1 + m)(2 + \mu)/(1 + \mu) h^2/a^2$ , то есть наилучший радиус опорной окружности не зависит от толщины лишь для тонкого сплошного цилиндрического элемента

$$(h \ll a_1).$$

Полученное решение (2.70) и (2.71) позволяет путём интегрирования по ширине опорного кольца согласно принципу наложения (суперпозиции) учесть произвольное осесимметричное распределение контактного давления на сплошной трёхмерный цилиндрический элемент.

В таблице 2.3 сопоставлены известный и предложенные методы расчёта именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), опёртого на узкое кольцо меньшего радиуса.

Рассмотрены безразмерная стрела прогиба центральной части и безразмерное максимальное напряжение и определены их численные значения при

$$a = 55 \text{ мм}; a_1 = 42.5 \text{ мм}; h = 60 \text{ мм}; \mu = 0.2$$

(оптическое стекло).

На рисунке 2.7 показаны относительные поправки к теории тонких пластин при таком значении  $\mu$ .

Все предложенные методы минимизации невязок сопряжения дают формулы одинаковой степени сложности, отличающиеся от формул теории тонких пластин наличием более простого по сравнению с остальными уточняющего слагаемого.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 113/556

Таблица 2.3. Безразмерные стрела прогиба и наибольшее напряжение при изгибе равномерным давлением на одно основание именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), опёртого на узкое кольцо меньшего радиуса.

Метод расчёта и номер формулы	Безразмерная характеристика изгиба	
	Стрела прогиба	Наибольшее напряжение
	$-u_z(0, 0)E/(ph)$	$\sigma_r(0, 0)/p = \sigma_t(0, 0)/p$
Теория тонких пластин, таблица 1.2	0.121	0.415
Метод среднеквадратичной минимизации невязок, (2.70)	$0.121 + 0.265 = 0.386$	$0.415 + 0.110 = 0.525$
Метод минимаксов модулей невязок сопряжения, (2.70)	$0.121 + 0.248 = 0,369$	$0.415 + 0.069 = 0.484$
Метод коллокационной минимизации невязок, (2.70)	$0.121 + 0.221 = 0.342$	$0.415 + 0 = 0.415$

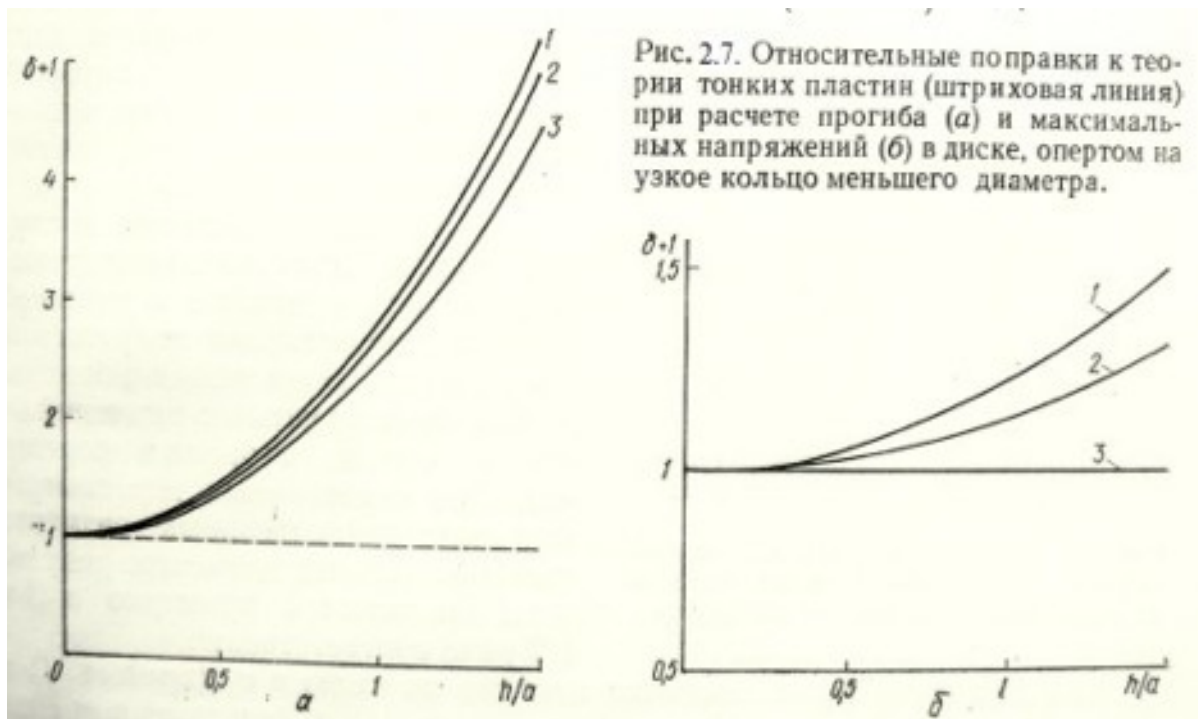


Рис. 2.7. Относительные поправки к теории тонких пластин (штриховая линия) при расчёте прогиба (а) и максимальных напряжений (б) в диске, опёртом на узкое кольцо меньшего диаметра.

Рисунок 2.7. Относительные поправки к теории тонких пластин (штриховая линия с единичной ординатой) при расчёте стрелы прогиба (а) и максимальных напряжений (б) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, опёртого на узкое кольцо меньшего радиуса.

Все предложенные методы минимизации невязок сопряжения обобщают теорию тонких пластин, являющуюся их предельным случаем при

$$h \ll a_1,$$

и дают формулы, отличающиеся лишь коэффициентами в уточняющих слагаемых.

Поэтому отношения разностей значений, получаемых по этим формулам, не зависят от  $a$ ,  $h$  и  $\mu$ .

Среди предложенных методов минимизации невязок сопряжения наибольшие значения стрелы прогиба и максимального напряжения даёт

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 114/556

метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения,

промежуточные значения стрелы прогиба и максимального напряжения –

метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей,

наименьшие значения стрелы прогиба и максимального напряжения –

метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

При типичных для иллюминаторов для высоких давлений относительных размерах светопрозрачных элементов отношения наибольших значений к наименьшим для стрелы прогиба и максимального напряжения составляют примерно 1.12 и 1.25 соответственно, а вообще они изменяются оба от 1 при

$$h \ll a_1$$

до 1.2 (стрела прогиба) и до плюс бесконечности (максимальное напряжение) при

$$a \ll h.$$

Во всех случаях метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей даёт промежуточное значение, которое делит отрезок между крайними значениями в отношении 3:5, если считать от большего значения.

Теория тонких пластин в случае именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) весьма значительно занижает стрелу прогиба и в меньшей степени максимальное напряжение (для него она даёт итог метода коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине).

При характерных для иллюминаторов для высоких давлений относительных размерах светопрозрачных элементов результаты для стрелы прогиба и для максимального напряжения занижаются теорией тонких пластин примерно в 3 и 1.2 раза соответственно.

Как изложено выше, имеются невязки на краю в радиальном напряжении  $\sigma_r(r, z)$  (кривые I) и над опорой в радиальном напряжении  $\sigma_r(r, z)$  (кривые II) и в радиальном перемещении  $u_r(r, z)$  (кривые III); в безразмерном виде (напряжения делятся на  $p$ , перемещения – на  $ph/E$ ) в прежнем масштабе соответствующие эпюры невязок показаны на рисунке 2.8.

В расчётах приняты

$$\begin{aligned} a &= 55 \text{ мм;} \\ a_1 &= 42.5 \text{ мм;} \\ h &= 60 \text{ мм;} \\ \mu &= 0.2 \end{aligned}$$

(оптическое стекло).

Здесь же для сравнения показаны построенные на оси эпюры прогиба относительно точки над опорой на той же высоте (кривые IV) и половина эпюры радиального и равного ему тангенциального (окружного) напряжений на оси (кривые V); другая половина получается из приведённой преобразованием центральной симметрии относительно точки

$$r = 0; z = h/2.$$

Погрешности оказываются выше, чем при свободном опирании края (см. рис. 2.8).

Дело в том, что центральная часть имеет большую относительную толщину, чем именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело в целом.

Кроме того, невязка не одна, их три, и они имеются не на одной, а на двух цилиндрических поверхностях.

Эпюры центрально симметричны, за исключением зеркально симметричной эпюры прогиба (эпюра сдвигается при переходе от одного метода минимизации невязок к другому).

Остальные тройки эпюр имеют веерообразный вид.

Наилучшим является метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей; несколько хуже метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения; уступает другим метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

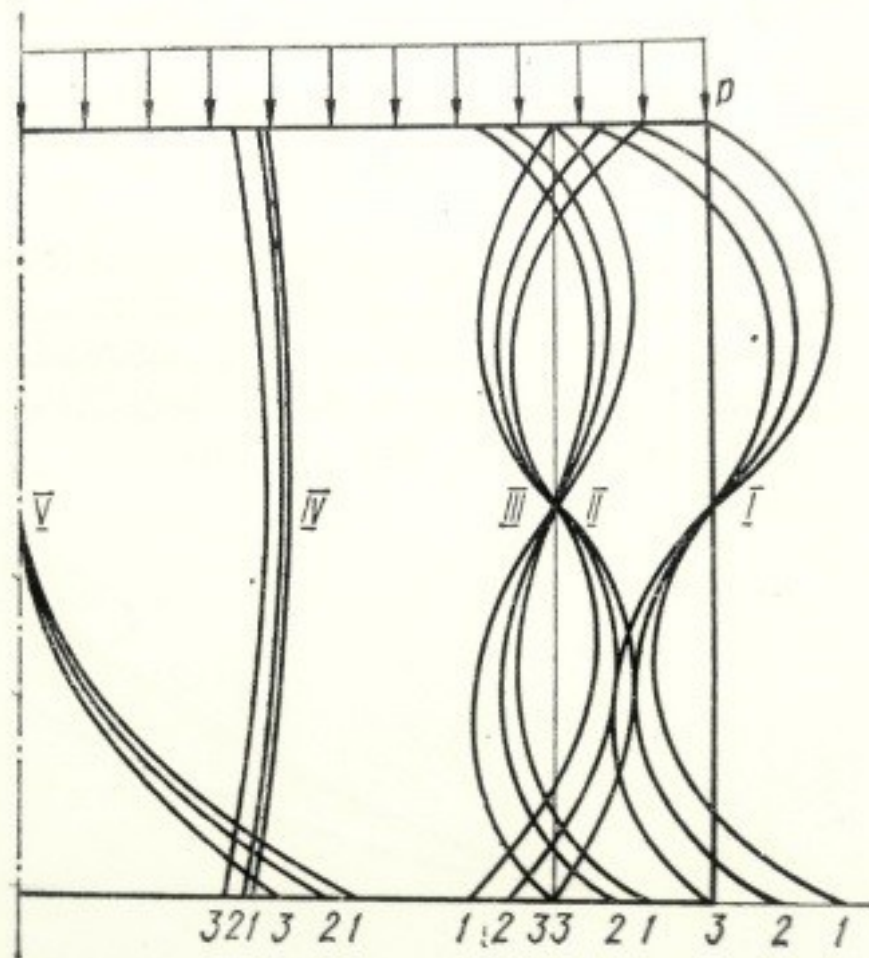


Рис. 2.8. Эпюры невязок и эпюры прогибов и напряжений в диске, опёртом на узкое кольцо меньшего диаметра.

Рисунок 2.8. Эпюры невязок и эпюры прогибов и напряжений именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, опёртого на узкое кольцо меньшего радиуса.

## 2.10. Теория изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при равномерном противодействии на периферическую часть другого основания со свободной центральной частью

Теория осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание круглой пластины, уравновешиваемой повышенным равномерным противодействием на кольцевую периферическую часть другого основания, математически строго проанализирована и обобщена теорией осесимметричного изгиба равномерным давлением на одно основание сплошного существенно трёхмерного цилиндрического тела, уравновешиваемого повышенным равномерным противодействием на кольцевую периферическую часть другого основания.

Граничные условия для осевого  $u_z(r, z)$  перемещения, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений именно существенно трёхмерного сплошного

цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, радиусом  $a$  и толщиной (высотой)  $h$  при давлении  $p$  на верхнее основание, опёртого на широкое кольцо внутренним радиусом  $a_1$  ( $0 < a_1 < a$ ) и внешним радиусом  $a$  и удерживаемого в равновесии контактным давлением опоры на нижнее основание, в предположении [106] равномерного вдоль радиуса распределения контактного давления

$$p_2 = pa^2/(a^2 - a_1^2)$$

кольца на сплошной трёхмерный цилиндрический элемент показаны на рис. 1.7, б:

$$(2.72)$$

$$\sigma_z(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r \leq a_1);$$

$$\sigma_z(r, 0) = -pa^2/(a^2 - a_1^2) \quad (a_1 < r \leq a);$$

$$\sigma_z(r, h) = -p \quad (0 \leq r \leq a);$$

$$\tau_{rz}(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r \leq a);$$

$$\tau_{rz}(r, h) = 0 \quad (0 \leq r \leq a);$$

$$\sigma_r(a, z) = 0 \quad (0 \leq z \leq h);$$

$$\tau_{rz}(a, z) = 0 \quad (0 \leq z \leq h);$$

$$u_z(a_1, 0) = 0.$$

Используется общепринятый метод сечений.

Именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело радиусом  $a$  пересекается соосной цилиндрической поверхностью радиусом  $a_1$  на круглую центральную часть 1 (сплошной трёхмерный цилиндрический элемент) радиусом  $a_1$  и кольцевую периферическую часть 2 (кольцевой трёхмерный цилиндрический элемент) радиусами  $a_1$  и  $a$ .

Обозначаются, как и прежде,

$$b = a_1/h,$$

$$c = a/h.$$

Поскольку две постоянные  $a_{11}$  и  $a_{20}$  есть и в формулах (2.51) – (2.53) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента), и в формулах (2.55) – (2.57) для кольцевого трёхмерного цилиндрического тела (элемента) как для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, и могут принимать для них различные значения, то в формулах (2.51) – (2.53) для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) для различения используются прежние обозначения (2.59):

$$x = a_{11},$$

$$y = a_{20}.$$

Чтобы не смешивать одноимённые перемещения и напряжения для круглой центральной 1 и кольцевой периферической 2 частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, целиком, возможно добавление к обозначениям перемещений и напряжений индекса 1 для круглой центральной части 1 и индекса 2 для кольцевой периферической части 2 именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, целиком.

По условию равновесия именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, контактное давление на нижнее основание кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  равно

$$pa^2/(a^2 - a_1^2).$$

Поэтому в формулах (2.56) и (2.57) для кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, принимается

$$K_2 = a^2/(a^2 - a_1^2) = c^2/(c^2 - b^2).$$

Вводятся, как и прежде, произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в выражения (2.53) и (2.56) по обе стороны от секущей цилиндрической поверхности и составляются выражения (2.52), (2.53), (2.56) и (2.57) при  $p = b$  для круглой центральной части (они те же, что и в предыдущем случае) и для кольцевой периферической части именно существенно трёхмерного сплошного

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 117/556

цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, а также выражения (2.57) для  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\zeta}$  при  $\rho = c$ .

Все выражения для кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, зависят от  $K_2$  и получаются простой подстановкой  $\rho = b$  и  $\rho = c$  в формулы (2.56) и (2.57).

И здесь достичь точного решения задачи не удаётся, так как для аннулирования безразмерного радиального напряжения  $\sigma_r(c, \zeta)$  на боковой поверхности  $\rho = c$  необходимо условие  $b_{20} = 0$ , но тогда нельзя аннулировать безразмерное сдвиговое напряжение  $\tau_{r\zeta}(c, \zeta)$  на боковой поверхности  $\rho = c$ .

Приближённое решение для целого именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, строится путём сопряжения решений для круглой центральной  $0 \leq r \leq a_1$  и кольцевой периферической  $a_1 \leq r \leq a$  частей тела (элемента).

Аннулирование безразмерного сдвигового напряжения  $\tau_{r\zeta}(c, \zeta)$  на боковой поверхности  $\rho = c$  даёт

$$b_{20} = - (3/32)\mu b^2 c^2 / (c^2 - b^2).$$

Остальные невязки минимизируются последовательно по каждому из трёх методов минимизации невязок сопряжения.

Формулы приводятся в единой записи с учётом выражений (2.54) и (2.55).

Минимизация безразмерного радиального напряжения  $\sigma_r(c, \zeta)$  на боковой поверхности  $\rho = c$  приводит к формулам

$$a_{11} = (1/2)m(1 - \mu)/(1 + \mu) b^2/(c^2 - b^2) - (1/2)\mu/(1 + \mu) c^2/(c^2 - b^2) - (3/16)(1 - \mu)(3 + \mu)/(1 + \mu) b^2 c^2/(c^2 - b^2) - (3/4)(1 - \mu)b^2 c^2/(c^2 - b^2) \ln c + (1/2)(1 - \mu)/(1 + \mu) 1/c^2 b_{01};$$

$$a_{20} = - (1/16)(1 + m)\mu/(1 + \mu) b^2/(c^2 - b^2) + (3/128)\mu(5 + 3\mu)/(1 + \mu) b^2 c^2/(c^2 - b^2) + (3/32)\mu b^2 c^2/(c^2 - b^2) \ln c + (1/8)(1 - \mu)/(1 + \mu) 1/c^2 b_{10}.$$

Минимизация невязки сопряжения безразмерного радиального напряжения  $\sigma_r(b, \zeta)$  на цилиндрической поверхности сопряжения  $\rho = b$  круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента)

$$\sigma_r(b + 0, \zeta) - \sigma_r(b - 0, \zeta)$$

даёт

$$x = - (1/2)m(1 - \mu)/(1 + \mu) - (3/4)(1 - \mu)b^2 c^2/(c^2 - b^2) \ln(c/b) - (1/2)(1 - \mu)/(1 + \mu) (c^2 - b^2)/(b^2 c^2) b_{01};$$

$$y = (1/16)(1 + m)\mu/(1 + \mu) + (3/32)\mu b^2 c^2/(c^2 - b^2) \ln(c/b) - (1/8)(1 - \mu)/(1 + \mu) (c^2 - b^2)/(b^2 c^2) b_{10}.$$

При аннулировании невязки сопряжения безразмерного радиального перемещения  $u_r(b, \zeta)$  на цилиндрической поверхности сопряжения  $\rho = b$  круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента)

$$u_r(b + 0, \zeta) - u_r(b - 0, \zeta)$$

получаются

$$b_{01} = (1/2)(\mu - m(1 - \mu))b^2 c^2/(c^2 - b^2) + (3/8)(1 - \mu)b^4 c^2/(c^2 - b^2);$$

$$b_{10} = (1/4)(1 + m)\mu b^2 c^2/(c^2 - b^2) - (3/16)\mu b^4 c^2/(c^2 - b^2).$$

Находятся

$$x = - (1/4)(1 - \mu)/(1 + \mu) (\mu + m(1 + \mu)) - (3/16)(1 - \mu)^2/(1 + \mu) b^2 - (3/4)(1 - \mu)b^2 c^2/(c^2 - b^2) \ln(c/b);$$

$$y = (1/32)(1 + m)\mu + (3/128)\mu(1 - \mu)/(1 + \mu) b^2 + (3/32)\mu b^2 c^2/(c^2 - b^2) \ln(c/b);$$

$$a_{11} = (1/4)(1 - \mu)/(1 + \mu) (\mu + m(1 + \mu))b^2/(c^2 - b^2) - (1/2)\mu/(1 + \mu) c^2/(c^2 - b^2) - (3/16)(1 - \mu)(3 + \mu)/(1 + \mu) b^2 c^2/(c^2 - b^2) + (3/16)(1 - \mu)^2/(1 + \mu) b^4/(c^2 - b^2) - (3/4)(1 - \mu)b^2 c^2/(c^2 - b^2) \ln c;$$

$$a_{20} = - (1/32)(1 + m)\mu b^2/(c^2 - b^2) + (3/128)\mu(5 + 3\mu)/(1 + \mu) b^2 c^2/(c^2 - b^2) - (3/128)\mu(1 - \mu)/(1 + \mu) b^4/(c^2 - b^2) + (3/32)\mu b^2 c^2/(c^2 - b^2) \ln c.$$

Аннулирование безразмерных осевых перемещений  $u_z(b - 0, 0)$  и  $u_z(b + 0, 0)$  даёт

$$C_1 = - (1/2)(1 + m)(1 - \mu)b^2 - (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)/(1 + \mu) b^4 - (3/2)(1 - \mu)b^4 c^2/(c^2 - b^2) \ln(c/b);$$

$$C_2 = (1/2)(1 + m)(1 - \mu)b^4/(c^2 - b^2) - (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)/(1 + \mu) b^4 c^2/(c^2 - b^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)/(1 + \mu) b^6/(c^2 - b^2) - (3/2)(1 - \mu)b^4 c^2/(c^2 - b^2) \ln c - (1 + m)(1 - \mu)b^2 c^2/(c^2 - b^2) \ln b + (9/4)(1 - \mu)b^4 c^2/(c^2 - b^2) \ln b.$$

Формулы для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений, радиального  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$ , осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений сплошного трёхмерного цилиндрического тела представляются в размерных координатах: в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента)

(2.73)

$$\begin{aligned}
 u_r(r, z)E/(ph) &= \{(1/2)m(1 - \mu^2) + (1/2)\mu(1 - \mu) + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2) a_1^2 a^2/h^4 \ln(a/a_1) + [(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 - 3(1 - \mu^2) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h + [(3/8)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu^2)z/h]r^3/h^3; \\
 u_z(r, z)E/(ph) &= - (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) a_1^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu) a_1^4/h^4 - (3/2)(1 - \mu^2) a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + [-m\mu(1 + \mu) - \mu^2 - (3/4)\mu(1 - \mu) a_1^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 - \mu) a_1^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]z^2/h^2 - (1 + \mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [(1 + m)(1 - \mu^2)/2 + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4; \\
 \sigma_r(r, z)/p &= (1/2)m(1 + \mu) + (1/2)\mu + (3/8)(1 - \mu) a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + [- (1 + m)(1 + \mu) - (3/4)(1 - \mu) a_1^2/h^2 - 3(1 + \mu) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(2 + \mu) z^2/h^2 - (2 + \mu) z^3/h^3 + [(3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h]r^2/h^2; \\
 \sigma_t(r, z)/p &= (1/2)m(1 + \mu) + (1/2)\mu + (3/8)(1 - \mu) a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + [- (1 + m)(1 + \mu) - (3/4)(1 - \mu) a_1^2/h^2 - 3(1 + \mu) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]z/h + (3/2)(2 + \mu) z^2/h^2 - (2 + \mu) z^3/h^3 + [(3/8)(1 + 3\mu) + (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2; \\
 \sigma_z(r, z)/p &= - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3; \\
 \tau_{rz}(r, z)/p &= (3z/h - 3z^2/h^2)r/h;
 \end{aligned}$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента)

(2.74)

$$\begin{aligned}
 u_r(r, z)E/(ph) (a^2 - a_1^2)/a_1^2 &= \{[(1/2)m(1 - \mu^2) - (1/2)\mu(1 + \mu)]a^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu^2) a_1^2 a^2/h^4 + [- (1 + m)(1 - \mu^2) a^2/h^2 + (3/4)(1 - \mu^2) a_1^2 a^2/h^4]z/h + (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu) a^2/h^2 z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu) a^2/h^2 z^3/h^3\}h/r + \{-(1/2)m(1 - \mu^2) + (1/2)\mu(1 - \mu) + \mu a^2/a_1^2 + (3/8)(1 - \mu)^2 (a^2 - a_1^2)/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2) a^2/h^2 \ln(a/h) + [(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 - 3(1 - \mu^2) a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h - (3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 + (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3\}r/h - (3/2)(1 - \mu^2) a^2/h^2 (1 - 2z/h)r/h \ln(r/h) + (3/8)(1 - \mu^2)(1 - 2z/h)r^3/h^3; \\
 u_z(r, z)E/(ph) (a^2 - a_1^2)/a_1^2 &= (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) a_1^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu) a_1^2 a^2/h^4 + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu) a_1^4/h^4 - (1 + m) a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (9/4)(1 - \mu^2) a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) - (3/2)(1 - \mu^2) a_1^2 a^2/h^4 \ln(a/h) + [m\mu(1 + \mu) + \mu^2 - a^2/a_1^2 + (3/4)\mu(1 - \mu) a_1^2/h^2 + (3/4)\mu(1 + 3\mu) a^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu) a^2/h^2 \ln(a/h)]z/h + [- (1 + m)\mu(1 + \mu) - (3/4)\mu(1 - \mu) a_1^2/h^2 - (3/4)\mu(1 + 3\mu) a^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu) a^2/h^2 \ln(a/h)]z^2/h^2 + (1 + \mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [(1 + m)(1 - \mu^2) a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu^2) a_1^2 a^2/h^4 + 3\mu(1 + \mu) a^2/h^2 z/h - 3\mu(1 + \mu) a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [- (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu) a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2) a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1 + \mu)z/h + (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2) a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4; \\
 \sigma_r(r, z)/p (a^2 - a_1^2)/a_1^2 &= \{[- (1/2)m(1 - \mu) + (1/2)\mu]a^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu) a_1^2 a^2/h^4 + [(1 + m)(1 - \mu) a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu) a_1^2 a^2/h^4]z/h - (3/2)(2 - \mu) a^2/h^2 z^2/h^2 + (2 - \mu) a^2/h^2 z^3/h^3\}h^2/r^2 - (1/2)m(1 + \mu) - (1/2)\mu - (3/8)(1 - \mu) a_1^2/h^2 + [(1 + m)(1 + \mu) + (3/4)(1 - \mu) a_1^2/h^2]z/h - (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 + (2 + \mu)z^3/h^3 + (3/2)(1 + \mu) a^2/h^2 (1 - 2z/h) \ln(a/r) + [- (3/8)(3 + \mu) + (3/4)(3 + \mu)z/h](a^2 - r^2)/h^2; \\
 \sigma_t(r, z)/p (a^2 - a_1^2)/a_1^2 &= \{[(1/2)m(1 - \mu) - (1/2)\mu]a^2/h^2 - (3/8)(1 - \mu) a_1^2 a^2/h^4 + [- (1 + m)(1 - \mu) a^2/h^2 + (3/4)(1 - \mu) a_1^2 a^2/h^4]z/h + (3/2)(2 - \mu) a^2/h^2 z^2/h^2 - (2 - \mu) a^2/h^2 z^3/h^3\}h^2/r^2 - (1/2)m(1 + \mu) - (1/2)\mu - (3/8)(1 - \mu) a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - 5\mu) a^2/h^2 + [(1 + m)(1 + \mu) + (3/4)(1 - \mu) a_1^2/h^2 - (3/4)(1 - 5\mu) a^2/h^2]z/h - (3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 + (2 + \mu)z^3/h^3 + (3/2)(1 + \mu) a^2/h^2 (1 - 2z/h) \ln(a/r) + [(3/8)(1 + 3\mu) - (3/4)(1 + 3\mu)z/h]r^2/h^2; \\
 \sigma_z(r, z)/p (a^2 - a_1^2)/a_1^2 &= - a^2/a_1^2 + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3; \\
 \tau_{rz}(r, z)/p (a^2 - a_1^2)/a_1^2 &= (3a^2z/h^3 - 3a^2z^2/h^4)h/r + (- 3z/h + 3z^2/h^2)r/h.
 \end{aligned}$$

В таблице 2.4 сопоставлены известный и предложенные методы расчёта осесимметричного изгиба именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания со свободной круглой центральной частью.

Рассмотрены безразмерная стрела прогиба круглой центральной части и безразмерное максимальное напряжение и определены их численные значения при

$$a = 55 \text{ мм}; a_1 = 30 \text{ мм}; h = 60 \text{ мм}; \mu = 0.2$$

(оптическое стекло).

На рисунке 2.9 показаны зависимости относительных поправок к теории тонких пластин от относительной толщины при таком значении  $\mu$ .

Все предложенные методы минимизации невязок сопряжения дают формулы одинаковой степени сложности, отличающиеся от формул теории тонких пластин наличием более простого по сравнению с остальными уточняющего слагаемого.

Таблица 2.4. Безразмерные стрела прогиба и наибольшее напряжение при осесимметричном изгибе именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания со свободной центральной частью.

Метод расчёта и номер формулы	Безразмерная характеристика изгиба	
	Стрела прогиба	Наибольшее напряжение
	$-u_z(0, 0)E/(ph)$	$\sigma_r(0, 0)/p = \sigma_t(0, 0)/p$
Теория тонких пластин, таблица 1.2	0.081	0.463
Метод среднеквадратичной минимизации невязок, (2.73)	$0.081 + 0.144 = 0.225$	$0.463 + 0.220 = 0.683$
Метод минимаксов модулей невязок сопряжения, (2.73)	$0.081 + 0.135 = 0.216$	$0.463 + 0.175 = 0.638$
Метод коллокационной минимизации невязок, (2.73)	$0.081 + 0.120 = 0.201$	$0.463 + 0.100 = 0.563$

Все предложенные методы минимизации невязок сопряжения обобщают теорию тонких пластин, являющуюся их предельным случаем при  $h \ll a_1$ .

Поскольку все предложенные методы минимизации невязок сопряжения дают формулы, отличающиеся лишь коэффициентами в уточняющих слагаемых, то отношения разностей величин, получаемых по этим формулам, не зависят от  $a$ ,  $h$  и  $\mu$ .

Среди предложенных методов минимизации невязок сопряжения наибольшие значения стрелы прогиба и максимального напряжения даёт метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, промежуточные значения стрелы прогиба и максимального напряжения – метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей, наименьшие значения стрелы прогиба и максимального напряжения – метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

При типичных для иллюминаторов для высоких давлений относительных размерах светопрозрачных элементов отношения указанных наибольшего и наименьшего значений стрелы прогиба и максимального напряжения составляют примерно 1.1 и 1.2 соответственно. Границы этих отношений – от 1 при  $h \ll a_1$  до 1.2 для стрелы прогиба и до

$$1 + (1 + \mu)/(5\mu) = 2.2$$

при значении  $\mu = 0.2$  для максимального напряжения при  $a \ll h$ .

Во всех случаях метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей даёт промежуточное значение, которое делит отрезок между крайними значениями в отношении 3:5, если считать от большего значения.

Теория тонких пластин в случае именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, весьма значительно занижает значение стрелы прогиба и в меньшей степени значение максимального напряжения.

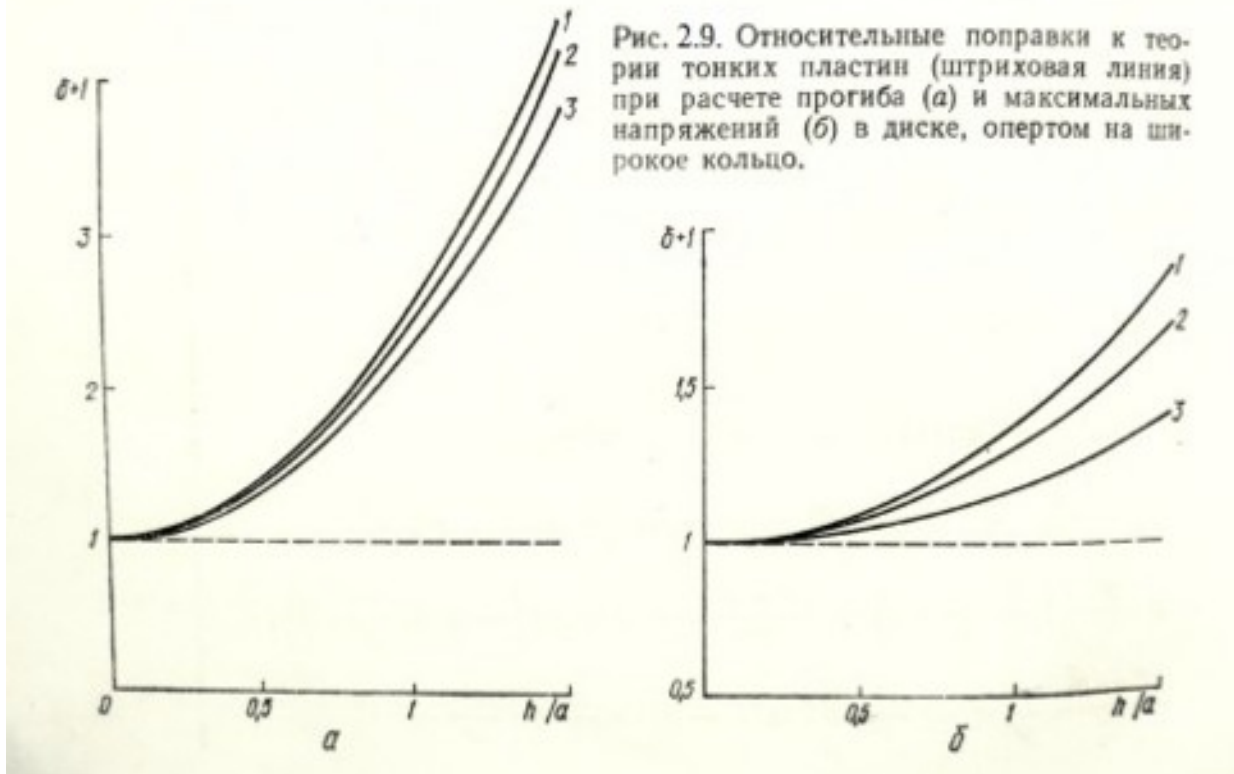


Рис. 2.9. Относительные поправки к теории тонких пластин (штриховая линия) при расчёте прогиба (а) и максимальных напряжений (б) в диске, опёртом на широкое кольцо.

Рисунок 2.9. Относительные поправки к теории тонких пластин (штриховая линия с единичной ординатой) при расчёте стрелы прогиба (а) и максимальных напряжений (б) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при изгибе равномерным давлением на одно основание и равномерным противодавлением на периферическую часть другого основания со свободной центральной частью.

При характерных для иллюминаторов для высоких давлений относительных размерах светопрозрачных элементов результаты занижаются примерно в 2.6 и 1.4 раза соответственно.

Как изложено выше, имеются невязки в радиальном напряжении  $\sigma_r(r, z)$  над краями опоры. Эпюры относительных (делённых на  $p$ ) невязок (кривые), построенные на соответствующих отрезках в прежнем масштабе, показаны на рис. 2.10.

В расчётах приняты значения

$$a = 55 \text{ мм}; a_1 = 30 \text{ мм}; h = 60 \text{ мм}; \mu = 0.2 \text{ (оптическое стекло)}.$$

В том же масштабе показана половина (кривая III) эпюры равных между собой радиального и окружного (тангенциального) напряжений на оси

$$(2.75)$$

$$\sigma_r(0, z)/p = \sigma_c(0, z)/p;$$

другая половина центрально симметрична показанной половине относительно точки, лежащей на срединной плоскости, но не на оси (смещение с оси связано с пуассоновым растяжением в радиальном направлении от осевого сжатия участка над опорой):

$$(2.76)$$

$$\sigma_r(0, h/2) = \mu/4,$$

то есть пропорционально коэффициенту поперечной деформации Пуассона.

Оказывается, невязка над внешним краем опоры невелика.

Значительно более существенна невязка над внутренним краем опоры.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 121/556

Однако сопоставление расхождений кривых 1, 2, 3 показывает, что напряжения на оси при изменении метода минимизации невязок сопряжения изменяются значительно меньше, чем эти невязки.

И при равномерном противодействии на кольцевую периферическую часть сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) наилучшим методом минимизации невязок сопряжения является метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения.

Ему несколько уступает метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей.

Уступает этим методам метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

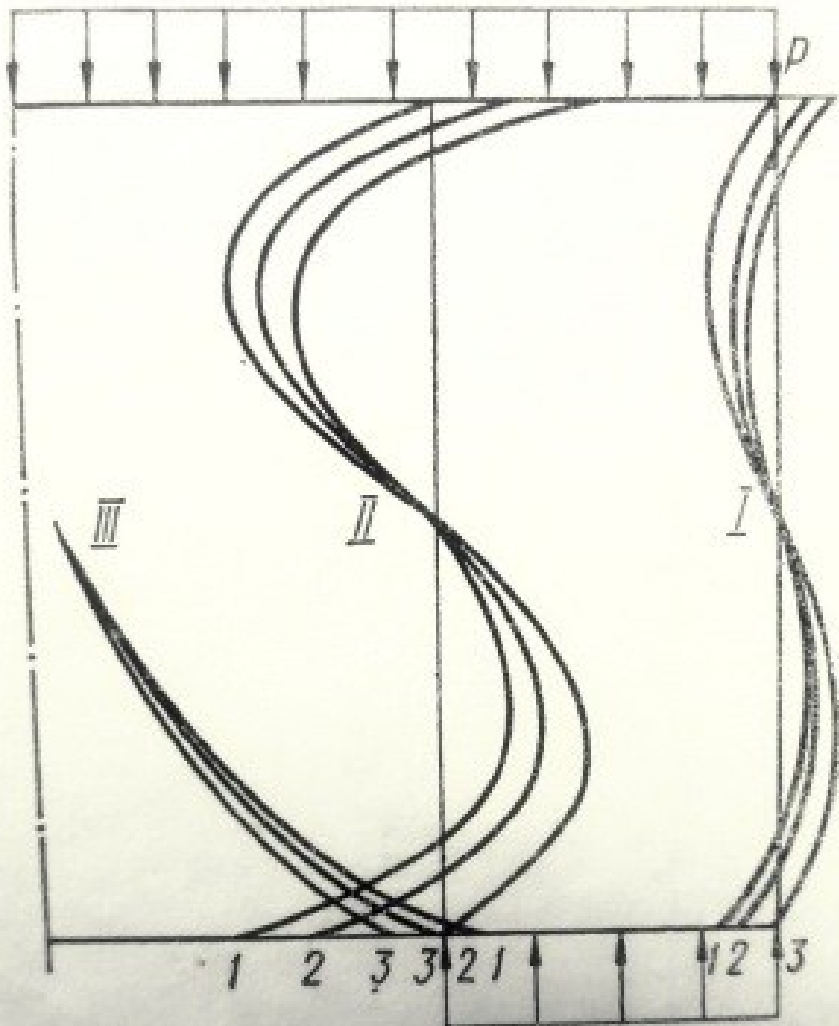


Рис. 2.10. Эпюры невязок и эпюры напряжений на оси диска, опертого на широкое кольцо.

Рисунок 2.10. Эпюры невязок и эпюры напряжений на оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при изгибе равномерным давлением на одно основание и равномерным противодействием на периферическую часть другого основания со свободной центральной частью.

## **2.11. Двухпараметрический метод минимизации невязки осевого перемещения при сопряжении решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента**

По-прежнему используется понятие невязок сопряжения, предложенное Л. Б. Цвиком [339], как разностей выражений одноимённых величин, в частности перемещений и напряжений, для разных частей тела, имеющих общую границу, в точках этой границы, обобщается это понятие на случай границ целого тела с заданными граничными условиями посредством разностей граничных условий и соответствующих значений величин в точках этих границ и применяются различные рациональные методы минимизации невязок сопряжения.

Итоги минимизации на отрезке от нуля до единицы многочлена (2.60)

$$Q(\zeta) = A + B\zeta + 3\zeta^2 - 2\zeta^3$$

по всем трём методам выше были представлены в единой записи с помощью числа  $m$  (2.64):

$m = 1/5$  по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения;

$m = 1/8$  по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей;

$m = 0$  по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

Тем самым сразу для всех трёх методов выше была достигнута единообразная запись обеспечивающих минимизацию многочлена  $Q(\zeta)$  (2.60) значений (2.65) постоянных  $A$  и  $B$ :

$$A = m/2;$$

$$B = -(1 + m).$$

Поскольку в итоге минимизации невязок сопряжения по всем этим трём методам многочлен  $Q(\zeta)$  (2.60) на отрезке от нуля до единицы достаточно близок к нулю, то для наглядности различий итогов применения этих трёх методов минимизации невязок сопряжения этот многочлен умножается на подходящую положительную постоянную  $K$ , например на пять ( $K = 5$ ). Соответствующая графическая интерпретация для многочлена  $KQ(\zeta)$  дана на рис. 2.11.

Кроме того, анализ приведённых выше решений для сплошного и кольцевого трёхмерных цилиндрических тел (элементов) во всех четырёх теориях выше для различных условий уравнивания показывает, что из двух произвольных постоянных  $C_1$  для сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) и  $C_2$  для кольцевого трёхмерного цилиндрического тела (элемента) в действительности существенна лишь одна их разность.

Ведь увеличение или уменьшение этих двух постоянных на одну и ту же величину соответствует осевому перемещению условно разделённого на центральную и периферическую части именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, целиком как абсолютно твёрдого тела.

Поэтому можно зафиксировать одну любую точку этого именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, целиком, а ввиду осевой симметрии тем самым соответствующую окружность, содержащую эту точку.

По соображениям наглядности результатов исследований деформирования этого именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, для удобства приложения этих результатов к расчётам жёсткости и оптических свойств и в связи с отсутствием точек этого тела целиком, являющихся заведомо неподвижными, фиксируется центр  $(0, 0)$  его частично нагруженного внутреннего основания  $z = 0$  с ненагруженной центральной частью  $0 \leq r \leq a_1$ . Тогда  $C_1 = 0$ .

Представляется целесообразным сосредоточиться на избранной расчётной схеме четвёртой из этих теорий с равномерным противодействием на кольцевую периферическую часть основания  $z = 0$  с ненагруженной центральной частью условно разделённого на круглую центральную  $0 \leq r \leq a_1$  и кольцевую периферическую  $a_1 \leq r \leq a$  части именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела целиком, в частности светопрозрачного элемента.

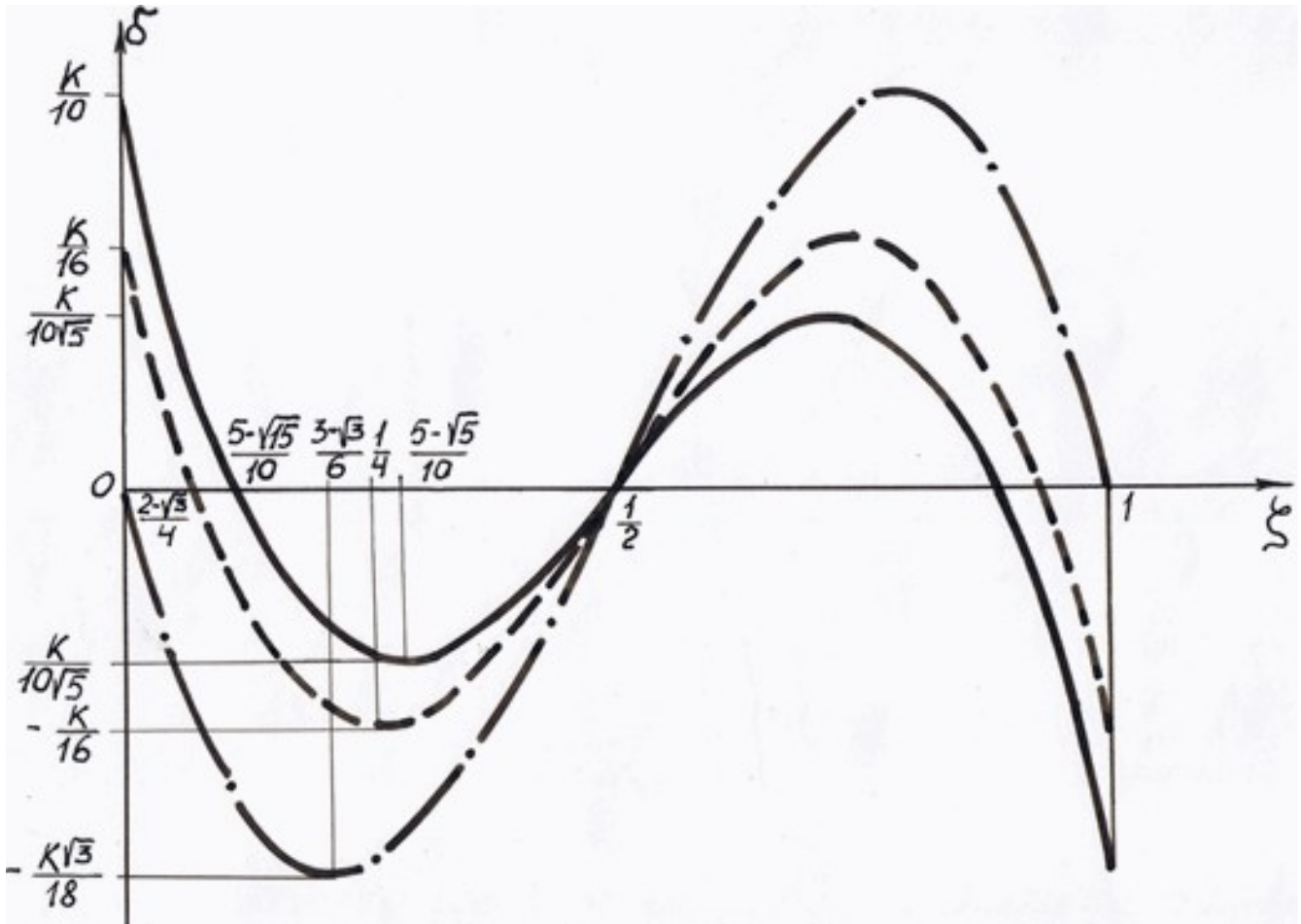


Рисунок 2.11. Графическая интерпретация (толстыми кривыми линиями) минимизации невязок сопряжения решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента) по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения (сплошная кривая), методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей (штриховая кривая) и методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине (штрихпунктирная кривая линия).

Имеет место невязка осевого перемещения при сопряжении решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$(2.77)$$

$$\delta''_{\delta}(\zeta) = u_{\zeta}(b + 0, \zeta) - u_{\zeta}(b - 0, \zeta) = u_{\zeta 2}(b, \zeta) - u_{\zeta 1}(b, \zeta) = c^2/(c^2 - b^2) \{ \delta + [-1 + (1 + m)\mu]\zeta - (1 + m)\mu\zeta^2 + (1 + \mu)(\zeta^3 - \zeta^4/2) \},$$

где вместо  $C_2$  введена находящаяся с ней в линейной зависимости постоянная  $\delta$ .

Никакой выбор постоянной  $\delta$  не позволяет аннулировать эту невязку  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  тождественно по  $\zeta$  на отрезке  $[0, 1]$  целиком, поэтому эту невязку  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  можно лишь минимизировать тем или иным выбором постоянной  $\delta$  по аналогии с минимизацией многочлена  $Q(\zeta)$  (2.60).

Сущность созданного двухпараметрического (с параметрами  $m, \delta$ ) метода минимизации невязки осевого перемещения при сопряжении решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, является следующей.

Среднеквадратичная минимизация невязки  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения выполняется стандартным методом.

В данном однопараметрическом случае зависимости  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  от единственной постоянной  $\delta$  среднеквадратичная минимизация  $\delta''_{\delta}(\zeta)$ , как и аннулирование среднего интегрального  $\int_0^1 \delta''_{\delta}(\zeta) d\zeta$ , приводит к совпадающим результатам

$$\delta = (1/60)(21 - 19\mu - 10m\mu).$$

Представляется логичным также принять  $m = 1/5$  по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения многочлена  $Q(\zeta)$  (2.60).

Тогда в итоге по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$\delta = (7/20)(1 - \mu).$$

Минимум модуля невязки  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$\min_{\delta} \max_{0 \leq \zeta \leq 1} |\delta''_{\delta}(\zeta)|$$

достигается при условии

$$\delta = (1/4)(1 - \mu)$$

независимо от постоянной  $m$ .

Формулировка метода 3, в отличие от методов 1 и 2, требует изменения по сравнению с минимизацией многочлена  $Q(\zeta)$  (2.60) по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения, что следует хотя бы из равносильности (эквивалентности) среднеквадратичной минимизации невязки  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  (по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения) и аннулирования среднего интегрального  $\int_0^1 \delta''_{\delta}(\zeta) d\zeta$ .

Поэтому аннулирование среднего интегрального  $\int_0^1 \delta''_{\delta}(\zeta) d\zeta$  здесь не должно приниматься во внимание.

В данной однопараметрической задаче минимизации невязки  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  выбором целесообразного значения единственной постоянной  $\delta$  можно аннулировать лишь одно из трёх значений невязки  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  в точках 0, 1/2 и 1, причём эти три варианта являются взаимно исключающими.

В данном случае независимо от выбора значения постоянной  $\delta$

$$u_{\zeta}(b + 0, 1) - u_{\zeta}(b + 0, 0) = u_{\zeta}(b, 1) - u_{\zeta}(b, 0) < u_{\zeta}(b - 0, 1) - u_{\zeta}(b - 0, 0) = u_{\zeta}(b, 1) - u_{\zeta}(b, 0)$$

и логично выбрать для минимизации по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения единственную точку  $\zeta = 1/2$ .

Тогда

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu - 8m\mu).$$

Представляется логичным также принять  $m = 0$  по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения многочлена  $Q(\zeta)$  (2.60).

Тогда в итоге по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu).$$

Итак,

$$(2.78)$$

$\delta = (7/20)(1 - \mu)$  при среднеквадратичной минимизации невязки  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  (по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения);

$\delta = (1/4)(1 - \mu)$  при обеспечении минимакса модуля невязки  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  (по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей);

$\delta = (1/32)(13 - 11\mu)$  при коллокационной минимизации невязки  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  (по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения).

Тем самым завершена минимизация невязок сопряжения и подготовлена основа для получения формул, выражающих перемещения и напряжения в условно разделённом на круглую центральную и кольцевую периферическую части именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле целиком, в частности светопрозрачном элементе.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 125/556

## **2.12. Создание двухпараметрического и однопараметрического методов устранения минимизированной невязки осевого перемещения, однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения, открытие и обоснование первых трёх основных явлений и законов напряжённо-деформированного состояния существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением**

Минимизация величин  $Q(\zeta)$  (2.60) и  $\delta''_{\delta}(\zeta)$  (2.77) не устраняет невязок на поверхности сопряжения

$$\rho = b$$

круглой центральной и кольцевой периферической частей и на боковой поверхности

$$\rho = c$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, а лишь сводит невязки к минимуму.

Поэтому возможно лишь приближённое аналитическое решение поставленной задачи, несмотря на точное удовлетворение условию бигармоничности и граничным условиям на основаниях именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Приближённые методы решения упругих задач математически строго проанализированы и обобщены теорией и аналитическими методами устранения минимизированных невязок сопряжения аналитических решений для макроэлементов разбиения существенно трёхмерного тела между собой и с граничными условиями его нагружения.

Поскольку точное выполнение условия бигармоничности не является самоцелью, а более важной для практики является близость значений перемещений и напряжений, подсчитываемых по соответствующим формулам, к истинным значениям перемещений и напряжений, то представляется целесообразным тем или иным приближённым методом устранить оставшиеся минимизированные невязки сопряжения.

Созданный метод устранения минимизированных невязок сопряжения устраняет (аннулирует) их добавлением невязок, изменяющихся в радиальном направлении от нулей в местах аннулирования (на оси для каждой невязки, а для каждой невязки на поверхности сопряжения частей ещё и на внешней боковой поверхности) до значений, именно противоположных значениям соответствующих минимизированных невязок на соответствующих боковых поверхностях круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Исходя из характера полученных формул, их сопоставления с решением аналогичной задачи теории пластин, а также из анализа характера затухания возмущений от самоуравновешенных нагрузок (а невязки в нашем случае являются таковыми или близки к ним) в известных задачах теории упругости [69, 191, 195, 319, 321], созданный метод устранения минимизированных невязок сопряжения принимает квадратичный закон распределения добавленных невязок по радиусу.

Сущность и применение созданного метода устранения минимизированных невязок сопряжения достаточно показать на примере преобразования функции  $t(r)$  с невязками в функцию  $T(r)$  без невязок, когда устраняются невязки, указанные в квадратных скобках, а  $t(a + 0)$  соответствует условию на границе  $r = a$ :

$$(2.79)$$

$$T(r) = t(r) + (r^2/a^2)[t(a + 0) - t(a - 0)] + (1/2)(r^2/a_1^2)[t(a_1 + 0) - t(a_1 - 0)] \text{ при } 0 \leq r \leq a_1;$$

$$T(r) = t(r) + (r^2/a^2)[t(a + 0) - t(a - 0)] - (1/2)[(a - r)/(a - a_1)]^2[t(a_1 + 0) - t(a_1 - 0)] \text{ при } a_1 \leq r \leq a.$$

Созданный метод устранения минимизированных невязок сопряжения полностью устраняет (аннулирует) минимизированные невязки сопряжения и даёт возможность именно точно выполнить граничные условия не только на плоских основаниях (торцах), но и на цилиндрических боковых поверхностях круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, то есть и на поверхности сопряжения частей

$$r = a_1,$$

и на внешней боковой поверхности

$$r = a$$

тела целиком.

С учётом влияния давления  $p_1$  на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, формулами (2.22) по решению Ламе [191, 195, 319–321, 358] для сплошного цилиндра согласно принципу наложения (суперпозиции) получаются окончательные формулы для перемещений и напряжений, которые приводятся в размерном виде.

В центральной части

$$0 \leq r \leq a_1$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, радиальное  $u_r(r, z)$  и осевое  $u_z(r, z)$  перемещения определяются следующими формулами:

$$(2.80)$$

$$\begin{aligned} u_{r1}(r, z) &= (p/E)r \left\{ - (1 - \mu) \left( \frac{1}{2} + p_1/p \right) + \left[ \frac{(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)}{a^2/(a^2 - a_1^2)} \ln(a/a_1) - (3/8)(1 - \mu^2)r^2/h^2 \right] (1 - 2z/h) + \frac{(3/2)(1 + \mu)(2 - \mu)z^2/h^2 - (1 + \mu)(2 - \mu)z^3/h^3}{(1 - \mu^2)a_1^2/h^2} + (3/8)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 \right\}; \\ u_{z1}(r, z) &= (p/E)h \left\{ 2\mu \left( \frac{1}{2} + p_1/p \right) z/h + \left[ \frac{(1 + m)\mu(1 + \mu)}{a_1^2 \ln(a/a_1)} \right] (-z/h + z^2/h^2) - \frac{(1 + \mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + \left[ \frac{(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)}{a^2/(a^2 - a_1^2)} \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2 \right] r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 + (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) \left[ \frac{\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4}{r^2/a_1^2} \right]}{a^2/(a^2 - a_1^2)} \right\}; \end{aligned}$$

радиальное  $\sigma_r(r, z)$ , окружное (тангенциальное)  $\sigma_t(r, z)$ , осевое  $\sigma_z(r, z)$  и сдвиговое  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжения определяются следующими формулами:

$$(2.81)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r1}(r, z) &= p \left\{ - \left( \frac{1}{2} + p_1/p \right) + \left[ \frac{(1/2)(1 + m)(1 + \mu)}{a^2/(a^2 - a_1^2)} \ln(a/a_1) - (3/8)(3 + \mu)r^2/h^2 \right] (1 - 2z/h) + \frac{(3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + (a_1^4 - a^4/2)/(a^2(a^2 - a_1^2)) \left[ m - \frac{2(1 + m)z/h + 6z^2/h^2 - 4z^3/h^3}{r^2/a_1^2} \right]}{(1 - \mu^2)a_1^2/h^2} + (3/8)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 \right\}; \\ \sigma_{t1}(r, z) &= p \left\{ - \left( \frac{1}{2} + p_1/p \right) + \left[ \frac{(1/2)(1 + m)(1 + \mu)}{a^2/(a^2 - a_1^2)} \ln(a/a_1) - (3/8)(1 + 3\mu)r^2/h^2 \right] (1 - 2z/h) + \frac{(3/2)(2 + \mu)z^2/h^2 - (2 + \mu)z^3/h^3 + (1/2)\mu a^2/(a^2 - a_1^2) \left[ - (1 + m) \frac{(1 - 2z/h) - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3}{r^2/a_1^2} \right]}{(1 - \mu^2)a_1^2/h^2} + (3/8)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 \right\}; \\ \sigma_{z1}(r, z) &= p \left( - \frac{3z^2/h^2 + 2z^3/h^3}{h} \right); \\ \tau_{rz1}(r, z) &= p \left( \frac{3z/h - 3z^2/h^2}{h} \right) r/h. \end{aligned}$$

В периферической части

$$a_1 \leq r \leq a$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, радиальное  $u_r(r, z)$  и осевое  $u_z(r, z)$  перемещения определяются следующими формулами:

$$(2.82)$$

$$\begin{aligned} u_{r2}(r, z) &= (p/E)ra_1^2/(a^2 - a_1^2) \left\{ \left[ - \frac{(1/2)(1 + \mu)a^2/r^2 + (1 - \mu)[1/2 - (a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p] + \mu a^2/a_1^2 + \left[ \frac{(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)(a^2/r^2 - 1)}{a^2/(a^2 - a_1^2)} \ln(a/a_1) + (3/8)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \right] (1 - 2z/h) + (2 - \mu)(a^2/r^2 - 1)(3/2)z^2/h^2 - z^3/h^3 \right]}{(1 - \mu^2)a_1^2/h^2} + (3/8)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 \right\}; \\ u_{z2}(r, z) &= (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \left\{ \frac{\delta(1 + \mu)a^2/a_1^2 + (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (15/16)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 - (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \mu - a^2/a_1^2]z/h + \left[ \frac{(1 + m)\mu(1 + \mu)}{a^2/(a^2 - a_1^2)} \ln(a/a_1) + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \right] (z/h - z^2/h^2) + (1 + \mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + \left[ \frac{(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1 + \mu)^2 z^3/h^3}{r^2/a_1^2} \right]}{(1 - \mu^2)a_1^2/h^2} \right\}; \end{aligned}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 127/556

$$\mu a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [- (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1 + \mu)z/h + (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2] r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4](a - r)^2/(a - a_1)^2];$$

радиальное  $\sigma_r(r, z)$ , окружное (тангенциальное)  $\sigma_\theta(r, z)$ , осевое  $\sigma_z(r, z)$  и сдвиговое  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжения определяются следующими формулами:

(2.83)

$$\sigma_{r2}(r, z) = pa_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ (1/2)a^2/r^2 + 1/2 - (a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p + [- (1/2)(1 + m)(1 - \mu)(a^2/r^2 - 1) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 (a^2/r^2 - 1) + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/r) - (3/8)(3 + \mu)(a^2 - r^2)/h^2] (1 - 2z/h) + [2 + \mu + (2 - \mu)a^2/r^2] (-3/2 z^2/h^2 + z^3/h^3) + [r^2/a^2 + (1/2)a^2/a_1^2 (a - r)^2/(a - a_1)^2] [m - 2(1 + m)z/h + 6z^2/h^2 - 4z^3/h^3] \};$$

$$\sigma_{\theta 2}(r, z) = pa_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ - (1/2)a^2/r^2 + 1/2 - (a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p + [(1/2)(1 + m)(1 - \mu)(a^2/r^2 - (1 + \mu)/(1 - \mu)) - (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 (a^2/r^2 + 1) + (3/8)(1 - 5\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/r) + (3/8)(1 + 3\mu)r^2/h^2] (1 - 2z/h) + [2 + \mu - (2 - \mu)a^2/r^2] (-3/2 z^2/h^2 + z^3/h^3) + (1/2)\mu a^2/a_1^2 [(1 + m)(1 - 2z/h) + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3] (a - r)^2/(a - a_1)^2 \};$$

$$\sigma_{z2}(r, z) = pa_1^2/(a^2 - a_1^2) (-a^2/a_1^2 + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3);$$

$$\tau_{rz2}(r, z) = pa_1^2/(a^2 - a_1^2) [a^2/(rh) - r/h] (3z/h - 3z^2/h^2).$$

В формулах (2.80) – (2.83) значения  $m$  принимаются согласно (2.64), значения  $\delta$  при том же способе минимизации согласно (2.78) и подчеркнуты выражения, отсутствующие в решении соответствующей задачи теории пластин (их аннулирование даёт решение теории пластин).

Этот смешанный параметрический (с параметрами  $m, \delta$ ) метод устранения минимизированных невязок сопряжения с использованием двухпараметрического метода (с параметрами  $m, \delta$ ) устранения минимизированной невязки осевого перемещения в остальном является однопараметрическим (с параметром  $m$ ) методом.

Сущность этого **двухпараметрического** метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения с повышенным равномерным периферическим противодавлением выражается следующим собственным алгоритмом.

1. Исходными для этого двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения являются такие две формулы:

в центральной части

$$0 \leq r \leq a_1$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z1}(r, z)$  составляет

(2.73')

$$u_{z1}(r, z) = (p/E)h \{ (\mu + 2\mu p_1/p)z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] (-z/h + z^2/h^2) - (1 + \mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2] r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 \};$$

в периферической части

$$a_1 \leq r \leq a$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z2}(r, z)$  составляет

(2.74')

$$u_{z2}(r, z) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (15/16)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 - (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \mu - a^2/a_1^2] z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)] (z/h - z^2/h^2) + (1 + \mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [- (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1 + \mu)z/h + (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2] r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 \}.$$

Эти две формулы получаются из соответствующих формул (2.73) и (2.74), если в них учесть давление  $p_1$  на боковую поверхность по решению Ламе и выбрать произвольные слагаемые

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 128/556

для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, так, чтобы, во-первых, аннулировать осевое перемещение

$$u_{z1}(0, 0) = 0$$

центра частично нагруженного основания  $z = 0$  и, во-вторых, уравнивать значения

$$u_{z1}(a_1, 0) = u_{z2}(a_1, 0)$$

осевого перемещения сопряжения обеих частей на этом основании.

Эти две формулы (2.73') и (2.74') привели к соответствующим формулам (2.80) и (2.82) посредством введения дополнительных слагаемых

$$(2.80): + (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4]r^2/a_1^2,$$

$$(2.82): \frac{\delta(1 + \mu)a^2/a_1^2, - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4](a - r)^2/(a - a_1)^2}{}$$

в фигурных скобках и могут быть получены обратно, если все эти дополнительные слагаемые исключить из соответствующих формул (2.80) и (2.82).

2. Произвольная постоянная осевого перемещения в круглой центральной части именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, по-прежнему выбирается именно нулевой для аннулирования осевого перемещения центра частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(0, 0) = 0.$$

Тогда стрела прогиба текущего концентрического (осевая симметрия и связанные с нею концентричность и соосность (коаксиальность) часто подразумеваются без явного упоминания) круга радиусом  $r$  ( $0 \leq r \leq a$ ) частично нагруженного основания  $z = 0$ , равная разности значений осевого перемещения  $u_z(r, 0)$  на окружности радиусом  $r$  и в центре  $u_{z1}(0, 0)$ , равна значению осевого перемещения  $u_z(r, 0)$  на окружности радиусом  $r$ :

$$u_z(r, 0) - u_{z1}(0, 0) = u_z(r, 0).$$

А осевое перемещение центра полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h[2\mu r_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)].$$

Тогда стрела прогиба текущего круга радиусом  $r$  ( $0 \leq r \leq a$ ) полностью нагруженного основания  $z = h$  равна разности значений осевого перемещения  $u_z(r, h)$  на окружности радиусом  $r$  и  $u_{z1}(0, h)$  в центре  $(0, h)$  полностью нагруженного основания  $z = h$ :

$$u_z(r, h) - u_{z1}(0, h) = u_z(r, h) - (p/E)h[2\mu r_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)].$$

3. Ищется изменение толщины круглой центральной части на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части, равное разности значений осевого перемещения  $u_{z1}(a_1, h)$  на окружности радиусом  $a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$  и осевого перемещения  $u_{z1}(a_1, 0)$  на окружности радиусом  $a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ :

$$u_{z1}(a_1, h) = (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + 2\mu r_1/p - (1/2)(1 + \mu^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h\{[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[2\mu r_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)].$$

4. Ищется изменение толщины кольцевой периферической части на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной к кольцевой периферической части, равное разности значений осевого перемещения  $u_{z2}(a_1, h)$  на окружности радиусом  $a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$  и осевого перемещения  $u_{z2}(a_1, 0)$  на окружности радиусом  $a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ :



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 129/556

$$u_{z2}(a_1, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 2\mu p_1/p - a^2/(a^2 - a_1^2) + (1/2)(1+\mu^2)a_1^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{1} \right];$$

$$u_{z2}(a_1, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{1} \right];$$

$$u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0) = (p/E)h \left[ \frac{2\mu p_1/p - a^2/(a^2 - a_1^2) + (1/2)(1+\mu^2)a_1^2/(a^2 - a_1^2)}{1} \right].$$

5. Ищется вызванный скачком давления на частично нагруженное основание  $z = 0$  скачок изменения, в данном случае уменьшения, толщины на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части:

$$\Delta = [u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0)] - [u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0)] = (p/E)h \left[ \frac{-(1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{1} \right].$$

6. Этот скачок  $\Delta$  изменения, в данном случае уменьшения, толщины на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части устраняется (полностью возмещается) равными

$$(1/2)|\Delta| = - (1/2)\Delta = (p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{1} \right]$$

(половине модуля этого скачка  $\Delta$ ) уменьшением толщины круглой центральной части и увеличением толщины кольцевой периферической части на цилиндрической поверхности сопряжения частей (новое значение каждого из перемещений для отличия от соответствующего старого значения временно снабжается штрихом):

$$[u'_{z1}(a_1, h) - u'_{z1}(a_1, 0)] = [u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0)] - (p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{1} \right];$$

$$[u'_{z2}(a_1, h) - u'_{z2}(a_1, 0)] = [u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0)] + (p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{1} \right];$$

$$[u'_{z2}(a_1, h) - u'_{z2}(a_1, 0)] - [u'_{z1}(a_1, h) - u'_{z1}(a_1, 0)] =$$

$$[u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0)] + (p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{1} \right] -$$

$$[u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0)] + (p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{1} \right] =$$

$$[u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0)] - [u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0)] + 2(p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{1} \right] =$$

$$(p/E)h \left[ \frac{-(1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{1} \right] + 2(p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{1} \right] = 0.$$

7. Для круглой центральной части достаточно отнюдь не единственно возможное удовлетворяющее всем принципам устранения минимизированных невязок сопряжения и условиям, в том числе предыдущих пунктов, указанное добавление к осевому перемещению:

$$u'_{z1}(r, z) = u_{z1}(r, z) + (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) [\delta/(1-\mu) - z/h + (1+m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4]r^2/a_1^2}{1} \right];$$

$$u'_{z1}(0, 0) = u_{z1}(0, 0) = 0;$$

$$u'_{z1}(0, z) = u_{z1}(0, z);$$

$$[u'_{z1}(a_1, h) - u'_{z1}(a_1, 0)] = [u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0)] - (p/E)h \left[ \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)}{1} \right].$$

8. Поскольку формулы (2.73') и (2.74') предусматривают непременно такой выбор произвольной постоянной для кольцевой периферической части именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, чтобы уравнивать старые значения

$$u_{z1}(a_1, 0) = u_{z2}(a_1, 0)$$

осевого перемещения цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей на частично нагруженном основании  $z = 0$ , то для уравнивания соответствующих новых значений

$$u'_{z1}(a_1, 0) = u'_{z2}(a_1, 0)$$

необходимо и достаточно такое приращение осевого перемещения кольцевой периферической части, которое на этой же окружности  $(a_1, 0)$  обеспечит точно такое же увеличение нового значения по сравнению со старым, как и для круглой центральной части:

$$u'_{z1}(a_1, 0) = u_{z1}(a_1, 0) + (p/E)h \delta \frac{(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2)}{1};$$

$$u'_{z2}(a_1, 0) = u_{z2}(a_1, 0) + (p/E)h a_1^2/(a^2 - a_1^2) \delta \frac{(1/2)(1+\mu)a^2/a_1^2}{1}.$$

9. Впридачу к последнему условию вторым условием для приращения осевого перемещения кольцевой периферической части является указанное выше увеличение

$$[u'_{z2}(a_1, h) - u'_{z2}(a_1, 0)] - [u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0)] = (p/E)h[(1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)]$$

толщины кольцевой периферической части на цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

10. Для выполнения совокупности последних двух условий достаточно отнюдь не единственно возможное удовлетворяющее всем принципам устранения минимизированных невязок сопряжения указанное добавление к осевому перемещению:

$$u'_{z2}(r, z) = u_{z2}(r, z) + (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ \delta(1 + \mu)a^2/a_1^2 - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4](a - r)^2/(a - a_1)^2 \};$$

$$u'_{z2}(a_1, 0) = u_{z2}(a_1, 0) + (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \delta(1/2)(1 + \mu)a^2/a_1^2;$$

$$u'_{z1}(a_1, 0) = u'_{z2}(a_1, 0);$$

$$[u'_{z2}(a_1, h) - u'_{z2}(a_1, 0)] = [u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0)] + (p/E)h[(1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)].$$

11. Итоговыми для двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения являются для удобства ещё раз приводимые здесь следующие две формулы (2.80) и (2.82), причём ввиду отсутствия в явном виде старых значений временные штрихи у новых значений осевого перемещения опускаются:

в центральной части

$$0 \leq r \leq a_1$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z1}(r, z)$  составляет (2.80)

$$u_{z1}(r, z) = (p/E)h \{ 2\mu(1/2 + p_1/p)z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)](-z/h + z^2/h^2) - (1 + \mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 + (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4]r^2/a_1^2 \};$$

в периферической части

$$a_1 \leq r \leq a$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z2}(r, z)$  составляет (2.82)

$$u_{z2}(r, z) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ \delta(1 + \mu)a^2/a_1^2 + (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (15/16)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 - (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \mu - a^2/a_1^2]z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) + (1 + \mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [-(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/8)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1 + \mu)z/h + (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 [\delta/(1 - \mu) - z/h + (1 + m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4](a - r)^2/(a - a_1)^2 \}.$$

12. Определяется стрела прогиба всей круглой центральной части

$$0 \leq r \leq a_1$$

частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + \delta(1/2)(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)].$$

13. Определяется изменение толщины именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, вдоль оси

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)].$$

14. Определяется стрела прогиба всей круглой центральной части

$$0 \leq r \leq a_1$$

полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + \delta(1/2)(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)].$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 131/556

15. Определяется стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq a$   
 $u_{z2}(a, 0) = (p/E)h[(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(7 + 3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]$ .

16. Определяется стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h$ ,  $0 \leq r \leq a$   
 $u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(7 + 3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]$ .

Как и выше, подчеркнутые выражения суть отличия, даваемые общим (полу)степенным методом по сравнению с дающей только не подчеркнутые выражения теорией пластин.

Ввиду особой значимости принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением дополнительно создан **однопараметрический** метод устранения именно всех невязок сопряжения, в основной своей части применительно ко всем остальным невязкам сопряжения изложенный выше и отличающийся отказом от изложенного выше двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения и устранением невязки осевого перемещения по следующему собственному алгоритму.

1. Исходными для этого однопараметрического метода устранения именно всех невязок сопряжения являются (как и для изложенного выше двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения) применительно к устранению невязки сопряжения именно осевого перемещения следующие две формулы:

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z1}(r, z)$  составляет

(2.73')

$$u_{z1}(r, z) = (p/E)h\{(\mu + 2\mu p_1/p)z/h + [(1+m)\mu(1+\mu) + (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)](-z/h + z^2/h^2) - (1+\mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4 + [(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1+\mu)z/h - (3/2)\mu(1+\mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4\};$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z2}(r, z)$  составляет

(2.74')

$$u_{z2}(r, z) = (p/E)h a_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ (1/2)(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (15/16)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 - (1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \mu - a^2/a_1^2]z/h + [(1+m)\mu(1+\mu) + (3/4)\mu(1+3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) + (1+\mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4 + [(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [-(1/2)(1+m)(1-\mu^2) - (3/8)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\mu)(3+\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1+\mu)z/h + (3/2)\mu(1+\mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 \}.$$

Эти две формулы получаются из соответствующих формул (2.73) и (2.74), если в них учесть давление  $p_1$  на боковую поверхность по решению Ламе и выбрать произвольные слагаемые для обеих частей так, чтобы, во-первых, аннулировать осевое перемещение

$$u_{z1}(0, 0) = 0$$

центра частично нагруженного основания  $z = 0$  и, во-вторых, уравнивать значения

$$u_{z1}(a_1, 0) = u_{z2}(a_1, 0)$$

осевого перемещения сопряжения обеих частей на этом основании.

Эти две формулы (2.73') и (2.74') привели к соответствующим формулам (2.80) и (2.82) посредством введения дополнительных слагаемых

$$(2.80): + (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) [\delta/(1-\mu) - z/h + (1+m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4]r^2/a_1^2,$$

$$(2.82): \delta(1+\mu)a^2/a_1^2, - (1/2)(1-\mu^2)a^2/a_1^2 [\delta/(1-\mu) - z/h + (1+m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4](a - r)^2/(a - a_1)^2$$

в фигурных скобках и могут быть получены обратно, если все эти дополнительные слагаемые исключить из соответствующих формул (2.80) и (2.82).

2. Произвольная постоянная осевого перемещения в круглой центральной части именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, по-прежнему выбирается нулевой для аннулирования осевого перемещения центра частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(0, 0) = 0.$$

Тогда стрела прогиба текущего концентрического (осевая симметрия и связанные с нею концентричность и соосность (коаксиальность) часто подразумеваются без явного упоминания) круга радиусом  $r$  ( $0 \leq r \leq a$ ) частично нагруженного основания  $z = 0$ , равная разности значений осевого перемещения  $u_z(r, 0)$  на окружности радиусом  $r$  и в центре  $u_{z1}(0, 0)$ , равна значению осевого перемещения  $u_z(r, 0)$  на окружности радиусом  $r$ :

$$u_z(r, 0) - u_{z1}(0, 0) = u_z(r, 0).$$

А осевое перемещение центра полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)].$$

Тогда стрела прогиба текущего круга радиусом  $r$  ( $0 \leq r \leq a$ ) полностью нагруженного основания  $z = h$  равна разности значений осевого перемещения  $u_z(r, h)$  на окружности радиусом  $r$  и  $u_{z1}(0, h)$  в центре  $(0, h)$  полностью нагруженного основания  $z = h$ :

$$u_z(r, h) - u_{z1}(0, h) = u_z(r, h) - (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)].$$

3. Ищется изменение толщины круглой центральной части на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части, равное разности значений осевого перемещения  $u_{z1}(a_1, h)$  на окружности радиусом  $a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$  и осевого перемещения  $u_{z1}(a_1, 0)$  на окружности радиусом  $a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ :

$$u_{z1}(a_1, h) = (p/E)h\left[\frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 2\mu p_1/p - (1/2)(1+\mu^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{a_1^2} \right];$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h\left\{\frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{a_1^2}\right\};$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)].$$

4. Ищется изменение толщины кольцевой периферической части на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части, равное разности значений осевого перемещения  $u_{z2}(a_1, h)$  на окружности радиусом  $a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$  и осевого перемещения  $u_{z2}(a_1, 0)$  на окружности радиусом  $a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ :

$$u_{z2}(a_1, h) = (p/E)h\left[\frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 2\mu p_1/p - a^2/(a^2 - a_1^2) + (1/2)(1+\mu^2)a_1^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{a_1^2}\right];$$

$$u_{z2}(a_1, 0) = (p/E)h\left[\frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{a_1^2}\right];$$

$$u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0) = (p/E)h\left[2\mu p_1/p - \frac{a^2}{a^2 - a_1^2} + \frac{(1/2)(1 + \mu^2)a_1^2}{a^2 - a_1^2}\right].$$

5. Ищется вызванный скачком давления на частично нагруженное основание  $z = 0$  скачок изменения, в данном случае уменьшения, толщины на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части:

$$\Delta = [u_{z2}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, 0)] - [u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, 0)] = (p/E)h\left[-\frac{(1/2)(1-\mu^2)a^2}{a^2 - a_1^2}\right].$$

6. Поскольку скачок давления наличествует на частично нагруженном основании  $z = 0$  и отсутствует на полностью нагруженном основании  $z = h$ , то скачок  $\Delta$  изменения, в данном случае уменьшения, толщины на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части делится на две части  $\Delta_h$  у полностью нагруженного основания  $z = h$  и  $\Delta_0$  у частично нагруженного основания  $z = 0$  в отношении сумм давлений на оба основания круглой центральной части и кольцевой периферической части соответственно:

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_0 + \Delta_h; \\ \Delta_h/\Delta_0 &= (p + 0)/(p + p_2) = (p + 0)/[p + pa^2/(a^2 - a_1^2)] = 1/[1 + a^2/(a^2 - a_1^2)] = (a^2 - a_1^2)/(2a^2 - a_1^2); \\ \Delta_h &= (a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) \Delta = (a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (p/E)h[-(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)]; \\ \Delta_0 &= (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) \Delta = (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (p/E)h[-(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)]. \end{aligned}$$

7. Новая произвольная постоянная  $C_2$  осевого перемещения в кольцевой периферической части выбирается единственным образом для обеспечения деления (в указанном отношении) скачка  $\Delta$  уменьшения толщины на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от круглой центральной части к кольцевой периферической части, то есть для выполнения уравнения

$$\begin{aligned} C_2 + u_{z2}(a_1, h) - u_{z1}(a_1, h) &= \Delta_h; \\ C_2 &= u_{z1}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, h) + \Delta_h; \\ C_2 &= u_{z1}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, h) + (a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (p/E)h[-(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)]; \\ u_{z1}(a_1, h) &= (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + 2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + \\ &\quad (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]; \\ u_{z2}(a_1, h) &= (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + 2\mu p_1/p - a^2/(a^2 - a_1^2) + (1/2)(1 + \mu^2)a_1^2/(a^2 - a_1^2) + \\ &\quad (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]; \\ u_{z1}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, h) &= (p/E)h(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2); \\ u_{z1}(a_1, h) - u_{z2}(a_1, h) &= (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2; \\ C_2 &= (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (p/E)h(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2). \end{aligned}$$

8. Формула (2.73') оставляется без изменений, а в формулу (2.74') вносится добавка найденного значения произвольной постоянной  $C_2$ :

$$(2.74'')$$

$$\begin{aligned} u_{z2}(r, z) &= (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 + (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - \\ &\quad (15/16)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 - (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 \\ &\quad p_1/p - \mu - a^2/a_1^2]z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 \\ &\quad \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) + (1 + \mu)^2z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4 + [(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \pm \\ &\quad 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1 + \mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [-(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/8)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \\ &\quad - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1 + \mu)z/h + (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/2)(1 - \\ &\quad \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 \}. \end{aligned}$$

9. По формуле (2.73') определяется осевое перемещение круглой центральной части на цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$\begin{aligned} u_{z1}(a_1, z) &= (p/E)h \{ (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - \\ &\quad a_1^2) \ln(a/a_1) + (\mu + 2\mu p_1/p)z/h + [(1 + m)\mu(1 + \mu) + 3\mu(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (3/4)\mu(1 + \\ &\quad 3\mu)a_1^2/h^2](-z/h + z^2/h^2) - (1 + \mu)^2z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2z^4/h^4 \}. \end{aligned}$$

10. По формуле (2.74'') определяется осевое перемещение кольцевой периферической части на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 134/556

сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$u_{z2}(a_1, z) = (p/E)h \left\{ \frac{(2a^2 - a_1^2)}{(3a^2 - 2a_1^2)} \left( \frac{1}{2} \right) (1 - \mu^2) \frac{a^2}{(a^2 - a_1^2)} + \frac{(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2}{(3/16)} \right. \\ \left. (1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + \frac{(3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4}{a^2/(a^2 - a_1^2)} \ln(a/a_1) + [2\mu p_1/p - \mu a_1^2/(a^2 - a_1^2) - a^2/(a^2 - a_1^2)] z/h \right. \\ \left. + \frac{[(1 + m)\mu(1 + \mu)a_1^2/(a^2 - a_1^2) + (3/4)\mu(1 + 3\mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)](z/h - z^2/h^2)}{(1 + \mu)^2 a_1^2/(a^2 - a_1^2)} \frac{z^3/h^3}{z^4/h^4} - \frac{(1/2)(1 + \mu)^2 a_1^2/(a^2 - a_1^2) z^4/h^4}{z^4/h^4} \right\}.$$

11. Определяется невязка осевого перемещения на цилиндрической поверхности  $r = a_1$  сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z) = (p/E)h \left[ \frac{(2a^2 - a_1^2)}{(3a^2 - 2a_1^2)} \left( \frac{1}{2} \right) (1 - \mu^2) \frac{a^2}{(a^2 - a_1^2)} - \frac{(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) z/h}{(1 + m)\mu(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2)} \frac{(z/h - z^2/h^2)}{(1 + \mu)^2 a^2/(a^2 - a_1^2)} \frac{z^3/h^3}{z^4/h^4} - \frac{(1/2)(1 + \mu)^2 a^2/(a^2 - a_1^2) z^4/h^4}{z^4/h^4} \right].$$

В частности, при  $z = 0$

$$u_{z2}(a_1, 0) - u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(2a^2 - a_1^2)}{(3a^2 - 2a_1^2)} \left( \frac{1}{2} \right) (1 - \mu^2) \frac{a^2}{(a^2 - a_1^2)} \right].$$

12. Невязка осевого перемещения на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, делится, как и остальные невязки, между его частями поровну:

$$u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z) = [u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)]/2 + [u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)]/2.$$

13. Поскольку при определении невязки осевого перемещения на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из осевого перемещения кольцевой периферической части вычиталось осевое перемещение круглой центральной части на цилиндрической поверхности сопряжения частей, то для аннулирования невязки осевого перемещения на цилиндрической поверхности сопряжения частей необходимо выравнивание осевого перемещения круглой центральной части и осевого перемещения кольцевой периферической части на цилиндрической поверхности сопряжения частей, для чего в совокупности достаточно, во-первых, к осевому перемещению круглой центральной части прибавить приходящуюся на эту часть половину невязки осевого перемещения на цилиндрической поверхности сопряжения частей, а от осевого перемещения кольцевой периферической части отнять приходящуюся на эту часть половину невязки осевого перемещения на цилиндрической поверхности сопряжения частей, причём получаемые равные между собой значения осевого перемещения круглой центральной части и осевого перемещения кольцевой периферической части на цилиндрической поверхности сопряжения частей для отличия от предыдущих значений здесь временно снабжаются штрихами:

$$u'_{z1}(a_1, z) = u_{z1}(a_1, z) + [u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)]/2;$$

$$u'_{z2}(a_1, z) = u_{z2}(a_1, z) - [u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)]/2;$$

$$u'_{z2}(a_1, z) - u'_{z1}(a_1, z) = u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z) - [u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)]/2 - [u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)]/2 = 0.$$

14. Изменения (прибавленная и вычтенная половины невязки осевого перемещения на цилиндрической поверхности

$$r = a_1$$

сопряжения частей) значений осевого перемещения круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, распределяются в радиальном направлении в круглой центральной и кольцевой периферической частях по указанным выше квадратичным законам, обеспечивающим аннулирование этих изменений на оси и на внешней боковой поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$u'_{z1}(r, z) = u_{z1}(r, z) + (1/2)[u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)](r^2/a_1^2);$$

$$u'_{z2}(r, z) = u_{z2}(r, z) - (1/2)[u_{z2}(a_1, z) - u_{z1}(a_1, z)](a - r)^2/(a - a_1)^2.$$

15. Итоговыми для этого однопараметрического метода устранения именно всех невязок сопряжения являются применительно к устранению невязки сопряжения именно осевого перемещения взамен соответствующих формул (2.80) и (2.82) следующие две формулы:

в центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z1}(r, z)$  составляет

$$(2.80')$$

$$u_{z1}(r, z) = (p/E)h \{ (\mu + 2\mu p_1/p)z/h + [(1+m)\mu(1+\mu) + (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)](-z/h + z^2/h^2) - (1+\mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4 + [(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1+\mu)z/h - (3/2)\mu(1+\mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + (1/2)[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) z/h + (1+m)\mu(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) (z/h - z^2/h^2) + (1+\mu)^2 a^2/(a^2 - a_1^2) z^3/h^3 - (1/2)(1+\mu)^2 a^2/(a^2 - a_1^2) z^4/h^4]r^2/a_1^2 \};$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (3/16)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)];$$

в периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение  $u_{z2}(r, z)$  составляет

$$(2.82')$$

$$u_{z2}(r, z) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/a_1^2 + (1/2)(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (15/16)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 - (1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \mu - a^2/a_1^2]z/h + [(1+m)\mu(1+\mu) + (3/4)\mu(1+3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) + (1+\mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4 + [(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [- (1/2)(1+m)(1-\mu^2) - (3/8)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\mu)(3+\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1+\mu)z/h + (3/2)\mu(1+\mu)z^2/h^2]r^2/h^2 - (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 - (1/2)a^2/a_1^2 [(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2) - (1+\mu)z/h + (1+m)\mu(1+\mu)(z/h - z^2/h^2) + (1+\mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4](a - r)^2/(a - a_1)^2 \}.$$

16. Определяется стрела прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)].$$

17. Определяется изменение толщины именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, вдоль оси

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1+\mu^2)].$$

18. Определяется стрела прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 - (1/4)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)].$$

19. Определяется стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/16)(1-\mu)(7+3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)].$$

20. Определяется стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(7+3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)].$$

Как и выше, подчёркнутые выражения суть отличия, даваемые общим (полу)степенным методом по сравнению с дающей только не подчёркнутые выражения теорией пластин.

Этот однопараметрический метод устранения невязки осевого перемещения обладает логическими преимуществами перед двухпараметрическим методом устранения минимизированной невязки осевого перемещения:

обеспечивает чистоту однородности однопараметрического метода устранения именно всех невязок сопряжения, поскольку и в смешанном параметрическом методе устранения именно всех невязок сопряжения все остальные невязки сопряжения устраняются именно однопараметрическим методом;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 136/556

изъятие дополнительного параметра  $\delta$  соответствует принципу допустимой простоты и снижает степень произвола.

Однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения используют каждый все три метода минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичный, минимаксами их модулей и коллокационный, и благодаря такой многовариантности обеспечивают самопроверяемость и взаимную проверяемость.

Она покажет в дальнейшем, что очень хорошо согласующиеся друг с другом и поэтому наиболее надёжные наилучшие итоги достигаются чрезвычайно близкими между собой по итогам

однопараметрическим и двухпараметрическим методами устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения,

а также достаточно близким к ним по итогам

однопараметрическим методом устранения невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения.

Для этих достаточно близких между собой четырёх итогов даёт существенно отклоняющиеся нижнюю и верхнюю границы двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения соответственно.

Этот вывод будет впоследствии подтверждён численной конечно-элементной и экспериментальной проверкой достоверности созданного общего (полу)степенного метода.

А исторически первым из обоих методов устранения минимизированной невязки осевого перемещения был двухпараметрический метод.

Поэтому он именно по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения как точнейшему и надёжнейшему использован для построения показанных на рис. 2.12 сплошными линиями эпюр перемещений и напряжений, определённых по формулам (2.80) – (2.83), в характерных сечениях, соответствующих значениям

$$\begin{aligned}z &= 0, \\z &= h/2, \\z &= h, \\r &= 0, \\r &= a_1, \\r &= a,\end{aligned}$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, размерами

$$\begin{aligned}h &= 60 \text{ мм}, \\a_1 &= 30 \text{ мм}, \\a &= 55 \text{ мм}\end{aligned}$$

из стекла К8

$$(\mu = 0.2)$$

при давлениях

$$p = p_1 = 98 \text{ МПа}.$$

Штриховыми линиями на том же рисунке показаны эпюры осевого перемещения в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, таких же размеров, но из гипотетического материала с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

(таким же, как у стекла К8) и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

(таким же, как у органического стекла).



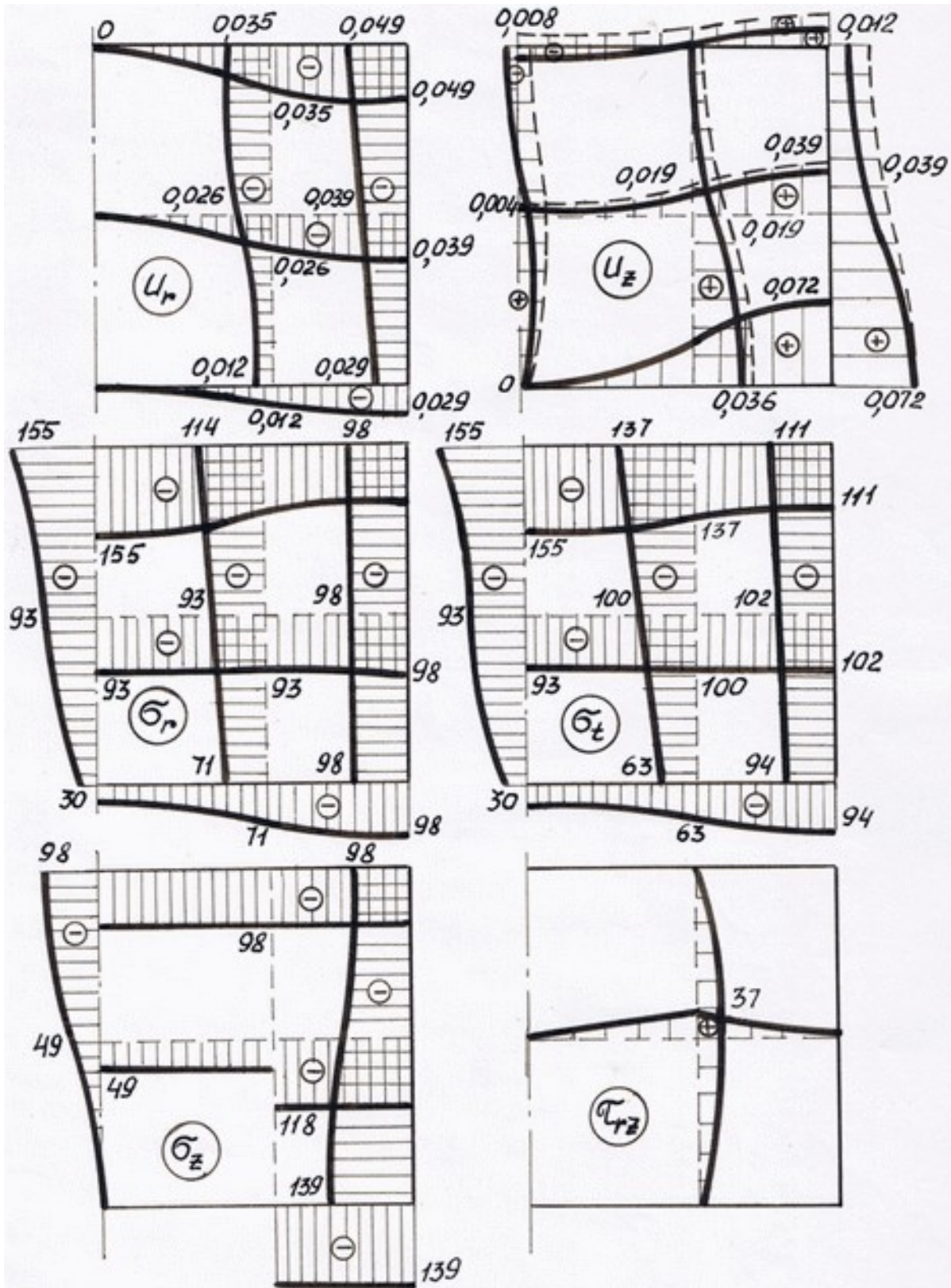


Рисунок 2.12. Эпюры перемещений в миллиметрах и напряжений в мегапаскалях, определённые по формулам (2.80) – (2.83), в сечениях  $z = 0$ ,  $z = h/2$ ,  $z = h$ ,  $r = 0$ ,  $r = a_1$ ,  $r = a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, размерами  $a_1 = 30$  мм,  $a = 55$  мм,  $h = 60$  мм из стекла К8 при давлениях  $p = p_1 = 98$  МПа.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 138/556

Общий (полу)степенной метод как (полу)степенная модификация созданной аналитической методологии макроэлементов привёл к открытию и обоснованию системы принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, причём с коренными отличиями от известных закономерностей напряжённо-деформированных состояний круглых пластин и круглых плит при осесимметричном изгибе равномерными давлениями.

Первые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением

Во-первых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона существенного отклонения суммы значений радиального напряжения в центрах оснований от умноженного на минус два давления на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением, в частности к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона существенного отклонения суммы значений радиального напряжения в центрах оснований от нуля при отсутствии давления на боковую поверхность.

Следует заметить, что при отсутствии давления на боковую поверхность теория круглой пластины при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением даёт противоположность и нулевую сумму значений радиального напряжения в центрах оснований. По решению Ламе для сплошного цилиндра под равномерным давлением на боковую поверхность каждое из обоих значений радиального напряжения в центрах оснований противоположно этому давлению, а сумма этих обоих значений радиального напряжения равна умноженному на минус два давлению на боковую поверхность. Эта сумма не меняется от прибавления к ней той нулевой суммы по принципу наложения (суперпозиции). В итоге сумма обоих значений радиального напряжения в центрах оснований круглой пластины при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с равномерным давлением на боковую поверхность равна умноженному на минус два давлению на боковую поверхность.

Анализ окончательных формул (2.80) – (2.83) для перемещений и напряжений по созданному общему (полу)степенному методу показывает, что новым по сравнению с итогами применения ранее известных аналитических методов является и существенное различие в абсолютных величинах пар равных между собой значений радиального и тангенциального (окружного) напряжений в центрах обоих оснований, то есть между абсолютной величиной пары равных между собой значений

$$\sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0)$$

и абсолютной величиной пары равных между собой значений

$$\sigma_r(0, h) = \sigma_t(0, h),$$

в частном случае при отсутствии давления на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$p_1 = 0.$$

Именно, ввиду (2.81)

$$\sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0),$$

$$\sigma_r(0, h) = \sigma_t(0, h),$$

$$\sigma_r(0, 0) = p \left\{ -1/2 + [(1/2)(1 + m)(1 + \mu) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \right\};$$

$$\sigma_r(0, h) = p \left\{ -1/2 - [(1/2)(1 + m)(1 + \mu) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] + (3/2)(2 + \mu) - (2 + \mu) \right\};$$

$$\sigma_r(0, 0) + \sigma_r(0, h) = p[-1 + (1/2)(2 + \mu)] = \mu p/2$$

вместо нуля по теории пластин.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 139/556

Следовательно, в частном случае при отсутствии давления на боковую поверхность эпюра радиального и тангенциального (окружного) напряжений на оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, не является центрально симметричной относительно его центра на срединной плоскости.

Тем самым в частном случае при отсутствии давления на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента) открыты и обоснованы явление и закон существенного различия абсолютных значений радиального напряжения в центрах оснований и тем самым явление и закон существенного нарушения закона противоположности самих этих значений по теории пластин.

А в общем случае при наличии давления  $p_1$  на боковую поверхность существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента) ввиду (2.81)

$$\sigma_r(0, 0) = \sigma_r(0, h),$$

$$\sigma_r(0, h) = \sigma_r(0, 0),$$

$$\sigma_r(0, 0) = -p_1 - p \left\{ -1/2 + [(1/2)(1+m)(1+\mu) + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \right\};$$

$$\sigma_r(0, h) = -p_1 + p \left\{ -1/2 - [(1/2)(1+m)(1+\mu) + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] + (3/2)(2+\mu) - (2+\mu) \right\};$$

$$\sigma_r(0, 0) + \sigma_r(0, h) = -p_1 - p_1 + p[-1 + (1/2)(2+\mu)] = -2p_1 + \mu p/2$$

вместо  $(-2p_1)$  по теории пластин.

Следовательно, в общем случае при наличии давления  $p_1$  на боковую поверхность открыты и обоснованы принципиально новые явление и закон существенного отклонения суммы значений радиального напряжения в центрах оснований от умноженного на минус два давления на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием. В частности, при отсутствии давления на боковую поверхность открыты и обоснованы принципиально новые явление и закон существенного отклонения суммы значений радиального напряжения в центрах оснований от нуля, так что эпюра радиального и тангенциального (окружного) напряжений на оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела не является центрально симметричной относительно его центра на срединной плоскости.

Тем самым в общем случае при наличии давления  $p_1$  на боковую поверхность открыты и обоснованы первые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием.

Вторые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодействием

Во-вторых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона существования взаимности таких критических значений отношения давления на боковую поверхность к внешнему давлению не меньше  $5/8$  и коэффициента поперечной деформации Пуассона, при превышении которых утонение вдоль оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием сменяется утолщением вдоль оси путём перехода через инвариантность длины осевой нормали, в частности к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона существования такого критического значения коэффициента поперечной деформации Пуассона, при превышении которого утонение вдоль оси при распространении внешнего давления на боковую поверхность тела сменяется утолщением вдоль оси путём перехода через инвариантность длины осевой нормали.

Исследование деформирования именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с

повышенным равномерным периферическим противодавлением показывает, что существует такое зависящее только от коэффициента поперечной деформации Пуассона  $\mu$  критическое значение отношения

$$\Pi = p_1/p$$

давления на боковую поверхность к внешнему давлению, при превышении которого утонение вдоль оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением сменяется утолщением вдоль оси путём перехода через инвариантность длины осевой нормали.

Или, равносильно, существует такое зависящее только от не меньшего  $5/8$  отношения

$$\Pi = p_1/p$$

давления на боковую поверхность к внешнему давлению критическое значение коэффициента поперечной деформации Пуассона  $\mu$ , при превышении которого утонение вдоль оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением сменяется утолщением вдоль оси путём перехода через инвариантность длины осевой нормали.

Действительно, в общем случае ввиду (2.80) изменение длины осевой нормали именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением

(2.84)

$$\begin{aligned} u_z(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)] > 0 &\Leftrightarrow \Pi > (1 + \mu^2)/(4\mu) \Leftrightarrow \Pi \geq 5/8 \wedge \mu > 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2}, \\ u_z(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)] = 0 &\Leftrightarrow \Pi = (1 + \mu^2)/(4\mu) \Leftrightarrow \Pi \geq 5/8 \wedge \mu = 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2}, \\ u_z(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)] < 0 &\Leftrightarrow \Pi < (1 + \mu^2)/(4\mu) \Leftrightarrow \Pi < 5/8 \vee \mu < 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2}. \end{aligned}$$

В самом деле,  $0 \leq \mu \leq 1/2$  для всех исследованных материалов.

Квадратный трёхчлен  $Q(\mu) = \mu^2 - 4\Pi\mu + 1$  имеет корни

$$\mu_1 = 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2} \leq \mu_2 = 2\Pi + (4\Pi^2 - 1)^{1/2},$$

действительные при  $\Pi \geq 1/2$ , тогда  $\mu_2 = 2\Pi + (4\Pi^2 - 1)^{1/2} \geq 1 > \mu$ ,

а  $\mu_1 = 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2} = 1/2$  при  $\Pi = 5/8$  и  $0 < \mu_1 = 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2} < 1/2$  при  $\Pi > 5/8$ . Итог таков.

$Q(\mu) = \mu^2 - 4\Pi\mu + 1 > 0$  при  $\Pi < 5/8$  или при  $\mu < 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2}$ .

Если  $\Pi \geq 5/8$ , то  $Q(\mu) = \mu^2 - 4\Pi\mu + 1 = 0$  при  $\mu = 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2}$  и  $Q(\mu) = \mu^2 - 4\Pi\mu + 1 < 0$  при  $\mu > 2\Pi - (4\Pi^2 - 1)^{1/2}$ .

В численных расчётах для данных эпюр перемещений и напряжений принято условие  $p_1 = p$ .

В частном случае с распространением внешнего давления на боковую поверхность при

$$\Pi = p_1/p = 1$$

из эпюр видно, что именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело, в частности светопрозрачный элемент, из неорганического стекла К8, деформируясь, утоняется вдоль продольной оси, а именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело, в частности светопрозрачный элемент, из гипотетического материала, отличающегося от стекла К8 свойственным органическому стеклу значительно большим значением коэффициента поперечной деформации Пуассона, деформируясь, утолщается вдоль оси по сравнению с исходным состоянием.

Аналогично последнему деформируется именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело, в частности светопрозрачный элемент, из органического стекла.

Поэтому критическим значением коэффициента поперечной деформации Пуассона  $\mu$  материала сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, является единственный подходящий корень

$$\mu = 2 - 3^{1/2} \approx 0.268$$

квадратного уравнения

$$\begin{aligned} (1 + \mu^2)/(4\mu) &= 1, \\ \mu^2 - 4\mu + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Другой корень этого уравнения

$$\mu = 2 + 3^{1/2} \approx 3.732$$

намного превышает известные значения коэффициента поперечной деформации Пуассона для исследованных материалов.

Следовательно, для исследованных материалов

(2.85)

$$(1 + \mu^2)/(4\mu) > 1 \text{ при } \mu < 2 - 3^{1/2} \approx 0.268,$$

$$(1 + \mu^2)/(4\mu) = 1 \text{ при } \mu = 2 - 3^{1/2} \approx 0.268,$$

$$(1 + \mu^2)/(4\mu) < 1 \text{ при } \mu > 2 - 3^{1/2} \approx 0.268.$$

Для стекла К8 с коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu \approx 0.209 < 2 - 3^{1/2} \approx 0.268$$

имеет место первое из трёх условий (2.85), поэтому

$$(1 + \mu^2)/(4\mu) > 1$$

и при

$$\Pi = p_1/p = 1$$

имеет место последнее из трёх условий (2.84), поэтому

$$u_z(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)] < 0,$$

так что при

$$p_1 = p$$

именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело, в частности светопрозрачный элемент, из стекла К8 в центре утоняется.

Для органического стекла с коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu \approx 0.365 > 2 - 3^{1/2} \approx 0.268$$

имеет место последнее из трёх условий (2.85), так что

$$(1 + \mu^2)/(4\mu) < 1$$

и при

$$\Pi = p_1/p = 1$$

имеет место первое из трёх условий (2.84), поэтому

$$u_z(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)] > 0,$$

так что при

$$p_1 = p$$

именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело, в частности светопрозрачный элемент, из органического стекла в центре утолщается.

Следовательно, открыты и обоснованы принципиально новые явление и закон существования взаимности таких критических значений отношения давления на боковую поверхность к внешнему давлению не меньше 5/8 и коэффициента поперечной деформации Пуассона, при превышении которых утонение вдоль оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением сменяется утолщением вдоль оси путём перехода через инвариантность длины осевой нормали, в частности открыты и обоснованы принципиально новые явление и закон существования такого критического значения коэффициента поперечной деформации Пуассона, при превышении которого утонение вдоль оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с распространением внешнего давления на боковую поверхность сменяется утолщением вдоль оси путём перехода через инвариантность длины осевой нормали.

Тем самым открыты и обоснованы вторые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 142/556

Третьи явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением

В-третьих, и это самое главное, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона кратного превышения стрел прогиба центральной части и всего полностью нагруженного основания стрелами прогиба центральной части и всего частично нагруженного основания соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, так как центральная часть частично нагруженного основания не нагружена, а противодавление прикладывается лишь по периферической его части, причём при типичных для высокого давления соотношениях размеров светопрозрачного элемента со столь различно искривляющимися первоначально плоскопараллельными оптическими поверхностями эта кратность составляет примерно три-четыре.

Следует заметить, что теория круглой пластины при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением даёт строго одинаковые стрелы прогиба обоих оснований и их центральных частей соответственно.

Двухпараметрический и однопараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения при сопряжении решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением позволяют доказать, что при любом положительном радиусе текущая стрела прогиба частично нагруженного основания строго больше, чем текущая стрела прогиба полностью нагруженного основания.

Двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения эти третьи явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением подтверждает итогами расчётов по формуле (2.80) для осевого перемещения в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  и по формуле (2.82) для осевого перемещения в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

По формуле (2.80) для осевого перемещения в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$u_{z1}(r, z) = (p/E)h \{ 2\mu(1/2 + p_1/p)z/h + [(1+m)\mu(1+\mu) + (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)](-z/h + z^2/h^2) - (1+\mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4 + [(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1+\mu)z/h - (3/2)\mu(1+\mu)z^2/h^2] r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) [\delta/(1-\mu) - z/h + (1+m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2)z^4/h^4] r^2/a_1^2 \}$$
 осевое перемещение и ввиду осевого перемещения центра  $u_z(0, 0) = 0$  текущая стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, 0) = (p/E)h \{ [(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + \delta(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2 \};$$

осевое перемещение полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, h) = (p/E)h \{ 2\mu p_1/p - (1/2)(1+\mu^2) + [(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + \delta(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2 - (1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2 \};$$

осевое перемещение центра  $r = 0$  полностью нагруженного основания  $z = h$ , равное утолщению (при положительности) и утонению (при отрицательности) сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, вдоль оси,

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h [2\mu(1/2 + p_1/p) - (1/2)(1+\mu)^2] = (p/E)h [2\mu p_1/p - (1/2)(1+\mu^2)];$$

текущая (на участке от нуля до  $r$ ) стрела прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left\{ \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)}{h^2} + \frac{(3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)}{h^2} \right] r^2/h^2 - \frac{(3/16)(1-\mu)^2 r^4/h^4 + \delta(1/2)(1+\mu) a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2 - (1/4)(1-\mu^2) a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2}{h^2} \right\};$$

непрерывно строго положительная при положительном радиусе  $r$  разность текущей (на участке от нуля до  $r$ ) стрелы прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  и текущей стрелы прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, 0) - [u_z(r, h) - u_z(0, h)] = (p/E)h \frac{(1/4)(1-\mu^2) a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2}{h^2};$$

стрела прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2) a_1^2/h^2 + \delta(1/2)(1+\mu) a^2/(a^2 - a_1^2)}{h^2} + \frac{(3/16)(1-\mu)(1-3\mu) a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2) a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{h^2} \right];$$

стрела прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2) a_1^2/h^2 + \delta(1/2)(1+\mu) a^2/(a^2 - a_1^2)}{h^2} - \frac{(1/4)(1-\mu^2) a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu) a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2) a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{h^2} \right];$$

строго положительная разность стрелы прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$  и стрелы прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, 0) - [u_z(a_1, h) - u_z(0, h)] = (p/E)h \frac{(1/4)(1-\mu^2) a^2/(a^2 - a_1^2)}{h^2}.$$

По формуле (2.82) для осевого перемещения в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$u_{z2}(r, z) = (p/E)h a_1^2/(a^2 - a_1^2) \left\{ \frac{\delta(1+\mu) a^2/a_1^2 + (1/2)(1+m)(1-\mu^2) a^2/h^2 - (15/16)(1-\mu^2) a_1^2 a^2/h^4 - (1+m)(1-\mu^2) a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1-\mu^2) a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \mu - a^2/a_1^2] z/h + [(1+m)\mu(1+\mu) + (3/4)\mu(1+3\mu) a^2/h^2 + (3/4)\mu(1-\mu) a_1^2/h^2 - 3\mu(1+\mu) a^2/h^2 \ln(a/h)] (z/h - z^2/h^2) + (1+\mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4 + [(1+m)(1-\mu^2) a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2) a_1^2 a^2/h^4 + 3\mu(1+\mu) a^2/h^2 z/h - 3\mu(1+\mu) a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + [-(1/2)(1+m)(1-\mu^2) - (3/8)(1-\mu^2) a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\mu)(3+\mu) a^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2) a^2/h^2 \ln(a/h) - (3/2)\mu(1+\mu) z/h + (3/2)\mu(1+\mu) z^2/h^2] r^2/h^2 - (3/2)(1-\mu^2) a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1-\mu^2) r^4/h^4 - (1/2)(1-\mu^2) a^2/a_1^2 [\delta/(1-\mu) - z/h + (1+m)\mu(z/h - z^2/h^2) + z^3/h^3 - (1/2) z^4/h^4] (a-r)^2/(a-a_1)^2 \right\};$$

осевое перемещение и ввиду осевого перемещения центра  $u_z(0, 0) = 0$  текущая (на участке от нуля до  $r$ ) стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, 0) = (p/E)h a_1^2/(a^2 - a_1^2) \left\{ \frac{\delta(1+\mu) a^2/a_1^2 - \delta(1/2)(1+\mu) a^2/a_1^2 (a-r)^2/(a-a_1)^2 + (1/2)(1+m)(1-\mu^2) a^2/h^2 - (1+m)(1-\mu^2) a^2/h^2 \ln(a_1/h) - (15/16)(1-\mu^2) a_1^2 a^2/h^4 + (3/4)(1-\mu^2) a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + [(1+m)(1-\mu^2) a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2) a_1^2 a^2/h^4] \ln(r/h) + [-(1/2)(1+m)(1-\mu^2) - (3/8)(1-\mu^2) a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\mu)(3+\mu) a^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2) a^2/h^2 \ln(a/h)] r^2/h^2 - (3/2)(1-\mu^2) a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1-\mu^2) r^4/h^4 \right\};$$

осевое перемещение края и ввиду осевого перемещения центра  $u_z(0, 0) = 0$  стрела прогиба всего (на участке от нуля до  $a$ ) частично нагруженного основания  $z = 0$  при  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1+\mu) a^2/(a^2 - a_1^2)}{h^2} + \frac{(3/16)(1-\mu)(7+3\mu) a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2) a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{h^2} \right];$$

осевое перемещение полностью нагруженного основания  $z = h$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, h) = (p/E)h a_1^2/(a^2 - a_1^2) \left\{ \frac{\delta(1+\mu) a^2/a_1^2 + (1/2)(1+m)(1-\mu^2) a^2/h^2 - (15/16)(1-\mu^2) a_1^2 a^2/h^4 - (1+m)(1-\mu^2) a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1-\mu^2) a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + 2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - a^2/a_1^2 + (1/2)(1+\mu^2) + (1+m)(1-\mu^2) a^2/h^2 \ln(r/h) - (3/4)(1-\mu^2) a_1^2 a^2/h^4 \ln(r/h) + [-(1/2)(1+m)(1-\mu^2) - (3/8)(1-\mu^2) a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\mu)(3+\mu) a^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2) a^2/h^2 \ln(a/h)] r^2/h^2 - (3/2)(1-\mu^2) a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1-\mu^2) r^4/h^4 - (1/2)(1-\mu^2) a^2/a_1^2 [\delta/(1-\mu) - (1/2)] (a-r)^2/(a-a_1)^2 \right\};$$

найденное выше осевое перемещение центра  $r = 0$  полностью нагруженного основания  $z = h$ , дающее при положительности утолщение и при отрицательности утонение сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, вдоль оси,

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 144/556

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h[2\mu(1/2 + p_1/p) - (1/2)(1 + \mu)^2] = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu)^2];$$

текущая (на участке от нуля до  $r$ ) стрела прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)ha_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ \delta(1 + \mu)a^2/a_1^2 + (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 - (15/16)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 - (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) + (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(a_1/h) - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(r/h) - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^2a^2/h^4 \ln(r/h) + [ - (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) - (3/8)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + (3/8)(1 - \mu)(3 + \mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h) ] r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 [ \delta/(1 - \mu) - (1/2) ] (a - r)^2/(a - a_1)^2 \};$$

разность текущей (на участке от нуля до  $r$ ) стрелы прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  и текущей (на участке от нуля до  $r$ ) стрелы прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, 0) - [u_{z2}(r, h) - u_{z1}(0, h)] = (p/E)h(1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) [ 2 - (a - r)^2/(a - a_1)^2 ] > 0,$$

причём строгая положительность последнего множителя в квадратных скобках, подчеркнутого как отсутствующего и при этом заменяемого нулём в теории пластин, обусловлена совокупностью двойных неравенств

$$0 < a_1 < a, \\ a_1 \leq r \leq a$$

в рассматриваемой кольцевой периферической части, откуда следуют неравенства

$$0 \leq a - r \leq a - a_1, \\ (a - r)^2 \leq (a - a_1)^2, \\ (a - r)^2/(a - a_1)^2 \leq 1;$$

стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h[ (1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2a^2/h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) ];$$

стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[ (1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2a^2/h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) ];$$

строго положительная разность стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq a$  и стрелы прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) - [u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h)] = (p/E)h(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2).$$

Тем самым **двухпараметрическим** методом устранения минимизированной невязки осевого перемещения доказано, что по теории пластин оба основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, искривляются одинаково, а по общему (полу)степенному методу при любом положительном радиусе текущая стрела прогиба частично нагруженного основания строго больше, чем текущая стрела прогиба полностью нагруженного основания.

**Однопараметрический** метод минимизации невязки осевого перемещения эти третьи явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением подтверждает итогами расчётов по формуле (2.80') для осевого перемещения в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  и по формуле (2.82') для осевого перемещения в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

По формуле (2.80') для осевого перемещения в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$u_{z1}(r, z) = (p/E)h \{ (\mu + 2\mu p_1/p)z/h + [ (1 + m)\mu(1 + \mu) + (3/4)\mu(1 - \mu)a_1^2/h^2 + 3\mu(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) ] (-z/h + z^2/h^2) - (1 + \mu)^2 z^3/h^3 + (1/2)(1 + \mu)^2 z^4/h^4 + [ (1/2)(1 + m)(1 - \mu^2) + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/2)\mu(1 + \mu)z/h - (3/2)\mu(1 + \mu)z^2/h^2 ] r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 + (1/2)[ (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) ] z/h + (1 + m)\mu(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) (z/h - z^2/h^2) + (1 + \mu)^2 a^2/(a^2 - a_1^2) z^3/h^3 - (1/2)(1 + \mu)^2 a^2/(a^2 - a_1^2) z^4/h^4 ] r^2/a_1^2 \}$$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 145/556

осевое перемещение и ввиду осевого перемещения центра  $u_z(0, 0) = 0$  текущая стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, 0) = (p/E)h \left\{ \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)}{h^2} + \frac{(3/8)(1-\mu)^2 a_1^2}{h^2} + \frac{(3/2)(1-\mu)^2 a_1^2}{h^2} \frac{a^2}{(a^2 - a_1^2)} \ln(a/a_1) \right] r^2/h^2 - \frac{(3/16)(1-\mu^2)r^4}{h^4} + \frac{(2a^2 - a_1^2)}{(3a^2 - 2a_1^2)} \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2}{(a^2 - a_1^2)} \frac{r^2}{a_1^2} \right\};$$

осевое перемещение полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, h) = (p/E)h \left\{ 2\mu p_1/p - \frac{(1/2)(1+\mu^2)}{h^2} + \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)}{h^2} + \frac{(3/8)(1-\mu)^2 a_1^2}{h^2} + \frac{(3/2)(1-\mu)^2 a_1^2}{h^2} \frac{a^2}{(a^2 - a_1^2)} \ln(a/a_1) \right] r^2/h^2 - \frac{(3/16)(1-\mu^2)r^4}{h^4} + \frac{[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)](1/4)(1-\mu^2)a^2}{(a^2 - a_1^2)} - \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2}{(a^2 - a_1^2)} \right] r^2/a_1^2 \right\};$$

осевое перемещение центра  $r = 0$  полностью нагруженного основания  $z = h$ , дающее при положительности утолщение и при отрицательности утонение сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, вдоль оси,

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ 2\mu \left( \frac{1}{2} + \frac{p_1}{p} \right) - \frac{(1/2)(1+\mu^2)}{h^2} \right] = (p/E)h \left[ 2\mu p_1/p - \frac{(1/2)(1+\mu^2)}{h^2} \right];$$

текущая (на участке от нуля до  $r$ ) стрела прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left\{ \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)}{h^2} + \frac{(3/8)(1-\mu)^2 a_1^2}{h^2} + \frac{(3/2)(1-\mu)^2 a_1^2}{h^2} \frac{a^2}{(a^2 - a_1^2)} \ln(a/a_1) \right] r^2/h^2 - \frac{(3/16)(1-\mu^2)r^4}{h^4} + \frac{[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)](1/4)(1-\mu^2)a^2}{(a^2 - a_1^2)} - \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2}{(a^2 - a_1^2)} \right] r^2/a_1^2 \right\};$$

непрерывно строго положительная при положительном радиусе  $r$  разность текущей (на участке от нуля до  $r$ ) стрелы прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  и текущей (на участке от нуля до  $r$ ) стрелы прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, 0) - [u_{z1}(r, h) - u_{z1}(0, h)] = (p/E)h \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2}{(a^2 - a_1^2)} \frac{r^2}{a_1^2};$$

стрела прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2}{h^2} + \frac{(2a^2 - a_1^2)}{(3a^2 - 2a_1^2)} \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2}{(a^2 - a_1^2)} + \frac{(3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4}{h^4} + \frac{(3/2)(1-\mu^2)a_1^4}{h^4} \frac{a^2}{(a^2 - a_1^2)} \ln(a/a_1) \right];$$

стрела прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2}{h^2} - \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2}{(3a^2 - 2a_1^2)} + \frac{(3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4}{h^4} + \frac{(3/2)(1-\mu^2)a_1^4}{h^4} \frac{a^2}{(a^2 - a_1^2)} \ln(a/a_1) \right];$$

строго положительная разность стрелы прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$  и стрелы прогиба всей круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, 0) - [u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h)] = (p/E)h \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2}{(a^2 - a_1^2)}.$$

По формуле (2.82') для осевого перемещения в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$u_{z2}(r, z) = (p/E)h a_1^2/(a^2 - a_1^2) \left\{ \frac{(2a^2 - a_1^2)}{(3a^2 - 2a_1^2)} \frac{(1/2)(1-\mu^2)a^2}{a_1^2} + \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a^2}{h^2} - \frac{(1+m)(1-\mu^2)a^2}{h^2} \ln(a_1/h) - \frac{(15/16)(1-\mu^2)a_1^2 a^2}{h^4} + \frac{(3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2}{h^4} \ln(a_1/h) + [2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - \mu - a^2/a_1^2] z/h + \frac{[(1+m)\mu(1+\mu) + (3/4)\mu(1+3\mu)a^2/h^2 + (3/4)\mu(1-\mu)a_1^2/h^2 - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 \ln(a/h)](z/h - z^2/h^2) + \frac{(1+\mu)^2 z^3}{h^3} - \frac{(1/2)(1+\mu)^2 z^4}{h^4} + \frac{[(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z/h - 3\mu(1+\mu)a^2/h^2 z^2/h^2] \ln(r/h) + \left[ -\frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)}{h^2} - \frac{(3/8)(1-\mu)^2 a_1^2}{h^2} + \frac{(3/8)(1-\mu)(3+\mu)a^2}{h^2} + \frac{(3/2)(1-\mu^2)a^2}{h^2} \ln(a/h) - \frac{(3/2)\mu(1+\mu)z}{h^3} + \frac{(3/2)\mu(1+\mu)z^2}{h^4} \right] r^2/h^2 - \frac{(3/2)(1-\mu^2)a^2}{h^2} r^2/h^2 \ln(r/h) + \frac{(3/16)(1-\mu^2)r^4}{h^4} - \frac{(1/2)a^2}{a_1^2} \left[ \frac{(2a^2 - a_1^2)}{(3a^2 - 2a_1^2)} \frac{(1/2)(1-\mu^2)}{h^2} - \frac{(1+\mu)z}{h^3} + \frac{(1+m)\mu(1+\mu)(z/h - z^2/h^2) + (1+\mu)^2 z^3/h^3 - (1/2)(1+\mu)^2 z^4/h^4 \right] (a-r)^2/(a-a_1)^2} \right\};$$

осевое перемещение и ввиду осевого перемещения центра  $u_z(0, 0) = 0$  текущая (на участке от нуля до  $r$ ) стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, 0) = (p/E)h a_1^2/(a^2 - a_1^2) \left\{ \frac{(2a^2 - a_1^2)}{(3a^2 - 2a_1^2)} \frac{(1/2)(1-\mu^2)a^2}{a_1^2} + \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a^2}{h^2} - \frac{(1+m)(1-\mu^2)a^2}{h^2} \ln(a_1/h) - \frac{(15/16)(1-\mu^2)a_1^2 a^2}{h^4} + \frac{(3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2}{h^4} \ln(a_1/h) + \frac{[(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4] \ln(r/h) + \left[ -\frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)}{h^2} - \frac{(3/8)(1-\mu)^2 a_1^2}{h^2} + \frac{(3/8)(1-\mu)(3+\mu)a^2}{h^2} + \right. \right.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 146/556

$$(3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h)]r^2/h^2 - (3/2)(1 - \mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4 - \frac{(2a^2 - a_1^2)}{(3a^2 - 2a_1^2)} (1/4)(1 - \mu^2)a^2/a_1^2 (a - r)^2/(a - a_1)^2};$$

осевое перемещение края и ввиду осевого перемещения центра  $u_z(0, 0) = 0$  стрела прогиба всего (на участке от нуля до  $a$ ) частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(7+3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{a_1^2} \right];$$

осевое перемещение полностью нагруженного основания  $z = h$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, h) = (p/E)h a_1^2/(a^2 - a_1^2) \left\{ \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/a_1^2 + (1/2)(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) - (15/16)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) + 2\mu(a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p - a^2/a_1^2 + (1/2)(1+\mu^2) + [(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4] \ln(r/h) + [-(1/2)(1+m)(1-\mu^2) - (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\mu)(3+\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h)] r^2/h^2 - (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 - \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/4)(1-\mu^2)a^2/a_1^2 - (1/4)(1-\mu^2)a^2/a_1^2}{(a-r)^2/(a-a_1)^2} \right\};$$

найденное выше осевое перемещение центра  $r = 0$  полностью нагруженного основания  $z = h$ , дающее при положительности утолщение и при отрицательности утонение сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, вдоль оси,

$$u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ 2\mu(1/2 + p_1/p) - (1/2)(1 + \mu^2) \right] = (p/E)h \left[ 2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2) \right];$$

текущая (на участке от нуля до  $r$ ) стрела прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h a_1^2/(a^2 - a_1^2) \left\{ \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/a_1^2 + (1/2)(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a_1/h) - (15/16)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 + (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4 \ln(a_1/h) - (1/2)(1-\mu^2)a^2/a_1^2 + (1/2)(1+\mu^2) + [(1+m)(1-\mu^2)a^2/h^2 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^2 a^2/h^4] \ln(r/h) + [-(1/2)(1+m)(1-\mu^2) - (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/8)(1-\mu)(3+\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 \ln(a/h)] r^2/h^2 - (3/2)(1-\mu^2)a^2/h^2 r^2/h^2 \ln(r/h) + (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 - \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/4)(1-\mu^2)a^2/a_1^2 - (1/4)(1-\mu^2)a^2/a_1^2}{(a-r)^2/(a-a_1)^2} \right\};$$

разность текущей (на участке от нуля до  $r$ ) стрелы прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  и текущей (на участке от нуля до  $r$ ) стрелы прогиба полностью нагруженного основания  $z = h$  в кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(r, 0) - [u_{z2}(r, h) - u_{z1}(0, h)] = (p/E)h (1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) \left[ 2 - \frac{(a-r)^2}{(a-a_1)^2} \right] > 0,$$

причём строгая положительность последнего множителя в квадратных скобках, подчеркнутого как отсутствующего и при этом заменяемого нулём в теории пластин, обусловлена совокупностью двойных неравенств

$$0 < a_1 < a,$$

$$a_1 \leq r \leq a$$

в рассматриваемой кольцевой периферической части, откуда следуют неравенства

$$0 \leq a - r \leq a - a_1,$$

$$(a - r)^2 \leq (a - a_1)^2,$$

$$(a - r)^2/(a - a_1)^2 \leq 1;$$

стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(7+3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{a_1^2} \right];$$

стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(7+3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{a_1^2} \right];$$

строго положительная разность стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq a$  и стрелы прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) - [u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h)] = (p/E)h (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2).$$

Тем самым **однопараметрическим** методом устранения невязки осевого перемещения доказано, что по теории пластин оба основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, искривляются одинаково, а по общему (полу)степенному методу при любом положительном радиусе текущая стрела

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 147/556

прогиба частично нагруженного основания строго больше, чем текущая стрела прогиба полностью нагруженного основания.

Причина такого различия заключается в том, что полностью нагруженное основание именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нагружено именно равномерно, а частично нагруженное основание имеет свободную от давления центральную часть и нагруженную именно повышенным равномерным давлением периферическую часть. Подобна такому различию искривлений оснований выпуклость в сторону плоского кольцевого штампа первоначально плоской поверхности на свободном от давления круглом участке внутри штампа.

Чтобы показать весьма значительно превышающую единицу и обычно составляющую примерно три-четыре кратность превышения стрелы прогиба круглой центральной части и всего полностью нагруженного основания стрелой прогиба круглой центральной части и всего частично нагруженного основания соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, используются численные расчёты по однопараметрическому методу устранения невязки осевого перемещения с формулами (2.80') и (2.82') и итогами и параллельно вслед в двойных кавычках «» для удобства сопоставления по двухпараметрическому методу устранения минимизированной невязки осевого перемещения с формулами (2.80) и (2.82) и итогами.

В численных расчётах приняты размеры

$$a_1 = 30 \text{ мм}, a = 55 \text{ мм}, h = 60 \text{ мм}$$

и соответствующие соотношения размеров

$$h = 2a_1, a = (11/6)a_1$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

или из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

при внешнем и боковом давлениях соответственно

$$p = p_1 = 98 \text{ МПа},$$

значение параметра  $m$  согласно (2.64) и значение параметра  $\delta$  согласно (2.78).

Ввиду принципиальной новизны третьих открытых явления и закона напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием и вследствие необходимости непременно доказательной силы предстоящих расчётов созданным общим (полу)степенным методом ключевые избранные из расчётов приводятся полностью как показ ясных, простых и мощных общности, применимости, воспроизводимости и проверяемости. Такие взаимосвязанные необходимые для именно глубокого понимания ясность, прозрачность, простота и убедительность немислимы для численных и экспериментальных методов, у которых есть свои важные преимущества и которые необходимо использовать для независимой проверки итогов приложения любых аналитических методов, в том числе созданного общего (полу)степенного метода.

Избраны изменение толщины вдоль оси (при его положительности или отрицательности утолщение или утонение соответственно) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с распространением внешнего давления и на боковую поверхность, а для оценки именно кратности превышения искривления полностью

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 148/556

нагруженного основания искривлением частично нагруженного основания соотношение стрел прогиба центральных частей и целиком обоих оснований. В случаях сокращений размерностей используются в данном случае простые и удобные отношения давлений и размеров именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Одинаковое по всем шести вариантам (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) изменение толщины вдоль оси (при его положительности или отрицательности утолщение или утонение соответственно) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с распространением внешнего давления и на боковую поверхность ( $p_1 = p$ ), равное осевому перемещению центра  $r = 0$  полностью нагруженного основания  $z = h$ ,

$$u_z(0, h) = (p/E)h[2\mu p_1/p - (1/2)(1 + \mu^2)];$$

$$u_z(0, h) = (1/2)(4\mu - 1 - \mu^2)(p/E)h;$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

составляет

$$u_z(0, h) = (1/2)(4*0.209 - 1 - 0.209^2)(98/80600)60 \text{ мм} = - 0.007576 \text{ мм}$$

и является утонением;

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

составляет

$$u_z(0, h) = (1/2)(4*0.365 - 1 - 0.365^2)(98/3030)60 \text{ мм} = 0.3171 \text{ мм}$$

и является утолщением.

Стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(1/8)(1 + m)(1 - \mu^2) + (12463/49470)(1 - \mu^2) + (3/256)(1 - \mu)(1 - 3\mu) + (363/2720)(1 - \mu^2)\ln(11/6)];$$

$$\ll u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + \delta(1/2)(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(1/8)(1 + m)(1 - \mu^2) + \delta(121/170)(1 + \mu) + (3/256)(1 - \mu)(1 - 3\mu) + (363/2720)(1 - \mu^2)\ln(11/6)]\gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$  по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, 0) = (98/80600) * [(1/8) * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (12463/49470) * (1 - 0.209^2) + (3/256) * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + (363/2720) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.03394 \text{ мм};$$

$$\langle\langle u_{z1}(a_1, 0) = 98/80600 * [(1/8) * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + 0.277 * 121/170 * (1 + 0.209) + 3/256 * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + 363/2720 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.03375 \text{ мм} \rangle\rangle;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, 0) = (98/80600) * [(1/8) * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + (12463/49470) * (1 - 0.209^2) + (3/256) * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + (363/2720) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.03328 \text{ мм};$$

$$\langle\langle u_{z1}(a_1, 0) = 98/80600 * [(1/8) * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + 0.198 * 121/170 * (1 + 0.209) + 3/256 * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + 363/2720 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.02814 \text{ мм} \rangle\rangle;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.209) = 0.334$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, 0) = (98/80600) * [(1/8) * (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + (12463/49470) * (1 - 0.209^2) + (3/256) * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + (363/2720) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.03219 \text{ мм};$$

$$\langle\langle u_{z1}(a_1, 0) = 98/80600 * [(1/8) * (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + 0.334 * 121/170 * (1 + 0.209) + 3/256 * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + 363/2720 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.03558 \text{ мм} \rangle\rangle.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, 0) = (98/3030) * [(1/8) * (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + (12463/49470) * (1 - 0.365^2) + (3/256) * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + (363/2720) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.8108 \text{ мм};$$

$$\langle\langle u_{z1}(a_1, 0) = 98/3030 * [(1/8) * (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + 0.222 * 121/170 * (1 + 0.365) + 3/256 * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + 363/2720 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.8056 \text{ мм} \rangle\rangle;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, 0) = (98/3030) * [(1/8) * (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + (12463/49470) * (1 - 0.365^2) + (3/256) * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + (363/2720) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.7950 \text{ мм};$$

$$\langle\langle u_{z1}(a_1, 0) = 98/3030 * [(1/8) * (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + 0.159 * 121/170 * (1 + 0.365) + 3/256 * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + 363/2720 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.6710 \text{ мм} \rangle\rangle;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.365) = 0.281$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, 0) = (98/3030) * [(1/8) * (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + (12463/49470) * (1 - 0.365^2) + (3/256) * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + (363/2720) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.7687 \text{ мм};$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 150/556

$$\langle u_{z1}(a_1, 0) = 98/3030 * [1/8 * (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + 0.281 * 121/170 * (1 + 0.365) + 3/256 * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + 363/2720 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.8747 \text{ мм} \rangle.$$

В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) все шесть вариантов (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) сводятся воедино к обобщаемой и существенно уточняемой ими теории круглой пластины для сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, все подчеркнутые выражения аннулируются, стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = (p/E)h[(3/256)(1 - \mu)(1 - 3\mu) + (363/2720)(1 - \mu^2)\ln(11/6)];$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = 98/80600 * [3/256 * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + 363/2720 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.005896 \text{ мм};$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

$$u_{z1}(a_1, 0) = 98/3030 * [3/256 * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + 363/2720 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.1347 \text{ мм}.$$

Стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 - (1/4)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1/8)(1 + m)(1 - \mu^2) - (121/1164)(1 - \mu^2) + (3/256)(1 - \mu)(1 - 3\mu) + (363/2720)(1 - \mu^2)\ln(11/6)];$$

$$\langle u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 + \delta(1/2)(1 + \mu)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(1/8)(1 + m)(1 - \mu^2) + \delta(121/170)(1 + \mu) - (121/340)(1 - \mu^2) + (3/256)(1 - \mu)(1 - 3\mu) + (363/2720)(1 - \mu^2)\ln(11/6)] \rangle.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (98/80600) * [(1/8) * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) - (121/1164) * (1 - 0.209^2) + (3/256) * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + (363/2720) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.009108 \text{ мм},$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 151/556

$$\langle u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/80600 * [1/8 * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + 0.277 * 121/170 * (1 + 0.209) - 121/340 * (1 - 0.209^2)] + 3/256 * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + 363/2720 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) \rangle * 60 \text{ мм} = 0.008922 \text{ мм} \rangle,$$

что в 3.726 «3.706» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.03394 \text{ мм} \langle 0.03375 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ; по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (98/80600) * [(1/8) * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) - (121/1164) * (1 - 0.209^2) + (3/256) * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + (363/2720) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.008454 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/80600 * [1/8 * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + 0.198 * 121/170 * (1 + 0.209) - 121/340 * (1 - 0.209^2)] + 3/256 * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + 363/2720 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) \rangle * 60 \text{ мм} = 0.003308 \text{ мм} \rangle,$$

что в 3.937 «8.507» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.03328 \text{ мм} \langle 0.02814 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ; по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.209) = 0.334$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (98/80600) * [(1/8) * (1 + 0) * (1 - 0.209^2) - (121/1164) * (1 - 0.209^2) + (3/256) * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + (363/2720) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.007364 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/80600 * [1/8 * (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + 0.334 * 121/170 * (1 + 0.209) - 121/340 * (1 - 0.209^2)] + 3/256 * (1 - 0.209) * (1 - 3 * 0.209) + 363/2720 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) \rangle * 60 \text{ мм} = 0.01076 \text{ мм} \rangle,$$

что в 4.371 «3.307» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.03219 \text{ мм} \langle 0.03558 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ . Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (98/3030) * [(1/8) * (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) - (121/1164) * (1 - 0.365^2) + (3/256) * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + (363/2720) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.2121 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030 * [1/8 * (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + 0.222 * 121/170 * (1 + 0.365) - 121/340 * (1 - 0.365^2)] + 3/256 * (1 - 0.365) * (1 - 3 * 0.365) + 363/2720 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) \rangle * 60 \text{ мм} = 0.2069 \text{ мм} \rangle,$$

что в 3.823 «3.894» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_{z1}(a_1, 0) = 0.8108 \text{ мм} \langle 0.8056 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ; по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (98/3030)*[(1/8)*(1 + 1/8)(1 - 0.365^2) - (121/1164)(1 - 0.365^2) + (3/256)*(1 - 0.365)*(1 - 3*0.365) + (363/2720)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.1964 \text{ мм},$$

$$\ll u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030*[(1/8)*(1 + 1/8)*(1 - 0.365^2) + 0.159*121/170*(1 + 0.365) - 121/340*(1 - 0.365^2) + 3/256*(1 - 0.365)*(1 - 3*0.365) + 363/2720*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.07240 \text{ мм}\gg,$$

что в 4.048 «9.268» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.7950 \text{ мм} \ll 0.6710 \text{ мм}\gg$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ; по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11*0.365) = 0.281$$

составляет

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (98/3030)*[(1/8)*(1 + 0)(1 - 0.365^2) - (121/1164)(1 - 0.365^2) + (3/256)*(1 - 0.365)*(1 - 3*0.365) + (363/2720)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.1701 \text{ мм},$$

$$\ll u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030*[(1/8)*(1 + 0)*(1 - 0.365^2) + 0.281*121/170*(1 + 0.365) - 121/340*(1 - 0.365^2) + 3/256*(1 - 0.365)*(1 - 3*0.365) + 363/2720*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.2761 \text{ мм}\gg,$$

что в 4.519 «3.168» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.7687 \text{ мм} \ll 0.8747 \text{ мм}\gg$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ .

В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) все шесть вариантов (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) сводятся воедино к обобщаемой и существенно уточняемой ими теории круглой пластины для сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, все подчеркнутые выражения аннулируются, стрела прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  полностью нагруженного основания  $z = h$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(3/16)(1 - \mu)(1 - 3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(3/256)(1 - \mu)(1 - 3\mu) + (363/2720)(1 - \mu^2)\ln(11/6)];$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/80600*[3/256*(1 - 0.209)*(1 - 3*0.209) + 363/2720*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.005896 \text{ мм};$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

$$u_{z1}(a_1, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030*[3/256*(1 - 0.365)*(1 - 3*0.365) + 363/2720*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.1347 \text{ мм}.$$

Стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h[(12463/24735)(1 - \mu^2) + (121/340)(1 + m)(1 - \mu^2)\ln(11/6) + (121/3072)(1 - \mu)(7 + 3\mu) - (363/5440)(1 - \mu^2)\ln(11/6)];$$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 153/556

$$\begin{aligned} \langle u_{z2}(a, 0) = (p/E)h[ & \frac{(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2)}{3\mu a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} + (3/16)(1-\mu)(7 + \\ & u_{z2}(a, 0) = (p/E)h[ & \frac{(121/340)(1+m)(1-\mu^2)\ln(11/6) + \delta(1+\mu)(121/85)}{(363/5440)(1-\mu^2)\ln(11/6)} + (121/3072)(1-\mu)(7 + 3\mu) - \end{aligned}$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга  
 $E = 80600$  МПа

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона  
 $\mu = 0.209$

стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$   
по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5; \\ \delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277$$

составляет

$$\begin{aligned} u_{z2}(a, 0) = (98/80600)*[ & \frac{(12463/24735)*(1 - 0.209^2) + (121/340)*(1 + 1/5)(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)}{(121/3072)*(1 - 0.209)(7 + 3*0.209) - (363/5440)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)}]*60 \text{ мм} = 0.06773 \text{ мм}, \\ \langle u_{z2}(a, 0) = 98/80600*[ & \frac{121/340*(1 + 1/5)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6) + 0.277*(1 + 0.209)*121/85 + \\ & 121/3072*(1 - 0.209)*(7 + 3*0.209) - 363/5440*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)}{60} \text{ мм} = 0.06735 \text{ мм} \rangle, \end{aligned}$$

что в 1.996 «1.996» раза больше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.03394 \text{ мм} \langle 0.03375 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ;  
по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8; \\ \delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198$$

составляет

$$\begin{aligned} u_{z2}(a, 0) = (98/80600)*[ & \frac{(12463/24735)*(1 - 0.209^2) + (121/340)*(1 + 1/8)(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)}{(121/3072)*(1 - 0.209)(7 + 3*0.209) - (363/5440)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)}]*60 \text{ мм} = 0.06660 \text{ мм}, \\ \langle u_{z2}(a, 0) = 98/80600*[ & \frac{121/340*(1 + 1/8)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6) + 0.198*(1 + 0.209)*121/85 + \\ & 121/3072*(1 - 0.209)*(7 + 3*0.209) - 363/5440*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)}{60} \text{ мм} = 0.05630 \text{ мм} \rangle, \end{aligned}$$

что в 2.001 «2.001» раза больше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.03328 \text{ мм} \langle 0.02814 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ;  
по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0; \\ \delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11*0.209) = 0.334$$

составляет

$$\begin{aligned} u_{z2}(a, 0) = (98/80600)*[ & \frac{(12463/24735)*(1 - 0.209^2) + (121/340)*(1 + 0)(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)}{(121/3072)*(1 - 0.209)(7 + 3*0.209) - (363/5440)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)}]*60 \text{ мм} = 0.06472 \text{ мм}, \\ \langle u_{z2}(a, 0) = 98/80600*[ & \frac{121/340*(1 + 0)*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6) + 0.334*(1 + 0.209)*121/85 + \\ & 121/3072*(1 - 0.209)*(7 + 3*0.209) - 363/5440*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)}{60} \text{ мм} = 0.07150 \text{ мм} \rangle, \end{aligned}$$

что в 2.011 «2.010» раза больше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.03219 \text{ мм} \langle 0.03558 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ .  
Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга  
 $E = 3030$  МПа

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона  
 $\mu = 0.365$

стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$   
по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222$$

составляет

$$u_{z2}(a, 0) = (98/3030)*[(12463/24735)*(1 - 0.365^2) + (121/340)*(1 + 1/5)(1 - 0.365^2)*\ln(11/6) + (121/3072)*(1 - 0.365)*(7 + 3*0.365) - (363/5440)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 1.6078 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z2}(a, 0) = 98/3030*[121/340*(1 + 1/5)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6) + 0.222*(1 + 0.365)*121/85 + 121/3072*(1 - 0.365)*(7 + 3*0.365) - 363/5440*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 1.5974 \text{ мм} \rangle,$$

что в 1.983 «1.983» раза больше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.8108 \text{ мм} \langle 0.8056 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ; по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159$$

составляет

$$u_{z2}(a, 0) = (98/3030)*[(12463/24735)*(1 - 0.365^2) + (121/340)*(1 + 1/8)(1 - 0.365^2)*\ln(11/6) + (121/3072)*(1 - 0.365)*(7 + 3*0.365) - (363/5440)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 1.5806 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z2}(a, 0) = 98/3030*[121/340*(1 + 1/8)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6) + 0.159*(1 + 0.365)*121/85 + 121/3072*(1 - 0.365)*(7 + 3*0.365) - 363/5440*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 1.3326 \text{ мм} \rangle,$$

что в 1.988 «1.986» раза больше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.7950 \text{ мм} \langle 0.6710 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ ; по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11*0.365) = 0.281$$

составляет

$$u_{z2}(a, 0) = (98/3030)*[(12463/24735)*(1 - 0.365^2) + (121/340)*(1 + 0)(1 - 0.365^2)*\ln(11/6) + (121/3072)*(1 - 0.365)*(7 + 3*0.365) - (363/5440)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 1.5352 \text{ мм},$$

$$\langle u_{z2}(a, 0) = 98/3030*[121/340*(1 + 0)*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6) + 0.281*(1 + 0.365)*121/85 + 121/3072*(1 - 0.365)*(7 + 3*0.365) - 363/5440*(1 - 0.365^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 1.7473 \text{ мм} \rangle,$$

что в 1.997 «1.998» раза больше, чем соответствующее значение

$$u_z(a_1, 0) = 0.7687 \text{ мм} \langle 0.8747 \text{ мм} \rangle$$

стрелы прогиба круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного основания  $z = 0$ . В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) все шесть вариантов (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) сводятся воедино к обобщаемой и существенно уточняемой ими теории круглой пластины для сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, все подчёркнутые выражения аннулируются, стрела прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, 0) = (p/E)h[(3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4/h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_z(a, 0) = (p/E)h[(121/3072)(1 - \mu)(7 + 3\mu) - (363/5440)(1 - \mu^2)\ln(11/6)];$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

$$u_{z2}(a, 0) = 98/80600*[121/3072*(1 - 0.209)*(7 + 3*0.209) - 363/5440*(1 - 0.209^2)*\ln(11/6)]*60 \text{ мм} = 0.01451 \text{ мм};$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

$$u_{z2}(a, 0) = 98/3030 * [121/3072 * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - 363/5440 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.3249 \text{ мм.}$$

Стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h, 0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(7+3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4 h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(121/340)(1+m)(1-\mu^2)\ln(11/6) - (121/582)(1-\mu^2) + (121/3072)(1-\mu)(7+3\mu) - (363/5440)(1-\mu^2)\ln(11/6)} \right];$$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(7+3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4 h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(121/340)(1+m)(1-\mu^2)\ln(11/6) + \delta(1+\mu)(121/85) - (121/170)(1-\mu^2) + (121/3072)(1-\mu)(7+3\mu) - (363/5440)(1-\mu^2)\ln(11/6)} \right];$$

$$\ll u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(7+3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1-\mu^2)a_1^4 h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(121/340)(1+m)(1-\mu^2)\ln(11/6) + \delta(1+\mu)(121/85) - (121/170)(1-\mu^2) + (121/3072)(1-\mu)(7+3\mu) - (363/5440)(1-\mu^2)\ln(11/6)} \right];$$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + \delta(1+\mu)(121/85) - (121/170)(1-\mu^2) + (121/3072)(1-\mu)(7+3\mu) - (363/5440)(1-\mu^2)\ln(11/6)}{(121/340)(1+m)(1-\mu^2)\ln(11/6) + \delta(1+\mu)(121/85) - (121/170)(1-\mu^2) + (121/3072)(1-\mu)(7+3\mu) - (363/5440)(1-\mu^2)\ln(11/6)} \right];$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h, 0 \leq r \leq a$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277$$

составляет

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (98/80600) * \left[ \frac{(121/340) * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (121/582) * (1 - 0.209^2) + (121/3072) * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - (363/5440) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)}{(121/340) * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (121/582) * (1 - 0.209^2) + (121/3072) * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - (363/5440) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)} \right] * 60 \text{ мм} = 0.01807 \text{ мм,}$$

$$\ll u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (98/80600) * \left[ \frac{(121/340) * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) + 0.277 * (1 + 0.209) * 121/85 - 121/170 * (1 - 0.209^2) + 121/3072 * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - 363/5440 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)}{(121/340) * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) + 0.277 * (1 + 0.209) * 121/85 - 121/170 * (1 - 0.209^2) + 121/3072 * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - 363/5440 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)} \right] * 60 \text{ мм} = 0.01769 \text{ мм},$$

что в 3.748 «3.807» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_{z2}(a, 0) = 0.06773 \text{ мм} \ll 0.06735 \text{ мм} \gg$$

стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a;$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198$$

составляет

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (98/80600) * \left[ \frac{(121/340) * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (121/582) * (1 - 0.209^2) + (121/3072) * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - (363/5440) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)}{(121/340) * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (121/582) * (1 - 0.209^2) + (121/3072) * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - (363/5440) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)} \right] * 60 \text{ мм} = 0.01694 \text{ мм,}$$

$$\ll u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (98/80600) * \left[ \frac{(121/340) * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) + 0.198 * (1 + 0.209) * 121/85 - 121/170 * (1 - 0.209^2) + 121/3072 * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - 363/5440 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)}{(121/340) * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) + 0.198 * (1 + 0.209) * 121/85 - 121/170 * (1 - 0.209^2) + 121/3072 * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - 363/5440 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)} \right] * 60 \text{ мм} = 0.006647 \text{ мм},$$

что в 3.932 «8.470» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_{z2}(a, 0) = 0.06660 \text{ мм} \ll 0.05630 \text{ мм} \gg$$

стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a;$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.209) = 0.334$$

составляет

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 156/556

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (98/80600) * [(121/340) * (1 + 0) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (121/582) * (1 - 0.209^2) + (121/3072) * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - (363/5440) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.01506 \text{ мм},$$
$$\ll u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = 98/80600 * [121/340 * (1 + 0) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) + 0.334 * (1 + 0.209) * 121/85 - 121/170 * (1 - 0.209^2) + 121/3072 * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - 363/5440 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.02184 \text{ мм} \gg,$$

что в 4.297 «3.274» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_{z2}(a, 0) = 0.06472 \text{ мм} \ll 0.07150 \text{ мм} \gg$$

стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$ .

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h, 0 \leq r \leq a$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222$$

составляет

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (98/3030) * [(121/340) * (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (121/582) * (1 - 0.365^2) + (121/3072) * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - (363/5440) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.4106 \text{ мм},$$
$$\ll u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030 * [121/340 * (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) + 0.222 * (1 + 0.365) * 121/85 - 121/170 * (1 - 0.365^2) + 121/3072 * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - 363/5440 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.4002 \text{ мм} \gg,$$

что в 3.916 «3.992» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_{z2}(a, 0) = 1.6078 \text{ мм} \ll 1.5974 \text{ мм} \gg$$

стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$ ;

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159$$

составляет

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (98/3030) * [(121/340) * (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (121/582) * (1 - 0.365^2) + (121/3072) * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - (363/5440) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.3834 \text{ мм},$$
$$\ll u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030 * [121/340 * (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) + 0.159 * (1 + 0.365) * 121/85 - 121/170 * (1 - 0.365^2) + 121/3072 * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - 363/5440 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.1354 \text{ мм} \gg,$$

что в 4.123 «9.842» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_{z2}(a, 0) = 1.5806 \text{ мм} \ll 1.3326 \text{ мм} \gg$$

стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$ ;

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.365) = 0.281$$

составляет

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (98/3030) * [(121/340) * (1 + 0) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (121/582) * (1 - 0.365^2) + (121/3072) * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - (363/5440) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.3380 \text{ мм},$$
$$\ll u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030 * [121/340 * (1 + 0) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) + 0.281 * (1 + 0.365) * 121/85 - 121/170 * (1 - 0.365^2) + 121/3072 * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - 363/5440 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.5501 \text{ мм} \gg,$$

что в 4.542 «3.176» раза меньше, чем соответствующее значение

$$u_{z2}(a, 0) = 1.5352 \text{ мм} \ll 1.7473 \text{ мм} \gg$$

стрелы прогиба всего частично нагруженного основания  $z = 0, 0 \leq r \leq a$ .

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 157/556

В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) все шесть вариантов (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) сводятся воедино к обобщаемой и существенно уточняемой ими теории круглой пластины для сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, все подчёркнутые выражения аннулируются, стрела прогиба всего полностью нагруженного основания  $z = h$ ,  $0 \leq r \leq a$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(3/16)(1 - \mu)(7 + 3\mu)a_1^2 a^2/h^4 - (3/4)(1 - \mu^2)a_1^4 h^4 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = (p/E)h[(121/3072)(1 - \mu)(7 + 3\mu) - (363/5440)(1 - \mu^2)\ln(11/6)];$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = 98/80600 * [121/3072 * (1 - 0.209) * (7 + 3 * 0.209) - 363/5440 * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.01451 \text{ мм};$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

$$u_{z2}(a, h) - u_{z1}(0, h) = 98/3030 * [121/3072 * (1 - 0.365) * (7 + 3 * 0.365) - 363/5440 * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6)] * 60 \text{ мм} = 0.3249 \text{ мм}.$$

Совокупность итогов вычислений значений стрел прогиба  $u_z(a_1, 0)$  круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  и  $u_z(a, 0)$  всего частично нагруженного основания  $z = 0$ , стрел прогиба

$$\Delta_z(a_1, h) = u_z(a_1, h) - u_z(0, h)$$

круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  и

$$\Delta_z(a, h) = u_z(a, h) - u_z(0, h)$$

всего полностью нагруженного основания  $z = h$  в микрометрах (мкм) и их отношений

$$u_z(a_1, 0)/\Delta_z(a_1, h) \text{ и } u_z(a, 0)/\Delta_z(a, h)$$

соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением сведена для наглядности в таблицу 2.5.

Таблица 2.5. Значения стрел прогиба  $u_z(a_1, 0)$  круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  и  $u_z(a, 0)$

всего частично нагруженного основания  $z = 0$ , стрел прогиба  $\Delta_z(a_1, h) = u_z(a_1, h) - u_z(0, h)$

круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  и  $\Delta_z(a, h) = u_z(a, h) - u_z(0, h)$  всего полностью

нагруженного основания  $z = h$  в микрометрах (мкм) и их отношений  $u_z(a_1, 0)/\Delta_z(a_1, h)$  и  $u_z(a, 0)/\Delta_z(a, h)$  соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического

тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического стекла или из

органического стекла, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением по теории пластин ( $h \ll a_1$ )

и по общему (полу)степенному методу при использовании двухпараметрического ( $m, \delta$ )

метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения и

однопараметрического ( $m$ ) метода устранения минимизированной невязки осевого

перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, по методу

2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и

посередине.

Метод расчёта	Стрелы прогиба (мкм) оснований тела, их центральных частей, отношения											
	Цилиндр из неорганического стекла						Цилиндр из органического стекла					
	$u_z(a_1, 0)$	$\Delta_z(a_1, h)$	$u_z(a_1, 0)/\Delta_z(a_1, h)$	$u_z(a, 0)$	$\Delta_z(a, h)$	$u_z(a, 0)/\Delta_z(a, h)$	$u_z(a_1, 0)$	$\Delta_z(a_1, h)$	$u_z(a_1, 0)/\Delta_z(a_1, h)$	$u_z(a, 0)$	$\Delta_z(a, h)$	$u_z(a, 0)/\Delta_z(a, h)$
$(h \ll a_1)$	5.896	5.896	1	14.51	14.51	1	134.7	134.7	1	324.9	324.9	1
$(m, \delta), 1$	33.75	8.922	3.706	67.35	17.69	3.807	805.6	206.9	3.894	1597.4	400.2	3.992
$(m, \delta), 2$	28.14	3.308	8.507	56.30	6.647	8.470	671.0	72.40	9.268	1332.6	135.4	9.842
$(m, \delta), 3$	35.58	10.76	3.307	71.50	21.84	3.274	874.7	276.1	3.168	1747.3	550.1	3.176
$(m), 1$	33.94	9.108	3.726	67.73	18.07	3.748	810.8	212.1	3.823	1607.8	410.6	3.916
$(m), 2$	33.28	8.454	3.937	66.60	16.94	3.932	795.0	196.4	4.048	1580.6	383.4	4.123
$(m), 3$	32.19	7.364	4.371	64.72	15.06	4.297	768.7	170.1	4.519	1535.2	338.0	4.542

Тем самым открыты и обоснованы третьи явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением.

Кроме того, выявлено и подтверждено следующее:

1. Однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения используют каждый все три метода минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичный, минимаксами их модулей и коллокационный, и благодаря такой многовариантности обеспечивают самопроверяемость и взаимную проверяемость.

2. Очень хорошо согласующиеся друг с другом и поэтому наиболее надёжные наилучшие итоги достигаются чрезвычайно близкими между собой по итогам однопараметрическим и двухпараметрическим методами устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, а также достаточно близким к ним по итогам с приемлемыми их занижениями однопараметрическим методом устранения невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения.

3. Для этих достаточно близких между собой четырёх итогов по стрелам прогиба даёт нижнюю и верхнюю границы двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения соответственно, а также непомерно завышенную и существенно заниженную кратности превышения стрел прогиба полностью нагруженного основания и его центральной части стрелами прогиба частично нагруженного основания и его центральной части.

4. Кратность превышения стрел прогиба центральной части и всего полностью нагруженного основания стрелами прогиба центральной части и всего частично нагруженного основания соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением при типичных для высокого давления соотношениях размеров светопрозрачного элемента со столь различно искривляющимися первоначально плоскопараллельными оптическими поверхностями составляет примерно три-четыре.

5. Теория круглой пластины занижает стрелы прогиба центральной части и всего частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 159/556

равномерным периферическим противодавлением при типичных для высокого давления соотношениях размеров светопрозрачного элемента примерно в пять-шесть раз.

Ввиду приближённости устранения минимизированных невязок сопряжения решений для круглой центральной и кольцевой периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением требуется проверка достоверности общего (полу)степенного метода и результатов его применения.

### **2.13. Сравнение с известными аналитическими методами теории пластин и теории плит для методической, аналитической и численной проверки и оценки достоверности созданного общего (полу)степенного аналитического метода макроэлементов для общих теорий деформирования, прочности и разрушения сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов**

Представляется целесообразным сопоставить формулы (2.80) – (2.83), (2.80') и (2.82') замкнутого решения по созданному общему (полу)степенному методу для напряжённо-деформированного состояния сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с известными формулами [80, 351] задачи теории пластин при тех же граничных условиях на основаниях, а также с имеющимися решениями задач об изгибе круглых плит при свободном опирании или жёстком защемлении края.

Поскольку известными формулами теории пластин и теории плит давление  $p_1$  на боковую поверхность не рассматривается, то в полученном решении (2.80) – (2.83), (2.80') и (2.82') принимаем  $p_1 = 0$ .

Проведём такие сопоставления в методическом, аналитическом и численном аспектах.

Начнём со сравнения решения по общему (полу)степенному методу с задачей теории пластин [80, 351] при тех же граничных условиях на основаниях.

Методическое отличие решения по общему (полу)степенному методу заключается в характерном для теории упругости отказе от упрощающих гипотез теории пластин, ведущем к появлению дополнительных слагаемых, которые в формулах (2.80) – (2.83), (2.80') и (2.82') подчёркнуты.

При  $h \ll a_1$  эти дополнительные слагаемые пренебрежимо малы по сравнению с остальными слагаемыми, которые соответствуют теории пластин.

Таким образом, общим (полу)степенным методом достигнуто обобщение теории пластин применительно к рассматриваемой задаче.

Что касается численного аспекта, то представляется рациональным ограничиться (табл. 2.6) двумя наиболее характерными величинами, а именно стрелой прогиба  $u_z(a_1, 0)$  круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  частично нагруженного внутреннего основания  $z = 0$  и совпадающими значениями радиального и тангенциального (окружного) напряжений  $\sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0)$  в центре частично нагруженного внутреннего основания сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при прежнем отношении его внешнего радиуса  $a$  к радиусу  $a_1$  круглой центральной части

$$a/a_1 = 55 \text{ мм} / 30 \text{ мм} = 11/6$$

и при произвольной толщине (высоте)  $h$ .

Относительные погрешности теорий пластин и плит по сравнению с созданным общим (полу)степенным методом при двухпараметрическом методе устранения среднеквадратично минимизированной невязки осевого перемещения  $u_z(a_1, z)$  в перемещениях и напряжениях

$$\delta'_u = (u_z(a_1, 0) - u_z(a_1, 0)_{h \ll a_1}) / u_z(a_1, 0),$$
$$\delta'_\sigma = (\sigma_r(0, 0) - \sigma_r(0, 0)_{h \ll a_1}) / \sigma_r(0, 0)$$

показаны в зависимости от отношения  $h/a_1$  на рис. 2.13.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 160/556

Таблица 2.6. Сопоставление формул для безразмерных стрелы прогиба ненагруженной центральной части и единого значения радиального и тангенциального (окружного) напряжений в центре этой части при изгибе равномерным давлением на одно основание сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, по созданному общему (полу)степенному методу (ОСМ), по теории пластин и теории плит.

Объект (модель), граничные условия, метод (теория), формулы	Безразмерная стрела прогиба ненагруженной части $E/(ph) u_z(a_1, 0)$	Безразмерное единое значение наибольшего напряжения на оси $\sigma_r(0, 0)/p = \sigma_t(0, 0)/p$
Сплошное трёхмерное цилиндрическое тело, периферическое противодействие, ОСМ, двухпараметрический метод устранения невязки $u_z(a_1, z)$ , (2.80), (2.81)	$\frac{(1+m)\mu(1+\mu) + (1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \delta + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4}{a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}$	$\frac{(m+\mu+m\mu)/2 + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2}{a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}$
Сплошное трёхмерное цилиндрическое тело, периферическое противодействие, ОСМ, однопараметрический метод устранения невязок, (2.80'), (2.81)	$\frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a_1^2/(a^2 - a_1^2) + (3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4}{a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}$	$\frac{(m+\mu+m\mu)/2 + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2}{a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}$
Круглая пластина, периферическое противодействие, теория пластин	$\frac{(3/16)(1-\mu)(1-3\mu)a_1^4/h^4 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^4/h^4}{a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}$	$\frac{(3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2}{a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}$
Сплошное трёхмерное цилиндрическое тело, край свободно опёрт, ОСМ, (2.68)	$(1/4)(1+m)(1-\mu)(2+\mu)a_1^2/h^2 + (3/16)(1-\mu)(5+\mu)a_1^4/h^4$	$(1/4)m(2+\mu) + (3/8)(3+\mu)a_1^2/h^2$
Круглая плита, край свободно опёрт, теория плит	$\frac{(3/10)(1-\mu)(2+\mu)a_1^2/h^2 + (3/16)(1-\mu)(5+\mu)a_1^4/h^4}{(3/16)(1-\mu)(5+\mu)a_1^4/h^4}$	$(1/20)(2+\mu) + (3/8)(3+\mu)a_1^2/h^2$
Сплошное трёхмерное цилиндрическое тело, край жёстко защемлён, ОСМ, (2.66)	$(1/4)(1+m)(1+\mu)(2-\mu)a_1^2/h^2 + (3/16)(1-\mu^2)a_1^4/h^4$	$(1/4)m(1+\mu)(2-\mu)/(1-\mu) + (3/8)(1+\mu)a_1^2/h^2$
Круглая плита, край жёстко защемлён, теория плит	$\frac{(3/10)(1+\mu)(2-\mu)a_1^2/h^2 + (3/16)(1-\mu^2)a_1^4/h^4}{(3/16)(1-\mu^2)a_1^4/h^4}$	$(1/20)(1+\mu)(2+\mu)/(1-\mu) + (3/8)(1+\mu)a_1^2/h^2$

Оказывается, что теория пластин при любых отношениях  $h/a_1$  занижает стрелу прогиба  $u_z(a_1, 0)$  и наибольшее напряжение  $\sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0)$ , причём стрелу прогиба в гораздо большей степени, чем наибольшее напряжение, и применима в пределах  $h/a_1 \leq 1/2$ , что примерно соответствует отношению толщины (высоты)  $h$  к внешнему радиусу  $a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$h/a \leq 1/4,$$

при этом

$$\delta'_u < 0.11;$$

$$\delta'_\sigma < 0.03.$$



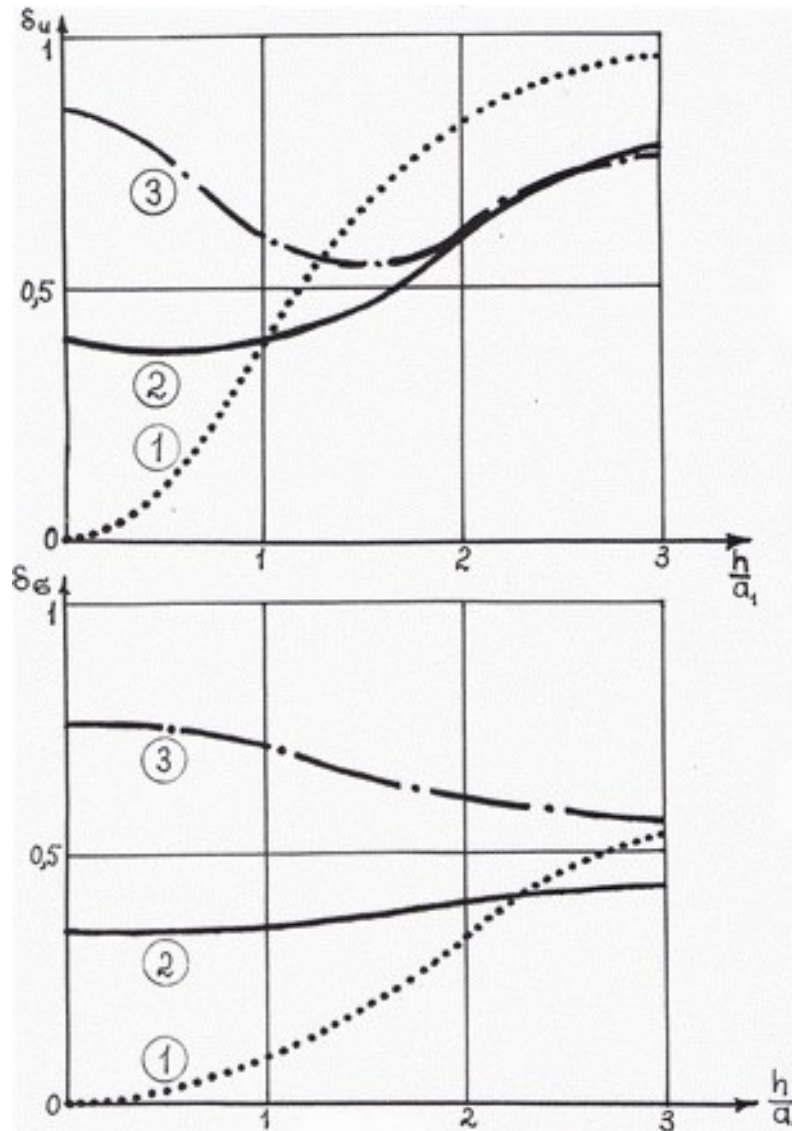


Рисунок 2.13. Относительные погрешности расчётов стрелы прогиба  $u_z(a_1, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного основания (вверху) и наибольшего напряжения  $\sigma_r(0, 0)$  (внизу) по известным решениям теории пластин (пунктирная кривая линия) и теории плит для случаев свободно опёртого (сплошная кривая линия) и жёстко защемлённого края (штрих-пунктирная кривая линия) по сравнению с расчётами по созданному общему (полу)степенному методу при двухпараметрическом методе устранения среднеквадратично минимизированной невязки осевого перемещения  $u_z(a_1, z)$ .

Напряжения же достаточно надёжно определяются при

$$h/a_1 \leq 1$$

и примерном отношении толщины (высоты)  $h$  к внешнему радиусу  $a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$h/a \leq 1/2:$$

$$\delta'_\sigma < 0.11.$$

Проведём сопоставление решений по созданному общему (полу)степенному методу с известными решениями задач по теории плит.

Методические отличия созданного общего (полу)степенного метода состоят в его учёте именно отсутствующей в теории плит схемы нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным сферическим противодействием и соответственно в мысленном рассечении именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического

тела, в частности светопрозрачного элемента, на круглую центральную и кольцевую периферическую части и в сопряжении решений для этих частей.

Кроме того, созданный общий (полу)степенной метод даёт решения для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, свободно опёртого (2.68) или жёстко заземлённого (2.66) по краю, в частности при методе среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения даёт известные решения [3, 191, 195, 319, 321] для круглой плиты, свободно опёртой или жёстко заземлённой по краю соответственно, и тем самым существенно обобщает теорию плит, поскольку не только отказывается от её ограничений относительной толщины плиты, но и дополнительно предусматривает ещё два метода минимизации невязок сопряжения, а именно минимаксами их модулей и коллокационно аннулированием четырёх значений (среднего, на основаниях и посередине).

С методической точки зрения важно отметить, что эти известные решения задач по теории плит были получены индуктивным путём, причём оставался полностью открытым вопрос о возможностях уточнения решений при сохранении шестой степени функции напряжений или путём её повышения. А созданным общим (полу)степенным методом строго доказана единственность шестой степени функции напряжений.

Минимизация невязок сопряжения хотя по существу и проводилась теорией плит, но в каждом из указанных обоих случаев (свободно опёртого или жёстко заземлённого края) односторонне, при этом по-разному и с использованием подходов теории пластин (в терминах сил и моментов на краю плиты).

А созданным общим (полу)степенным методом предусматриваются практически все рациональные методы минимизации невязок сопряжения, анализируются различия и взаимосвязи между ними с методическими единством и универсальностью и с определением мест известных решений задач по теории плит в кругу задач, решаемых созданным общим (полу)степенным методом.

Что касается аналитического и численного аспектов сравнения, во-первых, общего (полу)степенного метода при отсутствующей в теории плит схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением и, во-вторых, теории плит в каждом из указанных обоих случаев (свободно опёртого или жёстко заземлённого края), то ввиду несоответствия граничных условий не следует ожидать ни общности формул (см. табл. 2.6), ни малости погрешностей расчёта (см. рис. 2.13).

Следовательно, в отличие от задачи теории пластин при соответствующих граничных условиях, решения задач теории плит при иных, хотя и сходных, граничных условиях неприменимы вовсе.

Таким образом, созданный общий (полу)степенной метод вполне согласуется с известными аналитическими решениями, обобщает их, определяет их место, погрешности и пределы применимости, сохраняет их простоту и удобство для инженерных приложений и в то же время существенно уточняет их, имеет перед ними методические преимущества и позволяет открыть и обосновать принципиально новые явления и законы напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, которые коренным образом исправляют, развивают и заменяют известные представления о его деформировании.

Однако известные аналитические решения не позволяют проверить открытые созданным общим (полу)степенным методом три принципиально новых явления и закона напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, по сравнению с известными закономерностями напряжённо-деформированных состояний круглых пластин и круглых плит при осесимметричном изгибе равномерными давлениями.

Для такой проверки становится необходимым использование численных методов расчёта напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 163/556

## **2.14. Численная конечно-элементная проверка и оценка достоверности общего (полу)степенного метода как (полу)степенной модификации созданной аналитической методологии макроэлементов, открытие и обоснование четвёртых основных явления и закона напряжённо-деформированного состояния существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием**

Для численного исследования напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, был выбран метод конечных элементов (МКЭ).

Использовалась программа «Ротор-Б» Института проблем машиностроения АН Украины [316].

Рассматривались именно существенно трёхмерные сплошные цилиндрические тела, в частности светопрозрачные элементы, из неорганического стекла К8 и органического стекла ТОСП (характеристики этих материалов см. в табл. 1.1) размерами

$$h = 60 \text{ мм}, a_1 = 30 \text{ мм}, a = 55 \text{ мм}$$

при давлениях

$$\begin{aligned} p &= 98 \text{ МПа}, p_1 = 0, \\ p_1 &= p = 98 \text{ МПа}, \\ p_1 &= p_2 = 140 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Использовались две схемы разбиения рассматриваемой области осевого сечения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, на прямоугольные конечные элементы.

В числовые массивы, характеризующие эти две схемы разбиения, в качестве промежуточных включались значения (в миллиметрах) соответственно:

$$1) r = 6; 12; 18; 24; 30; 32.6; 35; 37.5; 40; 42.6; 45; 47.5; 50; 52.6;$$

$$z = 7.5; 15; 22.5; 30; 37.5; 45; 52.5;$$

$$2) r = 6; 12; 18; 24; 30; 32.5; 35; 37.5; 40; 42.5; 45; 47.5; 50; 52.5;$$

$$z = 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50; 55.$$

Результаты расчётов при выборе различных схем разбиений на конечные элементы хорошо согласуются между собой и приводят к единой картине напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Для напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 характерные эпюры при  $p_1 = p$  показаны на рис. 2.14, изолинии при  $p_1 = 0$  – на рис. 2.15 и при  $p_1 = p$  – на рис. 2.16.

Сравнение результатов расчёта напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 по методу конечных элементов при различных значениях бокового давления  $p_1$  подтверждает как значительное влияние приложения давления к боковой поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, на его напряжённо-деформированное состояние, так и применимость принципа наложения (суперпозиции).

Показано, что имеющие место при отсутствии давления на боковую поверхность  $p_1 = 0$  растягивающие радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, при равенстве  $p_1 = p$  давления  $p_1$  на боковую поверхность внешнему давлению  $p$  в данном случае вообще не возникают.

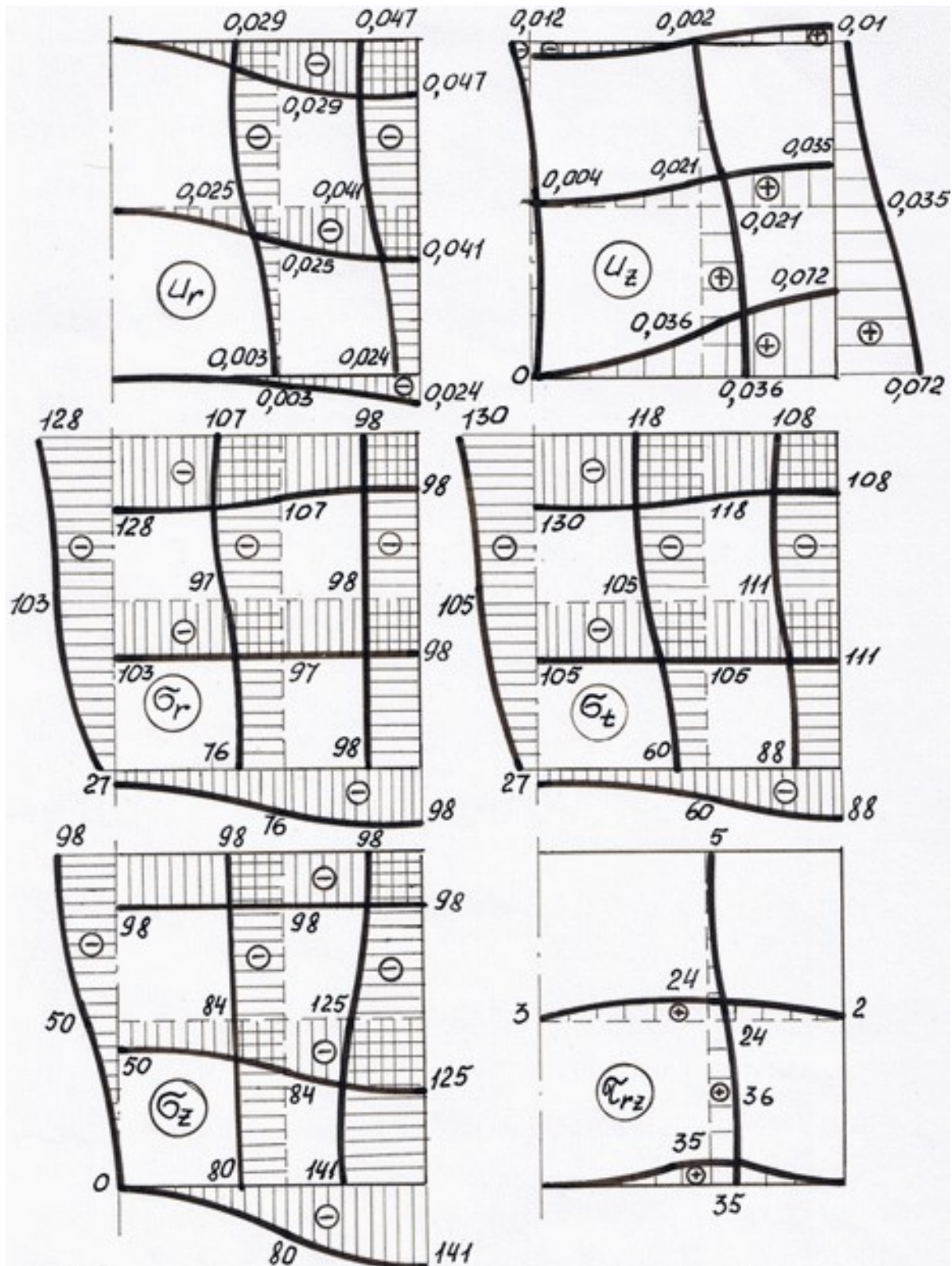


Рисунок 2.14. Эпюры перемещений (в миллиметрах) и напряжений (в мегапаскалях), определённые расчётом по методу конечных элементов, в сечениях  $z = 0, z = h/2, z = h, r = 0, r = a_1, r = a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, размерами  $a_1 = 30$  мм,  $a = 55$  мм,  $h = 60$  мм из стекла К8 при давлениях  $p = p_1 = 98$  МПа.

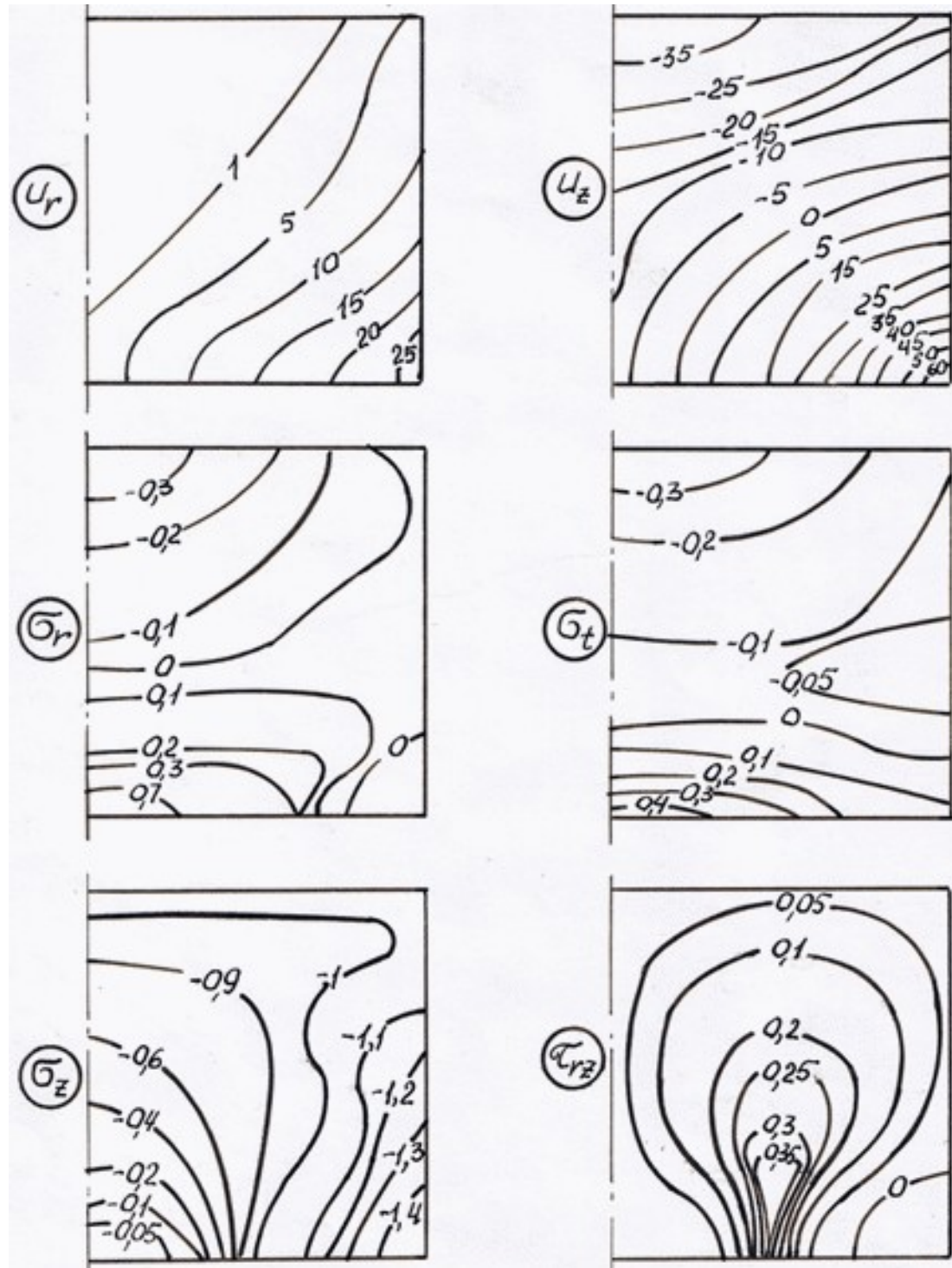


Рисунок 2.15. Изолинии перемещений (в микрометрах) и напряжений (делённых на  $p$ ) согласно расчёту по методу конечных элементов именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, размерами

$$a_1 = 30 \text{ мм},$$

$$a = 55 \text{ мм},$$

$$h = 60 \text{ мм}$$

из стекла К8 при давлениях

$$p = 98 \text{ МПа}$$

и

$$p_1 = 0.$$

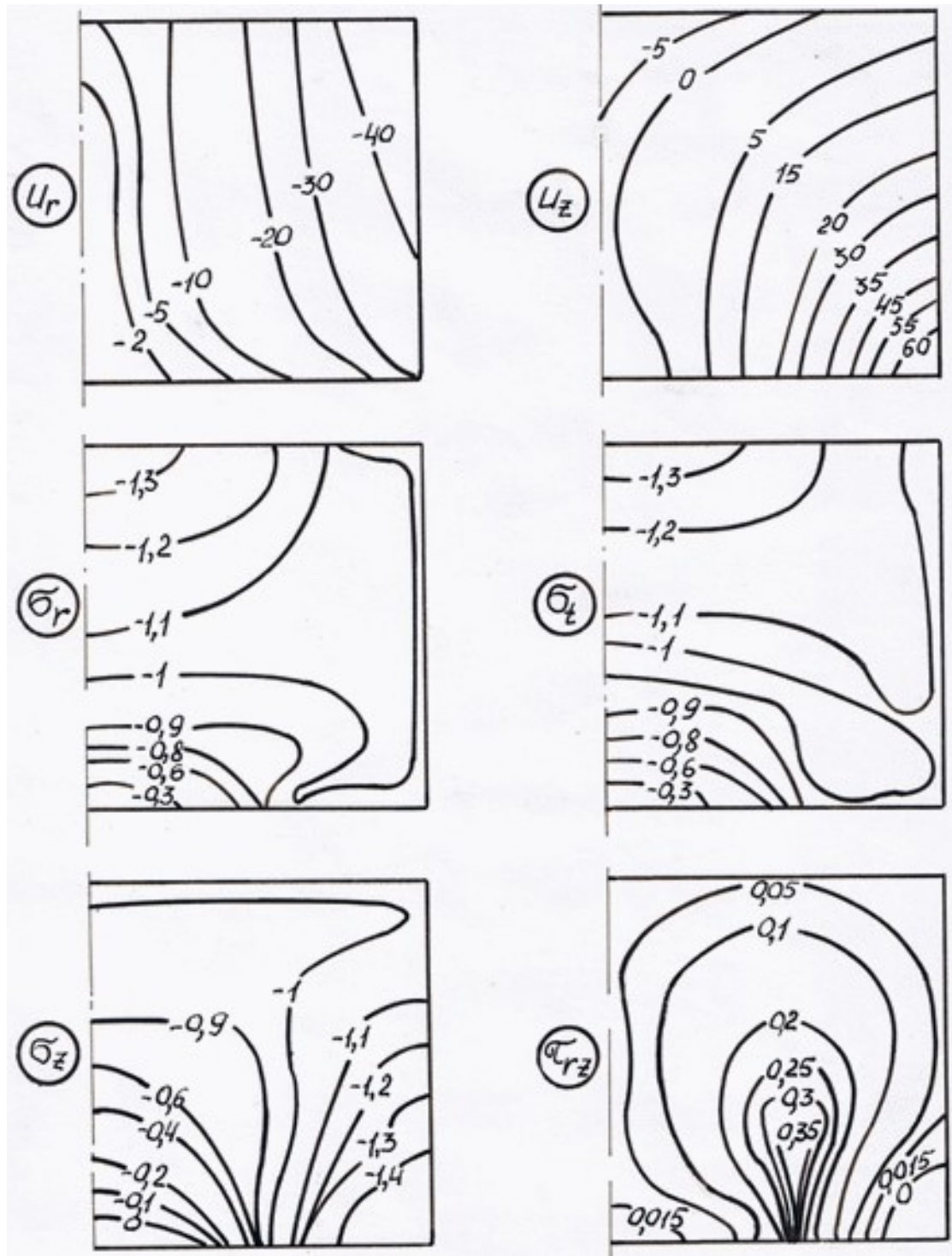


Рисунок 2.16. Изолинии перемещений (в микрометрах) и напряжений (делённых на  $p$ ) согласно расчёту по методу конечных элементов именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, размерами

$$a_1 = 30 \text{ мм,}$$

$$a = 55 \text{ мм,}$$

$$h = 60 \text{ мм}$$

из стекла К8 при давлениях

$$p = p_1 = 98 \text{ МПа.}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 167/556

Численная конечно-элементная проверка достоверности созданного общего (полу)степенного метода полностью подтверждает все три открытых этим методом принципиально новых явления и закона напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, причём с коренными отличиями от классических и других известных закономерностей напряжённо-деформированных состояний круглых пластин и круглых плит по соответствующим теориям при осесимметричном изгибе равномерными давлениями.

Во-первых, конечно-элементные эпюры радиального напряжения полностью подтверждают наличие существенного отклонения суммы значений радиального напряжения в центрах оснований от умноженного на минус два давления на боковую поверхность, в частности существенного отклонения суммы значений радиального напряжения в центрах оснований от нуля при отсутствии давления на боковую поверхность, и тем самым первое явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением.

Во-вторых, конечно-элементные эпюры осевого перемещения при распространении внешнего давления на боковую поверхность, то есть при равенстве давления на боковую поверхность внешнему давлению, показывают утонение и утолщение вдоль продольной оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из неорганического стекла К8 и органического стекла соответственно, что подтверждает второе явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением.

В-третьих, и это самое главное, конечно-элементные эпюры осевого перемещения показывают кратное превышение стрел прогиба круглой центральной части и всего полностью нагруженного основания стрелами прогиба круглой центральной части и всего частично нагруженного основания соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, что полностью подтверждает третье явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением.

Сопоставление представленных эпюр показывает, что результаты определения перемещений и напряжений по созданному общему (полу)степенному методу (см. рис. 2.13) и по методу конечных элементов (см. рис. 2.14) в основном вполне приемлемо с инженерной точностью согласуются между собой.

Однако метод конечных элементов показывает, что правильно по величине определённый созданным общим (полу)степенным методом достигаемый именно на цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей максимум  $\tau_{\max}$  сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$  смещён с середины толщины (высоты) в сторону частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, а главное, в малой окрестности края  $(a_1, 0)$  ненагруженной круглой центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, действует сдвиговое напряжение  $\tau_{rz}(r, z)$  величиной, весьма близкой к его максимуму  $\tau_{\max}$ .

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 168/556

Четвёртые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением

В-четвёртых, и это необходимо для правильного исследования прочности, конечно-элементная проверка достоверности общего (полу)степенного метода привела к открытию и обоснованию принципиально нового явления и закона смещения точки правильно по величине определённого созданным общим (полу)степенным методом достигаемого именно на цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей максимума  $\tau_{\max}$  сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$  с середины толщины (высоты) в сторону частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, причём в малой окрестности края  $(a_1, 0)$  ненагруженной круглой центральной части частично нагруженного основания тела (элемента) действует сдвиговое напряжение  $\tau_{rz}(r, z)$  величиной, весьма близкой к его максимуму  $\tau_{\max}$ , так как центральная часть частично нагруженного основания не нагружена, а повышенное равномерное противодавление действует лишь на периферическую его часть, так что именно на краю  $(a_1, 0)$  ненагруженной круглой центральной части частично нагруженного основания тела (элемента) имеет место по модулю превышающий внешнее давление скачок осевого напряжения и тем самым наибольшей по величине срез (сдвиг).

Следует заметить, что теория пластин вообще пренебрегает сдвиговым напряжением, а теория плит располагает точку максимума  $\tau_{\max}$  сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$  именно посередине толщины плиты и вообще не рассматривает смещения точки этого максимума с середины толщины плиты.

Тем самым открыты и обоснованы четвёртые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением.

Применительно к трём предыдущим открытым и обоснованным явлениям и законам напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением наибольший интерес представляет сопоставление результатов определения осевого перемещения  $u_z(r, z)$ , поскольку как раз таким путём можно досконально проверить достоверность наличия главного из открытых и обоснованных созданным общим (полу)степенным методом принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, которые коренным образом исправляют, развивают и заменяют классические и другие известные представления о закономерностях осесимметричного деформирования круглых пластин и круглых плит под равномерными давлениями, в особенности применительно к характеру деформирования оснований как оптических поверхностей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента.

Кроме того, рассмотрим существенно трёхмерный сплошной цилиндрический элемент, в частности светопрозрачный, как из неорганического стекла, так и из органического стекла, для которых коэффициент поперечной деформации Пуассона имеет существенно различные значения.

Эпюры осевых перемещений  $u_z(r, 0)$  и  $u_z(r, h)$  внутренней  $z = 0$  и внешней  $z = h$  оптических поверхностей соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента показаны на рис. 2.17.



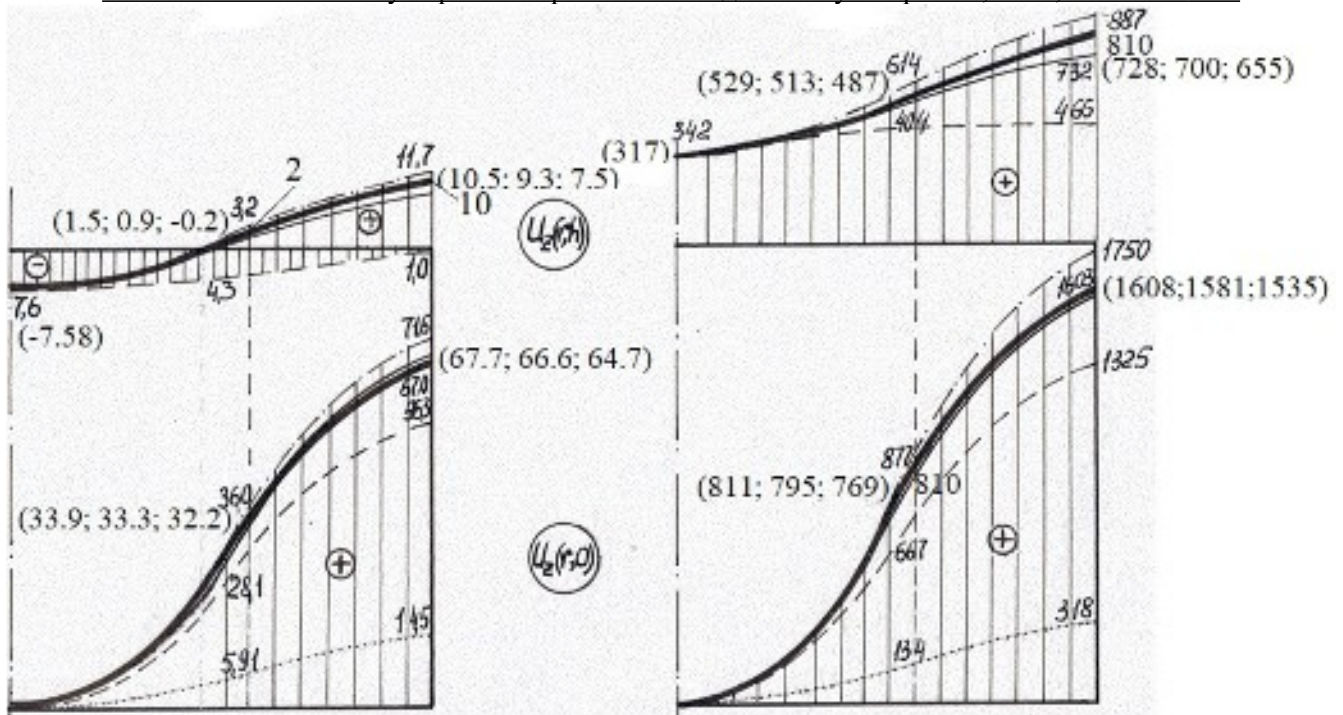


Рисунок 2.17. Сопоставление осевых перемещений (в микрометрах)  $u_z(r, 0)$  и  $u_z(r, h)$  внутренней  $z = 0$  и внешней  $z = h$  оптических поверхностей (оснований) соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента), в частности оптических поверхностей светопрозрачного элемента из неорганического стекла (слева) или органического стекла (справа), определённых по методу конечных элементов (толстая сплошная кривая), по созданному общему (полу)степенному методу, в частности с использованием двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения (тонкая сплошная кривая), по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей (тонкая штриховая кривая) и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения (тонкая штрихпунктирная кривая), с использованием однопараметрического метода устранения невязок (в круглых скобках итоги по методам 1, 2, 3 соответственно), и по теории пластин (тонкая пунктирная кривая).

Видно, что соответствующие значения осевого перемещения в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе из неорганического стекла или органического стекла, определяющие стрелы прогиба оснований и их центральных частей и определённые по методу конечных элементов и по созданному общему (полу)степенному методу, в частности с использованием однопараметрического метода устранения невязок по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения, а также с использованием двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения достаточно близки между собой. Эти значения принадлежат соответствующим более широким промежуткам между нижним и верхним соответственно значениями с использованием двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения соответственно.

Таким образом, расчёты по методу конечных элементов выявляют наличие в малой окрестности края  $(a_1, 0)$  ненагруженной внутренней поверхности круглой центральной части

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 170/556

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, величин сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$ , близких к его максимуму  $\tau_{max}$ , что можно рассматривать как местное возмущение напряжённо-деформированного состояния, соответствующего аналитическому решению по созданному общему (полу)степенному методу.

Тем самым конечно-элементная проверка достоверности созданного общего (полу)степенного метода привела к открытию четвёртых явления и закона напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением. Кроме того, расчёты по методу конечных элементов подтверждают как достаточную точность формул (2.80) – (2.83), (2.80') и (2.82') по созданному общему (полу)степенному методу, в частности с использованием однопараметрического метода устранения невязок по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения, а также с использованием двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, так и правильность открытых и обоснованных созданным общим (полу)степенным методом принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением.

## 2.15. Определение и анализ основного типа осесимметричных схем нагружения трёхмерного цилиндрического упругого тела, в частности светопрозрачного элемента

Рассмотрение всевозможных осесимметричных упругих задач для трёхмерного цилиндрического упругого тела показывает, что множество типов схем его нагружения с характерными линейными в силу принципа наложения (суперпозиции) зависимостями между ними образует иерархическую систему по степени элементарности и первичности, универсальности и общности.

Так, для решения общей задачи о равновесии цилиндра при произвольной осесимметричной нагрузке без объёмных сил и кручения достаточно ограничиться решением частных задач с одним свободным торцом (основанием).

Делением линейных размеров на высоту цилиндра  $h$  приходим к цилиндру единичной высоты

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq a, \\ 0 &\leq z \leq 1 \end{aligned}$$

с общим случаем упорядоченной совокупности шести граничных условий

$$(2.86)$$

$$\sigma_z(r, 0);$$

$$\tau_{rz}(r, 0);$$

$$\sigma_z(r, 1);$$

$$\tau_{rz}(r, 1);$$

$$\sigma_r(a, z);$$

$$\tau_{rz}(a, z),$$

которая является наложением (суперпозицией) равномерного растяжения вдоль оси

$$(2.87)$$

$$2a^{-2} \int_0^a \sigma_z(r, 0) r dr - \tau_{rz}(a, 0)/a;$$

$$0;$$

$$2a^{-2} \int_0^a \sigma_z(r, 0) r dr - \tau_{rz}(a, 0)/a;$$

$$0;$$

$$0;$$

$$0$$

и двух совокупностей с одним свободным торцом каждая:

$$(2.88)$$

$$0;$$

$$0;$$

$$\sigma_z(r, 1) - 2a^{-2} \int_0^a \sigma_z(r, 0) r dr + \tau_{rz}(a, 0)/a;$$

$$\tau_{rz}(r, 1);$$

$$\sigma_r(a, z);$$

$$\tau_{rz}(a, z) - (1 - z)\tau_{rz}(a, 0)$$

и также самоуравновешенной вместе с исходной совокупностью

$$(2.89)$$

$$\sigma_z(r, 0) - 2a^{-2} \int_0^a \sigma_z(r, 0) r dr + \tau_{rz}(a, 0)/a;$$

$$\tau_{rz}(r, 0);$$

$$0;$$

$$0;$$

$$0;$$

$$(1 - z)\tau_{rz}(a, 0).$$

При том же условии для обеих совокупностей с одним свободным торцом каждая выполнен и закон парности сдвиговых напряжений.

В случае полого цилиндра

$$0 < a_1 = a(1) \leq r \leq a,$$

$$0 \leq z \leq 1$$

появляются дополнительные граничные условия

$$(2.90)$$

$$\sigma_r(a_1, z);$$

$$\tau_{rz}(a_1, z),$$

последнее из которых разлагается аналогично  $\tau_{rz}(a, z)$ , а взамен

$$2a^{-2} \int_0^a \sigma_z(r, 0) r dr - \tau_{rz}(a, 0)/a$$

появляется

$$(2.91)$$

$$2(a^2 - a_1^2)^{-1} \int_{a(1)}^a \sigma_z(r, 0) r dr + a_1(a^2 - a_1^2)^{-1} \tau_{rz}(a_1, 0) - a(a^2 - a_1^2)^{-1} \tau_{rz}(a, 0).$$

Следовательно, для решения общей задачи о равновесии цилиндра достаточно решить две задачи со свободным торцом каждая.

Безотносительно проблемы существования назовём основным для произвольного общего типа схем нагружения такой тип, линейные комбинации схем которого образуют общий тип.

Для единственности основного типа дополнительно потребуем, чтобы относящиеся к нему схемы нагружения удовлетворяли единому (не только общему, но и цельному) для него классификационному критерию и чтобы этот тип был минимальным, не включающим именно строго меньшего подтипа с аналогичными свойствами.

Требование цельности предъявляется с тем, чтобы тип не был искусственным объединением подтипов с более цельными критериями, например включающих схемы с произвольными нагружениями одного торца и либо прилежащей, либо противолежащей из половин боковой поверхности цилиндра, разделённых срединной плоскостью.

Помимо логических, это требование связано с практическими соображениями (компромисс максимально полезной конкретизации классификационного критерия с возможной минимальностью количества слагаемых в линейных комбинациях разложения схемы нагружения общего типа).

Если, кроме того, полагать, что умножение схемы на произвольную постоянную не выводит схему за пределы типа, то достаточно при разложениях схем ограничиться их алгебраическими суммами.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 172/556

В рассматриваемом случае простейшее для практики разложение произвольной схемы нагружения на схемы типа  $F_g$  с одним свободным торцом предусматривает использование схемы нагружения в задаче Ламе [358] (тип L), вообще говоря, не относящейся к  $F_g$ .

Но не составляет труда разложить схему типа L на две взаимно зеркально симметричные относительно срединной плоскости цилиндрического тела уже относящиеся к типу  $F_g$  схемы поддержки тела по боковой поверхности параболическими распределениями сдвиговых напряжений, уравнивающих требуемое равномерное нагружение каждого из торцов в отдельности.

Поэтому основным для общего типа схем нагружения в осесимметричной упругой задаче для трёхмерного цилиндрического тела является тип  $F_g$  схем с одним свободным торцом.

Ведь при любом сокращении как потенциально нагруженной поверхности, так и меры общности нагрузок утрачивается линейная выражаемость даже самого типа  $F_g$ , не говоря уже об общем типе  $G_g$  в этой задаче.

Рассмотрим произвольную схему нагружения типа  $F_g$  со свободным торцом  $z = 0$

$$(2.92)$$

$$0;$$

$$0;$$

$$\sigma_z(r, 1);$$

$$\tau_{rz}(r, 1);$$

$$\sigma_r(a, z);$$

$$\tau_{rz}(a, z)$$

при выполненных уравнении равновесия

$$(2.93)$$

$$\int_0^a \sigma_z(r, 1) r dr + a \int_0^1 \tau_{rz}(a, z) dz = 0$$

и условиях парности сдвиговых напряжений

$$(2.94)$$

$$\tau_{rz}(a, 0) = 0;$$

$$\tau_{rz}(0, 1) = 0;$$

$$\tau_{rz}(r, 1)|_{r=a} = \tau_{rz}(a, z)|_{z=1}.$$

Можно показать (см. Приложение П.2), что выражение функции напряжений (2.16) через две простые числовые последовательности  $a_{0j}$  и  $a_{1j}$  благодаря наличию свободного торца принимает более конкретный вид ( $[M] = \text{entier } M$  – целая часть числа  $M$ )

$$(2.95)$$

$$L(r, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^i i!^{-2} j!^{-1} 2^{-2i} \{[(j+1)/2] - \mu\} (i + [(j+1)/2] - \mu)^{-1} (2i+j)! a_{2i+j} r^{2i} z^j,$$

выраженный уже через одну простую числовую последовательность  $a_j$ .

Если ненулевые граничные условия разложимы в степенные ряды по соответствующим переменным  $r, z$ , то полная линейная независимость степенных функций, очевидным образом следующая из известной единственности разложения некоторой функции в степенной ряд, приводит к четырём бесконечным подсистемам линейных алгебраических уравнений относительно элементов единственной последовательности  $a_j$ .

Общие решения однородных аналогов этих подсистем линейно выражаются через последовательные степени нулей двух функций Бесселя и двух их аналогов.

Это позволяет не только устанавливать наличие или отсутствие точного решения поставленной задачи в рассматриваемом классе функций, но и сразу находить это решение, если оно существует.

В противоречащем случае остаётся ограничиться приближённым решением с конечной суммой вместо ряда (2.95).

В задаче с полиномиальными граничными условиями для цилиндра

$$(2.96)$$

$$L(r, z) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{2n-2i} (-1)^i i!^{-2} j!^{-1} 2^{-2i} \{[(j+1)/2] - \mu\} \{i + [(j+1)/2] - \mu\}^{-1} (2i+j)! a_{2i+j} r^{2i} z^j,$$

представления (2.17) – (2.20) дают при не меньшем 2 целом числе  $n$  в общей сложности  $6n - 7$  уравнений с  $2n - 2$  неизвестными  $a_3, a_4, \dots, a_{2n}$ , откуда ясно, что далеко не для каждой системы

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 173/556

наперёд заданных независимых полиномиальных граничных условий существует полиномиальное решение соответствующей осесимметричной задачи теории упругости.

Точнее, для существования полиномиального её решения для трёхмерного цилиндра с равной  $2n$  степенью функции  $L(r, z)$  необходимо, а в совокупности достаточно, чтобы граничные условия в напряжениях были полиномиальными, не содержали степеней сверх определяемых дифференциальными операторами Лява и были связаны между собой  $4n - 5$  дополнительными соотношениями.

В противоречащем случае точное полиномиальное решение соответствующей задачи отсутствует и необходимо ограничиться приближённым решением.

Алгоритм поиска становится исчерпывающим при выборе такого наименьшего целого числа  $n$ , что  $2n - 3$  не меньше каждой из степеней

(2.97)

$$\sigma_z(r, 1), \tau_{rz}(r, 1), \sigma_r(a, z), z\tau_{rz}(a, z).$$

Дополнительное увеличение не меньшего 2 целого числа  $n$  ничего не даёт ввиду аннулирования коэффициентов (2.96) с избыточными номерами.

Следовательно, граничные условия могут ограничивать степень функции напряжений не только снизу, но и сверху.

Поскольку классы функций в граничных условиях соответствуют таковым в функции напряжений, то едва ли есть решения, отличные от степенных и удовлетворяющие принципу допустимой простоты.

Отсюда ясна причина крайней ограниченности совокупности известных точных упругих решений [191].

Так, задача Ламе [358] для сплошного цилиндра

$$\sigma_r(a, z) = \sigma = \text{constant}$$

или в обобщённом варианте линейного распределения [165]

(2.98)

$$\sigma_r(a, z) = \sigma + \sigma'z$$

с двумя постоянными  $\sigma$  и  $\sigma'$  приводит к совокупности однородных подсистем (П.12) – (П.15), допускающих тривиальное решение

$$a_5 = a_6 = \dots = a_{2n} = 0,$$

причём для более общего случая (2.98) система первых двух отделённых уравнений (П.10)

$$(1 + \mu)(2 - \mu)^{-1}3!2^{-1}a_3 = \sigma;$$

$$(1 + \mu)(2 - \mu)^{-1}4!2^{-1}a_4 = \sigma'$$

приводит представление (2.16) к виду

(2.99)

$$L(r, z) = a_{00} + a_{01}z + a_{02}z^2 + 3^{-1}(2 - \mu)(1 + \mu)^{-1}\sigma z^3 + 12^{-1}(2 - \mu)(1 + \mu)^{-1}\sigma'z^4 + 2^{-1}\mu(1 - \mu)^{-1}a_{02}r^2 - 2^{-1}(1 - \mu)(1 + \mu)^{-1}\sigma r^2z - 4^{-1}(1 - \mu)(1 + \mu)^{-1}\sigma' r^2z^2 - 32^{-1}\mu(1 + \mu)^{-1}\sigma' r^4,$$

дающему известное решение. Добавление в (2.98) произвольного нелинейного слагаемого, например  $\sigma''z^2$  ( $\sigma'' \neq 0$ ), приводит к появлению в ранее однородной подсистеме (П.14) неоднородного уравнения, в данном случае

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i i!^{-2} a'_{2i+5} r^{2i} z^j = 32^{-1} \sigma'' a^5,$$

что в соответствии с изложенным лишает задачу полиномиального решения.

Действительно, корни уравнения (П.16) имеют вид

$$x = 4^{-1} x_{0m}^2,$$

а корни уравнения (П.17) имеют вид

$$x = 4^{-1} x_{1m}^2,$$

где

$x_{0m}$  – нули чётной функции  $J_0$ ,

$x_{1m}$  – нули нечётной функции  $J_1$ .

Общее решение неоднородной подсистемы (П.14) есть

$$a'_5 = 32^{-1} a^5 \sigma'' + 16^{-1} A_1 x_{0m}^4;$$

$$a'_{2k} = 2^{-2k} A_2 x_{0p}^{2k} \quad (k = 3, 4, \dots);$$

$$a'_{2k+1} = 2^{-2k} A_1 x_{0m}^{2k} \quad (k = 3, 4, \dots).$$

Общее решение однородной подсистемы (П.15) есть

$$a'_{2k+1} = 2^{-2k} B_1 x_{1q}^{2k} \quad (k = 2, 3, \dots);$$

$$a'_{2k} = 2^{-2k} B_2 x_{1s}^{2k} \quad (k = 3, 4, \dots).$$

Ввиду попарного совпадения левых частей для чётных индексов при  $k = 3, 4, \dots$

$$2^{-2k} A_2 x_{0p}^{2k} = 2^{-2k} B_2 x_{1s}^{2k},$$

откуда либо

$$(x_{0p}/x_{1s})^{2k} = B_2/A_2$$

независимо от  $k$ , то есть отношение  $x_{0p}/x_{1s}$  равно или 0, или 1, или -1, что невозможно, либо

$$A_2 = B_2 = 0.$$

Аналогично для нечётных индексов

$$A_1 = B_1 = 0$$

и общее решение подсистемы (П.15) сводится к тривиальному нулевому, не удовлетворяющему неоднородной подсистеме (П.14).

Этим показана предельная роль линейного обобщения задачи Ламе [358].

И вообще ясно, что каждая из подсистем (П.12) – (П.15) имеет свои собственные решения, а для точного решения упругой задачи необходимо и достаточно маловероятное при наперёд заданных граничных условиях наличие именно единого (общего, совместного) решения сразу всех четырёх подсистем.

Заметим, что здесь рассматривается основная в осесимметричной задаче схема нагружения с одним свободным основанием и отсутствием ограничений на граничные условия на другом основании и на боковой поверхности существенно трёхмерного цилиндрического тела.

Как и выше для схем нагружения с нормальными равномерно распределёнными усилиями, действующими на оба торца (плоских основания), так и применительно к основной в общей осесимметричной упругой задаче без объёмных сил и кручения схеме нагружения с одним свободным основанием и отсутствием ограничений на граничные условия на другом основании и на боковой поверхности существенно трёхмерного сплошного или полого (кольцевого) цилиндрического тела может быть чисто дедуктивно получен соответствующий вид бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$ .

Известные замкнутые решения теории пластин и теории плит и общий степенной метод обобщаются общим полустепенным методом с любыми конечными разложениями бигармонических безразмерных функций напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для круглой центральной и кольцевой периферической частей (сплошного центрального и кольцевого периферического трёхмерных цилиндрических элементов) по произвольному числу неотрицательных степеней любой из двух переменных осесимметричной задачи теории упругости с коэффициентами в виде произвольных четырежды дифференцируемых функций другой переменной. Такими ввиду асимметрии сущностей и отсутствия взаимозаменяемости ролей обеих переменных  $\rho$  и  $\zeta$  осесимметричной задачи теории упругости без объёмных сил и кручения являются две принципиально различные разновидности представлений (2.28) и (2.29) соответственно:

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n f_i(\zeta) \rho^i,$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n g_i(\rho) \zeta^i.$$

Рассмотрим вначале представление (2.28).

Условие бигармоничности (2.25)

$$\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) = f_1(\zeta) \rho^{-3} + [2(\partial^2/\partial \zeta^2) f_1(\zeta) + 9f_3(\zeta)] \rho^{-1} + \sum_{i=0}^n [(\partial^4/\partial \zeta^4) f_i(\zeta) + 2(i+2)^2 (\partial^2/\partial \zeta^2) f_{i+2}(\zeta) + (i+2)^2 (i+4)^2 f_{i+4}(\zeta)] \rho^i = 0,$$

в котором тождественно по  $\zeta$

$$f_i(\zeta) = 0, \quad i > n,$$

приводит движением от меньших  $n$  к большим к тождественному аннулированию  $f_i(\zeta)$  со всеми нечётными индексами:

$$f_1(\zeta) = f_3(\zeta) = f_5(\zeta) = \dots = f_{2[(n-1)/2]+1}(\zeta) = 0,$$

где  $[x]$  – целая часть действительного числа  $x$ .

Заменяя  $[n/2]$  на  $n$ , получаем из (2.28) менее общее представление (2.30)

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n f_i(\zeta) \rho^{2i}.$$

Опять-таки из условия бигармоничности (2.25), но, в отличие от предыдущего случая, двигаясь от больших  $n$  к меньшим, получаем условие

$$(\partial^4/\partial\zeta^4)f_n(\zeta) = 0,$$

откуда  $f_n(\zeta)$  – произвольный многочлен третьей степени от  $\zeta$ ; затем выясняем, что  $f_{n-1}(\zeta)$  – произвольный многочлен пятой степени от  $\zeta$ , и т. д. То есть  $f_i(\zeta)$  – произвольный многочлен степени  $2n + 3 - 2i$  от  $\zeta$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). В конечном счёте  $f_0(\zeta)$  – произвольный многочлен степени  $2n + 3$  от  $\zeta$ . Так что из (2.30) получаем ещё менее общее представление (2.31)

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n+3-2i} a_{ij} \zeta^j.$$

Заметим, что мы до сих пор пользовались лишь некоторыми следствиями бигармоничности  $\Lambda(\rho, \zeta)$ , в то время как она не только приводит дедуктивно от представления (2.28) к представлению (2.31), но и накладывает на коэффициенты общего вида  $a_{ij}$  с любыми индексами представления (2.31) линейные зависимости согласно тождеству (2.32) по  $\rho$  и  $\zeta$ :

$$\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n+1-2i} [(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)a_{i,j+4} + 8(i+1)^2(j+1)(j+2)a_{i+1,j+2} + 16(i+1)^2(i+2)^2 a_{i+2,j}] \zeta^j = 0.$$

В частности, тождество (2.32) при  $i = n - 1, j = 0$  даёт

$$24a_{n-1,4} + 16n^2 a_{n2} = 0,$$

откуда

$$a_{n-1,4} = - (2/3)n^2 a_{n2}.$$

Последовательное в порядке убывания  $i$  рассмотрение тождества (2.32) при

$$i = n - k, j = 2k + 2 \quad (k = 2, 3, 4, \dots, n)$$

ведёт к строго доказываемым по методу математической индукции редуцированным формулам (2.35) по  $j$ :

$$a_{n-k,2k+2} = (-1)^k 2^{2k} / (2k + 1)! n!^2 / (n - k)!^2 a_{n2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Представляется логичным, сохраняя условие (2.25) бигармоничности  $\Lambda(\rho, \zeta)$ , изучить возможность точного выполнения граничных условий (2.27) на основании  $\zeta = 0$ .

Из (2.31) благодаря (2.26) получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_\zeta(\rho, \zeta) &= 6(1 - \mu)a_{n3}\rho^{2n} + \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n-2i} [4(i+1)^2(j+1)(2 - \mu)a_{i+1,j+1} + (j+1)(j+2)(1 - \mu)a_{i,j+3}] \zeta^j; \\ \tau_{\rho\zeta}(\rho, \zeta) &= -\rho^{2n-1}(4n\mu a_{n2} + 12n\mu a_{n3}\zeta) + \sum_{i=1}^{n-1} \rho^{2i-1} \sum_{j=0}^{2n+1-2i} [8i(i+1)^2(1 - \mu)a_{i+1,j} - 2i(j+1)(j+2)\mu a_{i,j+2}] \zeta^j. \end{aligned}$$

Тождество (2.27) по  $\rho$

$$\tau_{\rho\zeta}(\rho, 0) = 0$$

даёт

$$\begin{aligned} -\rho^{2n-1}4n\mu a_{n2} + \sum_{i=1}^{n-1} \rho^{2i-1} [8i(i+1)^2(1 - \mu)a_{i+1,0} - 4i\mu a_{i2}] &= 0; \\ a_{n2} &= 0, \\ 2(i+1)^2(1 - \mu)a_{i+1,0} - \mu a_{i2} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1), \\ a_{i2} &= 2(i+1)^2(1 - \mu)/\mu a_{i+1,0} \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1). \end{aligned}$$

Тождество (2.27) по  $\rho$

$$\sigma_\zeta(\rho, 0) = 0$$

даёт

$$\begin{aligned} 6(1 - \mu)a_{n3}\rho^{2n} + \sum_{i=0}^{n-1} \rho^{2i} [4(i+1)^2(2 - \mu)a_{i+1,1} + 2(1 - \mu)a_{i3}] &= 0; \\ a_{n3} &= 0, \\ 2(i+1)^2(2 - \mu)a_{i+1,1} + (1 - \mu)a_{i3} &= 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n - 1), \\ a_{i3} &= -2(i+1)^2(2 - \mu)/(1 - \mu) a_{i+1,1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n - 1). \end{aligned}$$

В частности, тождество (2.32) при  $i = n - 1, j = 0$  даёт

$$24a_{n-1,4} + 16n^2 a_{n2} = 0,$$

откуда

$$a_{n-1,4} = - (2/3)n^2 a_{n2}.$$

Последовательное в порядке убывания  $i$  рассмотрение тождества (2.32) при

$$i = n - k, j = 2k + 2 \quad (k = 2, 3, 4, \dots, n)$$

ведёт к строго доказываемым по методу математической индукции редуцированным формулам (2.35) по  $j$ :

$$a_{n-k,2k+2} = (-1)^k 2^{2k} / (2k + 1)! n!^2 / (n - k)!^2 a_{n2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Теперь путём последовательного применения (2.32) приходим к условиям

$$a_{n-k,2k+2} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

$$a_{n-k,2k+3} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n),$$

что в представлении (2.31) ведёт к понижению степеней многочленов  $f_i(\zeta)$  на два:

$$(2.38')$$

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n+1-2i} a_{ij} \zeta^j.$$

Заметим, что представление (2.38') получено чисто дедуктивным путём из (2.28)

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n f_i(\zeta) \rho^i.$$

Теперь рассмотрим (2.29)

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n g_i(\rho) \zeta^i$$

как другую разновидность представления безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$ .

Условие её бигармоничности (2.25)

$$\nabla^2 \nabla^2 \Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n \{ (\partial^4 / \partial \rho^4) g_i(\rho) + 2\rho^{-1} (\partial^3 / \partial \rho^3) g_i(\rho) - \rho^{-2} (\partial^2 / \partial \rho^2) g_i(\rho) + \rho^{-3} (\partial / \partial \rho) g_i(\rho) + 2(i+1)(i+2) [(\partial^2 / \partial \rho^2) g_{i+2}(\rho) + \rho^{-1} (\partial / \partial \rho) g_{i+2}(\rho)] + (i+1)(i+2)(i+3)(i+4) g_{i+4}(\rho) \} \zeta^i = 0,$$

в котором теперь тождественно по  $\rho$

$$g_i(\rho) = 0 \quad (i > n),$$

ведёт к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $g_i(\rho)$ .

Последовательное (в направлении убывания  $i$ ) её решение даёт

$$g_i(\rho) = \sum_{j=0}^{1+(n-i)/2} (a_{ij} \rho^{2j} + b_{ij} \rho^{2j} \ln \rho) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n),$$

где и далее

$$[(n-i)/2]$$

есть обозначенная с помощью квадратных скобок целая часть числа

$$(n-i)/2.$$

Преобразуем полученное представление:

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n \zeta^i \sum_{j=0}^{1+(n-i)/2} (a_{ij} \rho^{2j} + b_{ij} \rho^{2j} \ln \rho) = \sum_{i,j \geq 0}^{2j+i \leq n+2} (a_{ij} \rho^{2j} + b_{ij} \rho^{2j} \ln \rho) \zeta^i.$$

Меняя ролями  $i$  и  $j$ , а также заменяя  $n+1$  на  $n$ , получаем (2.39)

$$\Lambda(\rho, \zeta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{2n-2i} (a_{ij} \rho^{2i} + b_{ij} \rho^{2i} \ln \rho) \zeta^j = \sum_{i=0}^n \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n-2i} (a_{ij} + b_{ij} \ln \rho) \zeta^j.$$

Изложенное выше относится и к круглой центральной, и к кольцевой периферической частям трёхмерного цилиндрического тела (элемента). Они различаются тем, что безразмерный радиус  $\rho$  в круглой центральной части может обращаться в нуль, а в кольцевой периферической части не может обращаться в нуль.

Ввиду представления (2.39) можно ожидать, что для круглой центральной части трёхмерного цилиндрического тела (элемента) все  $b_{ij}$  обращаются в нуль:

$$b_{ij} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n; j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 2i),$$

и представление (2.39) обобщается представлением (2.38'). Строгое доказательство таково.

Ввиду представления (2.39) тождество по  $\zeta$

$$u_\rho(0, \zeta) = 0$$

даёт тождество по  $\zeta$

$$\sum_{j=1}^{2n} b_{0j} \zeta^{j-1} = 0,$$

откуда

$$b_{0j} = 0$$

$$(j = 1, 2, \dots, 2n).$$

Конечность  $u_\zeta(0, \zeta)$  приводит к равенствам

$$(j+1)(j+2)(1-2\mu)b_{0,j+2} + 8(1-\mu)b_{1j} = 0$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots, 2n-2),$$

которые вместе с предыдущими позволяют найти

$$b_{1j} = 0$$

$$(j = 0, 1, 2, \dots, 2n-2).$$

Наконец, условия бигармоничности (2.25)

$$(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)b_{i,j+4} + 8(i+1)^2(j+1)(j+2)b_{i+1,j+2} + 16(i+1)^2(i+2)^2b_{i+2,j} = 0$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n-2;$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, 2n-4-2i)$$



устанавливают:

при  $i = 0; j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 4$

$$b_{2j} = 0 \\ (j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 4);$$

при  $i = 1; j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 6$

$$b_{3j} = 0 \\ (j = 0, 1, 2, \dots, 2n - 6);$$

и так далее, наконец,

при  $i = n - 2; j = 0$

$$b_{n0} = 0.$$

Следовательно, для круглой центральной части трёхмерного сплошного цилиндрического тела

$$\Lambda(\rho, \zeta) = b_{00} \ln \rho + \sum_{i=0}^n \rho^{2i} \sum_{j=0}^{2n-2i} a_{ij} \zeta^j.$$

Однако первое слагаемое не сохраняется дифференциальными операторами (2.26) и не влияет на перемещения и напряжения, поэтому его можно опустить без всякого ограничения общности.

В итоге действительно получаем, что безразмерная функция напряжений  $\Lambda(\rho, \zeta)$  для круглой центральной части трёхмерного цилиндрического тела (элемента) имеет вид (2.38').

Для кольцевой периферической же части трёхмерного сплошного цилиндрического тела эти соображения не имеют места и должно использоваться представление (2.39).

С учётом (2.97) алгоритм поиска числа  $n$  становится исчерпывающим при выборе такого наименьшего целого числа  $n$ , что  $2n - 3$  не меньше каждой из степеней

$$\sigma_z(r, 1), \tau_{rz}(r, 1), \sigma_r(a, z), z\tau_{rz}(a, z)$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела радиусом  $a$  и единичной высотой и  $2n - 3$  не меньше каждой из степеней

$$\sigma_z(r, 1), \tau_{rz}(r, 1), \sigma_r(a_1, z), z\tau_{rz}(a_1, z), \sigma_r(a, z), z\tau_{rz}(a, z)$$

для именно существенно трёхмерного полого (кольцевого) цилиндрического тела внутренним радиусом  $a_1$ , внешним радиусом  $a$  и единичной высотой.

И вновь граничные условия ограничивают степень функции напряжений не только снизу, но и сверху.

Более того, именно основная в общей осесимметричной упругой задаче без объёмных сил и кручения схема нагружения с одним свободным основанием и отсутствием ограничений на граничные условия на другом основании и на боковой поверхности существенно трёхмерного сплошного или полого (кольцевого) цилиндрического тела придаёт последнему выводу всеобщность.

Ведь в предыдущих схемах нагружения граничные условия на обоих основаниях были равномерными, постоянными, то есть многочленами нулевой степени, так что такое ограничение степени функции напряжений сверху представлялось весьма естественным, что существенно сужало общность вывода о таком ограничении.

А в настоящей основной схеме нагружения свободен лишь один торец (плоское основание), тогда как на граничные условия на другом плоском основании (как и на боковой поверхности) никаких ограничений не накладывается.

Поэтому такие условия в принципе могут выражаться, например, многочленами сколь угодно высоких степеней.

Коэффициенты общих видов  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  с произвольными индексами выбираются в соответствии с граничными условиями осесимметричного нагружения существенно трёхмерного сплошного или полого (кольцевого) цилиндрического тела.

Ясно, что такое представление, вообще говоря, не позволяет обеспечить точное удовлетворение любых наперёд заданных граничных условий.

Поэтому в конкретных задачах эти условия удовлетворяются приближённо, а именно с точностью до невязок, аналогичных невязкам сопряжения, рассмотренным в работе Л. Б. Цвика [339].

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 178/556

Как и при других схемах осесимметричного нагружения существенно трёхмерного сплошного или полого (кольцевого) цилиндрического тела, используются метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и метод коллокационной минимизации невязок сопряжения, а также созданные двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения и однопараметрический метод устранения минимизированных невязок сопряжения.

Для основной (в общей осесимметричной упругой задаче без объёмных сил и кручения) схемы нагружения с одним свободным основанием выявляются различия в функциях напряжений для сплошного и полого (кольцевого) трёхмерных цилиндрических тел.

Поскольку в сплошном трёхмерном цилиндрическом теле компоненты напряжённо-деформированного состояния непрерывны на оси, то можно ожидать, что в представлении для сплошного трёхмерного цилиндрического тела должны отсутствовать неалгебраические слагаемые, содержащие  $\ln r$ .

Это может быть доказано вполне строго подобно тому, как это было сделано при рассмотрении других схем нагружения существенно трёхмерного цилиндрического тела.

Для полого (кольцевого) трёхмерного цилиндрического тела эти соображения не имеют места и требуется рассматривать представления с неалгебраическими слагаемыми, включающими  $\ln r$ .

Необходимость их учёта показывается известными решениями для кольцевых пластин.

Решения же и для круглой пластины, опёртой по окружности меньшего радиуса либо на широкое кольцо, показывают, что и для таких случаев опирания полого (кольцевого) трёхмерного цилиндрического тела понадобится учитывать представления бигармонической безразмерной функции напряжений Лява  $\Lambda(\rho, \zeta)$  с неалгебраическими слагаемыми, включающими  $\ln r$ .

В целом следует отметить, что полученные формулы по созданному общему (полу)степенному методу, в частности по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, дают все известные [3, 191, 195] решения для изгиба свободно опёртых и жёстко защемлённых по краю круглых плит под равномерным давлением на одно основание.

Отличия формул по созданному общему (полу)степенному методу состоят в приемлемой терминологии (среднеквадратичная минимизация невязок сопряжения взамен аннулирования погонных сил и моментов на краю, заимствованного из теории пластин), в использовании при решении каждой задачи всех трёх методов минимизации невязок сопряжения (метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей ранее не применялся) с возможной самопроверяемостью результатов применения общего (полу)степенного метода, а главное, в принципиальном отказе от характерных для теории пластин и даже теории плит ограничений относительной толщины пластины или плиты.

Например, в задаче об опирании плиты дополнительные по сравнению с даваемыми теорией пластин слагаемые в формулах для наибольших радиального и окружного напряжений в центре свободного основания равны именно невязкам на краю плиты, различным при разных способах опирания и, в частности, аннулирующимся на основаниях по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения.

Поэтому можно предположить приемлемость формул теории пластин именно и только для этих напряжений в данной задаче как общей основы результатов применения трёх методов минимизации невязок сопряжения при общем (полу)степенном методе.

В задачах с усложнёнными конфигурациями или скачками нагрузок общий (полу)степенной метод предусматривает сопряжение решений для соответствующих макроэлементов разбиения с минимизацией и последующим устранением обобщённых невязок сопряжения (не только со смежными макроэлементами, но и с граничными условиями) по созданному однопараметрическому методу устранения минимизированных невязок сопряжения.

Затем определяются перемещения и напряжения в каждой точке тела, устанавливается равносильное (эквивалентное) напряжение (по приемлемому критерию прочности) и его

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 179/556

минимум, для прочности приравняемый допускаемому или предельному напряжению и соответствующий рациональному проектированию конструктивного элемента.

При необходимости в связанных задачах вводятся в рассмотрение характеристики герметичности, жёсткости, оптики и другие основные рабочие параметры и выполняется их комплексная оптимизация.

Общий (полу)степенной метод является принципиально точным и позволяет отыскать точное (полу)степенное решение данной задачи (если оно существует) или другой задачи, близкой к решаемой задаче (схемы нагружения отличаются минимизированными невязками).

Простая оценка приемлемости решения даётся отношениями максимумов модулей невязок в напряжениях и перемещениях к максимумам модулей самих напряжений и перемещений.

Устранение невязок сопряжения лишает решение принципиальной точности (вносятся нарушения уравнений равновесия и совместности деформаций), но повышает точность определения напряжений и поэтому точность решения именно данной задачи прочности, так как напряжения на поверхности тела, где обычно и достигается их максимум, точно удовлетворяют всей совокупности граничных условий (в напряжениях, перемещениях или смешанного типа).

Таким образом, сущность общего (полу)степенного метода решения задач прочности с кусочно-гладкими граничными условиями применительно к типовым элементам конструкций в технике высоких давлений заключается в поэтапном точном или приближённом удовлетворении полученного общего представления бигармонической функции напряжений граничным условиям решаемой задачи с последующими минимизацией и устранением невязок сопряжения и обеспечением минимакса равносильного (эквивалентного) напряжения по приемлемому критерию прочности.

## **2.16. Сущность общего интегрального метода и как интегральной модификации созданной аналитической методологии макроэлементов**

Крайне ограниченный круг известных точных решений пространственных осесимметричных задач прочности, а также практика применения общего (полу)степенного метода показывают, что существование точного решения задачи с произвольными наперёд заданными граничными условиями встречается сравнительно редко. Получение приближённого решения именно данной задачи (а не близкой к ней с точным решением), аналогичного даваемому общим (полу)степенным методом как (полу)степенной модификацией аналитической методологии макроэлементов с устранением минимизированных невязок сопряжения, можно резко упростить по сравнению с общим (полу)степенным методом.

При этом отпадает необходимость разложений граничных условий в (полу)степенные ряды, снимается проблема такой представимости, нет надобности в разбиениях тела на макроэлементы и в сопряжении решений для смежных макроэлементов.

Кроме того, устранение минимизированных невязок сопряжения может вносить нарушения в уравнения равновесия и совместности деформаций, что, оправдываясь повышением точности определения напряжений и точности решения именно данной задачи, достаточно, но не является необходимым для точного выполнения заданных граничных условий.

Точное выполнение заданных граничных условий становится уже не завершающим, а начальным действием общего интегрального метода как интегральной модификации аналитической методологии макроэлементов.

Общий интегральный метод без отказа от принципиальной точности и без внесения заведомых погрешностей использует наиболее сложное уравнение совместности деформаций лишь для оценки точности решения.

Общий интегральный метод является обобщением различных подходов, характерных для полуобратных методов, частично учитывающих граничные условия, и, в отличие от общего (полу)степенного метода с дополнительно вводимой искусственной функцией напряжений Лява, использует сдвиговое напряжение как именно естественную функцию напряжений.

## 2.17. Развитие общего интегрального метода применительно к решению осесимметричных упругих задач без объёмных сил и кручения для трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов

Рассмотрим радиальное  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$ , осевое  $\sigma_z(r, z)$  и сдвиговое  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжения осесимметричной упругой задачи без объёмных сил и кручения для цилиндрического макроэлемента

$$\begin{aligned} a \leq r \leq b, \\ c \leq z \leq d \end{aligned}$$

с  $a \geq 0$  и произвольными заданными в напряжениях граничными условиями

$$\sigma_r(a, z), \tau_{rz}(a, z), \sigma_r(b, z), \tau_{rz}(b, z), \sigma_z(r, c), \tau_{rz}(r, c), \sigma_z(r, d), \tau_{rz}(r, d),$$

уравновешивающими макроэлемент, удовлетворяющими закону парности сдвиговых напряжений и обеспечивающими существование последующих производных и интегралов, для чего достаточна кусочная гладкость всех этих условий вместе с их вторыми производными.

Уравнения равновесия [195]

$$(2.101)$$

$$\partial\sigma_r(r, z)/\partial r + \partial\tau_{rz}(r, z)/\partial z + r^{-1}[\sigma_t(r, z) - \sigma_r(r, z)] = 0;$$

$$(2.102)$$

$$\partial\tau_{rz}(r, z)/\partial r + \partial\sigma_z(r, z)/\partial z + r^{-1}\tau_{rz}(r, z) = 0$$

и уравнения совместности деформаций в напряжениях [195]

$$(2.103)$$

$$(\partial/\partial r)\{\sigma_t(r, z) - \mu[\sigma_r(r, z) + \sigma_z(r, z)]\} + (1 + \mu)r^{-1}[\sigma_t(r, z) - \sigma_r(r, z)] = 0;$$

$$(2.104)$$

$$r\partial^2/\partial z^2\{\sigma_t(r, z) - \mu[\sigma_r(r, z) + \sigma_z(r, z)]\} - 2(1 + \mu)\partial\tau_{rz}(r, z)/\partial z + (\partial/\partial r)\{\sigma_z(r, z) - \mu[\sigma_r(r, z) + \sigma_t(r, z)]\} = 0$$

позволяют выразить все напряжения через сдвиговое напряжение  $\tau = \tau_{rz}(r, z)$ , единственное ввиду тождественного аннулирования остальных двух сдвиговых напряжений в осесимметричной задаче теории упругости без объёмных сил и кручения.

Действительно, из (2.101) и (2.102) находим:

$$(2.105)$$

$$\sigma_t(r, z) = \partial[r\sigma_r(r, z)]/\partial r + \partial[r\tau_{rz}(r, z)]/\partial z;$$

$$(2.106)$$

$$\sigma_z(r, z) = \sigma_z(r, d) + r^{-1}\int_z^d \partial[r\tau_{rz}(r, z')]/\partial r dz'.$$

Подстановка последних в (2.103) даёт

$$\sigma_r(r, z) = \mu r^{-2}\int_a^r \sigma_z(r', d)r'dr' - \mu ar^{-2}\int_z^d \tau(a, z')dz' + \mu r^{-1}\int_z^d \tau(r, z')dz' - 2^{-1}(1 - \mu)r^{-2}\int_a^r r'^2\partial\tau_{rz}(r', z)/\partial z dr' - 2^{-1}(1 + \mu)\int_a^r \partial\tau_{rz}(r', z)/\partial z dr' + C_1(z) + r^2C_2(z),$$

где  $C_1(z)$ ,  $C_2(z)$  – не зависящие от  $r$  функции от  $z$ .

С учётом граничных условий  $\sigma_r(a, z)$  и  $\sigma_r(b, z)$

$$(2.107)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) = a^2r^{-2}(b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1}\sigma_r(a, z) + b^2r^{-2}(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1}\sigma_r(b, z) + \mu r^{-2}\int_a^r \sigma_z(r', d)r'dr' - \mu r^{-2}(r^2 - a^2) \\ (b^2 - a^2)^{-1}\int_a^b \sigma_z(r', d)r'dr' - 2^{-1}(1 + \mu)\int_a^r \partial\tau_{rz}(r', z)/\partial z dr' + 2^{-1}(1 + \mu)b^2r^{-2}(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1}\int_a^b \partial\tau_{rz}(r', z)/\partial z dr' \\ - 2^{-1}(1 - \mu)r^{-2}\int_a^r r'^2\partial\tau_{rz}(r', z)/\partial z dr' + 2^{-1}(1 - \mu)r^{-2}(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1}\int_a^b r'^2\partial\tau_{rz}(r', z)/\partial z dr' + \mu r^{-1}\int_z^d \tau_{rz}(r, z')dz' \\ + \mu ar^{-2}(r^2 - b^2)(b^2 - a^2)^{-1}\int_z^d \tau_{rz}(a, z')dz' - \mu br^{-2}(r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1}\int_z^d \tau_{rz}(b, z')dz'. \end{aligned}$$

Необходимым и достаточным условием точного решения осесимметричной задачи теории упругости без объёмных сил и кручения является удовлетворение функции напряжений  $\tau_{rz}(r, z)$  громоздкому интегро-дифференциальному уравнению, получаемому подстановкой (2.105) – (2.107) в оставшееся уравнение (2.104) совместности деформаций в напряжениях:

$$(2.108)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, z) = -2^{-1}a^2(b^2 - a^2)^{-1}[(1 + \mu)^{-1}r + (1 - \mu)^{-1}b^2r^{-1}]\partial\sigma_r(a, z)/\partial z + 2^{-1}b^2(b^2 - a^2)^{-1}[(1 + \mu)^{-1}r + (1 - \mu)^{-1}a^2r^{-1}] \\ \partial\sigma_r(b, z)/\partial z - 4^{-1}r\int_a^r \partial^2\tau_{rz}(r', z)/\partial z^2 dr' + 4^{-1}b^2(b^2 - a^2)^{-1}[r + (1 + \mu)(1 - \mu)^{-1}a^2r^{-1}]\int_a^b \partial^2\tau_{rz}(r', z)/\partial z^2 dr' + 4^{-1} \\ r^{-1}\int_a^r r'^2\partial^2\tau_{rz}(r', z)/\partial z^2 dr' + 4^{-1}(b^2 - a^2)^{-1}[(1 - \mu)(1 + \mu)^{-1}r + a^2r^{-1}]\int_a^b r'^2\partial^2\tau_{rz}(r', z)/\partial z^2 dr' - 2^{-1}\mu a(b^2 - a^2)^{-1}[(1 \end{aligned}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 181/556

$$+ \mu)^{-1}r + (1 - \mu)^{-1}b^2r^{-1}] \tau_{rz}(a, z) + 2^{-1}\mu b(b^2 - a^2)^{-1}[(1 + \mu)^{-1}r + (1 - \mu)^{-1}a^2r^{-1}] \tau_{rz}(b, z) + (1 - \mu^2)z \partial \sigma_z(r, d) / \partial r - 2^{-1}zr^{-2} \int_z^d \tau_{rz}(r, z') dz' + 2^{-1}zr^{-1} \int_z^d \partial \tau_{rz}(r, z') / \partial r dz' + 2^{-1}r^2 \int_z^d z' \tau_{rz}(r, z') dz' - 2^{-1}r^{-1} \int_z^d z' \partial \tau_{rz}(r, z') / \partial r dz' + 2^{-1}z \int_z^d \partial^2 \tau_{rz}(r, z') / \partial r^2 dz' - 2^{-1} \int_z^d z' \partial^2 \tau_{rz}(r, z') / \partial r^2 dz' + C(r),$$

где  $C(r)$  – произвольная функция от  $r$ .

Однако в нетривиальных задачах такой путь едва ли даёт приемлемое для практики достаточно простое решение.

В целях получения хотя бы и приближённого решения представляется рациональным временно оставить в стороне именно и только для последующей оценки точности решения сложнейшее второе уравнение (2.104) совместности деформаций в напряжениях, выбрать по принципу допустимой простоты функцию  $\tau_{rz}(r, z)$ , удовлетворяющую граничным условиям и уравнению равновесия каждой из частей элемента, отсечённых произвольной соосной (коаксиальной) цилиндрической поверхностью  $r = r'$  (малейшее усложнение выражения  $\tau_{rz}(r, z)$  ведёт к крайней громоздкости формул для  $\sigma_r(r, z)$  и  $\sigma_z(r, z)$ ), и определить остальные напряжения по формулам (2.105) – (2.107).

Полученные результаты будут обладать максимально возможной простотой и большей сравнительно с  $\tau_{rz}(r, z)$  точностью, так как операторы (2.105) – (2.107) удовлетворяют одному из двух уравнений совместности деформаций в напряжениях, обоим уравнениям равновесия и всем граничным условиям, давая эффект уточнения, аналогичный итерационному.

Сущность общего интегрального метода состоит именно в выборе указанным образом обусловленного простейшего статически возможного распределения сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$  в цилиндрическом макроэлементе

$$(2.109)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = (b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1} \tau_{rz}(a, z) + (r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1} \tau_{rz}(b, z) + 6(z - c)(d - z)(d - c)^{-3} \{ - (b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1} \int_c^d \tau_{rz}(a, z) dz + [b/r - (r^2 - a^2)/(b^2 - a^2)] \int_c^d \tau_{rz}(b, z) dz + r^{-1} \int_r^b r' [\sigma_z(r', d) - \sigma_z(r', c)] dr' \} + (d - z)(2c + d - 3z)(d - c)^{-2} [\tau_{rz}(r, c) - (b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1} \tau_{rz}(a, c) - (r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1} \tau_{rz}(b, c)] + (z - c)(3z - c - 2d)(d - c)^{-2} [\tau_{rz}(r, d) - (b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1} \tau_{rz}(a, d) - (r^2 - a^2)(b^2 - a^2)^{-1} \tau_{rz}(b, d)].$$

Наибольшая простота этого представления следует из алгоритма его построения с квадратичной интерполяцией по  $r$  и линейной интерполяцией по  $z$  и с квадратичным дополнительным слагаемым для выполнения условия

$$(2.110)$$

$$\int_r^b r' [\sigma_z(r', d) - \sigma_z(r', c)] dr' + b \int_c^d \tau_{rz}(b, z) dz - r \int_c^d \tau_{rz}(r, z) dz = 0.$$

Подстановкой (2.109) в (2.105) – (2.107) элементарно могут быть получены громоздкие явные выражения всех напряжений, но на практике целесообразна изначальная конкретизация простейшего статически возможного распределения сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$  в решаемой задаче.

Например, в задаче Ламе [358], в том числе обобщённой,

$$\tau_{rz}(r, z) = 0$$

на границах и внутри ввиду (2.109).

Теперь (2.105) – (2.107) дают формулы Ламе [358], точно удовлетворяющие (2.104) или (2.108).

Следовательно, если задача имеет точное решение, то оно в принципе может быть найдено общим интегральным методом, поскольку он не вносит заведомых погрешностей.

Другие нетривиальные точные решения для именно существенно трёхмерных цилиндрических тел, которые возможно применить к задачам прочности, неизвестны.

Поэтому представляется рациональным испытывать (тестировать) общий интегральный метод на задачах для именно существенно трёхмерных аналогов свободно опёртых и жёстко защемлённых по краю круглых пластин и круглых плит, нагруженных равномерным давлением на одно основание, для которых имеются классические приближённые решения.

В задаче о «свободно опёртом» по краю именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом упругом теле

$$0 \leq r \leq a,$$

$$0 \leq z \leq h$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 182/556

под равномерным давлением  $p$  на верхнее основание  $z = h$  на нём выполнено граничное условие для осевого напряжения

$$\sigma_z(r, h) = -p$$

(рис. 1.7, г).

Вначале предположим наличие уравновешивающего противодействия  $pb^2/(b^2 - a^2)$  на узкую кольцевую часть

$$a \leq r \leq b$$

основания  $z = 0$ .

Тогда по (2.109)

$$\tau_{rz}(a, z) = 3p(z/h - z^2/h^2)a/h.$$

Рассматривая теперь  $0 \leq r \leq a$ , вновь по (2.109) получаем

$$\tau_{rz}(r, z) = 3p(z/h - z^2/h^2)r/h.$$

Ввиду (2.105) – (2.107) получаем ещё одну формулу теории плит [3, 191, 195, 319, 321] для осевого напряжения

$$\sigma_z(r, z) = p(-3z^2/h^2 + 2z^3/h^3)$$

и также классические формулы теории пластин [320] для радиального и тангенциального (окружного) напряжений:

$$\sigma_r(r, z) = (3/8)(3 + \mu)p(a^2 - r^2)h^{-2}(1 - 2z/h);$$

$$\sigma_t(r, z) = (3/8)p[(3 + \mu)a^2 - (1 + 3\mu)r^2]h^{-2}(1 - 2z/h).$$

(Вместо последних двух формул теории пластин теория плит даёт точное решение иной задачи с

$$\sigma_r(a, z) = (1/20)(2 + \mu)(1 - 12z/h + 30z^2/h^2 - 20z^3/h^3),$$

что является несущественным при  $h/a \ll 1$ , но непригодным для рассматриваемой именно существенно трёхмерной задачи.)

Это сочетанное (комбинированное) решение (рис. 2.18, а), к которому привёл в конечном счёте и общий (полу)степенной метод, получено общим интегральным методом сразу, естественно и без элементов произвола.

Левая часть сложнейшего второго уравнения (2.104) совместности деформаций в напряжениях при этом составляет

$$-3(1 - \mu)(2 + \mu)pr^2h^{-2}(1 - 2z/h)$$

и аннулируется лишь на оси и на срединной плоскости, так что полученное решение является приближённым и нуждается в анализе его точности.

Общий интегральный метод позволяет дать и общий метод естественной оценки погрешностей получаемых решений по сложнейшему второму уравнению (2.104) совместности деформаций в напряжениях, единственному, не обращаемому в заведомое тождество.

Поскольку естественная оценка погрешностей получаемых решений должна быть инвариантом равносильного (эквивалентного) преобразования второго уравнения (2.104) совместности деформаций его умножением на постоянный ненулевой коэффициент, то она может даваться отношением равностепенных между собой однородных функций левой части этого уравнения.

Исходя из интуитивных представлений о приближённом равенстве и основанной на них введённой всеобщей погрешности (числа близки, если модуль их разности мал по сравнению с суммой их модулей) и руководствуясь принципом допустимой простоты в общем виде, примем, что оценка погрешности решения даётся оценочной дробью – отношением некоего среднего значения модуля левой части уравнения (2.104) по объёму рассматриваемого трёхмерного тела к максимуму суммы модулей слагаемых той же части по тому же объёму.

В качестве среднего значения модуля произведения для оценки можно взять произведение средних значений модулей сомножителей.

Для определения числителя оценочной дроби в левой части уравнения не следует избегать приведения подобных, для определения знаменателя оценочной дроби в левой части уравнения нельзя приводить подобные разных знаков (взаимная компенсация влечёт

кажущееся снижение точности), а при определении знаменателя не следует расщеплять целые выражения типа  $1 - \mu^2$  в каждой из формул для напряжений (это вело бы к мнимому повышению точности).

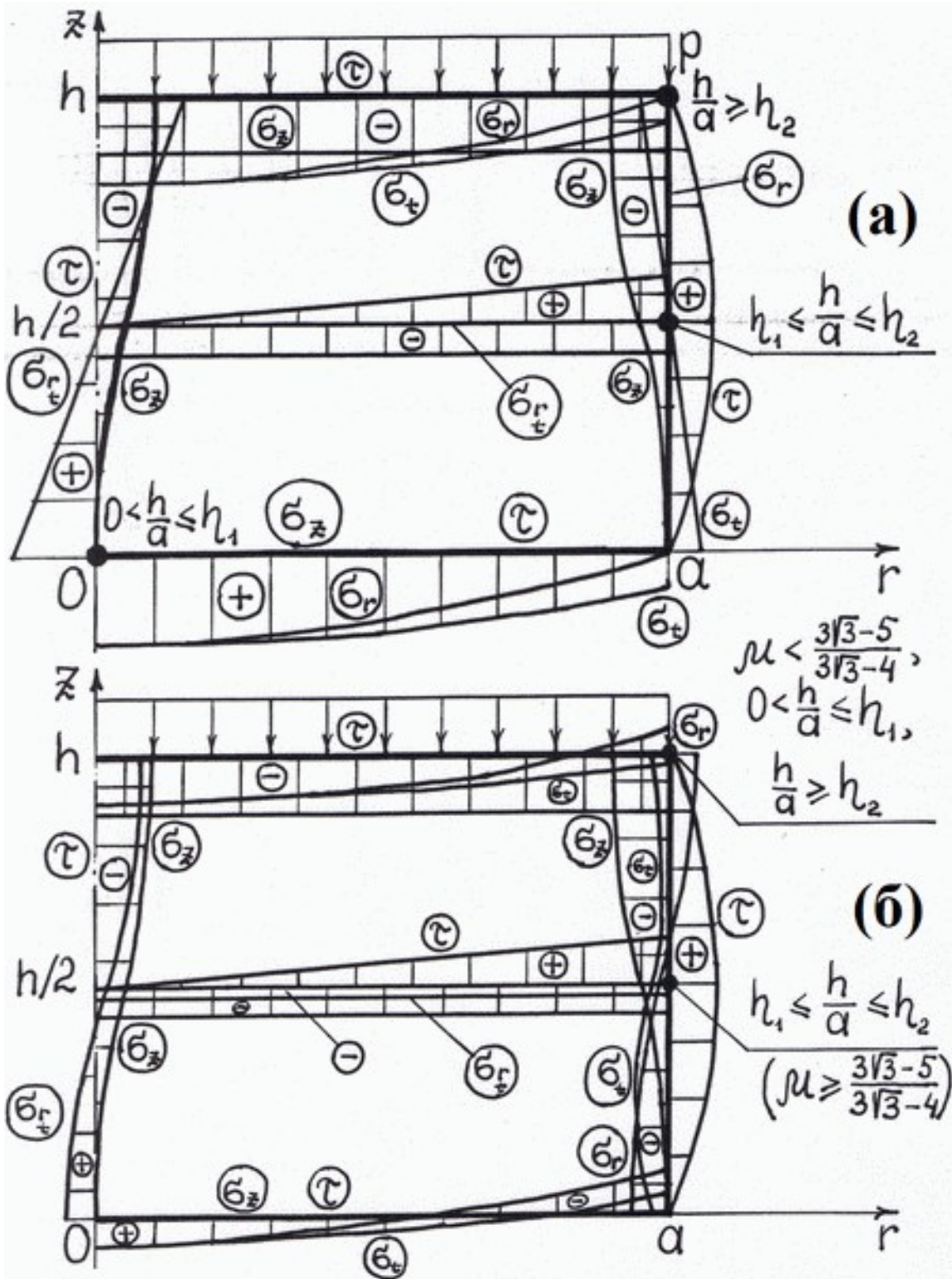


Рисунок 2.18. Эпюры напряжений и условия места (зачернённый кружок) наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения по третьей теории прочности в свободно опёртом (а) и жёстко защемлённом (б) по краю (боковой поверхности) именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических телах.

Левая часть второго уравнения (2.104) совместности деформаций после подстановки формул для напряжений и приведения подобных одинаковых знаков принимает вид

$$3prh^{-2}(1 - 2z/h)[\mu(3 + \mu) - 2(1 + \mu)].$$

Погрешность данного сочетанного (комбинированного) решения по этому общему методу естественной оценки погрешностей получаемых решений по второму уравнению (2.104) совместности деформаций характеризуется оценочной дробью (2.4')

$$\delta_\lambda = 3(1 - \mu)(2 + \mu)pr_{\text{med}}h^{-2}|1 - 2z/h|_{\text{med}}/\{3[\mu(3 + \mu) + 2(1 + \mu)]pr_{\text{max}}h^{-2}(1 + 2z/h)_{\text{max}}\},$$

причём в числителе

$$r_{\text{med}} = a/2, \\ |1 - 2z/h|_{\text{med}} = 1/2,$$

а в знаменателе

$$r_{\text{max}} = a, \\ (1 + 2z/h)_{\text{max}} = 3.$$

В итоге оценочная дробь

$$\delta_\lambda = 12^{-1}(1 - \mu)(2 + \mu)/(2 + 5\mu + \mu^2) \leq 1/12$$

независимо от размеров именно существенно трёхмерного упругого тела.

Так что при любых значениях отношения  $h/a$  погрешность находится в пределах инженерной точности (до 8.3 %, а при  $\mu = 0.21; 0.3; 0.37$  для неорганического стекла, стали и органического стекла соответственно до 4.72; 3.74; 3.12 %), что свидетельствует об универсальной инженерной точности данного решения.

Приведём результаты решения задачи прочности для подобного стального тела ( $\mu = 0.3$ ).

При

$$0 < h/a \leq \eta_1 = 4^{-1}(3 + \mu)2^{1/2}\{1 + [1 + (3 + \mu)^2/36]^{1/2}\}^{-1/2} \approx 0.7973 \approx (3 + \mu)/4$$

наибольшее равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{emax}}(r, z) = \sigma_e(0, 0) = \sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0) = (3/8)(3 + \mu)pa^2/h^2 \leq \sigma_s,$$

предел упругого сопротивления (давление начала текучести) и допускаемое давление

$$p_s = 8[3(3 + \mu)]^{-1}\sigma_s h^2/a^2, \\ [p] = 8[3(3 + \mu)]^{-1}[\sigma]h^2/a^2,$$

где, как обычно [117, 303],

$$[\sigma] = \min\{\sigma_s/n_s; \sigma_u/n_u\} = \min\{\sigma_s/1.5; \sigma_u/2.4\}.$$

Аналогично при

$$\eta_1 \leq h/a \leq \eta_2 = 3^{1/2}(1 - \mu)[10 - 4\mu - (88 - 56\mu + 4\mu^2)^{1/2}]^{-1/2} \approx 2.077$$

наибольшее равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{emax}}(r, z) = \sigma_e(a, h/2) = (1 + 9a^2/h^2)^{1/2}p/2 \leq \sigma_s,$$

предел упругого сопротивления (давление начала текучести) и допускаемое давление

$$p_s = 2(1 + 9a^2/h^2)^{-1/2}\sigma_s, \\ [p] = 2(1 + 9a^2/h^2)^{-1/2}[\sigma].$$

При

$$h/a \geq \eta_2$$

наибольшее равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности

$$\sigma_{\text{emax}}(r, z) = \sigma_e(a, h) = [1 - (3/4)(1 - \mu)a^2/h^2]p \leq \sigma_s,$$

предел упругого сопротивления (давление начала текучести) и допускаемое давление

$$p_s = \sigma_s/[1 - (3/4)(1 - \mu)a^2/h^2], \\ [p] = [\sigma]/[1 - (3/4)(1 - \mu)a^2/h^2].$$

Таким образом, в задаче для «свободно опёртого» по краю именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического упругого тела, в отличие от аналогичных задач теории пластин и теории плит, существуют два критических значения  $\eta_1$  и  $\eta_2$  отношения  $h/a$ , соответствующих перемещениям опасной точки (с наибольшим эквивалентным напряжением) из центра свободного от нагрузок внутреннего основания на середину боковой поверхности и далее на край нагруженного равномерным давлением внешнего основания (разумеется, при уравнивании тела параболическими сдвиговыми напряжениями по боковой его поверхности; аналогично рассматриваются любые другие варианты).



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 185/556

Возможности различных подходов к применению общего интегрального метода можно показать решением задачи о жёстком защемлении по боковой поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического упругого тела (рис. 2.18, б)

$$0 \leq r \leq a,$$

$$0 \leq z \leq h,$$

также нагруженного равномерным давлением  $p$  на внешнее основание  $z = h$ , и на нём с тем же граничным условием для осевого напряжения

$$\sigma_z(r, h) = -p$$

при свободном от нагрузок внутреннем основании  $z = 0$  (рис. 1.7, б).

Взамен выполнения совокупности тождественных по  $z$  условий жёсткого защемления

$$u_r(a, z) = 0,$$

$$u_z(a, z) = 0$$

теория пластин [320] и теория плит [3, 191, 195] явно или неявно ограничиваются аннулированием наклона краевой нормали или среднего радиального перемещения её точек. Смешанные (в напряжениях и перемещениях) граничные условия удовлетворяются методом неопределённых граничных условий в напряжениях.

Сохраняя на боковой поверхности общность радиального напряжения  $\sigma_r(a, z)$  (её ограничение, например принятием априорной линейности, не даёт никакого упрощения) и полагая вначале распределение сдвигового напряжения на боковой поверхности

$$\tau_{rz}(a, z) = 3p(z/h - z^2/h^2)a/h$$

этим простейшим статически возможным параболическим, получаем ввиду (2.105) – (2.107) прежние формулы теории плит [3, 191, 195, 319, 321] для осевого и сдвигового напряжений

$$\sigma_z(r, z) = p(-3z^2/h^2 + 2z^3/h^3),$$

$$\tau_{rz}(r, z) = 3p(z/h - z^2/h^2)r/h,$$

а также сходные с классическими в теории пластин [320] формулы для радиального и тангенциального (окружного) напряжений

$$\sigma_r(r, z) = \sigma_r(a, z) + (3/8)(3 + \mu)p(a^2 - r^2)h^{-2}(1 - 2z/h),$$

$$\sigma_t(r, z) = \sigma_t(a, z) + (3/8)p[(3 + \mu)a^2 - (1 + 3\mu)r^2]h^{-2}(1 - 2z/h),$$

отличающиеся от классических формул теории пластин для свободно опёртого тела слагаемым  $\sigma_r(a, z)$ , наличие которого естественно согласуется с результатами анализа влияния невязки на решение задачи теории плит для свободно опёртого тела.

Выбором единственной функции  $\sigma_r(a, z)$  можно на той же боковой поверхности  $r = a$  макроэлемента тождественно аннулировать лишь одну из функций радиального  $u_r(a, z)$  или осевого  $u_z(a, z)$  перемещения.

По тангенциальной (окружной) деформации  $\varepsilon_t(r, z)$  радиальное перемещение

$$u_r(r, z) = r\varepsilon_t(r, z) = r[\sigma_r(r, z) - \mu\sigma_t(r, z) - \mu\sigma_z(r, z)]/E = \{(1 - \mu)\sigma_r(a, z) + (3/8)(1 - \mu)ph^{-2}[(3 + \mu)a^2 - (1 + \mu)r^2](1 - 2z/h) + \mu p(3z^2/h^2 - 2z^3/h^3)\}r/E,$$

и для тождественного аннулирования радиального перемещения боковой поверхности  $r = a$  макроэлемента

$$u_r(a, z) = 0$$

необходимо и достаточно условие

$$\sigma_r(a, z) = -(3/4)a^2h^{-2}p(1 - 2z/h) - \mu(1 - \mu)^{-1}p(3z^2/h^2 - 2z^3/h^3),$$

с учётом которого получаются формула для радиального перемещения

$$u_r(r, z) = \{(1 - \mu)\sigma_r(a, z) + (3/8)(1 - \mu)ph^{-2}[(3 + \mu)a^2 - (1 + \mu)r^2](1 - 2z/h) + \mu p(3z^2/h^2 - 2z^3/h^3)\}r/E = \{(3/8)(1 - \mu)pa^2h^{-2}(1 + \mu)(1 - 2z/h) - (3/8)(1 - \mu)ph^{-2}(1 + \mu)r^2(1 - 2z/h)\}r/E = (3/8)(1 - \mu^2)(a^2 - r^2)h^{-2}(1 - 2z/h)pr/E$$

и формулы для радиального и тангенциального (окружного) напряжений

$$\sigma_r(r, z) = \{(3/8)[(1 + \mu)a^2 - (3 + \mu)r^2]h^{-2}(1 - 2z/h) - \mu(1 - \mu)^{-1}(3z^2/h^2 - 2z^3/h^3)\}p,$$

$$\sigma_t(r, z) = \{(3/8)[(1 + \mu)a^2 - (1 + 3\mu)r^2]h^{-2}(1 - 2z/h) - \mu(1 - \mu)^{-1}(3z^2/h^2 - 2z^3/h^3)\}p.$$

Определения осевого перемещения  $u_z(r, z)$  через осевую деформацию  $\varepsilon_z(r, z)$  и через сдвиговую деформацию  $(1/2)\gamma_{rz}(r, z)$  дают

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 186/556

$$u_z(r, z) = \{ - (3/2)\mu[(2 + \mu)a^2 - 2(1 + \mu)r^2]h^{-2}(z/h - z^2/h^2) - (1/2)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - \mu)^{-1}(2z^3/h^3 - z^4/h^4) + C_1(r) \} hp/E = \{ 3(1 + \mu)r^2h^{-2}(z/h - z^2/h^2) + (3/16)(1 - \mu)r^2(2a^2 - r^2)h^4 + C_2(z) \} hp/E,$$

где  $C_1(r)$ ,  $C_2(z)$  – произвольные функции одной переменной.

Выражение

$$3(1 - \mu^2)r^2h^{-2}(z/h - z^2/h^2)$$

невозможно расщепить на  $C_1(r)$  и  $C_2(z)$ , и последнее тождество нельзя обеспечить никаким их выбором.

С учётом аннулирования этого выражения на основаниях естественно принять

$$C_1(r) = (3/16)(1 - \mu)r^2(2a^2 - r^2)h^4 + C, \\ C_2(z) = - (1/2)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - \mu)^{-1}(2z^3/h^3 - z^4/h^4) + C,$$

где  $C$  – произвольная постоянная.

Два выражения осевого перемещения  $u_z(r, z)$  совпадают на оси и на основаниях и различны между ними вне оси.

Предпочтительнее выражение осевого перемещения  $u_z(r, z)$  через осевую деформацию  $\epsilon_z(r, z)$  и, следовательно, через радиальное  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$  и осевое  $\sigma_z(r, z)$  напряжения, а не через сдвиговую деформацию  $(1/2)\gamma_{rz}(r, z)$  и сдвиговое напряжение  $\tau_{rz}(r, z)$ , так как в определении сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$  есть некоторый произвол, влияние которого снижается при определении нормальных напряжений с точным выполнением не только статических условий, но и одного из уравнений совместности (2.103), – эффект уточнения аналогичен итерационному.

Выбором произвольной постоянной  $C$  логично аннулировать осевое перемещение  $u_z(a, z)$  на краю ненагруженного основания  $z = 0$ , что соответствует действительному не вполне жёсткому защемлению.

Тогда осевое перемещение

$$u_z(r, z) = \{ - (3/2)\mu[(2 + \mu)a^2 - 2(1 + \mu)r^2]h^{-2}(z/h - z^2/h^2) - (1/2)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - \mu)^{-1}(2z^3/h^3 - z^4/h^4) - (3/16)(1 - \mu^2)(a^2 - r^2)^2h^{-4} \} hp/E.$$

Осевое перемещение свободного внутреннего основания

$$u_z(r, 0) = - (3/16)(1 - \mu^2)(a^2 - r^2)^2h^{-3}p/E$$

совпадает с известным по теории пластин, а осевое перемещение нагруженного внешнего основания

$$u_z(r, h) = - (3/16)(1 - \mu^2)(a^2 - r^2)^2h^{-3}p/E - (1/2)(1 + \mu)(1 - 2\mu)(1 - \mu)^{-1}hp/E$$

отличается аддитивной постоянной от осевого перемещения свободного внутреннего основания.

Сопоставление с результатами точного решения [123] и численными итогами [152] показывает удовлетворительность полученного простого решения (рис. 2.18, б) и приближение верно определённого наибольшего сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$  к краю нагруженного внешнего основания.

Это естественно, поскольку точное решение В. Т. Гринченко и А. Ф. Улитко в рядах функций Бесселя даёт бесконечное радиальное напряжение  $\sigma_r(r, z)$ , тогда как аналитическая методология макроэлементов предназначена для кусочно-гладких поверхностных нагрузок, да и в действительности образующая боковой поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела не может не сокращаться.

Поэтому при

$$r \geq 0.8a$$

результаты по общему интегральному методу заметно отличаются от точных и полученных А. Л. Квиткой, П. П. Ворошко и С. Д. Бобрицкой по методу конечных элементов (МКЭ) для  $h = a$ .

Левая часть второго уравнения (2.104) совместности деформаций в напряжениях составляет

$$6prh^{-2}(1 - 2z/h)[ - (3/8)\mu/(1 - \mu) + (3/8)\mu^2/(1 - \mu) + \mu - (1 + \mu) + (1/2)\mu(1 + \mu) ],$$

и погрешность решения характеризуется оценочной дробью (2.4)

$$\underline{\delta}_\lambda = (1/12)(1 - \mu/8 - \mu^2/2)/[1 + 2\mu + (1/8)\mu(1 + \mu)(7 - 4\mu)/(1 - \mu)] \leq 1/12.$$

В итоге независимо от размеров именно существенно трёхмерного упругого тела и при любых значениях отношения  $h/a$  погрешность решения находится в пределах инженерной точности (до 8.3 %, а при  $\mu = 0.21; 0.3; 0.37$  для неорганического стекла, стали и органического стекла соответственно до 4.76; 3.82; 3.21 %), мало отличаясь от установленной выше для свободно опёртого тела и подтверждая универсальную по  $h/a$  инженерную точность полученного решения.

Дальнейший его анализ показывает, что промежуточные плоскости, параллельные основаниям, искривляются сильнее оснований, а в наибольшей степени искривляется срединная плоскость макроэлемента.

Формулы для осевого  $\sigma_z(r, z)$  и сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$  напряжений известны по теории плит [3, 191, 195], а формулы для радиального  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$  напряжений обобщают и уточняют таковые в теории пластин [79, 80, 320], отличаясь вычитаемыми в фигурных скобках, нетождественными поправкам теории плит [3, 191, 195] и будучи, по-видимому, более точными, поскольку условия защемления боковой поверхности выполнены намного точнее, чем в теории плит.

Более того, в полученном решении, предельно простом по сравнению с точным, эти условия отклоняются от абстрактных постановочных условий в расчётной схеме и приближаются к осуществляющимся в защемлениях конструктивных элементов.

Отказ от априорного параболического распределения сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(a, z)$  ведёт к усложнениям, которые следует оценить.

Полагаем распределение сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(a, z)$  произвольным, удовлетворяющим закону парности

$$\tau_{rz}(a, 0) = \tau_{rz}(a, h) = 0$$

и уравнению равновесия.

Тогда (2.105) – (2.107) и (2.109) дают формулы для сдвигового  $\tau_{rz}(r, z)$ , радиального  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$  и осевого  $\sigma_z(r, z)$  напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, z) &= 3p[r/h - r^2/(ah)](z/h - z^2/h^2) + \tau_{rz}(a, z)r^2/a^2; \\ \sigma_r(r, z) &= \sigma_r(a, z) + (1/15)(4 + \mu)(a - r^3/a^2)\partial\tau_{rz}(a, z)/\partial z + \mu a^2(r - a)\int_z^h \tau_{rz}(a, z')dz' + (1/40)a^{-1}h^2[(13 + 7\mu)a^3 - 15(3 + \mu)ar^2 + 8(4 + \mu)r^3]p(1 - 2z/h) + (1/2)\mu p(1 - r/a)(1 - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3); \\ \sigma_t(r, z) &= \sigma_t(a, z) + (1/15)[(4 + \mu)a - (1 + 4\mu)r^3/a^2]\partial\tau_{rz}(a, z)/\partial z + \mu a^2(2r - a)\int_z^h \tau_{rz}(a, z')dz' + (1/40)a^{-1}h^2[(13 + 7\mu)a^3 - 15(1 + 3\mu)ar^2 + 8(1 + 4\mu)r^3]p(1 - 2z/h) + (1/2)\mu p(1 - 2r/a)(1 - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3); \\ \sigma_z(r, z) &= (1/2)p(2 - 3r/a)(1 - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3) + 3a^2r\int_z^h \tau_{rz}(a, z')dz' - p \end{aligned}$$

и значительно более громоздкие формулы для радиального  $u_r(r, z)$  и осевого  $u_z(r, z)$  перемещений.

Их аннулирование на боковой поверхности приводит к выражению радиального напряжения  $\sigma_r(a, z)$  через сдвиговое напряжение  $\tau_{rz}(a, z)$ , удовлетворяющее интегральному уравнению

$$(2/5)\mu(a/h)\tau_{rz}(a, z) - (1 - \mu)^{-1}(3 - 3\mu - 5\mu^2 + \mu^3)a^{-1}h^{-1}[-z\int_z^h \tau_{rz}(a, z')dz' + \int_z^h z'\tau_{rz}(a, z')dz'] + (1/2)(1 - \mu)^{-1}(3 - 3\mu - 5\mu^2 + \mu^3)p(1 - z/h) + (3/20)\mu(1 + \mu)p(a^2/h^2)(z/h - z^2/h^2) + (1/4)(1 - \mu^2)p(-1 + 2z^3/h^3 - z^4/h^4) = 0.$$

Получены все замкнутые формулы экспоненциального типа в явном виде, который значительно проще такового у точного решения и несравненно сложнее полученного простого решения, которым и есть смысл ограничиться для решения задачи прочности.

Если

$$\mu \leq \mu_1 = (3^{3/2} - 5)/(3^{3/2} - 4) \approx 0.1640,$$

то при любых  $h/a$ , а если

$$\mu \geq \mu_1 = (3^{3/2} - 5)/(3^{3/2} - 4) \approx 0.1640,$$

то при любом из двух дополнительных условий (численные значения соответствуют  $\mu = 0.3$  для стали)

$$0 < h/a \leq \eta_1 = (3/2)^{1/2} \{3 - 2(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + [9 - 12(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + (1 - 2\mu)^2/(1 - \mu)^2]^{1/2}\}^{-1/2} \approx 0.6595$$

$$(\mu = 0.3),$$

$$h/a \geq \eta_2 = (3/2)^{1/2} \{3 - 2(1 - 2\mu)/(1 - \mu) - [9 - 12(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + (1 - 2\mu)^2/(1 - \mu)^2]^{1/2}\}^{-1/2} \approx 2.291 \quad (\mu = 0.3)$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 188/556

равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности максимально на краю внешнего основания

$$\sigma_{\text{emax}}(r, z) = \sigma_e(a, h) = [(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + (3/4)a^2/h^2]p \leq \sigma_s,$$

предел упругого сопротивления (давление начала текучести)

$$p_s = [(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + (3/4)a^2/h^2]^{-1}\sigma_s$$

и допускаемое давление

$$[p] = [(1 - 2\mu)/(1 - \mu) + (3/4)a^2/h^2]^{-1}[\sigma],$$

где, как обычно [117, 303],

$$[\sigma] = \min\{\sigma_s/n_s; \sigma_u/n_u\} = \min\{\sigma_s/1.5; \sigma_u/2.4\}.$$

Если

$$\mu \geq \mu_1 = (3^{3/2} - 5)/(3^{3/2} - 4) \approx 0.1640,$$

то при дополнительном условии

$$\eta_1 \leq h/a \leq \eta_2$$

равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности максимально посередине боковой поверхности

$$\sigma_{\text{emax}}(r, z) = \sigma_e(a, h/2) = (1/2)[(1 - 2\mu)^2/(1 - \mu)^2 + 9a^2/h^2]^{1/2}p/2 \leq \sigma_s,$$

предел упругого сопротивления (давление начала текучести)

$$p_s = 2[(1 - 2\mu)^2/(1 - \mu)^2 + 9a^2/h^2]^{-1/2}\sigma_s$$

и допускаемое давление

$$[p] = 2[(1 - 2\mu)^2/(1 - \mu)^2 + 9a^2/h^2]^{-1/2}[\sigma].$$

В этой задаче при условии

$$\mu \geq \mu_1 = (3^{3/2} - 5)/(3^{3/2} - 4) \approx 0.1640$$

имеются тоже два критических значения  $\eta_1$  и  $\eta_2$  отношения  $h/a$  с редким случаем возвращения точки наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения.

## 2.18. Упругое равновесие неканонического элемента вращения

Осесимметричный конструктивный элемент может быть ограничен не только плоскими и цилиндрическими поверхностями, но и коническими и вообще имеющими криволинейные образующие.

Поскольку для получения достаточно простого аналитического решения число макроэлементов разбиения тела должно быть минимально возможным (в отличие от метода конечных элементов), то необходимо решение задач для макроэлементов усложнённой формы.

Рассмотрим кольцевой трёхмерный элемент, образованный вращением относительно оси Oz прямоугольного треугольника с катетами

$$r = a, c \leq z \leq d$$

и

$$a \leq r \leq b, z = d$$

и, вообще говоря, криволинейной «гипотенузой»

$$a \leq r \leq b, z = C(r)$$

(рис. 2.19), причём

$$C(a) = c,$$

$$C(b) = d,$$

функция  $C(r)$  предполагается дифференцируемой и монотонно возрастающей.

Это не снижает общности при решении практически важных задач, поскольку в случае нарушения монотонности кусочная монотонность позволяет дополнительно рассечь указанный элемент на конечное число канонических и неканонических элементов уже с монотонностью функций типа  $C(r)$ .

В общем случае элемент нагружен нормальными и сдвиговыми напряжениями

$$\sigma_r(a, z), \tau_{rz}(a, z),$$

$$\sigma_z(r, d), \tau_{rz}(r, d),$$

а на поверхности  $z = C(r)$

$$\sigma_n(r), \tau_n(r),$$

причём положительное направление последнего определяется поворотом такового для  $\sigma_n(r)$  на  $\pi/2$  в направлении поворота от оси  $O_r$  к оси  $O_z$ .

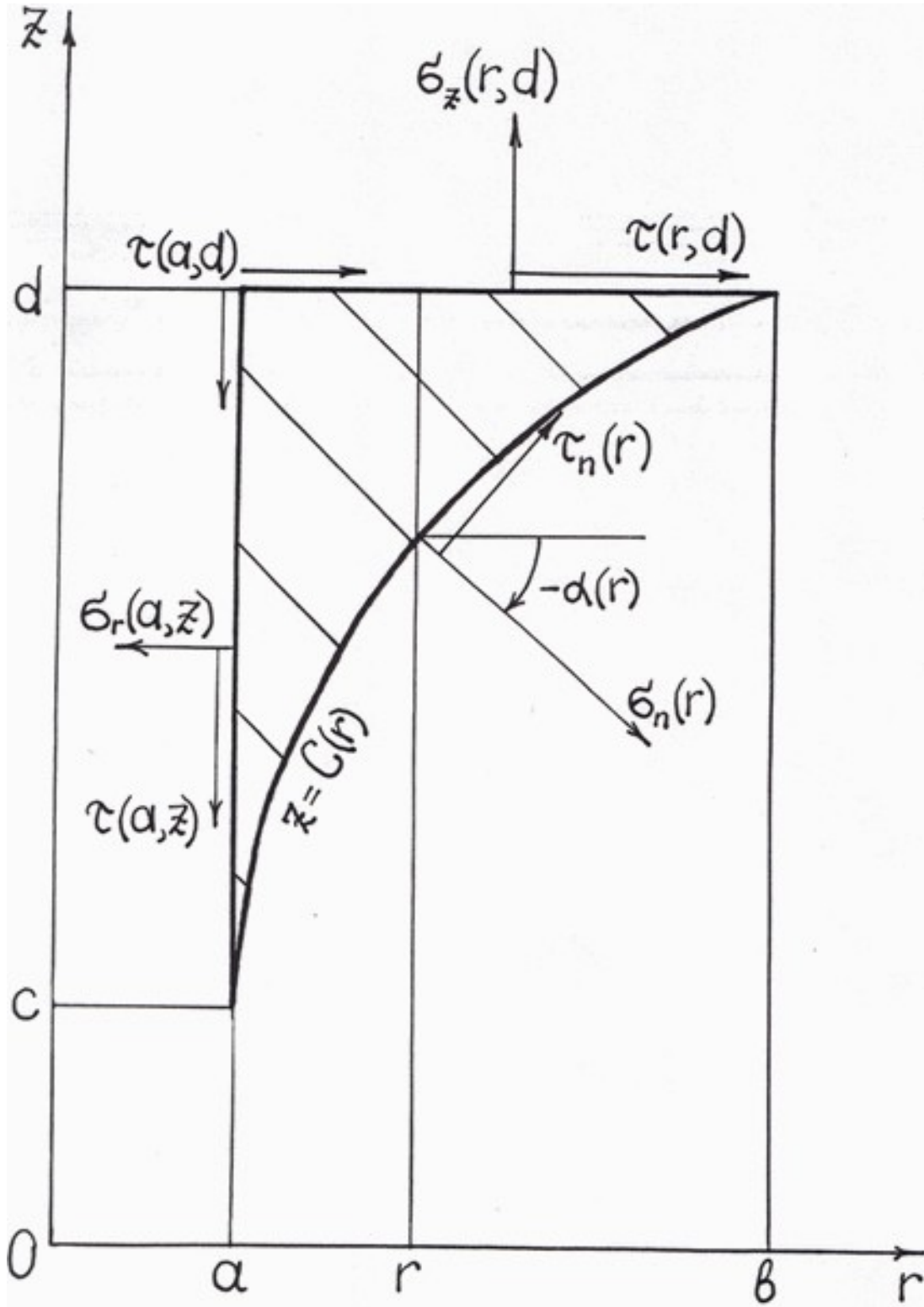


Рисунок 2.19. Схема к решению задачи о равновесии неканонического макроэлемента вращения.

Предполагается соблюдение условий парности сдвиговых напряжений, если  $dC(a)/dr$  или  $dC(b)/dr$  обращаются в нуль или в бесконечность, и в любом случае необходимо выполнение уравнения равновесия в осевом направлении

$$\int_a^b \sigma_z(r, d)rdr - a \int_c^d \tau_{rz}(a, z)dz + \int_a^b \tau_n(r)r[dC(r)/dr]dr - \int_a^b \sigma_n(r)rdr = 0,$$

при составлении которого через  $-\alpha(r)$  обозначен угол поворота оси  $Oz$  до положительного направления  $\sigma_n(r)$ , тогда

$$\text{ctg}[-\alpha(r)] = dC(r)/dr.$$

Граничным условиям при  $r = a$  и  $z = d$  удовлетворяет распределение сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z) = (b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1}\tau_{rz}(a, z) + (z - c)(d - c)^{-1}\tau_{rz}(r, d) - (b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1}(z - c)(d - c)^{-1}\tau_{rz}(a, d) + (d - z)(d - c)^{-1}y(r)$ ,

причём  $y(a) = 0$  и выполнено более общее уравнение равновесия каждой части элемента  $a \leq r' \leq r$  ( $a \leq r \leq b$ )

$$\int_a^r \sigma_z(r', d)r'dr' - a \int_c^d \tau_{rz}(a, z)dz + \int_a^r \tau_n(r')r'[dC(r')/dr']dr' - \int_a^r \sigma_n(r')r'dr' + r \int_{C(r)}^d \tau_{rz}(r, z)dz = 0.$$

Отсюда следует формула для сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$

$$(2.111)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = (b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1}\tau_{rz}(a, z) + 2(d - z)[d - C(r)]^2 ar^{-1} \int_c^d \tau_{rz}(a, z)dz - 2(d - z)[d - C(r)]^2 (b^2 - a^2)^{-1} \int_{C(r)}^d \tau_{rz}(a, z)dz + \{(z - c)(d - c)^{-1} - (d - z)(d - c)^{-1}[d + C(r) - 2c][d - C(r)]^{-1}\} [\tau_{rz}(r, d) - (b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1}\tau_{rz}(a, d)] - 2(d - z)[d - C(r)]^2 r^{-1} \int_a^r \sigma_z(r', d)r'dr' + 2(d - z)[d - C(r)]^2 r^{-1} \int_a^r \sigma_n(r')r'dr' - 2(d - z)[d - C(r)]^2 r^{-1} \int_a^r \tau_n(r')r'[dC(r')/dr']dr'.$$

Из второго уравнения равновесия (2.102) следует формула для осевого напряжения  $\sigma_z(r, z)$

$$(2.112)$$

$$\sigma_z(r, z) = \sigma_z(r, d) + (b^2 - 3r^2)(b^2 - a^2)^{-1}r^{-1} \int_z^d \tau_{rz}(a, z')dz' + 2a(d - z)^2 [d - C(r)]^{-3} r^{-1} [dC(r)/dr] \int_c^d \tau_{rz}(a, z)dz - (d - z)^2 (b^2 - a^2)^{-1} \{(b^2 - 3r^2)[d - C(r)]^{-2} r^{-1} + 2[dC(r)/dr][d - C(r)]^{-3}\} \int_{C(r)}^d \tau_{rz}(a, z)dz + (b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1} (d - z)^2 [d - C(r)]^{-2} [dC(r)/dr] \tau_{rz}[a, C(r)] + (1/2)r^{-1} \{(d - z)(d - c)^{-1}(d + z - 2c) - (d - z)^2 (d - c)^{-1}[d + C(r) - 2c][d - C(r)]^{-1}\} [\tau_{rz}(r, d) - (b^2 - r^2)(b^2 - a^2)^{-1}\tau_{rz}(a, d)] + 2(d - z)^2 [d - C(r)]^{-3} r^{-1} [dC(r)/dr] \{- \int_a^r \sigma_z(r', d)r'dr' + \int_a^r \sigma_n(r')r'dr' - \int_a^r \tau_n(r')r'[dC(r')/dr']dr'\} + (d - z)^2 [d - C(r)]^{-2} \{- \sigma_z(r, d) + \sigma_n(r) - \tau_n(r)[dC(r)/dr]\}.$$

Из равновесия кольцевого микроэлемента, содержащего окружность

$$r = r', z = C(r'),$$

следуют известные соотношения [319, 321]

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_r \cos^2(-\alpha) + \sigma_z \sin^2(-\alpha) - \tau_{rz} \sin 2(-\alpha), \\ \tau_n &= \tau_{rz} \cos 2(-\alpha) + (1/2)(\sigma_r - \sigma_z) \sin 2(-\alpha), \end{aligned}$$

откуда

$$(2.113)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_n - \tau_n \text{tg} \alpha - \tau_{rz} \text{tg} \alpha, \\ \sigma_z &= \sigma_n + \tau_n \text{ctg} \alpha - \tau_{rz} \text{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Первая из формул (2.113) в виде

$$(2.114)$$

$$\sigma_r[r, C(r)] = \sigma_n(r) + \tau_n(r)/[dC(r)/dr] + \tau_{rz}[r, C(r)]/[dC(r)/dr]$$

совместно со следствием (2.103) при  $z = C(r)$  и при обозначении обратной функции

$$C \setminus (z) = C^{-1}(z)$$

даёт формулу для радиального напряжения  $\sigma_r(r, z)$

$$(2.115)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) &= \sigma_r(a, z) + [C^{-1}(z)]^2 \{ [C^{-1}(z)]^2 - a^2 \}^{-1} (1 - a^2/r^2) \{ \sigma_r[C^{-1}(z), z] - \sigma_r(a, z) \} + \mu r^{-2} \int_a^r \sigma_z(r', d)r'dr' - \mu (1 - a^2/r^2) \{ [C^{-1}(z)]^2 - a^2 \}^{-1} \int_a^{C(z)} \sigma_z(r', d)r'dr' + \mu a \{ [C^{-1}(z)]^2 - a^2 \}^{-1} \{ 1 - [C^{-1}(z)]^2/r^2 \} \int_z^d \tau_{rz}(a, z')dz' + \mu r^{-1} \int_z^d \tau_{rz}(r, z')dz' - (1/2)(1 + \mu) \int_a^r [\partial \tau_{rz}(r', z)/\partial z]dr' - (1/2)(1 - \mu)r^{-2} \int_a^r [\partial \tau_{rz}(r', z)/\partial z]r'^2 dr' - \mu C^{-1}(z) \{ [C^{-1}(z)]^2 - a^2 \}^{-1} (1 - a^2/r^2) \int_z^d \tau_{rz}[C^{-1}(z), z']dz' + (1/2)(1 + \mu)[C^{-1}(z)]^2 \{ [C^{-1}(z)]^2 - a^2 \}^{-1} (1 - a^2/r^2) \int_a^{C(z)} \{ \partial \tau_{rz}[C^{-1}(z), z]/\partial z \} dr' + (1/2)(1 - \mu) \{ [C^{-1}(z)]^2 - a^2 \}^{-1} (1 - a^2/r^2) \int_a^{C(z)} \{ \partial \tau_{rz}[C^{-1}(z), z]/\partial z \} r'^2 dr'. \end{aligned}$$

Наконец, согласно (2.105)

$$(2.116)$$

$$\sigma_r(r, z) = \partial [r\sigma_r(r, z)]/\partial r + r\partial \tau_{rz}(r, z)/\partial z.$$

## **2.19. Развитие общего интегрального метода применительно к решению задачи прочности для тела сложной конфигурации**

Один из возможных алгоритмов решения задачи прочности для тела сложной конфигурации с помощью общего интегрального метода аналогичен таковому в случае применения общего (полу)степенного метода и состоит в следующем.

Тело мысленно разбивается на цилиндрические и неканонические макроэлементы рассмотренных типов минимальной системой нормальных осей плоскостей и соосных (коаксиальных) цилиндрических поверхностей.

Задача решается методом неопределённых обобщённых граничных условий в напряжениях, которые вводятся не только на той части поверхности исследуемого тела, где граничные условия заданы в перемещениях, но и на всех поверхностях сопряжения макроэлементов разбиения тела между собой.

Далее решается система задач для каждого макроэлемента в отдельности, причём решения зависят от этих неопределённых граничных условий.

Последние устанавливаются путём обеспечения рациональных (по принципу допустимой простоты) сопряжений деформированных макроэлементов разбиения тела между собой.

В результате определяются поля перемещений и напряжений в рассматриваемом теле и по ним поле равносильного (эквивалентного) напряжения по приемлемому критерию предельных состояний.

Конструкции, наилучшей с точки зрения прочности, соответствует минимакс поля равносильного (эквивалентного) напряжения, приравняемый допусжаемому или предельному напряжению.

При решении связанных задач исследуются также характеристики жёсткости, герметичности, оптики и другие основные рабочие характеристики и осуществляется их комплексная оптимизация, а на её основе и рациональное проектирование соответствующих конструкций.

При использовании общего интегрального метода осуществление метода неопределённых обобщённых граничных условий в полном объёме может приводить к резкому усложнению решения, как показано на примере задачи о жёстко защемлённом именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, и тогда рационально поэтапное снижение меры неопределённости соответствующих обобщённых граничных условий по принципу допустимой простоты вплоть до наименьшей статически возможной меры неопределённости.

В той же задаче оказалось целесообразным априорное принятие квадратичного (параболического) распределения сдвигового напряжения на поверхности защемления.

Линейный закон статически невозможен, так как в силу условий парности тогда распределение сдвигового напряжения на поверхности защемления аннулируется и тело не уравновешено.

Квадратичное же распределение не только позволяет уравновесить именно существенно трёхмерное сплошное цилиндрическое тело, но и однозначно определяется условием его равновесия.

Увеличение до  $n \geq 3$  степени априорного распределения сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(a, z)$  оставило бы после выполнения граничных условий и уравнения равновесия  $n - 2$  степени свободы, в принципе позволяющие уточнить решение для  $n = 2$ .

Однако, как видно на примере полной неопределённости сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(a, z)$  в той же задаче, теоретический эффект обобщения может оказаться намного меньше практических потерь.

Представляется, что рекомендация минимизировать степени неопределённых граничных условий удовлетворяет принципу достаточного основания в формальной логике.

Опыт решения задач прочности конструкций и анализ известных результатов показывают, что в большинстве случаев можно хотя бы для начала принимать априорные квадратичные

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 192/556

распределения для сдвиговых и контактных напряжений и линейные распределения для остальных напряжений.

Разумеется, решение специфических задач может привести и к другим распределениям как большей, так и меньшей степени, что выясняется при попытке использовать общий подход.

Более того, решаемая задача может характеризоваться неосесимметричностью, анизотропией, неупругостью и т. д., которые препятствуют непосредственному применению приведённых формул (но не подходов), и тогда можно либо воспользоваться известными решениями, либо при их неприемлемости получить с возможным использованием подходов и результатов обобщения аналитических методов специфические решения соответствующих задач.

Немаловажно и замечание о поэтапности рекомендуемого снижения меры неопределённости обобщённых граничных условий в напряжениях.

На примере той же задачи о жёстко закреплённом именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле видна полезность максимально возможного снижения меры неопределённости сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(a, z)$  и в то же время вредность какого бы то ни было снижения меры неопределённости радиального напряжения  $\sigma_r(a, z)$ , только и снижающего общность и точность и не дающего никакого упрощения, а то и приводящего к усложнению решения.

Это объясняется различием ролей напряжений с учётом специфики осесимметричной задачи, а также различием влияний усложнения каждого из выражений для напряжений на совокупный уровень сложности решения в целом.

Однако общий интегральный метод, в отличие от общего (полу)степенного метода, позволяет решать задачу для тела сложной конфигурации также с помощью прямого алгоритма.

При этом нет необходимости мысленно рассекать именно существенно трёхмерное тело даже на сравнительно небольшое число макроэлементов канонической либо неканонической формы минимальной системой плоских и цилиндрических поверхностей с решением последовательности задач для макроэлементов разбиения тела и наилучшим сопряжением решений для смежных макроэлементов.

Резкое снижение трудоёмкости решения задачи достигается анализом равновесия целого тела как единственного канонического или неканонического (но обобщённого по сравнению с рассмотренным выше) элемента подобно тому, как это сделано в следующем примере.

Анализ равновесия конической переходной части в мультипликаторе давлений (см. ниже) приводит к задаче для трёхмерного усечённого конуса

$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq h, \\ 0 &\leq r \leq a + (b - a)z/h \quad (b \geq a) \end{aligned}$$

(рис. 2.20).

Откажемся от отдельного решения задач для цилиндрического

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq a, \\ 0 &\leq z \leq h \end{aligned}$$

и неканонического

$$\begin{aligned} a &\leq r \leq b, \\ h(r - a)/(b - a) &\leq z \leq h \end{aligned}$$

макроэлементов сжатого равномерными давлениями  $p$  и  $pb^2/a^2$  на основания  $z = h$  и  $z = 0$  усечённого конуса с соответствующим осевым напряжением на основаниях

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, 0) &= -pb^2/a^2 \quad (0 \leq r \leq a), \\ \sigma_z(r, h) &= -p \quad (0 \leq r \leq b) \end{aligned}$$

при нулевых сдвиговых напряжениях на основаниях

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, 0) &= 0 \quad (0 \leq r \leq a), \\ \tau_{rz}(r, h) &= 0 \quad (0 \leq r \leq b) \end{aligned}$$

и рассмотрим усечённое коническое тело в целом, сознавая неизбежность различия выражений для перемещений и напряжений в этих частях, вызываемого геометрией тела, и используя как сами формулы (2.102) – (2.110), так и подходы к их получению.



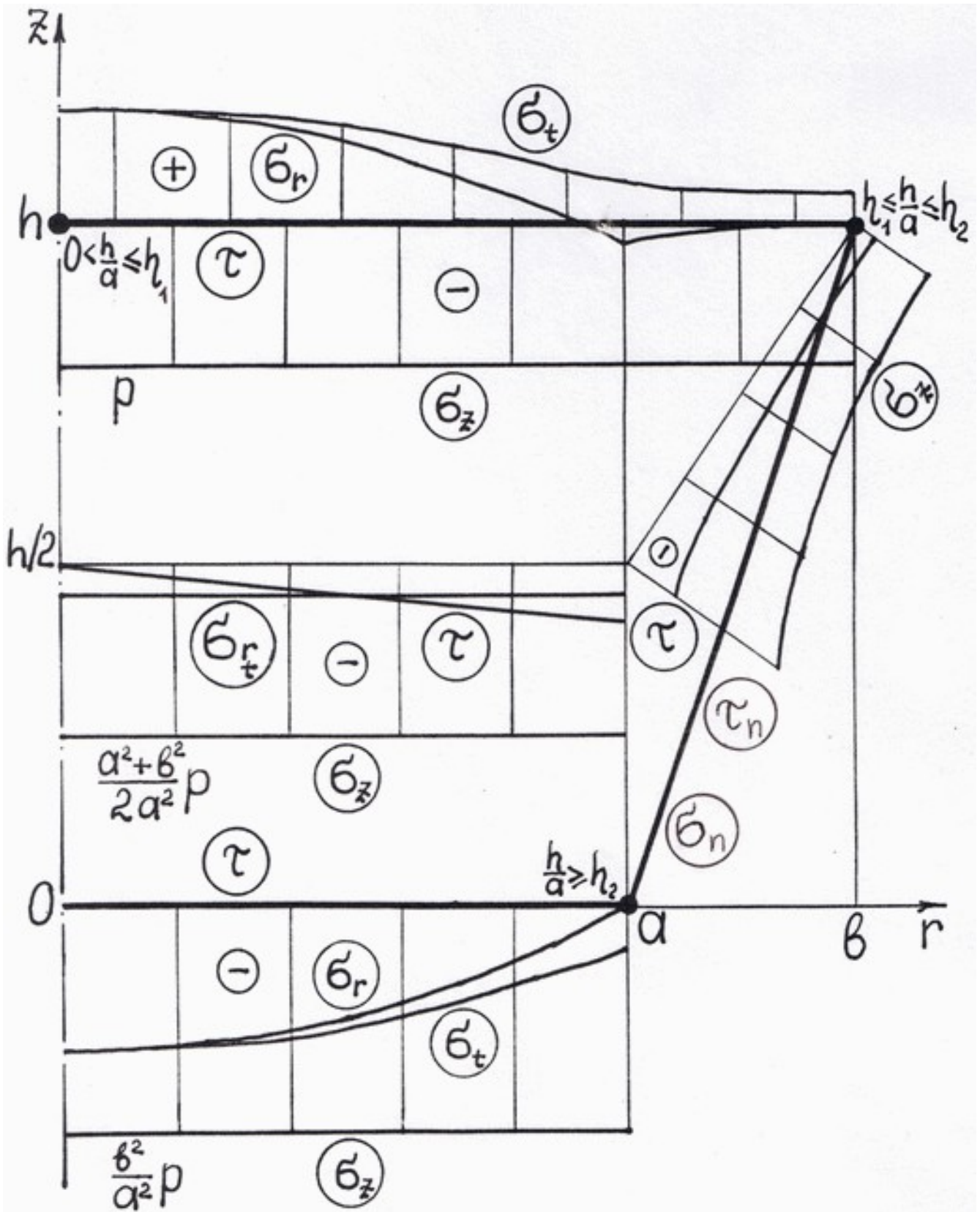


Рисунок 2.20. Эпюры напряжений и условия места (зачернённый кружок) наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения по третьей теории прочности в сжатом равномерными давлениями на торцы трёхмерном упругом теле, имеющем форму усечённого конуса.

Принимаем простейшее необходимое и достаточное параболическое распределение сдвигового напряжения в осевом направлении.

Из равновесия частей

$$0 \leq r' \leq r \quad (r \leq a)$$

и

$$r \leq r' \leq b \quad (r \geq a)$$

устанавливаем разветвлённые формулы для сдвигового напряжения

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, z) &= -3p(b^2/a^2 - 1)(r/h)(z/h)(1 - z/h), \quad 0 \leq r \leq a; \\ \tau_{rz}(r, z) &= -3p(b - a)^3(b - r)^{-2}(b + r)h^{-1}r^{-1}[z/h - (r - a)/(b - a)](1 - z/h), \quad a \leq r \leq b. \end{aligned}$$

Из второго уравнения равновесия (2.102) и с учётом граничных условий на сжатых основаниях и ненагруженной боковой поверхности определяется осевое напряжение

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z) &= p[-b^2/a^2 + (b^2/a^2 - 1)(3z^2/h^2 - 2z^3/h^3)], \quad 0 \leq r \leq a; \\ \sigma_z(r, z) &= p\{-1 + (3/2)(b - a)^2(b - r)^{-2}(b + r)r^{-1}(1 - z/h)^2 - (1/2)(b - a)^3(b - r)^{-3}(3b + r)r^{-1}(1 - z/h)^2[1 + 2z/h - 3(r - a)/(b - a)]\}, \quad a < r \leq b. \end{aligned}$$

Из первого уравнения равновесия (2.101) и из (2.103) устанавливаются радиальное  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$  напряжения:

в центральной части  $0 \leq r \leq a$  усечённого конуса

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) &= p\{(1/2)\mu(b^2 - a^2)a^{-1}(-1 + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3) + (3/8)(3 + \mu)(b^2/a^2 - 1)(r^2/h^2)(1 - 2z/h) + (1/2)\mu(b - a)[a + b + (b - a)z/h](1 - z/h)[a + (b - a)z/h]^2 - (3/8)(1 - \mu)(b^2 - a^2)(a^2/h^2)(1 - 2z/h)[a + (b - a)z/h]^2 - (3/4)(1 + \mu)(b^2 - a^2)h^{-2}(1 - 2z/h) - (3/2)(1 - \mu)(b - a)^2h^{-1}(1 - z/h)[a + (b - a)z/h]^2[az/h + (2b - a - (b - a)(z/h))\ln(1 - z/h)^{-1}] - (3/2)(1 + \mu)(1 - a/b)^2h^{-1}(1 - z/h)[bz/h + (a + (b - a)z/h)\ln((1 + (b - a)a^{-1}z/h)(1 - z/h)^{-1})]\}; \\ \sigma_t(r, z) &= p\{(1/2)\mu(b^2 - a^2)a^{-1}(-1 + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3) + (3/8)(1 + 3\mu)(b^2/a^2 - 1)(r^2/h^2)(1 - 2z/h) + (1/2)\mu(b - a)[a + b + (b - a)z/h](1 - z/h)[a + (b - a)z/h]^2 - (3/8)(1 - \mu)(b^2 - a^2)(a^2/h^2)(1 - 2z/h)[a + (b - a)z/h]^2 - (3/4)(1 + \mu)(b^2 - a^2)h^{-2}(1 - 2z/h) - (3/2)(1 - \mu)(b - a)^2h^{-1}(1 - z/h)[a + (b - a)z/h]^2[az/h + (2b - a - (b - a)(z/h))\ln(1 - z/h)^{-1}] - (3/2)(1 + \mu)(1 - a/b)^2h^{-1}(1 - z/h)[bz/h + (a + (b - a)z/h)\ln((1 + (b - a)a^{-1}z/h)(1 - z/h)^{-1})]\}; \end{aligned}$$

в периферической части  $a < r \leq b$  усечённого конуса

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) &= p\{(1/2)\mu(b - a)(1 - z/h)[(a + b + (b - a)z/h)/(a + (b - a)z/h)^2 - (b - a)^2(b - r)^{-2}(b + r)r^{-2}(1 - z/h)(1 + 2z/h - 3(r - a)/(b - a))] + (3/8)(1 - \mu)(b^2 - a^2)(a^2/h^2)[1/r^2 - 1/(a + (b - a)z/h)^2](1 - 2z/h) + (3/2)(1 - \mu)(b - a)^2h^{-1}(1 - z/h)[r^2(r - a)(b - r)^{-1}(r - bz/h) + r^2(2b - a - (b - a)z/h)\ln((b - a)/(b - r)) - (az/h + (2b - a - (b - a)z/h)\ln(1 - z/h)^{-1})/(a + (b - a)z/h)^2] + (3/2)(1 + \mu)(1 - a/b)^2h^{-1}(1 - z/h)[b(r - a)(b - r)^{-1} - b(b - a)(b - r)^{-1}z/h + (a + (b - a)z/h)\ln(r(b - a)(b - r)^{-1}(1 - z/h)(a + (b - a)z/h)^{-1})]\}; \\ \sigma_t(r, z) &= p\{(1/2)\mu(b - a)(1 - z/h)[(a + b + (b - a)z/h)/(a + (b - a)z/h)^2 + (b - a)^2(b - r)^{-3}(b^2 + 3br + 4r^2)r^{-2}(1 - z/h)(1 + 2z/h - 3(r - a)/(b - a)) + 3(b - a)(b - r)^{-2}(b + r)r^{-1}(1 - z/h)] - (3/8)(1 - \mu)(b^2 - a^2)(a^2/h^2)[1/r^2 + 1/(a + (b - a)z/h)^2](1 - 2z/h) + (3/2)(1 - \mu)(b - a)^2h^{-1}r^{-1}(1 - z/h)[(ab - 2ar + r^2)r^{-1}(b - r)^{-2}(r - bz/h) + (r - a)/(b - r) + (2b - a - (b - a)z/h)((b - r)^{-1} - r^{-1}\ln((b - a)/(b - r)))] - r(az/h + (2b - a - (b - a)z/h)\ln(1 - z/h)^{-1})/(a + (b - a)z/h)^2 + (3/2)(1 + \mu)(1 - a/b)^2h^{-1}(1 - z/h)[-b(b - r)^{-2}(r^2 - 2br + ab + b(b - a)z/h) + (a + (b - a)z/h)(b(b - r)^{-1} + \ln(r(b - a)(b - r)^{-1}(1 - z/h)(a + (b - a)z/h)^{-1}))] - 3(b - a)^3(b + r)(b - r)^{-2}h^{-2}[(b + r - 2a)/(b - a) - 2z/h]\}. \end{aligned}$$

Логарифмические особенности при  $z \rightarrow h - 0$  — лишь кажущиеся, так как

$$\lim_{z \rightarrow h - 0} (1 - z/h)\ln(1 - z/h)^{-1} = 0.$$

В пределе при  $b \rightarrow a + 0$  решение стремится к элементарному для равномерно сжатого по основаниям именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела.

Конусность хотя бы и ненагруженной боковой поверхности влечёт отсутствующие при  $b = a$  изгибные эффекты.

Так, формулы для радиального и тангенциального (окружного) напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, 0) &= -(3/8)(3 + \mu)p(b^2 - a^2)h^{-2}(1 - r^2/a^2), \quad 0 \leq r \leq a; \\ \sigma_t(r, 0) &= -(3/8)p(b^2 - a^2)h^{-2}[3 + \mu - (1 + 3\mu)r^2/a^2], \quad 0 \leq r \leq a \end{aligned}$$

свидетельствуют о тождестве этих напряжений таковым на сжатом основании опёртого по краю именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела

$$0 \leq r \leq a,$$

$$0 \leq z \leq h,$$

нагруженного на это основание давлением  $p(b^2 - a^2)/a^2$ , равным разности давлений на основания в решаемой задаче, или нагруженного на оба основания такими же давлениями, как в решаемой задаче.

Для верхнего основания  $z = h$  взамен тождества имеет место аналогия:

в центральной части  $0 \leq r \leq a$  усечённого конуса

$$\sigma_r(r, h) = (3/8)p(b^2 - a^2)h^{-2}[2(1 + \mu) + (1 - \mu)a^2/b^2 - (3 + \mu)r^2/a^2];$$

$$\sigma_t(r, h) = (3/8)p(b^2 - a^2)h^{-2}[2(1 + \mu) + (1 - \mu)a^2/b^2 - (1 + 3\mu)r^2/a^2];$$

в периферической части  $a < r \leq b$  усечённого конуса

$$\sigma_r(r, h) = - (3/8)(1 - \mu)p(b^2 - a^2)h^{-2}a^2b^{-2}(b^2 - r^2)/r^2;$$

$$\sigma_t(r, h) = (3/8)(1 - \mu)p(b^2 - a^2)h^{-2}a^2b^{-2}(b^2 + r^2)/r^2.$$

Плоская часть

$$0 \leq r \leq a,$$

$$z = h/2$$

срединной поверхности является изоповерхностью радиального  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$  и осевого  $\sigma_z(r, z)$  напряжений

$$\sigma_r(r, h/2) = p\{ - (1/4)\mu(b/a - 1)^2(a^2 + 4ab + b^2)/(a + b)^2 - (3/2)(1 - \mu)(b - a)^2(b + a)^{-2}[a + (3b - a)\ln 2]/h - (3/8)(1 + \mu)(1 - a/b)^2h^{-1}[b + (a + b)\ln(1 + b/a)]\};$$

$$\sigma_t(r, h/2) = p\{ - (1/4)\mu(b/a - 1)^2(a^2 + 4ab + b^2)/(a + b)^2 - (3/2)(1 - \mu)(b - a)^2(b + a)^{-2}[a + (3b - a)\ln 2]/h - (3/8)(1 + \mu)(1 - a/b)^2h^{-1}[b + (a + b)\ln(1 + b/a)]\};$$

$$\sigma_z(r, h/2) = - p(a^2 + b^2)/(2a^2).$$

На конической части

$$a \leq r \leq b,$$

$$z = [1 + (r - a)/(b - a)]h/2$$

срединной поверхности, как и на продолжении плоской части срединной поверхности, это не имеет места.

Например, осевое напряжение

$$\sigma_z\{r, [1 + (r - a)/(b - a)]h/2\} = - p(3b + 7r)/(8r).$$

Отметим, что сдвиговое напряжение

$$\tau_{rz}\{r, [1 + (r - a)/(b - a)]h/2\} = - (3/4)p(b - a)(b + r)/(hr)$$

и в единственной точке  $(b, h)$  непрерывность сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$  нарушена, так как не существует единый предел

$$\lim_{r \rightarrow b-0, z \rightarrow h-0} \tau_{rz}(r, z),$$

зависящий от пути приближения к этой точке и изменяющийся от минимума

$$- (3/2)p(b - a)/h$$

на конической части срединной поверхности до нулевого максимума на верхнем основании и на боковой поверхности.

Эта единственная особенность решения на краю  $(b, h)$  большого торца также противоречит граничному условию

$$\tau_{rz}(b, h) = 0.$$

Однако эта особенность касается единственной точки  $(b, h)$  и не имеет практического значения, так как при действительных структуре материала и технологии даже острая кромка имеет некоторое закругление.

Соответствующее усложняющее уточнение постановки задачи в данном случае избыточно.

Графическое изображение напряжений на характерных поверхностях именно существенно трёхмерного сплошного усечённого конического тела иллюстрирует (см. рис. 2.20) предложенную концепцию его напряжённого состояния.

Концепция прочности (по третьей теории прочности) такого тела заключается в существовании для отношения  $h/a$  первого критического значения

$$\eta_1 = (2^{3/2}/3)\{(3/4)(b^2/a^2 - 1)[2(1 + \mu) + (1 - \mu)a^2/b^2] - (15/8)(1 - \mu)(1 - a^2/b^2) - 9(b/a - 1)^2 + [(3/4)(b^2/a^2 - 1)(2(1 + \mu) + (1 - \mu)a^2/b^2) - (15/8)(1 - \mu)(1 - a^2/b^2) - 9(b/a - 1)^2]^2 + (81/256)(b^2/a^2 - 1)^2[(2(1 + \mu) + (1 - \mu)a^2/b^2)^2 - 4(1 - \mu)^2a^4/b^4]\}^{1/2}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 196/556

и при  $b/a > 5^{1/2}/2 \approx 1.118$  (численное значение соответствует  $\mu = 0.3$  для стали) дополнительно второго критического значения

$$\eta_2 = \{9(b/a - 1)^2 + (15/8)(1 - \mu)(1 - a^2/b^2) + [9(b/a - 1)^2 + (15/8)(1 - \mu)(1 - a^2/b^2)]^2 + (9/4)(1 - \mu)^2(1 - a^2/b^2)^2(b^4/a^4 - 25/16)\}^{1/2} / [2(b^4/a^4 - 25/16)]^{1/2},$$

превышение которых соответственно влечёт перемещение области наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения из центра большего основания на его край и с края большего основания на край меньшего основания, причём равносильное (эквивалентное) напряжение

$$\begin{aligned}\sigma_e(0, h) &= p\{1 + (3/8)(b^2 - a^2)h^{-2}[2(1 + \mu) + (1 - \mu)a^2/b^2]\}; \\ \sigma_e(b, h) &= p\{5/4 + (3/4)(1 - \mu)(b^2 - a^2)h^{-2}a^2/b^2 + 9(b - a)^2h^{-2}\}^{1/2}; \\ \sigma_e(a, 0) &= pb^2/a^2.\end{aligned}$$

Приравниванием соответствующего наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$  предельному  $\sigma_L$  или допускаемому  $[\sigma]$  напряжению устанавливаются предельное  $p_L$  и допускаемое  $[p]$  значения давления  $p$ , что и завершает решение задачи прочности.

Таким образом, сущность общего интегрального метода решения задач прочности для трёхмерных осесимметричных тел при кусочно-гладких нагружениях заключается в прямом точном или приближённом определении напряжений в решаемой задаче по всей совокупности заданных и неопределённых (с возможностью поэтапного снижения меры неопределённости вплоть до наименьшей статически возможной) граничных условий в напряжениях.

Точно выполняются все эти условия, оба уравнения равновесия и одно простейшее из обоих уравнений совместности деформаций с использованием оставшегося сложнейшего уравнения совместности деформаций именно и только для проверки точности и оценки погрешности полученного решения.

Наряду с мысленным рассечением тела сложной конфигурации минимальной системой ортогональных осей плоскостей и соосных (коаксиальных) цилиндрических поверхностей на цилиндрические и неканонические макроэлементы вращения и сопряжением решений для этих макроэлементов общий интегральный метод позволяет решать задачу и для целого тела. При этом особенностям геометрии тела и распределения нагрузок соответствуют разветвления аналитических представлений компонентов напряжённо-деформированного состояния данного тела.

Для оценки необходимости, полезности и степени приближённости именно аналитических решений существенно трёхмерных осесимметричных задач теории упругости (без объёмных сил и кручения) общим интегральным методом как частным случаем целочастичной (парциальной) методологии представляются существенными следующие соображения.

Во-первых, при общем интегральном методе точно выполняются оба уравнения равновесия, одно из двух уравнений совместности деформаций и все граничные условия, так что не выполняется лишь одно из целого ряда условий. При любом приближённом решении какие-то условия непременно нарушаются, иначе оно было бы точным. Поэтому нарушение единственного из целого ряда условий является в этом смысле наименьшим возможным. Кроме того, для решения задачи прочности точность определения напряжений важнее точности выполнения одного из двух уравнений совместности деформаций, тем более что все граничные условия выполнены точно, а места наиболее опасных напряжённых состояний, как правило, располагаются на поверхности, то есть на границе, деформируемого твёрдого тела. Простейшее статически возможное распределение сдвигового напряжения как функции напряжений для определения всех нормальных напряжений, ещё и удовлетворяющее как дополнительному условию уравнениям равновесия не только целого существенно трёхмерного тела, но и произвольной отсечённой его части по методу сечений в бесконечном множестве мощности континуума, точно или достаточно хорошо приближённо соответствует распределению сдвигового напряжения в известных решённых задачах, в частности в теории плит. Поэтому есть все основания полагать, что даваемое общим интегральным методом

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 197/556

приближённое решение по меньшей мере не хуже многих общепринятых приближённых решений, точность которых обычно не оценивается вообще никак.

Во-вторых, как указано выше, известный метод прямой оценки погрешностей приближённых решений основан на сопоставлении получаемого приближённого решения или с точным, или с гораздо более точным приближённым решением. Но им надо располагать, и поэтому нет возможности оценить таким путём точность наилучшего известного приближённого решения. Например, известны прямые оценки точности решений только тех задач теории пластин, для которых есть решения соответствующих задач теории плит, но нет известных прямых оценок решений задач теории плит, потому что по существу очень мало решений нетривиальных существенно трёхмерных задач теории упругости. В настоящей диссертации именно дополнительно к известному методу прямой оценки погрешностей приближённых решений предложен и использован ещё и другой подход – метод косвенной оценки погрешностей неточных псевдорешений, в частности приближённых решений, как метод прямого оценивания погрешности неудовлетворения, соответствующей каждому из уравнений подсистемы, названной нами оценочной. И этот метод применим к достаточно широкому априорно не указываемому классу задач, хотя использован для сравнительно узкого класса задач по нуждам настоящей диссертации. В ней этот метод позволил дать косвенные оценки погрешностей впервые полученных приближённых решений нетривиальных задач для именно существенно трёхмерных тел. А сами эти решения позволили уточнить известные прямые оценки точности решений задач теории пластин по решениям задач теории плит, а главное, именно впервые дать прямые оценки точности решений задач теории плит. Важно, что этот дополнительный метод косвенной оценки погрешностей неточных псевдорешений, в частности приближённых решений, как метод прямого оценивания погрешности неудовлетворения, соответствующей каждому из уравнений подсистемы, названной нами оценочной, даёт именно не зависящие от соотношений размеров деформируемого твёрдого тела универсальные оценки погрешности приближённых решений по общему интегральному методу. Поэтому есть основания полагать, что точность решений по общему интегральному методу для именно существенно трёхмерных тел примерно соответствует точности решений теории пластин для пластин. Кроме того, и сложность решений по общему интегральному методу для именно существенно трёхмерных тел примерно соответствует сложности решений теории пластин для пластин.

В-третьих, приближённые решения по общему интегральному методу сопоставимы с также аналитическими многовариантными приближёнными решениями по общему степенному методу и с численными решениями по методу конечных элементов и согласуются с данными проведённых экспериментов, так что выдерживают аналитическую, численную и экспериментальную проверку. Кроме того, простейшие возможные приближённые аналитические решения по общему степенному методу и по общему интегральному методу обеспечивают понимание и анализ деформирования, прочности и разрушения, открывают и обосновывают их проверяемые и подтверждаемые аналитически, численно и экспериментально принципиально новые явления и законы для существенно трёхмерных тел. В-четвёртых, численные методы и экспериментальные данные полезны и необходимы для поверочных расчётов с уже выбранными исполнительными размерами. А для проектных расчётов и особенно для многопараметрической оптимизации, а также для испытания (тестирования) численных методов и их программ, не обеспечивающих внутренней проверяемости, необходимы достаточно простые именно аналитические методы.

В-пятых, как указано выше, диссертация является обобщением исследований автора с двадцатилетним безаварийным опытом его именно аналитических методов расчёта на прочность порядка тысячи конструкций в технике высоких давлений, причём в лаборатории прочности конструкций, работающих под давлением, ВНИИкомпрессормаш среди других использовался гидрокомпрессор на давления до 1600 МПа, что примерно в 15 раз превышает давление на дне Марианской впадины, глубочайшей в Мировом океане. Автор руководил испытанными по своим аналитическим методам численными конечно-элементными

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 198/556

расчётами прочности внедрённых особо ответственных крупногабаритных сосудов высокого давления, в том числе для Института проблем прочности Академии Наук Украины, обосновал все эти расчёты и организовал их доскональные взыскательные проверки докторами и кандидатами наук, обсуждение и затем утверждение ИркутскНИИХимаш как головным институтом СССР по сосудам высокого давления.

В-шестых, именно обладающие простотой на уровне сопротивления материалов аналитические решения сложных задач для существенно трёхмерных тел необходимы для инженерного образования, продолжают и развивают труды и достижения классиков.

Общий интегральный метод позволяет ставить и решать до конца задачи прочности для именно существенно именно трёхмерных тел и устанавливать в явном виде критические зависимости исходных параметров между собой, соответствующие перемещениям областей наибольших равносильных (эквивалентных) напряжений в таких телах.

При этом получаемые решения сочетают приемлемость с максимально возможной простотой, позволяют выявлять и анализировать качественный характер распределений напряжений в трёхмерных телах, а также предлагать и обосновывать концепции их деформирования, а по месту наибольших равносильных (эквивалентных) напряжений также концепции разрушения трёхмерных тел.

## **2.20. Определение основного типа схем нагружения трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, в технике высоких давлений**

Сужение  $G_n$  общего типа схем нагружения  $G_g$ , соответствующее технике высоких давлений, лишает свойства минимальности основной для  $G_g$  тип  $F_g$  схем с одним свободным основанием в общей осесимметричной упругой задаче без объёмных сил и кручения, обладающий избыточной общностью.

Действительно, при квазистатическом нагружении давление на каждый участок поверхности трёхмерного цилиндрического тела, расположенный между соседними уплотнительными элементами, по закону Паскаля равномерно.

В зонах местных их взаимодействий с трёхмерным цилиндрическим телом имеют место распределения нормальных и сдвиговых (малых при жидком трении) нагрузок на тело по физически возможным непрерывным законам (если не выходить за рамки феноменологических моделей сплошных сред).

Однако каждая из этих зон имеет ширину порядка характерного размера сечения уплотнительного элемента, малую по сравнению с характерными размерами самого трёхмерного цилиндрического тела.

В подобных случаях логична и общепринята при переходе от действительного объекта к расчётной схеме замена действительного местного распределения нагрузки теоретическим её скачком (разрывом первого рода).

В дальнейшем будет показано, что применительно к технике высоких давлений обусловливаемая подобной заменой погрешность находится в пределах инженерной точности расчёта.

Кроме того, уплотнительные элементы обычно не размещаются у боковой поверхности цилиндрического тела вдали от его оснований и давление на боковую поверхность может считаться равномерным.

Иные расчётные схемы, относящиеся и к контактными задачам с возможным трением, могут анализироваться общим (полу)степенным методом и общим интегральным методом аналитической методологии макроэлементов.

В первом же приближении обычно можно принять контактное давление равномерным в пределах номинальной зоны контакта и пренебречь трением.

Следовательно, тип схем нагружения сплошного цилиндрического тела (элемента), самоуравновешенного ступенчатыми давлениями на основания (торцы) и нагруженного

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 199/556

равномерным давлением на боковую поверхность, является общим для техники высоких давлений и может быть обозначен опять  $G_h$ .

Представляется логичным предъявить к основному типу  $F_h$  схем нагружения в этой области техники естественное требование теоретико-множественного включения в тип  $G_h$ , что сразу оставляет в стороне избыточно общие типы схем наподобие типа  $F_g$  с одним свободным основанием, основного в общей осесимметричной упругой задаче без объёмных сил и кручения.

Конструктивное доказательство существования искомого основного типа  $F_h$  без предъявления требования минимальности тривиально ввиду удовлетворительности самого типа  $G_h$ .

Сохраняя прежнюю терминологию, допустим существование минимального основного типа  $F_h$  схем нагружения в технике высоких давлений.

Он должен включать тип  $L$  схем нагружения в задаче Ламе [358], допуская равномерные давления на оба основания трёхмерного цилиндрического тела и на его боковую поверхность. Исключение любой из этих возможностей очевидным образом лишает тип  $F_h$  свойства быть основным.

Более того, он должен допускать равномерное давление и на часть хотя бы одного основания, иначе он сведётся к типу  $L$  (для схем нагружения допускаются и отрицательные «давления», то есть равномерные растяжения), далеко не исчерпывающему в технике высоких давлений.

Следовательно, тип  $F_h$  обязан содержать схемы нагружения равномерными давлениями на боковую поверхность, одно и часть другого основания трёхмерного цилиндрического тела.

Простейшими из осесимметричных его частей являются замкнутые границей внешность и внутренность окружности радиусом в пределах от нуля до радиуса сплошного трёхмерного цилиндрического тела включительно, причём совершенно произвольным в указанных пределах (исключение любого из этих значений лишает свойства линейной выражаемости саму схему нагружения, характеризующуюся исключённым значением).

В итоге приходим к двум типам схем нагружения, для одного из которых названная часть является круглой центральной (тип  $F_h^c$ ), а для другого  $F_h^p$  – кольцевой периферической.

Они могут быть приведены во взаимно однозначное соответствие, так как для произвольной схемы типа  $F_h^c$  существует единственная схема типа  $F_h^p$  с той же величиной равномерного давления на дополнительную по отношению к схеме типа  $F_h^c$  часть того же основания, не полностью нагруженного в соответствии с этой схемой, с той же величиной равномерного давления на боковую поверхность и с уравнивающим трёхмерное цилиндрическое тело равномерным давлением на полностью нагруженное по обоим схемам основание, причём это давление равно разности давлений на противоположное и это основание в схеме типа  $F_h^c$ , а такое соответствие обратимо.

Единственное исключение – схемы типа

$$L = F_h^c \cap F_h^p$$

как пересечения этих множеств, являющиеся инвариантами экстраполированного на них соответствия.

Теоретически нет возможности предпочесть один из этих типов  $F_h^c$  и  $F_h^p$  другому, но практически рационален выбор типа  $F_h^p$  схем нагружения равномерными давлениями на боковую поверхность, на одно и на кольцевую периферическую часть другого основания сплошного трёхмерного цилиндрического тела, так как в технике высоких давлений именно центральная часть конструктивного элемента, удерживающего их перепад, обычно находится под низким давлением со стороны одного из оснований.

Поэтому такой выбор основного типа  $F_h^p$  чаще всего позволяет уменьшить число слагаемых в линейных разложениях действительных схем нагружения общего типа  $G_h$  на схемы основного типа  $F_h$  в технике высоких давлений.

Выше показано, что искомый тип  $F_h$ , не содержащий схем типа  $F_h^c$ , включает тип  $F_h^p$ , однако не была показана полнота типа  $F_h^p$ , устанавливаемая здесь конструктивно.

Пусть произвольная схема  $g_h$  (рис. 2.21, а, б) типа  $G_h$  характеризуется равномерностью давлений  $p_i$  на участки  $r_{hi} \leq r \leq R_{hi}$  ( $1 \leq i \leq n_h$ )

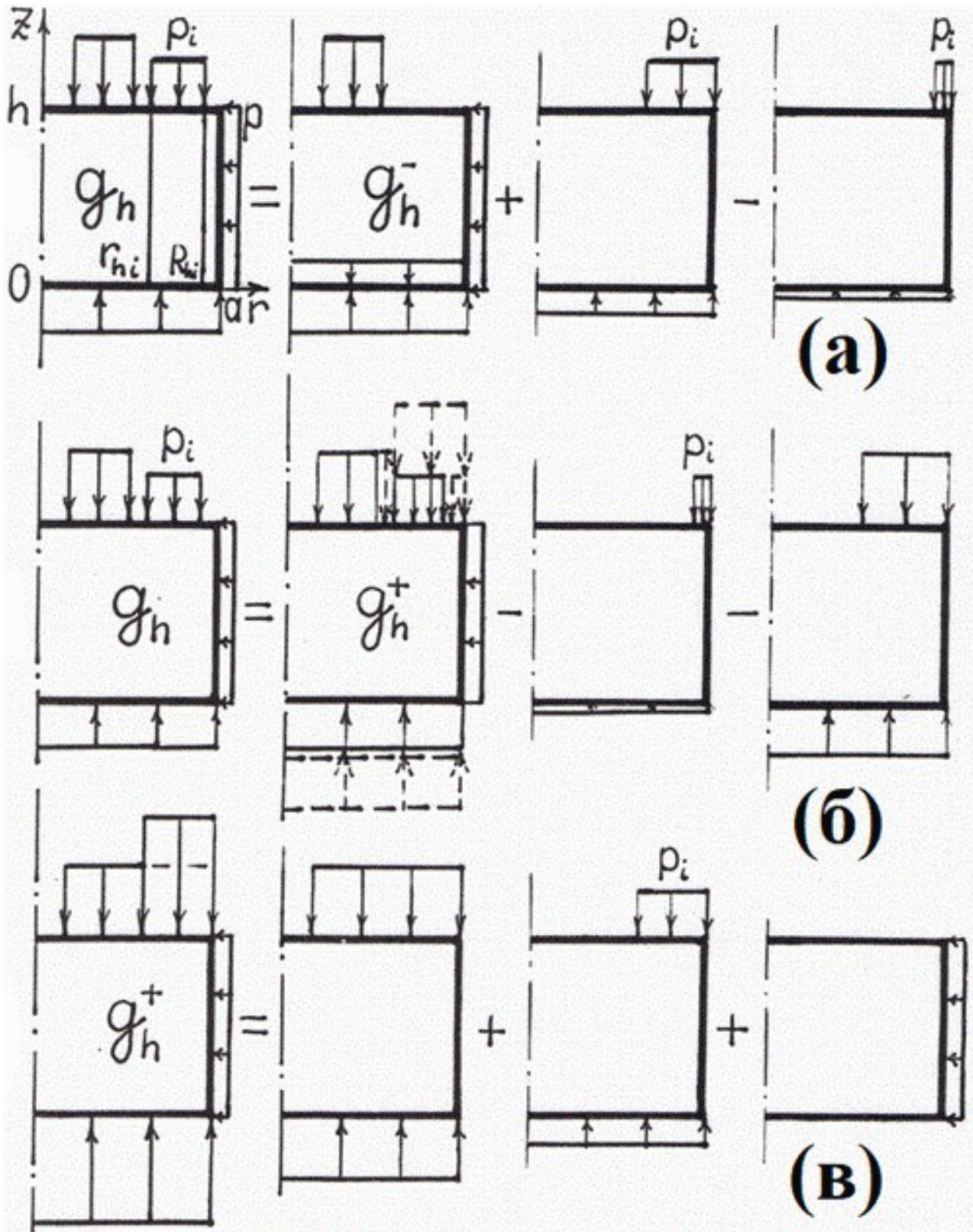


Рисунок 2.21. Алгоритмы разложений схемы ступенчатого нагружения трёхмерного цилиндрического тела на схемы основного типа в технике высоких давлений путём последовательного изъятия ступеней (а) либо дополнением до неубывающего распределения нагрузки на каждый торец (б) с последующим разложением (в).

основания  $z = h$ , давлений  $q_i$  на участки  $r_{0i} \leq r \leq R_{0i}$  ( $1 \leq i \leq n_0$ )  
 основания  $z = 0$  и давления  $p$  на боковую поверхность  $r = a$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 201/556

сплошного трёхмерного цилиндрического тела

$$0 \leq r \leq a, 0 \leq z \leq h.$$

Построим линейную комбинацию, даже алгебраическую сумму схем нагружения типа  $F_h^p$ , равную схеме  $g_h$ .

Рассмотрим произвольный участок равномерного давления на любое основание, например участок

$$r_{hi} \leq r \leq R_{hi}$$

основания  $z = h$  с давлением  $p_i$  (см. рис. 2.21, а), и представим его в виде разности участков

$$r_{hi} \leq r \leq a$$

и

$$R_{hi} \leq r \leq a$$

того же основания с тем же давлением.

Соответственно представим  $g_h$  как сумму её же  $g_h^-$  без рассматриваемого участка нагружения с уравнивающим равномерным растяжением другого основания  $z = 0$ , сложенную со схемой нагружения участка

$$r_{hi} \leq r \leq a$$

основания  $z = h$  давлением  $p_i$  с уравнивающим равномерным давлением на другое основание  $z = 0$ , за вычетом схемы нагружения участка

$$R_{hi} \leq r \leq a$$

основания  $z = h$  давлением  $p_i$  с уравнивающим равномерным давлением на другое основание  $z = 0$  (см. рис. 2.21, а).

Последние две схемы нагружения в этом разложении относятся к типу  $F_h^p$ , а первая  $g_h^-$  допускает аналогичное последовательное изъятие остальных участков нагружения исходной схемы  $g_h$ , не совпадающих с целым основанием.

В итоге этот алгоритм изъятия ступеней разлагает схему  $g_h$  в сумму  $n_h + n_0$  схем типа  $F_h^p$  за вычетом суммы  $n_h + n_0 - n_a$  ( $n_a \in \{0; 1; 2\}$  – суммарное число равных  $a$  значений  $R_{hi}$  и  $R_{0i}$ ) схем типа  $F_h^p$ , сложенную со схемой типа  $L \subseteq F_h^p$ .

Всего в алгебраической сумме – не более  $2n + 1$  слагаемых, где

$$n = n_h + n_0$$

есть общее число участков обоих оснований с равномерными давлениями.

Уменьшение этого числа возможно и более чем на  $n_a$ , если имеются примыкающие участки с ростом  $p_i$  и/или  $q_i$  при росте  $r$  и если взамен алгоритма изъятия ступеней мы используем алгоритм получения неубывающих ступенчатых распределений  $g_h^+$  давлений на каждое из оснований (см. рис. 2.21, б), в направлении убывания  $r$  дополняя ступени до  $r = a$  и отделяя лишь вычитаемые схемы, а после получения требуемых распределений  $g_h^+$  уже в направлении возрастания  $r$  отделяя лишь уменьшаемые (рис. 2.21, в).

Тем самым конструктивно установлено, что тип  $F_h^p = F_h$  схем нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела равномерными давлениями на боковую поверхность, на одно и кольцевую периферическую часть другого основания является основным типом в технике высоких давлений.

Относительно простая практическая осуществимость таких схем нагружения показана ниже. Поэтому для решения многих задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений необходимо и достаточно решение подобных задач именно для этого основного типа схем нагружения.

Поскольку в общем случае за вычетом предельных схемы нагружения в задаче Ламе [358] и схемы уравнивания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела с равномерным давлением на одно основание сдвиговым напряжением на боковой поверхности имеет место скачок давления на одно из оснований, то наряду с рассмотрением целого тела благодаря общему интегральному методу представляется рациональным и характерное для общего (полу)степенного метода сопряжение решений для центральной и периферической частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела с определением произвольных постоянных, минимизирующих невязки сопряжения.

## 2.21. Поля перемещений и напряжений по аналитической методологии макроэлементов в трёхмерном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением

Рассмотрим произвольную схему нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, относящуюся к основному типу  $F_h$  в технике высоких давлений (рис. 2.22, а), осуществляемую с помощью системы уплотнений и двух мультипликаторов давлений, включающих дифференциальные (двухступенчатые) поршни (рис. 2.22, б).

Общий (полу)степенной метод как (полу)степенная модификация аналитической методологии макроэлементов привёл при этой схеме нагружения существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (элемента) к формулам (2.80) – (2.83), (2.80') и (2.82').

Общий интегральный метод как интегральная модификация аналитической методологии макроэлементов при этой схеме нагружения трёхмерного цилиндрического тела вновь даёт формулы для сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$

$$(2.117)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = 3p(r/h)(z/h - z^2/h^2), 0 \leq r \leq a_1;$$

$$\tau_{rz}(r, z) = 3pa_1^2(a^2 - a_1^2)^{-1}[a^2/(rh) - r/h](z/h - z^2/h^2), a_1 \leq r \leq a$$

с неминуемыми разветвлениями выражений для напряжений в круглой центральной и кольцевой периферической частях именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

В круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, формулы для радиального  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$  и осевого  $\sigma_z(r, z)$  напряжений имеют вид

$$(2.118)$$

$$\sigma_r(r, z) = -p_1 + p\{(3/2)(1 + \mu)(a_1^2/h^2)a^2(a^2 - a_1^2)^{-1}\ln(a/a_1) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/8)(3 + \mu)r^2/h^2\}(1 - 2z/h) + (1/2)\mu(1 - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3);$$

$$\sigma_t(r, z) = -p_1 + p\{(3/2)(1 + \mu)(a_1^2/h^2)a^2(a^2 - a_1^2)^{-1}\ln(a/a_1) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 - (3/8)(1 + 3\mu)r^2/h^2\}(1 - 2z/h) + (1/2)\mu(1 - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3);$$

$$\sigma_z(r, z) = p(-3z^2/h^2 + 2z^3/h^3).$$

В кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, формулы для радиального  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$  и осевого  $\sigma_z(r, z)$  напряжений имеют вид

$$(2.119)$$

$$\sigma_r(r, z) = -p_1 + p\{[(3/2)(1 + \mu)(a_1^2/h^2)a^2(a^2 - a_1^2)^{-1}\ln(a/r) - (3/8)(a_1^2/h^2)(a^2 - r^2)(a^2 - a_1^2)^{-1}(3 + \mu - (1 - \mu)a_1^2/r^2)](1 - 2z/h) + (1/2)\mu a_1^2(a^2 - a_1^2)^{-1}(a^2/r^2 - 1)(1 - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3)\};$$

$$\sigma_t(r, z) = -p_1 + p\{[(3/2)(1 + \mu)(a_1^2/h^2)a^2(a^2 - a_1^2)^{-1}\ln(a/r) + (3/8)(a_1^2/h^2)(a^2 - a_1^2)^{-1}(- (1 - \mu)a_1^2(a^2/r^2 + 1) + (1 - 5\mu)a^2 + (1 + 3\mu)r^2)](1 - 2z/h) - (1/2)\mu a_1^2(a^2 - a_1^2)^{-1}(a^2/r^2 + 1)(1 - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3)\};$$

$$\sigma_z(r, z) = pa_1^2/(a^2 - a_1^2)(-a^2/a_1^2 + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3).$$

Оценочные дроби в круглой центральной  $0 \leq r \leq a_1$  и кольцевой периферической  $a_1 \leq r \leq a$  частях сплошного трёхмерного цилиндрического тела (элемента) соответственно

$$\delta_\lambda = (1/36)(1 - \mu^2)/(1 + 2\mu + \mu^2/3),$$

$$\delta_\lambda = (1/12)(1 - \mu^2)/(1 + 2\mu)$$

не превышают 2.78 % и 8.33 % при любых  $\mu$ ,  $a_1$ ,  $a$ ,  $h$ , то есть универсальная инженерная точность обеспечена.

Последние слагаемые в формулах для радиального  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$  напряжений обусловлены влиянием осевого напряжения  $\sigma_z(r, z)$  и уточняют теорию пластин.

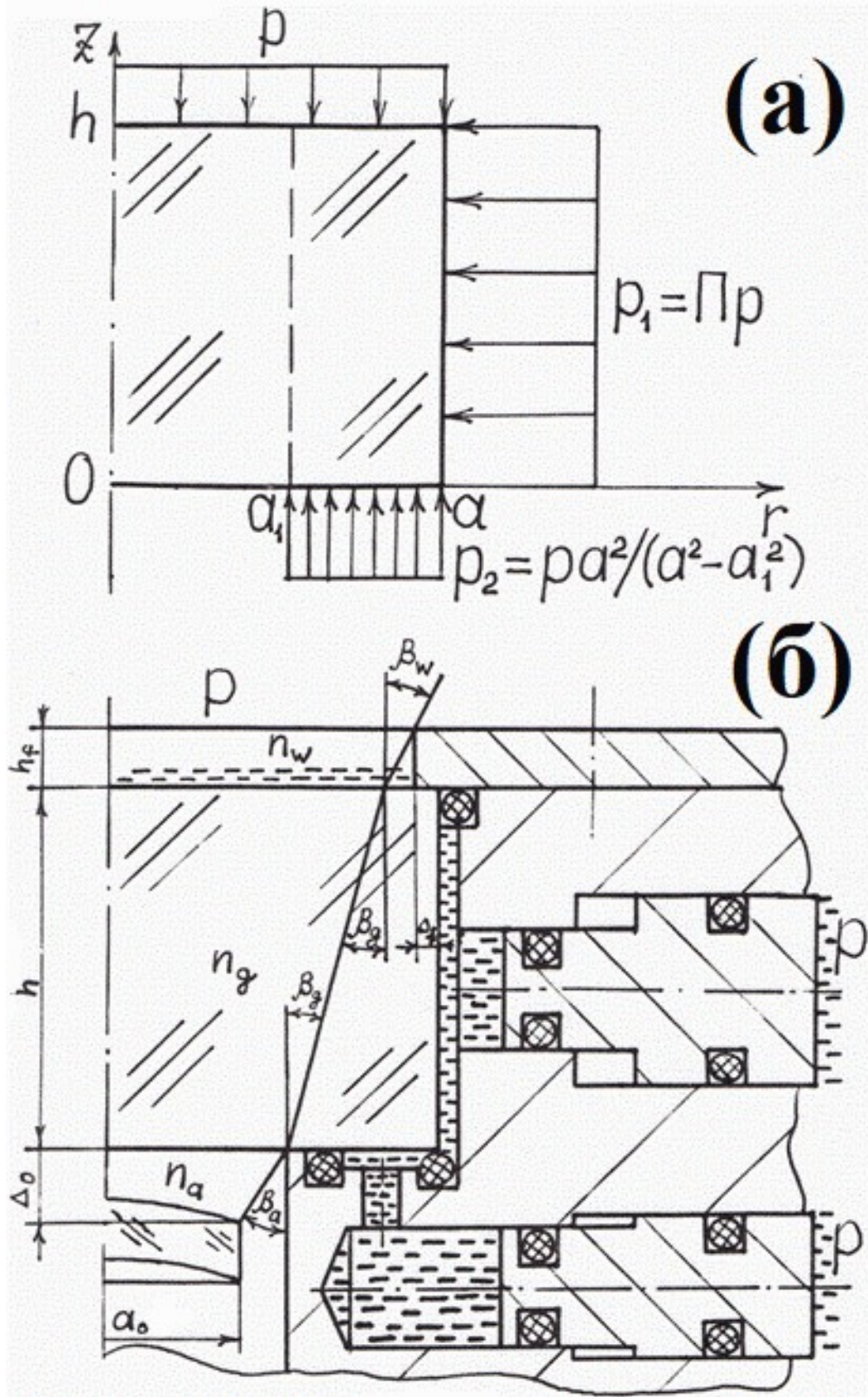


Рисунок 2.22. Схема нагружения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, относящаяся к основному типу в технике высоких давлений (а), и способ её осуществления (б).

В целом результаты применения общего (полу)степенного метода и общего интегрального метода близки в аналитическом и численном аспектах (табл. 2.6; кажущееся значительным различие в  $\sigma_r(0, 0)$  и  $\sigma_t(0, 0)$  вызвано боковым давлением, без его учёта составило бы 20 %, обусловлено различными усреднениями влияния скачка давлений, см. ниже).

Таблица 2.6. Сопоставление результатов расчёта аналитическими общим (полу)степенным методом (р) и общим интегральным методом (i) и численным методом конечных элементов (МКЭ) характерных напряжений в существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле из неорганического стекла К8 с  $a = 55$  мм,  $a_1 = 30$  мм,  $h = 60$  мм, нагруженном давлениями  $p_1 = p = 98$  МПа по схеме основного типа в технике высоких давлений.

Расстояние от частично нагруженного основания нагруженного тела $z$	Радиальное и окружное напряжения на оси нагруженного давлениями трёхмерного тела $\sigma_r(0, z) = \sigma_t(0, z)$ , МПа			Радиальное напряжение на поверхности сопряжения макроэлементов разбиения тела $\sigma_r(a_1, z)$ , МПа			Окружное напряжение на поверхности сопряжения макроэлементов разбиения тела $\sigma_t(a_1 - 0, z)$ , МПа			Окружное напряжение на боковой поверхности нагруженного трёхмерного тела $\sigma_t(a, z)$ , МПа		
	(р)	(i)	МКЭ	(р)	(i)	МКЭ	(р)	(i)	МКЭ	(р)	(i)	МКЭ
0	-30	-42	-27	-71	-72	-76	-63	-57	-60	-94	-92	-88
$h/2$	-93	-93	-103	-93	-93	-97	-100	-93	-105	-102	-103	-107
$h$	-155	-144	-128	-114	-114	-107	-137	-129	-118	-111	-113	-108

Представляется логичным именно для схемы нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодействием оценить влияние местного взаимодействия трёхмерного сплошного цилиндрического тела с уплотнительным кольцом.

Уточним постановку задачи, полагая радиальное распределение давления на внутреннее основание по-прежнему равномерным при  $a_1 \leq r \leq a$  и, например, линейным при  $a_0 \leq r \leq a_1$

$$q(r) = q(r - a_0)/(a_1 - a_0).$$

Необходимое и достаточное условие равновесия именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$q = pa^2/[a^2 - (a_0^2 + a_0a_1 + a_1^2)/3].$$

По формуле (2.109) сдвиговое напряжение

$$\tau_{rz}(r, z) = 3p(r/h)(z/h - z^2/h^2), 0 \leq r \leq a_0;$$

$$\tau_{rz}(r, z) = p[-a^2a_0^3/r + (3a^2a_1 - a_1^3 + a_0^3)r - 2a^2r^2]h^{-1}(a_1 - a_0)^{-1}[a^2 - (a_0^2 + a_0a_1 + a_1^2)/3]^{-1}(z/h - z^2/h^2), a_0 \leq r \leq a_1;$$

$$\tau_{rz}(r, z) = p(a_0^2 + a_0a_1 + a_1^2)[a^2 - (a_0^2 + a_0a_1 + a_1^2)/3]^{-1}[a^2/(rh) - r/h](z/h - z^2/h^2), a_1 \leq r \leq a$$

с неминуемыми разветвлениями выражений для напряжений в разных частях тела.

Далее используем обозначения

$$a_2 = (a_0^2 + a_0a_1 + a_1^2)/3;$$

$$A' = (3/2)a_0/h^2 + (a^2 - a_2^2)^{-1}(a_1 - a_0)^{-1}h^{-2}[-a^2a_0^3 \ln(a_1/a_0) + (1/2)(3a^2a_1 - a_1^3 + a_0^3)(a_1^2 - a_0^2) - (2/3)a^2(a_1^3 - a_0^3)] + 3a_2^2(a^2 - a_2^2)^{-1}h^{-2}[a^2 \ln(a/a_1) - (1/2)(a^2 - a_1^2)];$$

$$B' = (3/4)a_0^4a^{-2}h^{-2} + (a^2 - a_2^2)^{-1}(a_1 - a_0)^{-1}a^{-2}h^{-2}[-(1/2)a^2a_0^3(a^2 - a_0^2) + (1/4)(3a^2a_1 - a_1^3 + a_0^3)(a^4 - a_0^4) - (2/5)a^2(a^5 - a_0^5)] + 3a_2^2(a^2 - a_2^2)^{-1}a^{-2}h^{-2}[(1/2)a^2(a^2 - a_1^2) - (1/4)(a^4 - a_1^4)].$$

Тогда по формулам (2.51) – (2.53) для центральной части  $0 \leq r \leq a_0$  радиальное  $\sigma_r(r, z)$ , тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$  и осевое  $\sigma_z(r, z)$  напряжения

$$\sigma_r(r, z) = -p_1 + p\{[(1/2)(1 + \mu)A' + (1/2)(1 - \mu)B' - (3/8)(3 + \mu)r^2/h^2](1 - 2z/h) + (1/2)\mu(1 - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3)\};$$

$$\sigma_t(r, z) = -p_1 + p\{[(1/2)(1 + \mu)A' + (1/2)(1 - \mu)B' - (3/8)(1 + 3\mu)r^2/h^2](1 - 2z/h) + (1/2)\mu(1 - 3z^2/h^2 + 2z^3/h^3)\};$$

$$\sigma_z(r, z) = p(-3z^2/h^2 + 2z^3/h^3).$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 205/556

Подобны формулы и для промежуточной  $a_0 \leq r \leq a_1$  и периферической  $a_1 \leq r \leq a$  частей тела. Полагая в отличие от предыдущего

$$\begin{aligned} a_0 &= 30 \text{ мм,} \\ a_1 &= 32 \text{ мм,} \end{aligned}$$

получаем, что при  $z = 0$ ;  $h/2$ ;  $h$  соответственно

$$\begin{aligned} \sigma_r(0, z) &= -37.8; -93.2; -148.6 \text{ МПа;} \\ \sigma_r(a_0, z) &= -68.2; -93.7; -119.2 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Сопоставление этих результатов с аналогичными для схемы нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением (см. рис. 2.22 и табл. 2.6) показывает различия в пределах инженерной точности.

Итак, оправдано принятие допущения о малом влиянии местных взаимодействий трёхмерного тела с уплотнительными кольцами и возможна подобная замена непрерывных распределений поверхностных нагрузок, действующих на действительный объект, относящимися к расчётной схеме ступенчатыми распределениями давлений.

Кроме того, показано, что усреднение влияния скачка давлений сближает результаты расчётов

$$\sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0)$$

по общему интегральному методу и по общему (полу)степенному методу при среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения.

Заметим: общий (полу)степенной метод при минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и при коллокационной минимизации невязок сопряжения даёт соответственно

$$\sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0) = -35; -42 \text{ МПа}$$

(последнее и в общем случае совпадает с результатом (2.118)).

Принципиально интересны ещё и следующие воплощения однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения, в частности применительно к радиальному и окружному (тангенциальному) напряжениям. Как и для соответствующих формул (2.81) и (2.83) с принудительным обнулением невязок на оси, исходными являются соответствующие формулы (2.73) и (2.74). Формулы (2.81) и (2.83) показывают, что по невязке на поверхности сопряжения частей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при переходе от радиального напряжения к окружному (тангенциальному) напряжению следует заменить

$$[m - 2(1 + m)z/h + 6z^2/h^2 - 4z^3/h^3]$$

на

$$\mu[(1 + m) - 2(1 + m)z/h + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3].$$

Считаем, что это верно и для предполагаемой невязки окружного (тангенциального) напряжения на внешней поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, поскольку эти напряжения изменяются во многом взаимосвязанно и согласованно, а также для всего распределения обеих невязок по телу в радиальном направлении. Это даёт взамен соответствующих формул (2.81) и (2.83) формулы для окружного (тангенциального) напряжения в круглой центральной и кольцевой периферической частях тела.

В круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, окружное (тангенциальное) напряжение  $\sigma_t(r, z)$  определяется следующей формулой:

$$(2.81')$$

$$\sigma_t(r, z) = p \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{p_1}{p} + \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1+\mu)}{a_1^2/h^2} + \frac{(3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)}{a_1^2} \right] \ln(a/a_1) - \frac{(3/8)(1+3\mu)r^2/h^2}{a_1^2} \right\} \left[ (1 - 2z/h) + \frac{(3/2)(2+\mu)z^2/h^2 - (2+\mu)z^3/h^3 + r^2/a_1^2 [a_1^4 - (1/2)a^4]}{[a^2(a^2 - a_1^2)]} \right] \mu \left[ (1+m) - 2(1+m)z/h + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3 \right].$$

В кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, окружное (тангенциальное) напряжение  $\sigma_t(r, z)$  определяется следующей формулой:

$$(2.83')$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 206/556

$$\sigma_r(r, z) = p a_1^2 / (a^2 - a_1^2) \left\{ - \frac{(1/2)a^2/r^2 + 1/2 - (a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p + [(1/2)(1+m)(1-\mu)(a^2/r^2 - (1+\mu)/(1-\mu)) - (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 (a^2/r^2 + 1) + (3/8)(1-5\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a^2/h^2 \ln(a/r) + (3/8)(1+3\mu)r^2/h^2](1 - 2z/h) + [2 + \mu - (2 - \mu)a^2/r^2](-3/2 z^2/h^2 + z^3/h^3) + [r^2/a^2 + (1/2)(a-r)^2/(a-a_1)^2 a^2/a_1^2] \mu[(1+m) - 2(1+m)z/h + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3] \right\}.$$

В формулах (2.81) и (2.83) для радиального напряжения и в формулах (2.81') и (2.83') для окружного (тангенциального) напряжения однопараметрический метод устранения минимизированных невязок сопряжения на поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей и на внешней поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, предусматривает распределения невязок со снижением их модулей до нулей на оси  $r = 0$  тела для обеих невязок и на внешней поверхности тела для невязки на поверхности сопряжения частей тела.

Однако однопараметрический метод устранения минимизированных невязок сопряжения предусматривает и другие целесообразные распределения невязок. В частности, пусть теперь невязка

$$\sigma_{r2}(a_1, z)/p - \sigma_{r1}(a_1, z)/p = -a^2/(a^2 - a_1^2)[m - 2(1+m)z/h + 6z^2/h^2 - 4z^3/h^3]$$

радиального напряжения на поверхности сопряжения  $r = a_1$  круглой центральной и кольцевой периферической частей и невязка

$$\sigma_{r2}(a + 0, z)/p - \sigma_{r2}(a - 0, z)/p = 0 - \sigma_{r2}(a, z)/p = a_1^2/(a^2 - a_1^2) [m - 2(1+m)z/h + 6z^2/h^2 - 4z^3/h^3]$$

радиального напряжения на внешней поверхности  $r = a$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, по модулям уменьшаются в радиальном направлении к оси  $r = 0$ , но не до нулей, поскольку радиальное напряжение на оси не обязано обращаться и не обращается в тождественный нуль, а до своих долей, зависящих от относительных толщин круглой центральной части и целого тела.

В предельных случаях эти доли обращаются в нули при бесконечно малых относительных толщинах ввиду самоуравновешенности или почти самоуравновешенности невязок в смысле точных равенств нулю средних интегральных невязок по толщине и хотя бы приближённых равенств нулю моментов невязок по толщине и в единицы при бесконечно больших относительных толщинах круглой центральной части и целого тела.

Поэтому по принципу допустимой простоты достаточно принять, что каждая такая доля есть доля квадрата толщины от суммы квадрата толщины и квадрата соответствующего радиуса.

Тогда однопараметрический метод устранения минимизированных невязок сопряжения с делением невязки сопряжения частей поровну (пополам) между обеими частями именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, даёт взамен соответствующих формул (2.81) и (2.83), (2.81') и (2.83') формулы для радиального и окружного (тангенциального) напряжений в круглой центральной и кольцевой периферической частях тела. При этом для сохранения необходимого тождественного равенства этих напряжений на оси тела можно устранить их промежуточную разность квадратичным распределением соответствующей добавки, например к окружному (тангенциальному) напряжению, в круглой центральной части с уменьшением модуля добавки до нуля на поверхности сопряжения частей умножением значения добавки на оси тела на  $(1 - r^2/a_1^2)$ .

В круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, радиальное  $\sigma_r(r, z)$  и окружное (тангенциальное)  $\sigma_t(r, z)$  напряжения определяются следующими формулами:

(2.81'')

$$\sigma_{r1}(r, z) = p \left\{ - \frac{(1/2 + p_1/p) + [(1/2)(1+m)(1+\mu) + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (3/8)(3+\mu)r^2/h^2](1 - 2z/h) + (3/2)(2+\mu)z^2/h^2 - (2+\mu)z^3/h^3 + [a_1^2/(h^2 + a^2) - (1/2)a^2/(h^2 + a_1^2)](h^2 + r^2)/(a^2 - a_1^2) [m - 2(1+m)z/h + 6z^2/h^2 - 4z^3/h^3] \right\};$$

$$\sigma_{t1}(r, z) = p \left\{ - \frac{(1/2 + p_1/p) + [(1/2)(1+m)(1+\mu) + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) - (3/8)(1+3\mu)r^2/h^2](1 - 2z/h) + (3/2)(2+\mu)z^2/h^2 - (2+\mu)z^3/h^3 + [a_1^2/(h^2 + a^2) - (1/2)a^2/(h^2 + a_1^2)](h^2 + r^2)/(a^2 - a_1^2) [m - 2(1+m)z/h + 6z^2/h^2 - 4z^3/h^3] \right\};$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 207/556  
 $a_1^2)]r^2/a_1^2 (h^2 + a_1^2)/(a^2 - a_1^2) \mu[(1 + m) - 2(1 + m)z/h + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3] + [a_1^2/(h^2 + a^2) - (1/2)a^2/(h^2 + a_1^2)](1 - r^2/a_1^2)h^2/(a^2 - a_1^2) [m - 2(1 + m)z/h + 6z^2/h^2 - 4z^3/h^3] \}$ .

В кольцевой периферической части  $a_1 \leq r \leq a$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, радиальное  $\sigma_r(r, z)$  и окружное (тангенциальное)  $\sigma_t(r, z)$  напряжения определяются следующими формулами:

(2.83'')

$$\sigma_{r2}(r, z) = pa_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ (1/2)a^2/r^2 + 1/2 - (a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p + [ - (1/2)(1 + m)(1 - \mu)(a^2/r^2 - 1) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 (a^2/r^2 - 1) + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/r) - (3/8)(3 + \mu)(a^2 - r^2)/h^2](1 - 2z/h) + [2 + \mu + (2 - \mu)a^2/r^2](-3/2 z^2/h^2 + z^3/h^3) + [(h^2 + r^2)/(h^2 + a^2) a_1^2/a^2 + (a - r)^2/(a - a_1)^2]a^2/a_1^2 [m - 2(1 + m)z/h + 6z^2/h^2 - 4z^3/h^3] \};$$

$$\sigma_{t2}(r, z) = pa_1^2/(a^2 - a_1^2) \{ - (1/2)a^2/r^2 + 1/2 - (a^2 - a_1^2)/a_1^2 p_1/p + [(1/2)(1 + m)(1 - \mu)(a^2/r^2 - (1 + \mu)/(1 - \mu)) - (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 (a^2/r^2 + 1) + (3/8)(1 - 5\mu)a^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a^2/h^2 \ln(a/r) + (3/8)(1 + 3\mu)r^2/h^2](1 - 2z/h) + [2 + \mu - (2 - \mu)a^2/r^2](-3/2 z^2/h^2 + z^3/h^3) + [(h^2 + r^2)/(h^2 + a^2) + (a - r)^2/(a - a_1)^2] a^2/a_1^2 \mu[(1 + m) - 2(1 + m)z/h + 3z^2/h^2 - 2z^3/h^3] \}.$$

Согласно этим формулам существенно сближаются соответствующие значения радиального напряжения по общему интегральному методу и по общему (полу)степенному методу, в т. ч. при методе среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, в частности дающем

$$\sigma_{r1}(0, 0) = \sigma_{t1}(0, 0) = -35 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{r1}(0, h) = \sigma_{t1}(0, h) = -148 \text{ МПа}.$$

Кроме того, взамен не единственно возможного воплощения (2.79) однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения

$$T(r) = t(r) + (r^2/a^2)[t(a + 0) - t(a - 0)] + (1/2)(r^2/a_1^2)[t(a_1 + 0) - t(a_1 - 0)] \text{ при } 0 \leq r \leq a_1;$$

$$T(r) = t(r) + (r^2/a^2)[t(a + 0) - t(a - 0)] - (1/2)[(a - r)/(a - a_1)]^2[t(a_1 + 0) - t(a_1 - 0)] \text{ при } a_1 \leq r \leq a$$

можно применять другое несколько более сложное воплощение однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения, например

(2.120)

$$T(r) = t(r) + [t(a + 0) - t(a - 0)]h^2/(h^2 + a^2 - r^2) + [t(a_1 + 0) - t(a_1 - 0)](1 - a_1^2/a^2)/(h^2 + a_1^2 - r^2) \text{ при } 0 \leq r \leq a_1;$$

$$T(r) = t(r) + [t(a + 0) - t(a - 0)]h^2/(h^2 + a^2 - r^2) - [t(a_1 + 0) - t(a_1 - 0)](a_1^2/a^2)/(h^2 + r^2 - a_1^2) \text{ при } a_1 \leq r \leq a.$$

Тогда в общем (полу)степенном методе метод среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, метод минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и метод коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине – дают соответственно

$$\sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0) = -41.44; -41.69; -42.12 \text{ МПа},$$

а последнее из этих значений даётся и общим интегральным методом.

Это подтверждает не только зависимость различий итогов расчёта напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, созданными общим (полу)степенным методом и общим интегральным методом аналитической методологии макроэлементов от способа усреднения влияния скачка давления, приложенного к частично нагруженному основанию трёхмерного тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, но и объективность теоретических результатов.

Однако соответствующие задачи прочности для тел из произвольных материалов (изотропных и анизотропных, пластичных, полухрупких и хрупких) при постоянном или произвольном переменном нагружении требуют приведения критериев предельных состояний и критериев прочности материалов ко всеобщим прочностным законам природы во всеобщих напряжениях, в частности делением главных напряжений на модули их собственных одноосных пределов тех же направлений и знаков в тех же точках нагруженных тел при прочих равных условиях нагружения.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 208/556

## **2.22. Общая теория предельных состояний и общая теория прочности с общей методологией учёта действительных соотношений прочностных свойств материалов, с общей методологией приведения главных напряжений к всеобщим напряжениям и с общей методологией приведения критериев предельных состояний и критериев прочности впервые к всеобщим прочностным законам природы для произвольно анизотропных тел с различными сопротивлениями растяжениям и сжатиям при любых переменных нагружениях с возможными вращениями главных направлений напряжённого состояния**

Частные критерии предельных состояний и прочности математически строго проанализированы и обобщены общей теорией прочности материалов с открытием первых в истории всеобщих прочностных законов природы (в том числе путём исправляющего и обобщающего приведения к ним известных частных критериев предельных состояний и прочности) в закономерных инвариантных самопредельных самоопасных безразмерных всеобщих напряжениях с приведением размерных напряжений, в частности делением на модули их одноосных пределов тех же направлений и знаков при прочих равных условиях нагружения.

В решённых выше задачах прочности пространственных тел имело место ограничение простейшим случаем постоянно нагруженного тела из пластичного материала, изотропного и одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию.

Применительно к этому простейшему случаю достаточно простые и обычно применяемые третья и четвёртая теории прочности [111, 204, 238, 239, 305, 333] дают однозначные формулы для эквивалентного (равносильного и равноопасного трёхосному напряжённому состоянию одноосного растягивающего) напряжения с единой базой сравнения – предельным одноосным растягивающим напряжением  $\sigma_L$ .

Для материала, изотропного и одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, предельное одноосное растягивающее напряжение  $\sigma_L$  есть общее значение равных между собой предельного напряжения  $\sigma_t$  при одноосном растяжении и модуля (абсолютной величины)  $\sigma_c$  предельного напряжения ( $-\sigma_c$ ) при одноосном сжатии:

$$\sigma_L = \sigma_t = \sigma_c = |-\sigma_c|.$$

Такие формулы позволяют не только сравнить по мере опасности любое сложное трёхосное напряжённое состояние с соответствующим простым одноосным напряжённым состоянием, но и сравнить между собой по мере опасности различные сложные трёхосные напряжённые состояния в разных точках пространственного тела.

Это необходимо для установления в пространственном теле самой опасной точки с наиболее вероятным зарождением разрушения, характер которого часто предопределяется её расположением.

Подобные формулы особенно необходимы при использовании интенсивно развивающихся компьютерных методов без пооперационного личного контроля исследователя с его опытом и интуицией.

Однако даже для изотропного, но различно сопротивляющегося растяжению и сжатию материала [111, 238] с различными предельным напряжением  $\sigma_t$  при одноосном растяжении и модулем  $\sigma_c$  предельного напряжения ( $-\sigma_c$ ) при одноосном сжатии

$$\sigma_t \neq \sigma_c = |-\sigma_c|$$

некоторые известные критерии предельных состояний в своём классическом виде не вполне удобны для решения задач прочности пространственных тел.

Так, простейшая первая теория прочности (критерий наибольших нормальных напряжений) да-Винчи–Галилея–Лейбница–Ламе [111, 204, 238, 239, 305, 333]

$$(2.121)$$

$$-\sigma_c \leq \sigma_j \leq \sigma_t \quad (j = 1; 2; 3)$$



или, равносильно, совместно

$$\sigma_1 \leq \sigma_i; |\sigma_3| \leq \sigma_c,$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения в рассматриваемой точке тела, нумерующиеся в порядке невозрастания их алгебраических величин

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

не даёт как единой формулы для равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$ , так и единой базы для сопоставления равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$  с предельным напряжением.

То же относится и к ортотропному различно сопротивляющемуся растяжениям и сжатиям материалу [111, 204, 238, 239, 305, 333] с предельными напряжениями  $\sigma_{t1}, \sigma_{t2}, \sigma_{t3}$  при одноосных растяжениях и с модулями  $\sigma_{c1}, \sigma_{c2}, \sigma_{c3}$  предельных напряжений ( $-\sigma_{c1}$ ), ( $-\sigma_{c2}$ ), ( $-\sigma_{c3}$ ) при одноосных сжатиях в основных направлениях анизотропии 1; 2; 3.

При этом вид первой теории прочности

$$(2.122)$$

$$-\sigma_{cj} \leq \sigma_j \leq \sigma_{tj} \quad (j = 1; 2; 3)$$

обобщён индексацией  $j$  по сравнению с (2.121).

Заметим, что и для изотропного одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию материала

$$(\sigma_t = \sigma_c = |-\sigma_c| = \sigma_L)$$

первая теория прочности безотносительно проблемы приемлемости в обычной записи совместно

$$\sigma_1 \leq \sigma_L; |\sigma_3| \leq \sigma_L$$

также не даёт требуемой формулы.

Автор в своей кандидатской диссертации

(Гелимсон Лев Г. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06. Киев: Ин-т проблем прочности АН УССР, 1987. 148 с.)

необходимо для определения опаснейшей точки равносильно преобразовал к виду с эквивалентным напряжением и единой базой сравнения первую теорию прочности (критерий наибольших нормальных напряжений) да-Винчи–Галилея–Лейбница–Ламе [111, 204, 238, 239, 305, 333] для изотропного одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию материала

$$(2.123)$$

$$\sigma_e = \max \{|\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3|\} = \sigma_L,$$

$$\sigma_e = \max \{|\sigma_j|; j = 1; 2; 3\} = \sigma_L$$

и для изотропного различно сопротивляющегося растяжению и сжатию материала

$$\sigma_e = \max \{\sigma_1; -\chi\sigma_3\} = \sigma_t,$$

где  $\sigma_e$  – равносильное (эквивалентное) напряжение в рассматриваемой точке тела;

$$\chi = \sigma_t/\sigma_c$$

– отношение предела  $\sigma_t$  при одноосном растяжении к пределу  $\sigma_c$  при одноосном сжатии как модулю

$$\sigma_c = |-\sigma_c|$$

предельного одноосного напряжения сжатия ( $-\sigma_c$ ) материала тела,

что даёт как единые формулы для равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$ , так и единые базы для сопоставления его с предельным напряжением.

Большинство материалов не слабее сопротивляются сжатию, чем растяжению, и для таких материалов

$$\sigma_t \leq \sigma_c \quad (\sigma_c > 0);$$

$$\chi = \sigma_t/\sigma_c$$

– доля пластичности материала тела;

$1 - \chi$  – доля хрупкости материала тела;

$\sigma_t$ ,  $\sigma_c$  – пределы прочности материала тела при одноосных растяжении и сжатии соответственно.

Однако существуют материалы, в частности магниевые и некоторые другие сплавы, а также древесина в направлении волокон, сильнее сопротивляющиеся растяжению, чем сжатию,

$$\sigma_t > \sigma_c > 0.$$

Поэтому необходимы и полезны соответствующие обобщения, причём для произвольного анизотропного материала в указываемом номером в индексе направлении главного напряжения  $\sigma_j$  с упорядоченной (с невозрастанием алгебраических величин всех трёх главных напряжений) нумерацией ( $j = 1; 2; 3; \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ) или в указываемом номером в индексе направлении главного напряжения  $\sigma_{ju}$  с неупорядоченной нумерацией ( $ju = 1; 2; 3$  независимо от выполнения неравенств  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ), а для изотропного материала здесь этот индекс не указывается. При этом необязательность индекса обозначается его заключением в круглые скобки. Именно и только для произвольного анизотропного материала, то есть при наличии дополнительного (для нумерации направления, прочность при растяжении или сжатии в котором рассматривается) индекса  $j$ , дополнительный индекс  $u$  возможен. Для изотропного материала оба дополнительных индекса  $j$  и  $u$  отпадают.

Доля прочности сжатия, или минус-прочности, в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  с упорядоченной нумерацией или в направлении главного напряжения  $\sigma_{ju}$  с неупорядоченной нумерацией есть отношение прочности сжатия, или минус-прочности, к сумме прочности сжатия, или минус-прочности, и прочности растяжения, или плюс-прочности, в том же направлении:

$$\pi_{c(j(u))} = \sigma_{c(j(u))} / (\sigma_{c(j(u))} + \sigma_{t(j(u))}).$$

Доля прочности растяжения, или плюс-прочности, в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  с упорядоченной нумерацией или в направлении главного напряжения  $\sigma_{ju}$  с неупорядоченной нумерацией есть отношение прочности растяжения, или плюс-прочности, к сумме прочности сжатия, или минус-прочности, и прочности растяжения, или плюс-прочности, в том же направлении:

$$\pi_{t(j(u))} = \sigma_{t(j(u))} / (\sigma_{c(j(u))} + \sigma_{t(j(u))}).$$

Сумма доли прочности сжатия, или минус-прочности, и доли прочности растяжения, или плюс-прочности, обеих в одном и том же направлении главного напряжения  $\sigma_j$  с упорядоченной нумерацией или главного напряжения  $\sigma_{ju}$  с неупорядоченной нумерацией как следствие равна единице:

$$\pi_{c(j(u))} + \pi_{t(j(u))} = 1.$$

Относительная прочность сжатия, или относительная минус-прочность, в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  с упорядоченной нумерацией или в направлении главного напряжения  $\sigma_{ju}$  с неупорядоченной нумерацией есть отношение прочности сжатия, или минус-прочности, к прочности растяжения, или плюс-прочности, в том же направлении:

$$c_{t(j(u))} = \sigma_{c(j(u))} / \sigma_{t(j(u))}.$$

Относительная прочность растяжения, или относительная плюс-прочность, в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  с упорядоченной нумерацией или в направлении главного напряжения  $\sigma_{ju}$  с неупорядоченной нумерацией есть отношение прочности растяжения, или плюс-прочности, к прочности сжатия, или минус-прочности, в том же направлении:

$$t_{c(j(u))} = \sigma_{t(j(u))} / \sigma_{c(j(u))}.$$

Произведение относительной прочности сжатия, или относительной минус-прочности, в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  с упорядоченной или в направлении главного напряжения  $\sigma_{ju}$  с неупорядоченной нумерацией и относительной прочности растяжения, или относительной плюс-прочности, в том же направлении как следствие равно единице:

$$c_{t(j(u))} t_{c(j(u))} = 1.$$

Доля пластичности материала в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  с упорядоченной нумерацией или в направлении главного напряжения  $\sigma_{ju}$  с неупорядоченной нумерацией есть наименьшее из двух значений – относительной прочности сжатия, или относительной минус-

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 211/556

прочности, и относительной прочности растяжения, или относительной плюс-прочности, в том же направлении:

$$\chi_{(j(u))} = \min\{c_{t(j(u))}, t_{c(j(u))}\} = \min\{\sigma_{c(j(u))}/\sigma_{t(j(u))}, \sigma_{t(j(u))}/\sigma_{c(j(u))}\}.$$

Доля хрупкости материала в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  с упорядоченной нумерацией или в направлении главного напряжения  $\sigma_{ju}$  с неупорядоченной нумерацией есть дополнение до единицы доли пластичности материала в том же направлении, или разность единицы и доли пластичности материала в том же направлении, или разность единицы и наименьшего из двух значений – относительной прочности сжатия, или относительной минус-прочности, и относительной прочности растяжения, или относительной плюс-прочности, в том же направлении:

$$1 - \chi_{(j(u))} = 1 - \min\{c_{t(j(u))}, t_{c(j(u))}\} = 1 - \min\{\sigma_{c(j(u))}/\sigma_{t(j(u))}, \sigma_{t(j(u))}/\sigma_{c(j(u))}\}.$$

А для анизотропного [111, 204, 238, 239, 305, 333] различно сопротивляющегося растяжениям и сжатиям материала при переменном нагружении, когда главные направления напряжённого состояния в рассматриваемой точке тела могут вращаться, даже предложения по формулировкам критериев предельных состояний неизвестны [238, 239, 258, 324, 325].

Тем самым является общепризнанным полное отсутствие известных всеобщих прочностных законов природы.

Поэтому полезно приводить частные критерии предельных состояний для отдельных видов материалов и условий нагружения именно к всеобщим прочностным законам природы для любых видов материалов и условий нагружения [110, 258, 324, 325].

Общий метод физического (знакочувствительного скалярно-векторного) обобщения критериев предельных состояний циклическим моделированием постоянно неупорядоченно пронумерованных программ переменных главных напряжений состоит в следующем.

Пусть предельные состояния материала характеризуются более чем одной его постоянной, то есть он не является изотропным одинаково сопротивляющимся растяжению и сжатию.

Тогда для того, чтобы база сопоставления равносильного (эквивалентного) напряжения с предельным напряжением была единой для различных сложных напряжённых состояний, можно, как показывают теория подобия и теория размерностей, привести каждое главное напряжение  $\sigma_{ju}(t)$  при его постоянной нумерации ( $ju = 1; 2; 3$ ) безотносительно упорядоченности алгебраических величин всех трёх главных напряжений путём его деления на модуль  $|\sigma_{Lju}(t)|$  предельного его значения  $\sigma_{Lju}(t)$  тех же направления и знака в тот же момент времени  $t$  в той же точке того же тела при одноосном напряжённом состоянии (аннулировании двух остальных главных напряжений) и прочих равных условиях нагружения к соответствующему всеобщему главному напряжению  $\sigma_{ju}^\circ(t)$ :

$$(2.124)$$

$$\sigma_{ju}^\circ(t) = \sigma_{ju}(t)/|\sigma_{Lju}(t)|.$$

Такое приведение известно [200] при постоянном нагружении в частных случаях различно сопротивляющегося растяжению и сжатию изотропного материала и одинаково сопротивляющегося растяжениям и сжатиям ортотропного материала при совпадении главных направлений напряжённого состояния с основными направлениями анизотропии и использовалось, по-видимому, лишь при формулировке критерия Ху–Марина [111].

Это общий метод обобщения критериев предельных состояний переходом к всеобщим самопредельным напряжениям.

Если главное напряжение  $\sigma_{ju}(t)$  при постоянной нумерации ( $ju = 1; 2; 3$ ) безотносительно упорядоченности алгебраических величин всех трёх главных напряжений является ненулевым, то определяемое путём его деления на модуль  $|\sigma_{Lju}(t)|$  предельного его значения  $\sigma_{Lju}(t)$  тех же направления и знака в тот же момент времени  $t$  в той же точке того же тела при одноосном напряжённом состоянии (аннулировании двух остальных главных напряжений) и прочих равных условиях нагружения соответствующее всеобщее главное напряжение  $\sigma_{ju}^\circ(t)$

$$(2.124')$$

$$\sigma_{ju}^\circ(t) = \sigma_{ju}(t)/|\sigma_{Lju}(t)| = 1/[|\sigma_{Lju}(t)|/\sigma_{ju}(t)] = 1/r_{ju}^\circ(t),$$

$$r_{ju}^\circ(t) = |\sigma_{Lju}(t)|/\sigma_{ju}(t)$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 212/556

есть обращённый  $1/r_{ju}^{\circ}(t)$  обобщённый (равный обычному

$$|\sigma_{Lju}(t)|/|\sigma_{ju}(t)|,$$

умноженному на знак  $\text{sign}[\sigma_{ju}(t)]$  главного напряжения  $\sigma_{ju}(t)$  одноосный запас  $r_{ju}^{\circ}(t)$  главного напряжения  $\sigma_{ju}(t)$ .

Если главное напряжение  $\sigma_{ju}(t)$  является нулевым, то можно считать формулы (2.124') действующими, а обобщённый запас  $r_{ju}^{\circ}(t)$  актуально или хотя бы потенциально (тогда с переходом к пределу) бесконечным с определённым или неопределённым знаком.

В приведённых главных напряжениях  $\sigma_j^{\circ}$  с приведённым равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e^{\circ}$  первая теория прочности (2.123) приобретает вид

$$(2.125)$$

$$\begin{aligned} \sigma_e^{\circ} &= \max \{ |\sigma_1^{\circ}|; |\sigma_2^{\circ}|; |\sigma_3^{\circ}| \} = 1, \\ 1/r_e^{\circ} &= \max \{ |1/r_1^{\circ}|; |1/r_2^{\circ}|; |1/r_3^{\circ}| \} = 1, \\ \sigma_e^{\circ} &= \max \{ |\sigma_j^{\circ}|; j = 1; 2; 3 \} = 1, \\ 1/r_e^{\circ} &= \max \{ |1/r_j^{\circ}|; j = 1; 2; 3 \} = 1, \end{aligned}$$

по существу равносильный (2.121) – (2.123), а по форме удобный для решения задач прочности пространственных тел, поскольку формула для равносильного (эквивалентного) напряжения стала единой, а база его сопоставления – не только единой для любых напряжённых состояний в данном теле, но и универсальной, а именно безразмерной единицей.

К тому же приведению (2.124) и (2.124') можно прийти и другим путём.

Если предельные состояния материала характеризуются единственной его постоянной  $\sigma_L$ , что верно для изотропного одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию материала, то произвольный критерий предельных состояний, выражающий предельную поверхность в пространстве главных напряжений, может быть представлен в общем виде

$$(2.126)$$

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L,$$

где  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  – функция главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и, возможно, некоторых постоянных материала, однородная первого порядка относительно главных напряжений, для любого одноосного напряжения равная его модулю.

Частными случаями произвольного критерия предельных состояний (2.126) с конкретизацией функции  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  являются (1.2), (1.3) и другие критерии предельных состояний.

Сущность предлагаемого общего метода приведения критериев предельных состояний ко всеобщим прочностным законам природы во всеобщих главных напряжениях, определённых делениями на модули собственных одноосных пределов тех же направлений и знаков в тех же точках нагруженных тел при прочих равных условиях нагружения и тем самым заменяемых обращениями собственных одноосных запасов, обобщённых присвоениями собственных знаков главных напряжений, проще всего показать на примере приведения третьей теории прочности ко всеобщему прочностному закону природы во всеобщих главных напряжениях.

В своём обычном виде (1.2) применительно к предельному состоянию с предельным напряжением  $\sigma_L$ , в частности равным пределу текучести  $\sigma_s$  или пределу прочности  $\sigma_u$ ,

$$(2.127)$$

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_L$$

третья теория прочности включает единственную постоянную материала  $\sigma_L$  и поэтому принципиально не может быть использована даже для изотропного различно сопротивляющегося растяжению и сжатию материала с двумя различными положительными постоянными  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$ .

Вообще, критерий предельных состояний по своему физическому смыслу и значению должен быть достаточно общим прочностным законом природы.

Поэтому допустим, что третья теория прочности является лишь выражением некоторого более общего критерия предельных состояний, относящимся именно к простейшему случаю

изотропного одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию материала, и попытаемся выяснить, каким может быть вид такого более общего критерия предельных состояний. Простейший путь необходимого избавления критерия (2.127) и вообще критерия (2.126) от постоянной  $\sigma_L$ , как показывают те же теория подобия и теория размерностей, есть деление всех главных напряжений в критерии (2.127) и вообще в критерии (2.126) на  $\sigma_L$ :

(2.128)

$$\begin{aligned}\sigma_e^\circ &= \sigma_e/\sigma_L = 1/(\sigma_L/\sigma_e) = 1/r_e^\circ, r_e^\circ = \sigma_L/\sigma_e; \\ \sigma_1^\circ &= \sigma_1/\sigma_L = 1/(\sigma_L/\sigma_1) = 1/r_1^\circ, r_1^\circ = \sigma_L/\sigma_1; \\ \sigma_2^\circ &= \sigma_2/\sigma_L = 1/(\sigma_L/\sigma_2) = 1/r_2^\circ, r_2^\circ = \sigma_L/\sigma_2; \\ \sigma_3^\circ &= \sigma_3/\sigma_L = 1/(\sigma_L/\sigma_3) = 1/r_3^\circ, r_3^\circ = \sigma_L/\sigma_3; \\ \sigma_L^\circ &= \sigma_L/\sigma_L = 1 = 1/(\sigma_L/\sigma_L) = 1/r_L^\circ, r_L^\circ = \sigma_L/\sigma_L = 1,\end{aligned}$$

что возможно, поскольку сравниваемая с предельным напряжением  $\sigma_L$  функция  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  является именно однородной функцией первого порядка относительно главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , для любого одноосного напряжения равной его модулю.

Если материал является изотропным различно сопротивляющимся растяжению и сжатию, то приведение (2.128) естественно обобщается следующим приведением:

(2.129)

$$\begin{aligned}\sigma_j^\circ &= \sigma_j/\sigma_t = 1/(\sigma_t/\sigma_j) = 1/r_j^\circ, r_j^\circ = \sigma_t/\sigma_j, \sigma_j \geq 0; \\ \sigma_j^\circ &= \sigma_j/\sigma_c = 1/(\sigma_c/\sigma_j) = 1/r_j^\circ, r_j^\circ = \sigma_c/\sigma_j, \sigma_j \leq 0; \\ & j = 1; 2; 3; \\ \sigma_e^\circ &= \sigma_e/\sigma_t = 1/(\sigma_t/\sigma_e) = 1/r_e^\circ, r_e^\circ = \sigma_t/\sigma_e,\end{aligned}$$

причём последнее определение естественно ввиду неотрицательности равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$ .

Приведение (2.129), в свою очередь, не менее естественно обобщается приведением (2.124) и (2.124').

С учётом приведения (2.128) критерий (2.127) принимает вид

(2.130)

$$\begin{aligned}\sigma_e^\circ &= \sigma_1^\circ - \sigma_3^\circ = 1; \\ 1/r_e^\circ &= 1/r_1^\circ - 1/r_3^\circ = 1.\end{aligned}$$

Эта приведённая третья теория прочности уже не содержит постоянных материала в явном виде и в принципе может прилагаться к любым видам материалов (изотропных или анизотропных, одинаково или различно сопротивляющихся растяжениям и сжатиям) при любых видах постоянного или переменного во времени нагружения при условии придания приемлемого смысла приведённым главным напряжениям

$$\sigma_j^\circ = 1/r_j^\circ.$$

Обобщение третьей теории прочности указанным её приведением даёт в обычных размерных главных напряжениях  $\sigma_j$  в зависимости от их знаков при

$$\sigma_3 \geq 0$$

равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_{et}$  для сравнения с  $\sigma_t$  в рассматриваемой точке тела

$$\sigma_{et} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t,$$

что неизвестно, однако вполне естественно, поскольку многократно опытно проверенная и достаточно приемлемая классическая третья теория прочности выражает предельную поверхность другого изотропного материала, который именно одинаково сопротивляется одноосным растяжению и сжатию с одноосными пределами  $\sigma_t'$  и  $\sigma_c' > 0$ , порознь равными пределу  $\sigma_t$  одноосного растяжения данного изотропного материала с различными сопротивлениями растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c > 0$ ,

$$\sigma_t \neq \sigma_c,$$

и поэтому равными и между собой:

$$\begin{aligned}\sigma_t' &= \sigma_t, \\ \sigma_c' &= \sigma_t, \\ \sigma_t' &= \sigma_c' = \sigma_t;\end{aligned}$$

при

$$\sigma_1 \leq 0$$

равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_{ec}$  для сравнения с  $\sigma_c$  в рассматриваемой точке тела

$$\sigma_{ec} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c = |-\sigma_c|,$$

что неизвестно, однако вполне естественно, поскольку многократно опытно проверенная и достаточно приемлемая классическая третья теория прочности выражает предельную поверхность третьего изотропного материала, который именно одинаково сопротивляется одноосным растяжению и сжатию с одноосными пределами  $\sigma_t''$  и  $\sigma_c'' > 0$ , порознь равными пределу  $\sigma_c > 0$  одноосного сжатия данного изотропного материала с различными сопротивлениями растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c > 0$ ,

$$\sigma_t \neq \sigma_c,$$

и поэтому равными и между собой:

$$\sigma_t'' = \sigma_c,$$

$$\sigma_c'' = \sigma_c,$$

$$\sigma_t' = \sigma_c' = \sigma_c.$$

А при

$$\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_3$$

равносильны (но в общем случае могут быть различными между собой) эквивалентное напряжение  $\sigma_{et}$  для сравнения с  $\sigma_t$  в рассматриваемой точке тела

$$\sigma_{et} = \sigma_1 - t_c \sigma_3 = \sigma_t$$

и эквивалентное напряжение  $\sigma_{ec}$  для сравнения с  $\sigma_c > 0$  в рассматриваемой точке тела

$$\sigma_{ec} = c_t \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c,$$

где

$$t_c = \sigma_t / \sigma_c = \sigma_{et} / \sigma_{ec} = 1 / c_t$$

– отношение предела  $\sigma_t$  при одноосном растяжении к пределу  $\sigma_c$  при одноосном сжатии как модулю

$$\sigma_c = |-\sigma_c|$$

предельного одноосного напряжения сжатия ( $-\sigma_c$ ) материала тела,

$$c_t = \sigma_c / \sigma_t = \sigma_{ec} / \sigma_{et} = 1 / t_c$$

– отношение предела  $\sigma_c$  при одноосном сжатии как модуля

$$\sigma_c = |-\sigma_c|$$

предельного одноосного напряжения сжатия ( $-\sigma_c$ ) материала тела к пределу  $\sigma_t$  при одноосном растяжении,

получается известный критерий Кулона–Мора

$$\sigma_c = \sigma_1 - (\sigma_t / \sigma_c) \sigma_3 = \sigma_t$$

как линейное приближение огибающей кругов Мора [111, 204, 238, 239, 305, 333] в теории Кулона–Мора, полученное именно при таких

$$\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_3,$$

но распространяемое на общий случай.

Однако при

$$\sigma_1 < 0$$

возможно

$$\sigma_c = \sigma_1 - (\sigma_t / \sigma_c) \sigma_3 < 0$$

и в таком случае должно сопоставляться не с  $\sigma_t$ , а с ( $-\sigma_c$ ), да и заведомая полная безопасность любых напряжённых состояний при

$$\sigma_1 = (\sigma_t / \sigma_c) \sigma_3,$$

обеспечивающих

$$\sigma_c = \sigma_1 - (\sigma_t / \sigma_c) \sigma_3 = 0,$$

не может соответствовать действительности.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 215/556

Кроме того, для изотропного материала, который одинаково сопротивляется растяжению и сжатию ( $\sigma_t = \sigma_c > 0$ ), критерий Кулона–Мора тождественно совпадает с классической третьей теорией прочности и не вносит ничего нового.

А для изотропного материала, который различно сопротивляется растяжению и сжатию ( $\sigma_t \neq \sigma_c > 0$ ), естественно пропорциональны друг другу

$$\sigma_{et}/\sigma_{ec} = \sigma_t/\sigma_c$$

различные равносильные (эквивалентные) напряжения

$$\sigma_{et} = \sigma_1 - (\sigma_t/\sigma_c)\sigma_3 = \sigma_t,$$

$$\sigma_{ec} = (\sigma_c/\sigma_t)\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c$$

для их сравнений с  $\sigma_t$  и с  $\sigma_c$  соответственно, так что указанное дополнительной индексацией различие этих равносильных (эквивалентных) напряжений  $\sigma_{et}$  и  $\sigma_{ec}$  необходимо и полезно.

Кроме того, для сопоставления приведённой третьей теории прочности и критерия Кулона–Мора представляются существенными следующие дополнительные соображения.

Во-первых, в приведении главных напряжений в изотропном материале с различной прочностью при растяжении и сжатии неположительные главные напряжения делятся ни в коем случае не на строго отрицательное предельное напряжение при одноосном сжатии, а непременно на строго положительный модуль этого строго отрицательного предельного напряжения при одноосном сжатии. Кроме того, для полноты системы именно всевозможных случаев значений функции знака напряжения следует учесть, что напряжение в принципе может иметь не только положительную или отрицательную величину, но ещё и нулевую величину. Нулевое главное напряжение можно равносильно делить хоть на строго положительное предельное напряжение при одноосном растяжении, хоть на строго положительный модуль строго отрицательного предельного напряжения при одноосном сжатии. Это деление принципиально необходимо для достижения именно единой размерности, в данном случае безразмерности, приведённого напряжения. Нулю можно при желании равносильно приписать хоть положительный, хоть отрицательный знак, однако функция знака нуля является непременно нулевой, что принципиально необходимо для её определённости и однозначности. Поэтому в приведении главных напряжений в изотропном материале с различной прочностью при растяжении и сжатии неотрицательные главные напряжения делятся на строго положительное предельное напряжение при одноосном растяжении, а неположительные главные напряжения делятся на строго положительный модуль строго отрицательного предельного напряжения при одноосном сжатии.

Во-вторых, в теории прочности Мора нет ни в каком (ни в явном, ни в неявном) виде ни идеи деления положительных главных напряжений на предел прочности при растяжении (на предельное напряжение при одноосном растяжении), ни идеи деления отрицательных главных напряжений на предел прочности при сжатии (на модуль предельного напряжения при одноосном сжатии). В неявном виде идею деления каждого главного напряжения независимо от его знака на предел текучести в направлении этого главного напряжения в ортотропном материале, одинаково сопротивляющемся растяжениям и сжатиям, при условии совпадения главных направлений напряжённого состояния и основных направлений ортотропии можно усмотреть в критерии Ху–Марина как обобщении лишь одного критерия предельных состояний – четвёртой теории прочности. В явном виде идею деления каждого главного напряжения независимо от его знака на предел прочности при растяжении в изотропном материале, одинаково или различно сопротивляющемся растяжениям и сжатиям, выдвинули и использовали авторы (отметившие: «исследование критериев разрушения материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, остаётся одним из актуальнейших вопросов механики деформируемых тел») научной монографии

Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряжённом состоянии. Киев: Наукова думка, 1976. 416 с.

Их замечательным результатом стала унификация с малым разбросом всех указанных данных о предельных плоских напряжённых состояниях совершенно различных изотропных материалов в первом квадранте с неотрицательностью обоих ненулевых главных

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 216/556

напряжений. А в четвёртом квадранте с неотрицательностью одного ненулевого главного напряжения и неположительностью другого ненулевого главного напряжения получился большой разброс данных в направлении неположительного ненулевого главного напряжения. Идея деления неотрицательных главных напряжений на предел прочности при растяжении (на предельное напряжение при одноосном растяжении), а неположительных главных напряжений на предел прочности при сжатии (на модуль предельного напряжения при одноосном сжатии), насколько известно, впервые осуществлена автором научных монографий

Гелимсон Лев Г. Обобщение аналитических методов решения задач прочности. Сумы: Друкар, 1992. 20 с.

Gelimson Lev G. General Strength Theory. Sumy: Drukar Publishers, 1993. 64 pp.

Результатом стала унификация с малым разбросом (относительно предельных ломаной и эллипса соответствующим образом приведённых третьей и четвёртой теорий прочности) всех тех же указанных выше данных о предельных плоских напряжённых состояниях совершенно различных изотропных материалов не только в первом квадранте с неотрицательностью обоих ненулевых главных напряжений, но и в четвёртом квадранте с неотрицательностью одного ненулевого главного напряжения и неположительностью другого ненулевого главного напряжения.

В-третьих, критерий Кулона–Мора (как обобщение лишь одного критерия предельных состояний – третьей теории прочности), который можно записать в виде

$$\sigma_c/\sigma_t = \sigma_1/\sigma_t - \sigma_3/\sigma_c \leq 1,$$

сохраняет свой вид совершенно независимо от знаков главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Так что главное напряжение  $\sigma_1$  именно всегда независимо от его знака делится на предел прочности  $\sigma_t$  при растяжении (на предельное напряжение при одноосном растяжении), то есть не только при неотрицательности, но и при отрицательности главного напряжения  $\sigma_1$ . А главное напряжение  $\sigma_3$  именно всегда независимо от его знака делится на предел прочности  $\sigma_c$  при сжатии (на модуль предельного напряжения при одноосном сжатии), то есть не только при неположительности, но и при положительности главного напряжения  $\sigma_3$ . Поэтому нет ни малейших оснований полагать, что критерий Кулона–Мора в его указанном виде якобы предусматривает деление положительных главных напряжений непременно на предел прочности при растяжении (на предельное напряжение при одноосном растяжении) и деление отрицательных главных напряжений непременно на предел прочности при сжатии (на модуль предельного напряжения при одноосном сжатии).

В-четвёртых, приведение главных напряжений для изотропного материала с  $\sigma_t \neq \sigma_c$  делением положительных главных напряжений непременно на предел прочности  $\sigma_t$  при растяжении (на предельное напряжение при одноосном растяжении) и делением отрицательных главных напряжений непременно на предел прочности  $\sigma_c$  при сжатии (на модуль предельного напряжения при одноосном сжатии)

$$\sigma_j^\circ = \sigma_j/\sigma_t \quad (\sigma_j \geq 0);$$

$$\sigma_j^\circ = \sigma_j/\sigma_c \quad (\sigma_j \leq 0);$$

$$j = 1; 2; 3;$$

$$\sigma_c^\circ = \sigma_c/\sigma_t$$

даёт приведённую третью теорию прочности

$$\sigma_c^\circ = \sigma_1^\circ - \sigma_3^\circ = 1,$$

которая не содержит постоянных материала в явном виде и может прилагаться к любым видам материалов и нагрузений при условии придания приемлемого смысла приведённым главным напряжениям  $\sigma_j^\circ$ .

Приведённая третья теория прочности в размерных главных напряжениях  $\sigma_j$  принимает с учётом их знаков разные виды с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_{ct}$  для сравнения с  $\sigma_t$  при всех неотрицательных главных напряжениях  $\sigma_j$  и при наличии противоположных знаков главных напряжениях  $\sigma_j$  и с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_{cc}$  для сравнения с  $\sigma_c$  при всех неположительных главных напряжениях  $\sigma_j$ :



$$\begin{aligned}\sigma_{et} &= \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t (\sigma_3 \geq 0); \\ \sigma_{et} &= \sigma_1 - \chi\sigma_3 = \sigma_t (\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_3); \chi = \sigma_t/\sigma_c; \\ \sigma_{ec} &= \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c = |-\sigma_c| (\sigma_1 \leq 0).\end{aligned}$$

Первый из этих трёх видов приведённой третьей теории прочности в размерных главных напряжениях  $\sigma_j$  при неотрицательности их всех естествен ввиду совпадения только при неотрицательности их всех с третьей теорией прочности для модельного (фиктивного) изотропного материала с одинаковыми сопротивлениями  $\sigma_t$  растяжению и сжатию.

Третий из этих трёх видов приведённой третьей теории прочности в размерных главных напряжениях  $\sigma_j$  при неположительности их всех естествен ввиду совпадения только при неположительности их всех с третьей теорией прочности для модельного (фиктивного) изотропного материала с одинаковыми сопротивлениями  $\sigma_c$  растяжению и сжатию.

А второй из этих трёх видов приведённой третьей теории прочности в размерных главных напряжениях  $\sigma_j$  при наличии их противоположных знаков совпадает только при наличии их противоположных знаков с критерием Кулона–Мора.

Этими тремя совпадениями обосновываются следующие выводы:

- 1) приведённая третья теория прочности при любых знаках главных напряжений выдерживает проверку известными, общепринятыми и многократно экспериментально проверенными обычной третьей теорией прочности и критерием Кулона–Мора;
- 2) приведённая третья теория прочности совпадает с критерием Кулона–Мора только при наличии противоположных знаков главных напряжений;
- 3) как следствие первых двух выводов можно предположить приемлемость и пригодность критерия Кулона–Мора только при наличии противоположных знаков главных напряжений. Неясность области приемлемости и пригодности критерия Кулона–Мора признавалась и ранее и немедленно вытекает хотя бы из необеспеченности именно неотрицательности равносильного (эквивалентного) напряжения по критерию Кулона–Мора. Действительно, если отношение  $\sigma_t/\sigma_c$  именно строго меньше единицы, то при трёхмерном равноосном сжатии ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$ ) равносильное (эквивалентное) напряжение по критерию Кулона–Мора именно строго отрицательно.

Таким образом, приведённая третья теория прочности выдерживает проверки классической третьей теорией прочности и критерием Кулона–Мора и существенно уточняет их и пределы их применимости и приемлемости.

Аналогично приведение произвольного критерия предельных состояний (2.126)

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L,$$

где  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  – функция главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и, возможно, некоторых постоянных материала, однородная первого порядка относительно главных напряжений, для любого одноосного напряжения равная его модулю, выражающая предельную поверхность в пространстве главных напряжений,

даёт приведённый произвольный критерий предельных состояний

$$(2.131)$$

$$\begin{aligned}\sigma_e^\circ &= F(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ) = 1, \\ 1/r_e^\circ &= F(1/r_1^\circ, 1/r_2^\circ, 1/r_3^\circ) = 1,\end{aligned}$$

где  $F(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ)$  – функция приведённых главных напряжений  $\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ$  и, возможно, некоторых приведённых постоянных материала, однородная первого порядка относительно приведённых главных напряжений, для любого одноосного приведённого напряжения равная его модулю, выражающая предельную поверхность в пространстве приведённых главных напряжений.

Приведённый произвольный критерий предельных состояний (2.131) может быть равносильно представлен умножением всех приведённых главных напряжений  $\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ$  на произвольную одну и ту же для них всех ненулевую постоянную  $q$ , что влечет умножение значения функции  $F(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ)$  и поэтому приведённого эквивалентного напряжения  $\sigma_e^\circ$  и единицы как всеобщей базы его сравнения на модуль  $|q|$  этой постоянной  $q$ :

$$\sigma_{e|q} = |q|\sigma_e^\circ = F(q\sigma_1^\circ, q\sigma_2^\circ, q\sigma_3^\circ) = |q|.$$

Обычно без снижения общности по существу можно ограничиться умножениями на строго положительные постоянные  $q > 0$  и при этом обойтись без знаков модулей (абсолютных значений):

$$\sigma_{eq} = q\sigma_e^\circ = F(q\sigma_1^\circ, q\sigma_2^\circ, q\sigma_3^\circ) = q.$$

При этом введено дополнительное обозначение  $\sigma_{eq}$  для умноженного приведённого эквивалентного напряжения  $q\sigma_e^\circ$  (с указанием множителя  $q$  дополнительным индексом), имеющего физическую размерность этого множителя и предназначенного для сопоставления именно с ним.

Желательна, но не обязательна физическая размерность именно напряжения для этого множителя  $q$ .

Если предельные состояния материала характеризуются единственной его положительной постоянной  $\sigma_L$ , что верно для изотропного одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию материала, то обычно наиболее целесообразен выбор

$$q = \sigma_L.$$

Если предельные состояния материала характеризуются двумя различными положительными одноосными постоянными  $\sigma_t \neq \sigma_c$ , что верно для изотропного различно сопротивляющегося растяжению и сжатию материала, то, как показывают примеры приведённой третьей теории прочности и других критериев предельных состояний, даже для одного критерия предельных состояний при различных условиях целесообразен выбор различных значений  $q$ , в частности

$$\sigma_c, \sigma_t, (\sigma_c\sigma_t)^{1/2}, \sigma_c + \sigma_t, \sigma_c\sigma_t/(\sigma_c + \sigma_t).$$

А в общем случае произвольного анизотропного материала с различными сопротивлениями растяжениям и сжатиям в направлениях упорядоченных  $\sigma_j$  или неупорядоченных  $\sigma_{j\alpha}$  главных напряжений множителю  $q$  и его значениям присваиваются соответствующие дополнительные индексы, в частности

$$q_{(j(u))}, \sigma_{c(j(u))}, \sigma_{t(j(u))}, (\sigma_{c(j(u))}\sigma_{t(j(u))})^{1/2}, \sigma_{c(j(u))} + \sigma_{t(j(u))}, \sigma_{c(j(u))}\sigma_{t(j(u))}/(\sigma_{c(j(u))} + \sigma_{t(j(u))}).$$

Аналогично приведение четвёртой теории прочности (1.3) [111, 204, 238, 239, 305, 333] применительно к предельному состоянию с предельным напряжением  $\sigma_L$ , в частности равным пределу текучести  $\sigma_s$  или пределу прочности  $\sigma_u$ ,

$$\sigma_e = \sigma_i = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_L$$

даёт приведённую четвёртую теорию прочности

$$(2.132)$$

$$\sigma_e^\circ = \sigma_i^\circ = 2^{-1/2}[(\sigma_1^\circ - \sigma_2^\circ)^2 + (\sigma_2^\circ - \sigma_3^\circ)^2 + (\sigma_3^\circ - \sigma_1^\circ)^2]^{1/2} = 1,$$

$$1/r_e^\circ = 1/r_i^\circ = 2^{-1/2}[(1/r_1^\circ - 1/r_2^\circ)^2 + (1/r_2^\circ - 1/r_3^\circ)^2 + (1/r_3^\circ - 1/r_1^\circ)^2]^{1/2} = 1,$$

где  $\sigma_i, \sigma_i^\circ$  – интенсивность и приведённая интенсивность напряжений соответственно.

В обычных размерных главных напряжениях  $\sigma_j$  приведённая четвёртая теория прочности в приведённых напряжениях  $\sigma_j^\circ$  меняет свои выражения в зависимости от сочетаний знаков главных напряжений следующим образом:

$$\sigma_{et} = \sigma_{it} = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_t (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0);$$

$$\sigma_{et} = \sigma_{it} = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - t_c\sigma_3)^2 + (t_c\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_t (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3);$$

$$\sigma_{et} = \sigma_{it} = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - t_c\sigma_2)^2 + (t_c\sigma_2 - t_c\sigma_3)^2 + (t_c\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_t (\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3);$$

$$\sigma_{et} = \sigma_{it} = 2^{-1/2}[(t_c\sigma_1 - t_c\sigma_2)^2 + (t_c\sigma_2 - t_c\sigma_3)^2 + (t_c\sigma_3 - t_c\sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_t (0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3),$$

причём последнее из этих четырёх выражений ввиду

$$t_c = \sigma_{et}/\sigma_{ec} = \sigma_{it}/\sigma_{ic} = \sigma_t/\sigma_c$$

равносильно упрощается

$$\sigma_{ec} = \sigma_{ic} = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_c (0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

и становится столь же естественным, как и первое из этих четырёх выражений.

При любых  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  и дополнительном условии

$$\sigma_2 \in \{\sigma_1, \sigma_3\}$$

приведённая третья теория прочности (2.130) и приведённая четвёртая теория прочности (2.132) совпадают, что частично проверяет их уточняющим учётом  $\sigma_2$ . Предельные поверхности (2.130) и (2.132) равнонаклонны к осям – в приведённых напряжениях  $\sigma_j^\circ$  обычные бесконечные правильная шестигранная призматическая и описанная

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 219/556

цилиндрическая поверхности, а в обычных размерных напряжениях  $\sigma_j$  трёхчастны, что согласуется с [111, 204, 238, 239]: две полубесконечные цилиндрические поверхности радиусами  $(2/3)^{1/2}\sigma_t$  при

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \geq \sigma_t$$

и  $(2/3)^{1/2}\sigma_c$  при

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \leq -\sigma_c,$$

что естественно, соединены промежуточной усечённой конической поверхностью (рис. 2.23) и во все последние три поверхности вписаны правильные шестигранные поверхности – две полубесконечные призматические поверхности и промежуточная усечённая пирамидальная поверхность (местные нарушения выпуклости неизбежны).

При

$$\sigma_{3u} = 0$$

(для графических изображений общепринят временный отказ от упорядоченности индексов главных напряжений в порядке невозрастания их алгебраических величин) сплошные предельные кривая и ломаная на рис. 2.24 получены из штриховых классических предельных кривой и ломаной [111, 204, 238, 239]. Сплошная предельная ломаная на рис. 2.24 во втором и четвёртом квадрантах известна для критерия Кулона–Мора [111, 204, 238, 239, 333].

Приведение критерия предельных состояний Хосфорда [204, 238, 239]

$$\sigma_e = 2^{-1/H}[(\sigma_1 - \sigma_2)^H + (\sigma_2 - \sigma_3)^H + (\sigma_1 - \sigma_3)^H]^{1/H} = \sigma_L$$

даёт

$$\sigma_e^\circ = 2^{-1/H}[(\sigma_1^\circ - \sigma_2^\circ)^H + (\sigma_2^\circ - \sigma_3^\circ)^H + (\sigma_1^\circ - \sigma_3^\circ)^H]^{1/H} = 1,$$

$$1/r_e^\circ = 2^{-1/H}[(1/r_1^\circ - 1/r_2^\circ)^H + (1/r_2^\circ - 1/r_3^\circ)^H + (1/r_1^\circ - 1/r_3^\circ)^H]^{1/H} = 1$$

как обобщение приведённой третьей теории прочности (2.130), получаемой при

$$H = 1,$$

и как обобщение приведённой четвёртой теории прочности (2.132), получаемой при

$$H = 2,$$

изображаемое промежуточной предельной поверхностью при

$$1 < H < 2.$$

Заметим, что для изотропного материала приведения (2.128) и (2.129) не меняют упорядоченности главных напряжений по алгебраическим величинам, то есть из

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

следует

$$(2.133)$$

$$\sigma_1^\circ \geq \sigma_2^\circ \geq \sigma_3^\circ.$$

А вот для анизотропного материала приведение (2.124) может изменить упорядоченность главных напряжений по алгебраическим величинам, что исправимо перенумерацией приведённых главных напряжений, обеспечивающей упорядоченность (2.133) приведённых главных напряжений по алгебраическим величинам.

Такая перенумерация излишня, если  $F(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ)$  – симметрическая функция приведённых главных напряжений, что, в частности, имеет место для приведённой четвёртой теории прочности (2.132), и необходима, если  $F(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ)$  – несимметрическая функция приведённых главных напряжений, что, в частности, имеет место для приведённой третьей теории прочности (2.130).

Такая перенумерация исключается симметризацией функции  $F(\sigma_{1u}^\circ, \sigma_{2u}^\circ, \sigma_{3u}^\circ)$  неупорядоченной совокупности приведённых главных напряжений  $\sigma_{ju}^\circ$

$$(j \in \{1, 2, 3\}, \{1u, 2u, 3u\} = \{1, 2, 3\})$$

посредством перебора всех перестановок индексов  $j_u$  с выбором максимума, достигаемого при наиболее опасной перестановке, допускающим и компьютерное осуществление с помощью стандартной процедуры:

$$(2.134)$$

$$\sigma_e^\circ = \max_{\{1u, 2u, 3u\} = \{1, 2, 3\}} F(\sigma_{1u}^\circ, \sigma_{2u}^\circ, \sigma_{3u}^\circ) = 1.$$

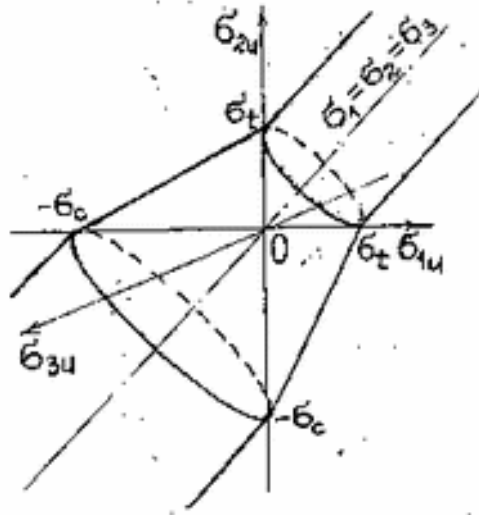


Рисунок 2.23. Изображённая сплошными линиями трёхчастная конусно-двухцилиндрическая предельная поверхность в пространстве неупорядоченных обычных размерных главных напряжений по приведённой четвёртой теории прочности в приведённых напряжениях. Не изображена вписанная в эту трёхчастную предельную поверхность по приведённой четвёртой теории прочности правильная шестигранная пирамидально-двухпризматическая предельная поверхность по приведённой третьей теории прочности.

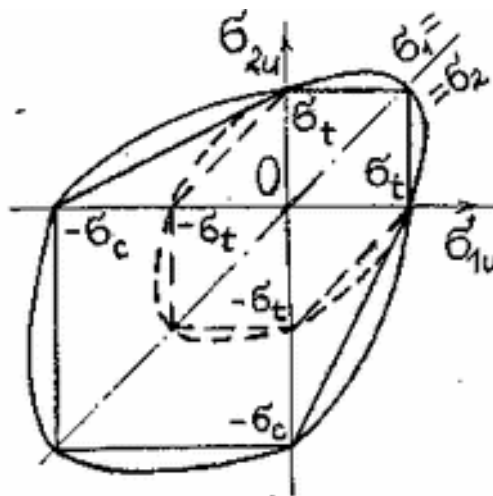


Рисунок 2.24. Изображённые сплошными линиями предельная кривая сечения плоскостью аннулирования третьего главного неупорядоченного напряжения трёхчастной конусно-двухцилиндрической предельной поверхности в пространстве неупорядоченных обычных размерных главных напряжений по приведённой четвёртой теории прочности и предельная ломаная сечения этой плоскостью вписанной в эту трёхчастную предельную поверхность правильной шестигранной пирамидально-двухпризматической предельной поверхности по приведённой третьей теории прочности, а также изображённые штриховыми линиями во втором, третьем и четвёртом квадрантах сечения этой плоскостью обычных цилиндрической и вписанной в неё правильной шестигранной призматической предельных поверхностей по обычной четвёртой теории прочности и по обычной третьей теории прочности соответственно.

С учётом приведённых первой и четвёртой теорий прочности линейный критерий Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева (1.5)

$$\sigma_c = (1 - \chi)\sigma_1 + 2^{-1/2}\chi[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} = \sigma_t$$

может быть записан и в приведённом виде:

$$(2.135)$$

$$\sigma_e^\circ = (1 - \chi) \max\{\sigma_j^\circ; j = 1; 2; 3\} + 2^{-1/2} \chi [(\sigma_1^\circ - \sigma_2^\circ)^2 + (\sigma_2^\circ - \sigma_3^\circ)^2 + (\sigma_1^\circ - \sigma_3^\circ)^2]^{1/2} = 1.$$

Для объяснения известного явления продольного раскалывания одноосно сжимаемых образцов из хрупких материалов при полном отсутствии растягивающих главных напряжений созданный общий метод правильного учёта непременно положительных алгебраически наибольших главных напряжений и деформации сочетает с произвольным критерием предельных состояний единственно подходящую из классических теорий прочности вторую теорию прочности (критерий наибольших нормальных деформаций) Мариотта–Сен-Венана, причём её и в общем случае дополнительно (по сравнению с единой теорией прочности Я. Б. Фридриха [336]) первую теорию прочности (критерий наибольших нормальных напряжений) да-Винчи–Галилея–Лейбница–Ламе при необходимом и достаточном условии положительности максимума  $\sigma$  из алгебраически наибольшего главного напряжения  $\sigma_1$  по первой теории прочности и из чисто расчётного (фиктивного) напряжения

$$\sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3),$$

дающего при чисто расчётном (фиктивном) одноосном напряжённом состоянии наличную при трёхосном напряжённом состоянии с главными напряжениями

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3)$$

алгебраически наибольшую нормальную деформацию по второй теории прочности.

Здесь  $\mu_{ep}$  есть упругопластический коэффициент поперечной деформации.

В пределах упругости материала (общепринято считать, что хрупкие материалы упруги до разрушения) по обобщённому закону упругости Гука  $\mu_{ep}$  есть упругий коэффициент поперечной деформации Пуассона

$$\mu_{ep} = \mu_e = \mu.$$

Применительно к пластичному материалу, а поэтому и в общем осложнённом случае, следует иметь в виду, что за пределами упругости постоянный в пределах упругости коэффициент поперечной деформации  $\mu_{ep}$  возрастает.

Если выраженная через главные деформации

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 (\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3)$$

интенсивность деформаций [204, 238, 239]

$$\varepsilon_i = (2^{1/2}/3)[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{1/2}$$

не превышает наибольшей упругой интенсивности деформаций  $\sigma_s/E$  как отношения предела текучести  $\sigma_s$  материала к модулю продольной упругости Юнга  $E$ , то упругопластический коэффициент поперечной деформации  $\mu_{ep}$  есть упругий коэффициент поперечной деформации Пуассона

$$\mu_{ep} = \mu_e = \mu.$$

Если интенсивность деформаций [204, 238, 239]

$$\varepsilon_i = (2^{1/2}/3)[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2]^{1/2}$$

превышает наибольшую упругую интенсивность деформаций  $\sigma_s/E$ , то при отсутствии более точных данных можно в первом приближении считать упругопластический коэффициент поперечной деформации  $\mu_{ep}$  по простейшей формуле

$$\mu_{ep} = \mu + (1/2 - \mu)(1 - \sigma_s/(E\varepsilon_i)),$$

дающей с учётом двойного неравенства

$$0 \leq \mu \leq 1/2$$

для всех исследованных материалов строго монотонное возрастание функции  $\mu_{ep}(\varepsilon_i)$  от значения  $\mu$  при

$$\varepsilon_i = \sigma_s/E$$

до предельного значения  $1/2$  при неограниченном возрастании интенсивности деформаций  $\varepsilon_i$ . Именно и только при необходимом и достаточном условии положительности максимума  $\sigma$  равносильное (эквивалентное) напряжение по общему критерию предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_i,$$

в частности по третьей теории прочности (критерию наибольших сдвиговых напряжений) или по четвёртой теории прочности (критерию удельной энергии формоизменения), заменяется взвешенным средним с этим максимумом  $\sigma$  с указанными степенными функциями доли пластичности  $\chi$  материала как весами соответственно:

(2.136)

$$\begin{aligned}\sigma_e &= [(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0} + \chi^\gamma F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_t, \\ \sigma_e &= [(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0} + \chi^\gamma (\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_t, \\ \sigma_e &= [(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0} + 2^{-1/2} \chi^\gamma [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} = \sigma_t,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\gamma &> 0, \\ \sigma_1 &\geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \\ \sigma &= \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\}.\end{aligned}$$

Здесь используется вводимое для краткости общее обозначение обусловленности наличия предмета приведением условия его наличия, например верхним или нижним указателем (индексом) спереди или сзади либо в скобках за предметом, который при этом становится функцией этого условия, а также в тексте с возможными поясняющими словами, в частности «где», «при», «если», «если и только если», «тогда и только тогда, когда», «для чего (наличия предмета) необходимо», «для чего (наличия предмета) достаточно», «для чего (наличия предмета) необходимо и достаточно».

При нарушении условия наличия предмет просто опускается и заменяется пустым (нейтральным, сохраняющим итог без него) элементом соответствующего действия над предметом, то есть, в частности, нулём при сложении, единицей при умножении, пустым множеством при теоретико-множественном объединении, пустым элементом  $\#$  при объединении элементов в множество (пустое множество  $\emptyset$ , если вообще не содержит непустых элементов), универсальным (всеобъемлющим) множеством при теоретико-множественном пересечении, не имеющим места утверждением при дизъюнкции, имеющим место утверждением при конъюнкции.

Если условие наличия предмета содержит целиком составляющий левую часть условия сам предмет только единственный раз и указывается непосредственно вслед за предметом, то в условии предмет можно неявно подразумевать и явно опустить при исключении возможности заблуждений, что и сделано выше применительно к первому слагаемому  $[(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0}$  с укороченным спереди условием

$$[(1 - \chi^\gamma)\sigma] > 0,$$

относящимся к самому этому первому слагаемому.

При обусловливании второго сомножителя  $\sigma$  первого слагаемого  $[(1 - \chi^\gamma)\sigma]$  равносильным предыдущему условием

$$\sigma > 0$$

в виде

$$(1 - \chi^\gamma)\sigma_{>0}$$

опускался бы только второй сомножитель  $\sigma$ , заменяясь единицей и заменяя произведение первым сомножителем, а не нулём, как это требуется в данном случае и что осуществляется обусловливанием  $[(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0}$  всего произведения  $[(1 - \chi^\gamma)\sigma]$  целиком.

Если, что используется и здесь, обусловлено опускание итога действия над предметом, то этот итог берётся в скобки и условие указывается применительно к этому итогу.

То есть в данном случае соответственно

$$\begin{aligned}\sigma_e &= (1 - \chi^\gamma)\max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} + \chi^\gamma F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} > 0, \\ \sigma_e &= F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} \leq 0; \\ \sigma_e &= (1 - \chi^\gamma)\max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} + \chi^\gamma(\sigma_1 - \sigma_3) = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} > 0, \\ \sigma_e &= \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} \leq 0; \\ \sigma_e &= (1 - \chi^\gamma)\max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} + 2^{-1/2} \chi^\gamma [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} > 0, \\ \sigma_e &= 2^{-1/2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} \leq 0.\end{aligned}$$

В частных случаях возможны также уступающие по простоте, краткости и наглядности вводимому общему обозначению частные способы аналитического объединения раздвоенных формул, например здесь взамен обусловливания

$$[(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0}$$

использование равносильного дополнительного умножения могущего быть опущенным слагаемого на полусумму единицы и функции знака этого слагаемого:

$$(1 - \chi^\gamma)\sigma\{1 + \text{sign}[(1 - \chi^\gamma)\sigma]\}/2.$$

Эти критерии предельных состояний получены как взвешенные средние взятого с нулевым весом при неположительности максимума алгебраически наибольших главного напряжения  $\sigma_1$  по первой теории прочности и чисто расчётного (фиктивного) напряжения

$$\sigma_1 - \mu_{\text{ep}}(\sigma_2 + \sigma_3)$$

по второй теории прочности с равносильным (эквивалентным) напряжением по общему критерию предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1,$$

в частности по третьей теории прочности (критерию наибольших сдвиговых напряжений) или по четвёртой теории прочности (критерию удельной энергии формоизменения) соответственно.

Разумеется, в этих критериях предельных состояний в пределах упругости, как общепринято считать, имеющих место для хрупких материалов вплоть до их разрушения,

$$\mu_{\text{ep}} = \mu.$$

Каждый из этих критериев предельных состояний достаточен для объяснения известного явления продольного раскалывания одноосно сжимаемых образцов из хрупких материалов при полном отсутствии растягивающих главных напряжений.

При одноосном сжатии главные напряжения составляют

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0.$$

Каждый из этих критериев предельных состояний даёт

$$\sigma_e = (1 - \chi^\gamma)(-\mu\sigma_3) + \chi^\gamma(-\sigma_3)$$

с обоими строго положительными слагаемыми, отрывное первое из которых дано второй теорией прочности и соответствует разрушению отрывом благодаря наибольшей нормальной деформации, тем самым обосновывая возможность разрушения отрывом, в данном случае продольного раскалывания одноосно сжимаемых образцов из хрупких материалов при полном отсутствии растягивающих главных напряжений, тогда как сдвиговое второе из этих положительных слагаемых дано общим критерием предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_1,$$

в частности третьей теорией прочности (критерием наибольших сдвиговых напряжений) или четвёртой теорией прочности (критерием удельной энергии формоизменения), и соответствует разрушению сдвигом благодаря наибольшему или октаэдрическому сдвиговому напряжению соответственно.

Отрывное первое слагаемое больше сдвигового второго из этих положительных слагаемых, если доля пластичности  $\chi$  материала в степени  $\gamma$  удовлетворяет неравенству

$$\chi^\gamma < \mu/(1 + \mu).$$

Отношение

$$\chi^\gamma(-\sigma_3)/[(1 - \chi^\gamma)(-\mu\sigma_3)] = \chi^\gamma/[(1 - \chi^\gamma)\mu]$$

сдвигового второго к отрывному первому из этих положительных слагаемых является тангенсом угла наклона луча наличного напряжённого состояния на определяющей характер разрушения отрывом или сдвигом диаграмме механического состояния материала при различных способах нагружения с наличными и предельными отрывными и сдвиговыми напряжениями в единой теории прочности Я. Б. Фридмана [336].

Если это отношение больше отношения предельных сдвигового и отрывного напряжений материала, то подобное рассматриваемому предельное напряжённое состояние в соответствующей точке предположительно приведёт к разрушению преимущественно сдвигом (срезом), а если меньше, то преимущественно отрывом.

Разумеется, вторая теория прочности объясняет известное явление продольного раскалывания одноосно сжимаемых образцов из хрупких материалов при полном отсутствии растягивающих главных напряжений ещё проще, но куда менее убедительно, поскольку вопреки многим опытам явно ошибочно ограничивает прочность изотропного материала при трёхосном равном сжатии и вообще имеет крайне ограниченную область приемлемости, как раз верно используемую созданным общим методом правильного учёта непременно положительных алгебраически наибольших главных напряжений и деформации и предложенными синергичными критериями предельных состояний.

При переменном (не обязательно регулярном, периодическом, циклическом) нагружении за время

$$t(0) = t_0 \leq t \leq t_1 = t(1)$$

каждая переменная программа синхронно приведённого главного напряжения  $\sigma_{ju}^\circ(t)$  при постоянной нумерации без упорядоченности алгебраических величин главных напряжений заменяется равноопасным циклически изменяющимся одноосным напряжённым состоянием со средним напряжением цикла, равным среднему напряжению программы или минимально изменённым (если иначе равноопасность недостижима), величиной  $\sigma_{mju}^\circ$  и искомым (по условию равноопасности) амплитудным напряжением цикла  $\sigma_{aju}^\circ$  (рисунки 2.25 и 2.26).

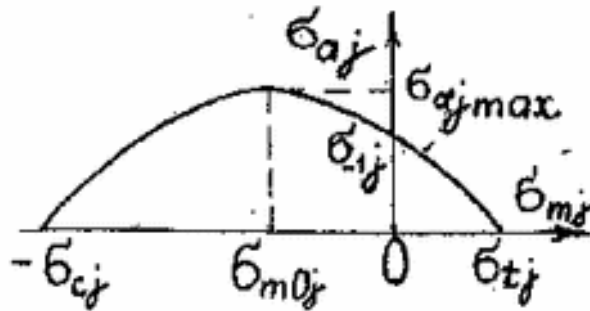


Рисунок 2.25. Диаграмма предельных амплитуд одноосного циклического напряжения в произвольном анизотропном материале с различными сопротивлениями растяжениям и сжатиям и возможностью наибольшего амплитудного напряжения при асимметричном цикле.

Затем переменной программе синхронно приведённого одноосного главного напряжения  $\sigma_{ju}^\circ(t)$  ставится в соответствие постоянное векторное приведённое напряжение

$$(2.137)$$

$$\bar{\sigma}_{ju}^\circ = (\sigma_{mju}^\circ, \sigma_{aju}^\circ),$$

последующие действия согласно специфике функции  $F$  выполняются по правилам векторной алгебры и результат берётся по модулю (рисунки 2.26, 2.27, 2.28 и 2.29).

Необходимость обобщить проверку как статической, так и усталостной прочности при циклически изменяющемся одноосном напряжённом состоянии приводит к структуре приведённого критерия предельных состояний анизотропного материала при переменном нагружении (с выбором в каждом случае своей наиболее опасной зависящей или не зависящей от времени  $t$  перестановки индексов  $ju(t)$  или  $ju$  соответственно из чисел 1, 2, 3):

$$(2.138)$$

$$\sigma_e^\circ = \max \{ \sup_{t \in [t(0), t(1)]} \max_{ju(t)} F[\sigma_{1u}^\circ(t), \sigma_{2u}^\circ(t), \sigma_{3u}^\circ(t)]; \max_{ju} |F(\bar{\sigma}_{1u}^\circ, \bar{\sigma}_{2u}^\circ, \bar{\sigma}_{3u}^\circ)| \} = 1.$$

Созданный общий метод приведения критериев предельных состояний ко всеобщим прочностным законам природы во всеобщих напряжениях делением размерных главных напряжений на модули собственных одноосных пределов тех же направлений и знаков в тех же точках нагруженных тел при прочих равных условиях нагружения позволяет не только облегчать решение задач прочности для пространственных тел, но и предлагать формулировки критериев предельных состояний для различных материалов и условий нагружения, исходя из критериев для изотропных одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию материалов.



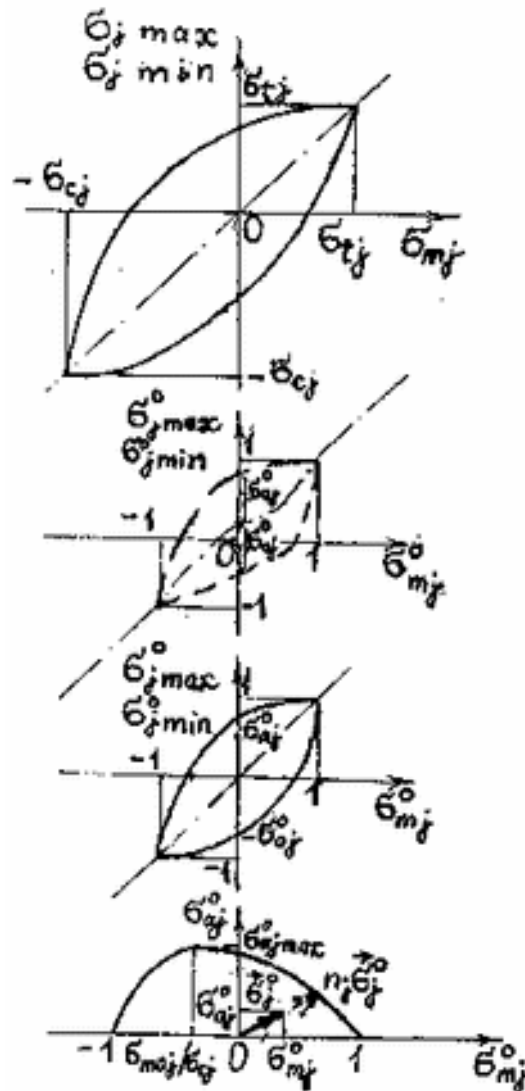


Рисунок 2.26. Диаграмма предельных напряжений (вверху), процесс и итог построения диаграммы приведённых предельных напряжений (два посередине по высоте) и диаграмма приведённых предельных амплитуд (внизу) одноосного циклического напряжения в произвольном анизотропном материале с различными сопротивлениями растяжениям и сжатиям и определением постоянного векторного приведённого напряжения по равноопасному программе произвольного переменного одноосного напряжения одноосному циклическому напряжению со средним (или ближайшим к нему) программным напряжением как абсциссой вектора и обеспечивающим равноопасность амплитудным напряжением как ординатой вектора.

Такое приведение размерных главных напряжений позволяет также унифицировать результаты экспериментальных исследований предельных состояний различных материалов, для целых их классов проверить приемлемость испытываемых критериев предельных состояний и в необходимых случаях именно обоснованно и целенаправленно рекомендовать их исправление или выбор других критериев предельных состояний.

Так, данные [238], откуда заимствован первый квадрант рис. 2.30, а и весь рис. 2.30, б, относятся к предельным состояниям различных изотропных пластичных, квазихрупких и хрупких материалов в относительных (делённых на предельное напряжение одноосного растяжения  $\sigma_1$ ) главных напряжениях.

Введение преобразованных координат (2.128), совпадающих с относительными [238] только в первом квадранте, даёт четвёртый квадрант рис. 2.30, а примерно с таким же разбросом

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 226/556

данных, как и в первом квадранте, с приближениями данных (кружочки) приведёнными третьей (ломаная) и четвёртой (кривая) теориями прочности.

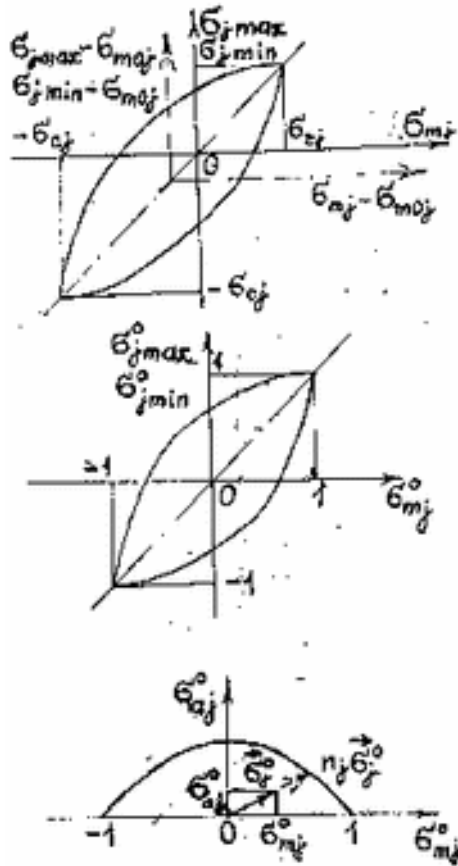


Рисунок 2.27. Диаграмма предельных напряжений с выравнивающим сопротивлением одноосным растяжению и сжатию смещением начала координат (вверху), диаграмма приведённых предельных напряжений (посередине) и диаграмма приведённых предельных амплитуд (внизу) одноосного циклического напряжения в произвольном анизотропном материале с различными сопротивлениями растяжениям и сжатиям и определением постоянного векторного приведённого напряжения по равноопасному программе произвольного переменного одноосного напряжения одноосному циклическому напряжению со средним (или ближайшим к нему) программным напряжением как абсциссой вектора и обеспечивающим равноопасность амплитудным напряжением как ординатой вектора.

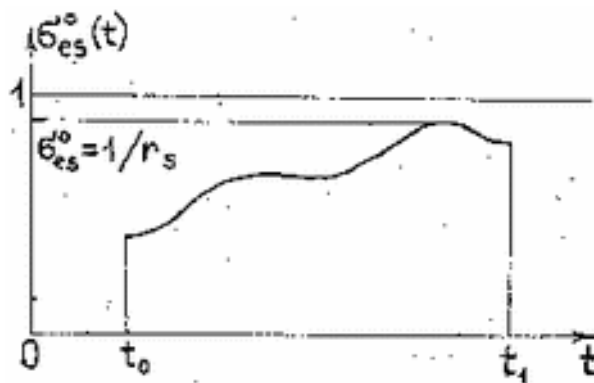


Рисунок 2.28. Переменно скалярно синхронно и постоянно векторно итогово приводимая программа произвольного переменного одноосного напряжения в произвольном анизотропном материале с различными сопротивлениями растяжениям и сжатиям.

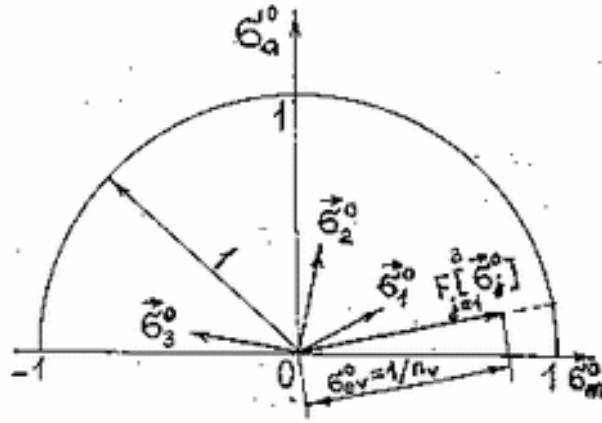


Рисунок 2.29. Векторная функция по всеобщему критерию предельных состояний как всеобщему прочностному закону природы и для замещения меньшего максимума переменного скалярного синхронного приведённого эквивалентного напряжения её модуль всех постоянно векторно итогово приведённых программ с постоянной нумерацией без алгебраического упорядочения произвольных переменных одноосных напряжений в произвольном анизотропном материале с различными сопротивлениями растяжениям и сжатиям.

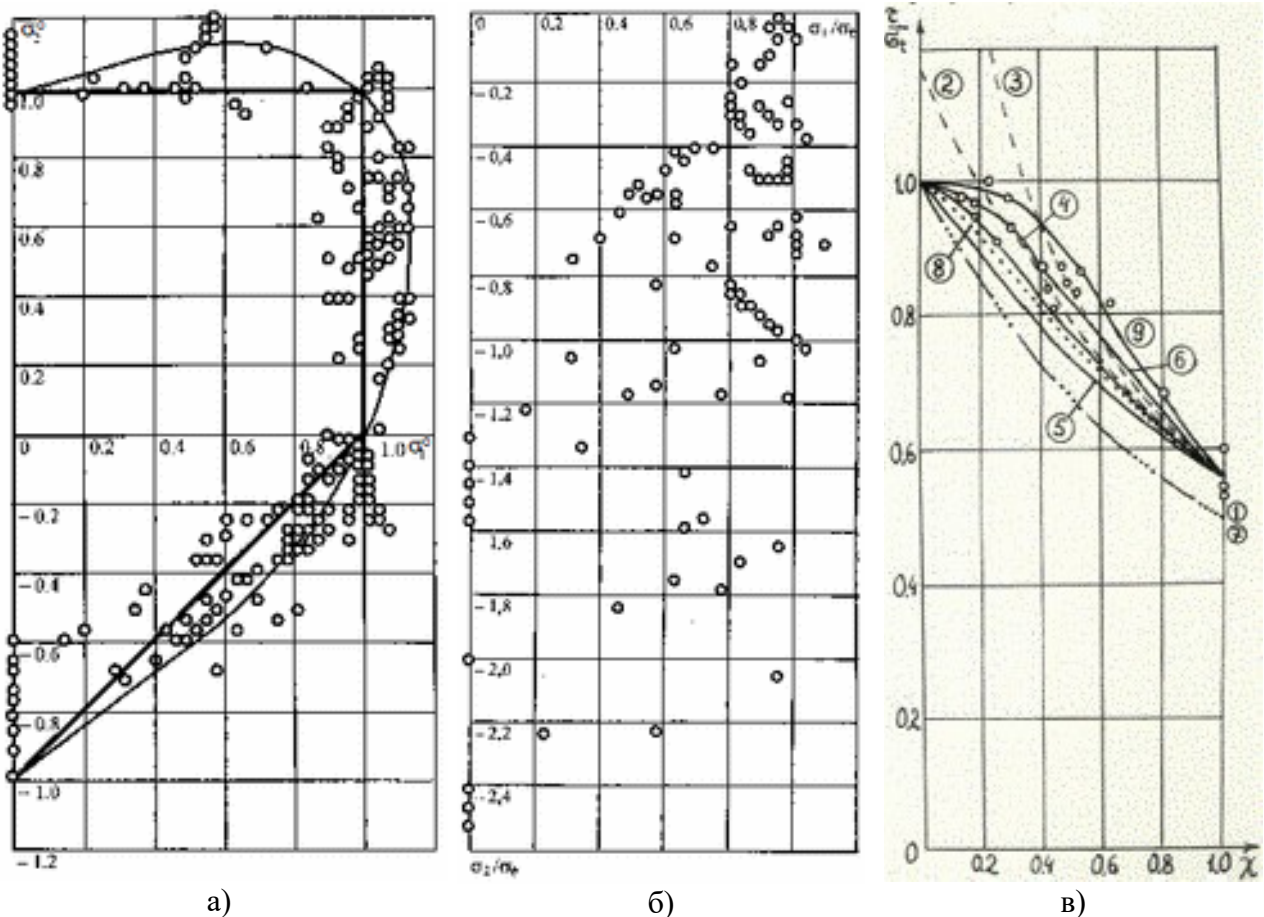


Рисунок 2.30. Экспериментальная оценка достоверности приведённых критериев прочности.

И для других экспериментальных данных о предельных состояниях исследуемого материала при различных условиях нагружения возможны приведение главных напряжений, в постоянном частном случае (2.124), выбор достаточно соответствующего приведённым данным известного или нового критерия предельных состояний (2.126) из единого фонда для

изотропных одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию материалов, а затем приведение этого критерия согласно (2.138), в постоянном частном случае (2.135), и, наконец, получение формулировки критерия в обычных главных напряжениях путём подстановки в приведённый критерий приведений (2.137) или (2.124) соответственно.

Заметим, что если в приведённых главных напряжениях диаграмма предельных плоских напряжённых состояний исследуемого материала относительно вытянута вдоль главной диагонали в первом квадранте и втянута в третьем, а то и включает вогнутые участки, как это бывает у некоторых хрупких и анизотропных материалов, то третья и четвёртая теории прочности заведомо неприемлемы и их приведение недостаточно, а нужен выбор другого, более подходящего критерия предельных состояний, который также может быть приведён созданным методом.

Некоторые же недостатки известных критериев предельных состояний изотропных одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию материалов, например нечувствительность к твёрдо доказанным влияниям промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$  [238] и всестороннего давления [74], устранимы предлагаемым ниже линейным исправлением таких критериев предельных состояний.

При этом допускается, что в предельном состоянии материала равносильное (эквивалентное) напряжение является не постоянной материала, а линейной комбинацией постоянной материала и главных напряжений или, конкретнее, линейной комбинацией постоянной материала и только промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$ .

Тогда опыты при одноосных растяжении и сжатии дают взамен (2.126)

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L \quad (2.139)$$

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + x\sigma_2 = \sigma_L,$$

а взамен (2.135)

$$\sigma_e^\circ = \max_{ju} F(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ) = 1 \quad (2.140)$$

$$\sigma_e^\circ = \max_{ju} F(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ) + x\sigma_2^\circ = 1,$$

где  $x$  – дополнительная безразмерная постоянная материала, определяемая по третьему опыту с

$$\sigma_2 \neq 0$$

(кручение не подходит).

В частности, линейное исправление обоих критериев предельных состояний с синергией первой, второй и или третьей, или четвёртой теорий прочности даёт

$$\sigma_e = (1 - \chi^\gamma) \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} + \chi^\gamma(\sigma_1 - \sigma_3) + x\sigma_2 = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} > 0,$$

$$\sigma_e = \sigma_1 + x\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} \leq 0;$$

$$\sigma_e = (1 - \chi^\gamma) \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} + 2^{-1/2} \chi^\gamma [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} + x\sigma_2 = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} > 0,$$

$$\sigma_e = 2^{-1/2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} + x\sigma_2 = \sigma_t \text{ при } \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\} \leq 0.$$

Если используется вводимое для краткости общее обозначение обусловленности наличия предмета приведением условия его наличия, то в данном случае соответственно

$$\sigma_e = [(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0} + \chi^\gamma_{\sigma>0}(\sigma_1 - \sigma_3) + x\sigma_2 = \sigma_t,$$

$$\sigma_e = [(1 - \chi^\gamma)\sigma]_{>0} + 2^{-1/2} \chi^\gamma_{\sigma>0} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]^{1/2} + x\sigma_2 = \sigma_t,$$

где

$$\gamma > 0,$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

$$\sigma = \max\{\sigma_1; \sigma_1 - \mu_{ep}(\sigma_2 + \sigma_3)\}.$$

Как показано, программа произвольного переменного скаляра алгебраической величины одноосного главного напряжения с постоянной нумерацией без упорядоченности всех трёх главных напряжений по алгебраическим величинам приводится к равноопасному (эквивалентному) постоянному вектору именно благодаря равноопасной одноосной периодической многоцикловой программе.

Применительно к именно полной диаграмме и кривой усталости Вёлера (рисунок 2.31) предлагается избавление от несущественных долей циклов, в частности четверти цикла и полупериода, однако совершенно излишне осложняющих логарифмирование числа циклов, его изображение на диаграмме и аналитическое приближение именно полной кривой усталости.

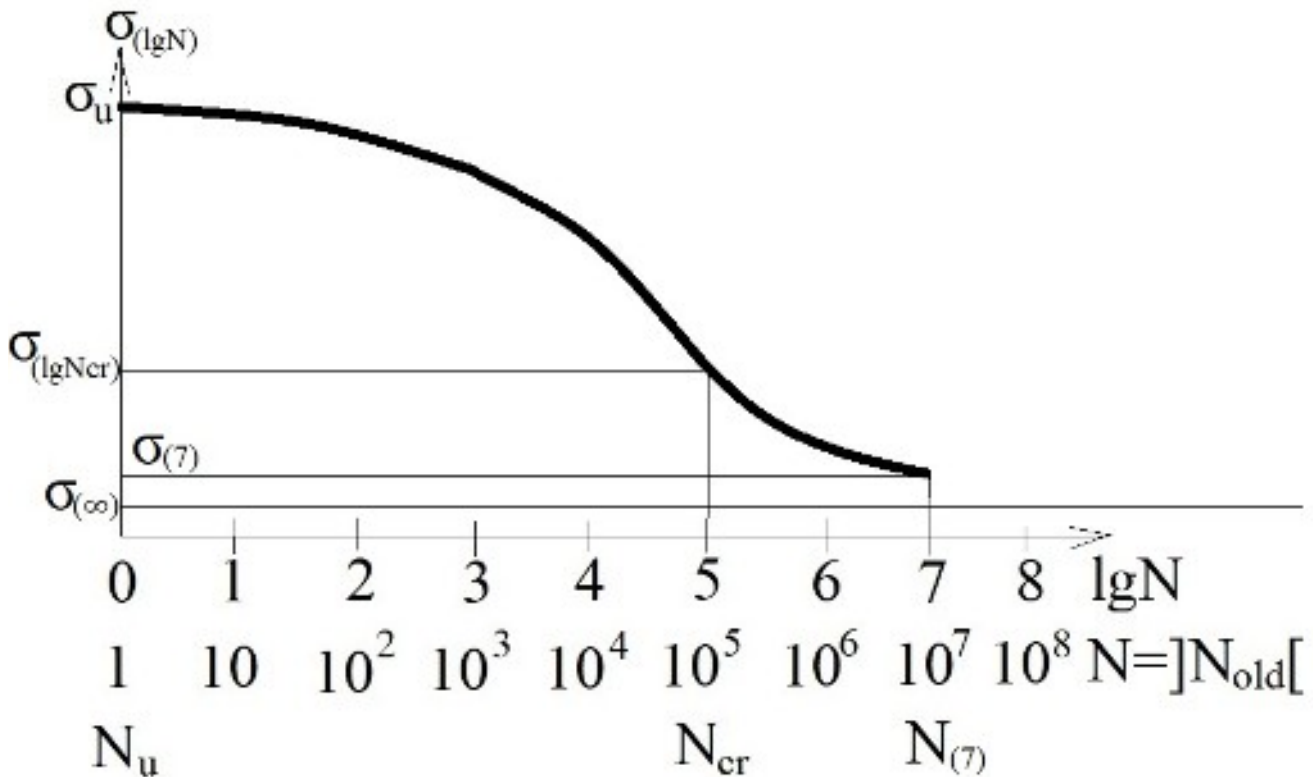


Рисунок 2.31. Полная диаграмма и кривая усталости Вёлера.

С этой целью обычное число циклов  $N_{old}$  заменяется его потолком  $]N_{old}[$  и обозначается той же буквой  $N$ , причём потолок  $]x[$  произвольного действительного числа  $x$  есть по определению наименьшее целое число, не меньшее числа  $x$ .

В частности, для любой строго положительной доли цикла её потолок есть просто один цикл, то есть  $N = 1$ .

Это сразу избавляет от отрицательных логарифмов чисел циклов и от необходимости положительных добавок к числам циклов.

Ввиду больших разбросов опытных данных нет достаточных оснований для осложнений, в частности не обязателен учёт возможности строгой положительности предела выносливости

$$\sigma_{(\infty)} > 0,$$

соответствующего бесконечному числу циклов, если он физически существует именно как существенно положительный, то есть дающий непременно существенно приподнятую над осью абсцисс горизонтальную асимптоту кривой усталости Вёлера.

Такой существенно положительный предел выносливости

$$\sigma_{(\infty)} > 0$$

может быть известен или приближённо найден или хотя бы оценён по совокупности всех опытных данных, например по предлагаемой простой приближённой формуле

$$\sigma_{(\infty)} \approx \sigma_{(9)} \approx 2\sigma_{(7)} - \sigma_{(5)} \approx 2\sigma_{(7)} - \sigma_{(\lg N_{cr})} = 2\sigma_{(7)} - \sigma_{cr}.$$

Это формула основана на том, что в случае логарифмической шкалы чисел циклов и равномерной шкалы напряжений  $10^7$  циклов на их оси делят пополам отрезок от  $10^5$  циклов, примерно соответствующих критической точке перехода малоциклового усталости в многоцикловую усталость, до  $10^9$  циклов, кривая усталости Вёлера правее критической точки

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 230/556

является выпуклой вниз, так что пересечение продолжения прямолинейного отрезка, соединяющего точки кривой для  $10^5$  циклов и  $10^7$  циклов, с вертикалью, соответствующей  $10^9$  циклов, лежит именно ниже соответствующей точки кривой усталости Вёлера, что и требуется для приближённого нахождения горизонтальной асимптоты кривой на высоте  $\sigma_{(\infty)}$ . Такой существенно положительный предел выносливости

$$\sigma_{(\infty)} > 0$$

при желании может быть достаточно просто учтён следующим образом именно как общий случай, который включает частный случай неучёта  $\sigma_{(\infty)}$  как его аннулирования.

По принципу допустимой простоты предлагается единое степенное аналитическое приближение именно полной кривой усталости Вёлера, в полном соответствии с ней всюду строго монотонно убывающее с единственной сменой выпуклости вверх на выпуклость вниз в точке перегиба при переходе от малоциклового усталости к многоциклового усталости, в общем виде с числовыми постоянными  $a > 0$ ,  $b > 1$ :

$$\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (1 + a \lg^b N).$$

Упрощение введением новых переменных

$$x = \lg N,$$

$$y = f(x) = (\sigma_{(\lg N)} - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_u - \sigma_{(\infty)})$$

приводит к равносильной функции

$$y = f(x) = 1 / (1 + ax^b)$$

с аннулирующей только при  $x = 0$  и всюду отрицательной при  $x > 0$  первой производной

$$dy/dx = df/dx = - abx^{b-1} / (1 + ax^b)^2$$

и с меняющей знак с минуса на плюс второй производной

$$d^2y/dx^2 = d^2f/dx^2 = abx^{b-2} [a(b+1)x^b - (b-1)] / (1 + ax^b)^3$$

с обращением в нуль в точке перегиба

$$x = \{(b-1) / [a(b+1)]\}^{1/b}$$

как соответствующей критическому числу циклов  $N_{cr}$  и критическому наибольшему модулю

$$\sigma_{cr} = \sigma_{(\lg N_{cr})} = |\sigma|_{\max cr}$$

напряжений цикла точке перехода от малоциклового усталости к многоциклового усталости.

В этой критической точке перехода

$$a = (b-1) / [(b+1)x^b] = (b-1) / [(b+1) \lg^b N_{cr}].$$

Единое степенное аналитическое приближение

$$\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / \{1 + (b-1) \lg^b N / [(b+1) \lg^b N_{cr}]\}$$

при

$$N = N_{cr}$$

даёт

$$\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)} = \sigma_{(\lg N_{cr})} - \sigma_{(\infty)} = (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) (b+1) / (2b),$$

$$2(\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)}) = (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) (1 + 1/b),$$

$$2\sigma_{cr} - \sigma_u - \sigma_{(\infty)} = (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / b,$$

$$b = (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (2\sigma_{cr} - \sigma_u - \sigma_{(\infty)}),$$

$$b - 1 = 2(\sigma_u - \sigma_{cr}) / (2\sigma_{cr} - \sigma_u - \sigma_{(\infty)}),$$

$$b + 1 = 2(\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)}) / (2\sigma_{cr} - \sigma_u - \sigma_{(\infty)})$$

и принимает окончательный теоретический общий вид

$$\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / \{1 + (b-1) \lg^b N / [(b+1) \lg^b N_{cr}]\},$$

$$\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / \{1 + [(\sigma_u - \sigma_{cr}) / (\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)})] \lg^b N / \lg^b N_{cr}\}.$$

Условие его применимости

$$2\sigma_{cr} - \sigma_u - \sigma_{(\infty)} > 0$$

представляется выполненным для циклов с достаточно большим

$$\max \{|\sigma_{\max}|, |\sigma_{\min}|\}$$

для практической опасности усталостного разрушения.

Однако на практике имеют место существенные разбросы по напряжению, а по числу циклов даже на порядок и более.

Поэтому целесообразно считать статическое предельное напряжение  $\sigma_u$  заранее определённым с допускающей пренебрежение заведомо меньшей погрешностью на других образцах до разрушения, исходить из первоначального вида аналитического приближения

$$\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (1 + \text{alg}^b N),$$

$$y = f(x) = 1 / (1 + ax^b)$$

с положительными постоянными  $a$  и  $b$  с выбором их значений не по одной критической точке, а по условию наименьшего общего отклонения от всей совокупности  $n$  пар опытных данных о циклических предельных напряжениях и соответствующих количествах выдержанных циклов.

Имеют место соотношения

$$ax^b = 1/y - 1,$$

$$\text{lga} + \text{blgx} = \lg(1/y - 1).$$

Вводится

$$c = \text{lga}.$$

Тогда

$$c + \text{blgx} = \lg(1/y - 1),$$

$$c + (\text{lg} \lg N)b = \lg[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{(\lg N)} - \sigma_{(\infty)}) - 1].$$

В общем случае  $n$  пар опытных данных

$$[\text{lg} N_i, \sigma_{(\lg N(i))}] \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n)$$

дают переопределённую систему  $n$  линейных уравнений с двумя неизвестными  $c$  и  $b$ :

$$c + (\text{lg} \lg N_i)b = \lg[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1] \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n).$$

Метод наименьших квадратов Лежандра и Гаусса обеспечивает минимизацию суммы квадратов отклонений по всем  $n$  этим уравнениям аннулированием частных производных этой суммы по каждому из этих обоих неизвестных  $c$  и  $b$ , дающим систему двух уравнений с этими двумя неизвестными и положительным главным определителем:

$$nc + \sum_{i=1}^n \text{lg} \lg N_i b = \sum_{i=1}^n \text{lg} [(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1],$$

$$\sum_{i=1}^n \text{lg} \lg N_i c + \sum_{i=1}^n \text{lg}^2 \lg N_i b = \sum_{i=1}^n \text{lg} \lg N_i \text{lg} [(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1].$$

Эта система имеет единственное решение в виде совокупности

$$c = \{ \sum_{i=1}^n \text{lg} [(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1] \sum_{i=1}^n \text{lg}^2 \lg N_i - \sum_{i=1}^n \text{lg} \lg N_i \text{lg} [(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1] / [\sum_{i=1}^n \text{lg} \lg N_i \text{lg} [(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1] - (\sum_{i=1}^n \text{lg} \lg N_i)^2] \},$$

$$b = \{ n \sum_{i=1}^n \text{lg} \lg N_i \text{lg} [(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1] - \sum_{i=1}^n \text{lg} \lg N_i \sum_{i=1}^n \text{lg} [(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1] / [n \sum_{i=1}^n \text{lg}^2 \lg N_i - (\sum_{i=1}^n \text{lg} \lg N_i)^2] \}.$$

Тогда

$$a = 10^c$$

и в итоге аналитическое приближение

$$\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (1 + \text{alg}^b N).$$

Представляется полезным играющее роль математического испытательного стенда графическое представление  $n$  линейных уравнений с двумя неизвестными  $c$  и  $b$

$$c + (\text{lg} \lg N_i)b = \lg[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1] \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n)$$

и  $n$  пар опытных данных

$$[\text{lg} N_i, \sigma_{(\lg N(i))}] \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n)$$

в линеаризующей системе координат

$$\text{lg} \lg N, \text{lg} [(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)}) - 1].$$

Ввиду больших разбросов опытных данных нет достаточных оснований для осложнений, в частности нелинейностью в этой или иной системе координат.

Кроме того, по принципу допустимой простоты предлагается и единое показательное-степенное аналитическое приближение именно полной кривой усталости Вёлера, в полном соответствии с ней всюду строго монотонно убывающее с единственной сменой выпуклости вверх на выпуклость вниз в точке перегиба при переходе от малоциклового усталости к многоциклового усталости, в общем виде с числовыми постоянными  $a > 0$ ,  $b > 1$ :

$$\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) \exp(-\text{alg}^b N).$$

Упрощение введением новых переменных

$$x = \lg N,$$

$$y = f(x) = (\sigma_{(\lg N)} - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_u - \sigma_{(\infty)})$$

приводит к равносильной функции

$$y = f(x) = \exp(-ax^b)$$

с аннулирующей только при  $x = 0$  и всюду отрицательной при  $x > 0$  первой производной

$$dy/dx = df/dx = -abx^{b-1} \exp(-ax^b)$$

и с меняющей знак с минуса на плюс второй производной

$$d^2y/dx^2 = d^2f/dx^2 = -ab(b-1)x^{b-2} \exp(-ax^b) + a^2b^2x^{2b-2} \exp(-ax^b) = a^2b^2x^{2b-2} \exp(-ax^b) - ab(b-1)x^{b-2} \exp(-ax^b),$$

$$d^2y/dx^2 = d^2f/dx^2 = abx^{b-2} \exp(-ax^b) [abx^b - (b-1)]$$

с обращением в нуль в точке перегиба

$$x = [(b-1)/(ab)]^{1/b}$$

как соответствующей критическому числу циклов  $N_{cr}$  и критическому наибольшему модулю

$$\sigma_{cr} = \sigma_{(\lg N_{cr})} = |\sigma|_{\max cr}$$

напряжений цикла точке перехода от малоциклового усталости к многоциклового усталости.

В этой критической точке перехода

$$a = (b-1)/(bx^b) = (b-1)/(b \lg^b N_{cr}).$$

Единое степенное аналитическое приближение

$$\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) \exp[-(b-1) \lg^b N / (b \lg^b N_{cr})]$$

при

$$N = N_{cr}$$

даёт

$$\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)} = \sigma_{(\lg N_{cr})} - \sigma_{(\infty)} = (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) \exp[-(1-1/b)],$$

$$\exp(1-1/b) = (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)}),$$

$$1-1/b = \ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)})],$$

$$b = 1 / \{1 - \ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)})]\},$$

$$b-1 = \ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)})] / \{1 - \ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)})]\}$$

и принимает окончательный теоретический общий вид

$$\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) \exp\{-\ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)})] \lg^b N / \lg^b N_{cr}\}.$$

Условие его применимости

$$b-1 = \ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)})] / \{1 - \ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)})]\} > 0,$$

$$\ln[(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)})] < 1,$$

$$(\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) / (\sigma_{cr} - \sigma_{(\infty)}) < e$$

представляется выполненным для циклов с достаточно большим

$$\max\{|\sigma_{\max}|, |\sigma_{\min}|\}$$

для практической опасности усталостного разрушения.

Однако на практике имеют место существенные разбросы по напряжению, а по числу циклов даже на порядок и более.

Поэтому целесообразно считать статическое предельное напряжение заранее определённым с допускающей пренебрежение заведомо меньшей погрешностью на других образцах до разрушения, исходить из первоначального вида аналитического приближения

$$\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) \exp(-a \lg^b N),$$

$$y = f(x) = \exp(-ax^b)$$

с положительными постоянными  $a$  и  $b$  с выбором их значений не по одной критической точке, а по условию наименьшего общего отклонения от всей совокупности  $n$  пар опытных данных о циклических предельных напряжениях и соответствующих количествах выдержанных циклов.

Имеют место соотношения

$$\exp(ax^b) = 1/y,$$

$$ax^b = -\ln y,$$

$$\lg a + b \lg x = \lg(-\ln y).$$

Вводится



$$c = lga.$$

Тогда

$$c + blgx = \lg \left\{ \ln \left[ \frac{(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})}{(\sigma_{(\lg N)} - \sigma_{(\infty)})} \right] \right\}.$$

В общем случае  $n$  пар опытных данных

$$[\lg N_i, \sigma_{(\lg N(i))}] \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n)$$

дают переопределённую систему  $n$  линейных уравнений с двумя неизвестными  $c$  и  $b$ :

$$c + (\lg \lg N_i)b = \lg \left\{ \ln \left[ \frac{(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})}{(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})} \right] \right\} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n).$$

Метод наименьших квадратов Лежандра и Гаусса обеспечивает минимизацию суммы квадратов отклонений по всем  $n$  этим уравнениям аннулированием частных производных этой суммы по каждому из этих обоих неизвестных  $c$  и  $b$ , дающим систему двух уравнений с этими двумя неизвестными и положительным главным определителем:

$$\begin{aligned} nc + \sum_{i=1}^n \lg \lg N_i b &= \sum_{i=1}^n \lg \left\{ \ln \left[ \frac{(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})}{(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})} \right] \right\}, \\ \sum_{i=1}^n \lg \lg N_i c + \sum_{i=1}^n \lg^2 \lg N_i b &= \sum_{i=1}^n \lg \lg N_i \lg \left\{ \ln \left[ \frac{(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})}{(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Эта система имеет единственное решение в виде совокупности

$$\begin{aligned} c &= \left\{ \sum_{i=1}^n \lg \left[ \ln \left[ \frac{(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})}{(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})} \right] \right] \sum_{i=1}^n \lg^2 \lg N_i - \sum_{i=1}^n \lg \lg N_i \lg \left[ \ln \left[ \frac{(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})}{(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})} \right] \right] \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^n \lg \lg N_i \right\} / \left[ n \sum_{i=1}^n \lg^2 \lg N_i - \left( \sum_{i=1}^n \lg \lg N_i \right)^2 \right], \\ b &= \left\{ n \sum_{i=1}^n \lg \lg N_i \lg \left[ \ln \left[ \frac{(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})}{(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})} \right] \right] - \sum_{i=1}^n \lg \lg N_i \sum_{i=1}^n \lg \left[ \ln \left[ \frac{(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})}{(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})} \right] \right] \right. \\ &\quad \left. \sum_{i=1}^n \lg^2 \lg N_i \right\} / \left[ n \sum_{i=1}^n \lg^2 \lg N_i - \left( \sum_{i=1}^n \lg \lg N_i \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$a = 10^c$$

и в итоге аналитическое приближение

$$\sigma_{(\lg N)} = \sigma_{(\infty)} + (\sigma_u - \sigma_{(\infty)}) \exp(-alg^b N).$$

Представляется полезным играющее роль математического испытательного стенда графическое представление  $n$  линейных уравнений с двумя неизвестными  $c$  и  $b$

$$c + (\lg \lg N_i)b = \lg \left\{ \ln \left[ \frac{(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})}{(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})} \right] \right\} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n)$$

и  $n$  пар опытных данных

$$[\lg N_i, \sigma_{(\lg N(i))}] \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n)$$

в линеаризующей системе координат

$$\lg \lg N, \lg \left\{ \ln \left[ \frac{(\sigma_u - \sigma_{(\infty)})}{(\sigma_{(\lg N(i))} - \sigma_{(\infty)})} \right] \right\}.$$

Ввиду больших разбросов опытных данных нет достаточных оснований для осложнений, в частности нелинейностью в этой или иной системе координат.

Для циклического нагружения известны наименьшее  $\sigma_{\min}$  и наибольшее  $\sigma_{\max}$ , среднее

$$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$$

и амплитудное

$$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$$

напряжения цикла.

Также известный коэффициент асимметрии цикла

$$R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$$

имеет три принципиальных изъяна.

Во-первых, для симметричного цикла с вообще отсутствующей и поэтому логично нулевой асимметрией и с нулевым средним напряжением так называемый коэффициент асимметрии цикла

$$R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$$

почему-то равен минус единице, а не нулю, так что ничем не оправданно вводит в математически, физически, психологически и педагогически вредное заблуждение, затрудняя и извращая восприятие, понимание и методологическое систематическое запоминание и усвоение. Всё нужно называть именно своими именами во имя использования мощи языка, особенно научного. Это никакой не коэффициент асимметрии цикла, а именно и только отношение наименьшего напряжения цикла к наибольшему напряжению цикла.

Во-вторых, известный коэффициент асимметрии цикла

$$R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$$

вообще не определён при нулевом наибольшем напряжении цикла

$$\sigma_{\max} = 0,$$

то есть для научно и технически крайне важного пульсирующего донулевого цикла, и плохо определён в окрестности нулевого наибольшего напряжения цикла, поскольку при ненулевом и тогда положительном амплитудном напряжении цикла

$$\sigma_a > 0$$

наименьшее напряжение цикла отрицательно

$$\sigma_{\min} < 0$$

и при переходе наибольшего напряжения цикла  $\sigma_{\max}$  через нуль слева направо коэффициент асимметрии цикла

$$R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$$

скачком переходит от плюс бесконечности к минус бесконечности.

В-третьих, изменение так называемого коэффициента асимметрии цикла

$$R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$$

при строго монотонном возрастании среднего напряжения  $\sigma_m$  цикла по именно целой диаграмме предельных напряжений цикла нельзя признать ни упорядоченным, ни тем более закономерным. Действительно, в крайней левой точке диаграммы предельных напряжений цикла его наименьшее  $\sigma_{\min}$  и наибольшее  $\sigma_{\max}$  напряжения отрицательны и равны между собой, так что так называемый коэффициент асимметрии цикла равен единице. Далее он строго монотонно возрастает до плюс бесконечности при стремлении наибольшего напряжения  $\sigma_{\max}$  цикла к нулю именно слева. При аннулировании наибольшего напряжения  $\sigma_{\max}$  цикла для научно и технически важного пульсирующего донулевого цикла так называемый коэффициент асимметрии цикла вообще не определён, а при бесконечно малых именно положительных наибольших напряжениях  $\sigma_{\max}$  цикла является отрицательным бесконечно большим. И только после этого так называемый коэффициент асимметрии цикла алгебраически строго монотонно возрастает, переходя через нулевое значение для научно и технически важного пульсирующего отнулевого цикла, до единицы в крайней правой точке диаграммы предельных напряжений цикла, где его наименьшее  $\sigma_{\min}$  и наибольшее  $\sigma_{\max}$  напряжения положительны и снова равны между собой.

Поэтому дополнительно вводится именно правильно определённая доля асимметрии цикла

$$P = \sigma_m/\sigma_a = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}),$$

поскольку её знаменатель обращается в нуль только при постоянстве напряжения

$$\sigma = \sigma_{\min} = \sigma_{\max},$$

то есть при статическом нагружении, которое вообще излишне рассматривать как циклическое нагружение.

Если коэффициент асимметрии цикла

$$R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$$

определён, то

$$\sigma_{\max} \neq 0$$

и доля асимметрии цикла именно однозначно выражается через так называемый коэффициент асимметрии цикла:

$$P = \sigma_m/\sigma_a = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) = (1 + \sigma_{\min}/\sigma_{\max})/(1 - \sigma_{\min}/\sigma_{\max}) = (1 + R)/(1 - R),$$

причём знаменатель обращается в нуль именно и только при

$$R = 1,$$

то есть при всё том же самом постоянстве напряжения

$$\sigma = \sigma_{\min} = \sigma_{\max}.$$

Если так называемый коэффициент асимметрии цикла

$$R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$$

определён

и

$$\sigma_a > 0,$$

то имеет место и обратное тоже однозначное выражение так называемого коэффициента асимметрии цикла через долю асимметрии цикла:

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 235/556

$$R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = (\sigma_m - \sigma_a)/(\sigma_m + \sigma_a) = (\sigma_m/\sigma_a - 1)/(\sigma_m/\sigma_a + 1) = (P - 1)/(P + 1).$$

Известное понятие подобия циклов с одинаковыми коэффициентами асимметрий циклов не дееспособно для донулевых циклов, для которых коэффициент асимметрии цикла

$$R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$$

вообще не определён.

Поэтому дополнительно вводится понятие подобия циклов с одинаковыми долями асимметрий циклов, дееспособное и для донулевых циклов при нулевом наибольшем напряжении цикла

$$\sigma_{\max} = 0.$$

Взамен трёх принципиальных изъянов так называемого коэффициента асимметрии цикла

$$R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max}$$

введённая доля асимметрии цикла

$$P = \sigma_m/\sigma_a = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

имеет три именно соответствующих принципиальных достоинства.

Во-первых, для симметричного цикла с вообще отсутствующей и поэтому логично нулевой асимметрией и с нулевым средним напряжением введённая доля асимметрии цикла

$$P = \sigma_m/\sigma_a = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

логично равна именно нулю и вполне оправдана математически, физически, психологически и педагогически, естественно упрощая восприятие, понимание и методологическое систематическое запоминание и усвоение и называясь именно своим именем во имя использования мощи языка, особенно научного.

Во-вторых, введённая доля асимметрии цикла

$$P = \sigma_m/\sigma_a = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

определена и равна минус единице при нулевом наибольшем напряжении цикла

$$\sigma_{\max} = 0,$$

то есть для научно и технически крайне важного пульсирующего донулевого цикла, и хорошо определена в окрестности нулевого наибольшего напряжения цикла, поскольку при ненулевом и тогда положительном амплитудном напряжении цикла

$$\sigma_a > 0$$

наименьшее напряжение цикла отрицательно

$$\sigma_{\min} < 0$$

и при переходе наибольшего напряжения цикла  $\sigma_{\max}$  через нуль слева направо введённая доля асимметрии цикла

$$P = \sigma_m/\sigma_a = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

именно непрерывно возрастает алгебраически, убывая по абсолютной величине.

В-третьих, изменение введённой доли асимметрии цикла

$$P = \sigma_m/\sigma_a = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

при строго монотонном возрастании среднего напряжения  $\sigma_m$  цикла по именно целой диаграмме предельных напряжений цикла упорядочено и закономерно. Действительно, в крайней левой точке диаграммы предельных напряжений цикла его наименьшее  $\sigma_{\min}$  и наибольшее  $\sigma_{\max}$  напряжения цикла отрицательны и равны между собой, так что амплитудное напряжение  $\sigma_a$  цикла аннулируется, причём при возрастании среднего напряжения  $\sigma_m$  цикла непрерывно возрастает и становится именно положительным, и в крайней левой точке диаграммы предельных напряжений цикла введённая доля асимметрии цикла

$$P = \sigma_m/\sigma_a = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

равна минус бесконечности. Далее при строго монотонном возрастании среднего напряжения  $\sigma_m$  цикла по именно целой диаграмме предельных напряжений цикла введённая доля асимметрии цикла строго монотонно возрастает до плюс бесконечности в крайней правой точке диаграммы предельных напряжений цикла. Действительно, в крайней правой точке диаграммы предельных напряжений цикла его наименьшее  $\sigma_{\min}$  и наибольшее  $\sigma_{\max}$  напряжения цикла положительны и снова равны между собой, так что амплитудное напряжение  $\sigma_a$  цикла аннулируется, причём здесь при стремлении к нулю при возрастании

среднего напряжения  $\sigma_m$  цикла непрерывно убывает и является именно положительным, и в крайней правой точке диаграммы предельных напряжений цикла введённая доля асимметрии цикла

$$P = \sigma_m / \sigma_a = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

равна плюс бесконечности. При аннулировании наибольшего напряжения  $\sigma_{\max}$  цикла для научно и технически важного пульсирующего донулевого цикла введённая доля асимметрии цикла

$$P = \sigma_m / \sigma_a = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

равна минус единице. При аннулировании наименьшего напряжения  $\sigma_{\min}$  цикла для научно и технически важного пульсирующего отнулевого цикла введённая доля асимметрии цикла

$$P = \sigma_m / \sigma_a = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$$

равна плюс единице.

Заметим, что в случае различной сопротивляемости материала растяжениям и сжатиям предельная амплитуда  $\sigma_{aj}$  циклически изменяющегося одноосного напряжённого состояния максимальна при ненулевом среднем напряжении цикла  $\sigma_{m0j}$  [324].

Это показано в зависимости от средних  $\sigma_m$  напряжений циклов на диаграммах наибольших  $\sigma_{\max}$ , средних  $\sigma_m$  и наименьших  $\sigma_{\min}$  напряжений циклов в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  для в общем случае анизотропных материалов, в этом направлении:

1) примерно одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию ( $\sigma_{jt} = \sigma_{jc}$ , рисунок 2.32), что имеет место для многих пластичных материалов, допускающих пластические деформации на порядок больше упругих деформаций;

2) сильнее сопротивляющихся сжатию, чем растяжению ( $\sigma_{jt} < \sigma_{jc}$ , рисунок 2.33), что имеет место для большинства хрупких материалов без заметных пластических деформаций и для большинства полухрупких материалов, допускающих пластические деформации порядка упругих деформаций;

3) сильнее сопротивляющихся растяжению, чем сжатию ( $\sigma_{jt} > \sigma_{jc}$ , рисунок 2.34), что имеет место для некоторых материалов, например магниевых сплавов, а также древесины в направлении волокон.

То же самое показано в зависимости от средних  $\sigma_m$  напряжений циклов и на диаграммах амплитудных  $\sigma_a$  напряжений циклов в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  для в общем случае анизотропных материалов, в этом направлении:

1) примерно одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию ( $\sigma_{jt} = \sigma_{jc}$ , рисунок 2.35), что имеет место для многих пластичных материалов, допускающих пластические деформации на порядок больше упругих деформаций;

2) сильнее сопротивляющихся сжатию, чем растяжению ( $\sigma_{jt} < \sigma_{jc}$ , рисунок 2.36), что имеет место для большинства хрупких материалов без заметных пластических деформаций и для большинства полухрупких материалов, допускающих пластические деформации порядка упругих деформаций;

3) сильнее сопротивляющихся растяжению, чем сжатию ( $\sigma_{jt} > \sigma_{jc}$ , рисунок 2.37), что имеет место для некоторых материалов, например магниевых сплавов, а также древесины в направлении волокон.

При этом на рисунках 2.32, 2.33 и 2.34 исходящий из начала координат луч под углом  $\alpha$  в положительном направлении против часовой стрелки является множеством, или геометрическим местом, точек, изображающих допредельные (от начала координат до пересечения с кривой предельных алгебраически наибольших напряжений  $\sigma_{\max}$  циклов), предельные (на пересечении с кривой предельных алгебраически наибольших напряжений  $\sigma_{\max}$  циклов) и запредельные (за пересечением, то есть выше пересечения, с кривой предельных алгебраически наибольших напряжений  $\sigma_{\max}$  циклов) алгебраически наибольшие напряжения  $\sigma_{\max}$  подобных циклов с одинаковыми между собой одноимёнными соответственно долями асимметрии  $P$  и коэффициентами асимметрии  $R$ , поскольку для тех и для других соответственно  $\operatorname{tg} \alpha = \sigma_{\max} / \sigma_m = (\sigma_m + \sigma_a) / \sigma_m = 1 + 1/P$ ;

$$\operatorname{tg} \alpha = \sigma_{\max} / \sigma_m = \sigma_{\max} / [(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2] = 2\sigma_{\max} / (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) = 2 / (1 + \sigma_{\min} / \sigma_{\max}) = 2 / (1 + R).$$

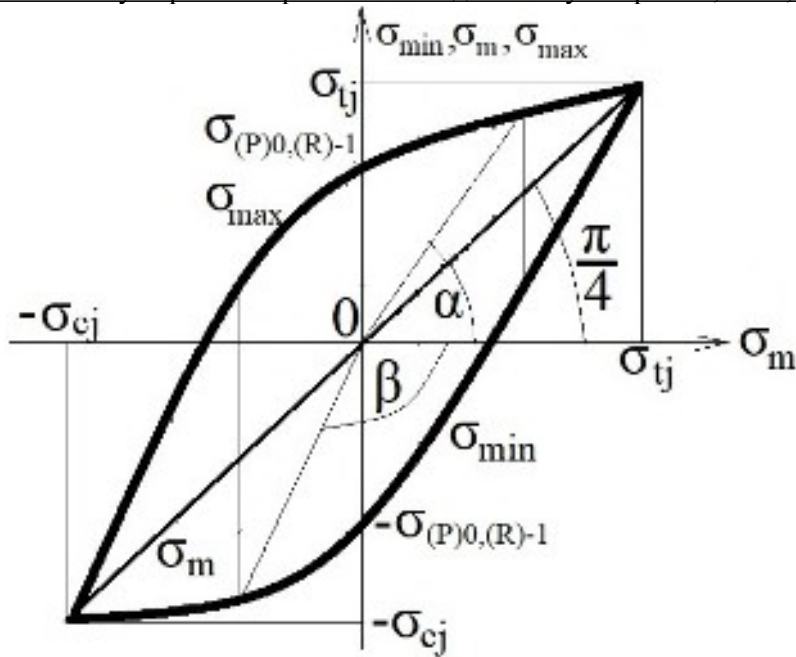


Рисунок 2.32. Диаграмма (в зависимости от средних  $\sigma_m$  напряжений циклов) наибольших  $\sigma_{\max}$ , средних  $\sigma_m$  и наименьших  $\sigma_{\min}$  напряжений циклов в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  для в общем случае анизотропных материалов, в этом направлении примерно одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию ( $\sigma_{jt} = \sigma_{jc}$ ), что имеет место для многих пластичных материалов, допускающих пластические деформации на порядок больше упругих деформаций.

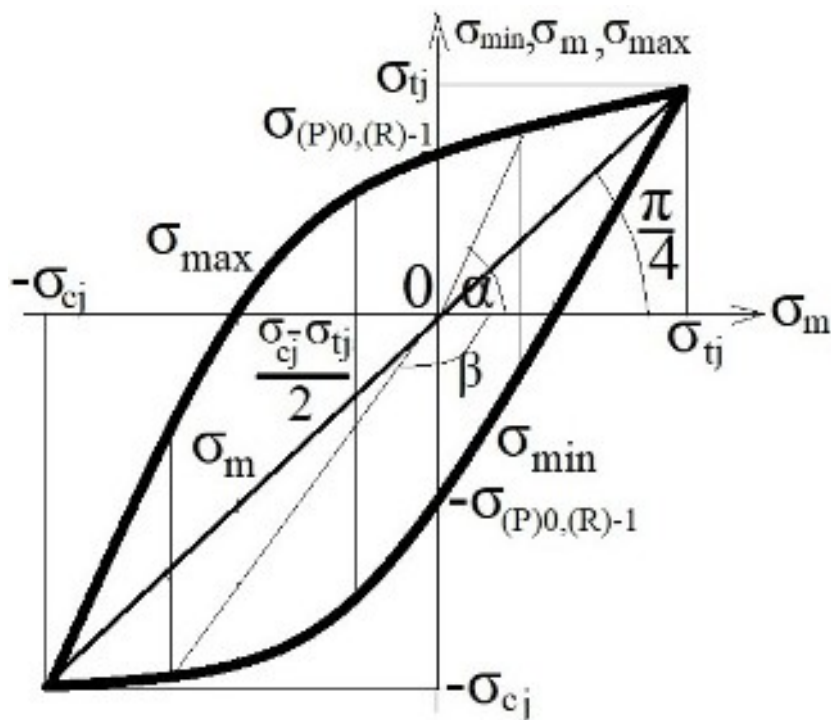


Рисунок 2.33. Диаграмма (в зависимости от средних  $\sigma_m$  напряжений циклов) наибольших  $\sigma_{\max}$ , средних  $\sigma_m$  и наименьших  $\sigma_{\min}$  напряжений циклов в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  для в общем случае анизотропных материалов, в этом направлении сильнее сопротивляющихся сжатию, чем растяжению ( $\sigma_{jt} < \sigma_{jc}$ ), что имеет место для большинства хрупких материалов без заметных пластических деформаций и для большинства полухрупких материалов, допускающих пластические деформации порядка упругих деформаций.

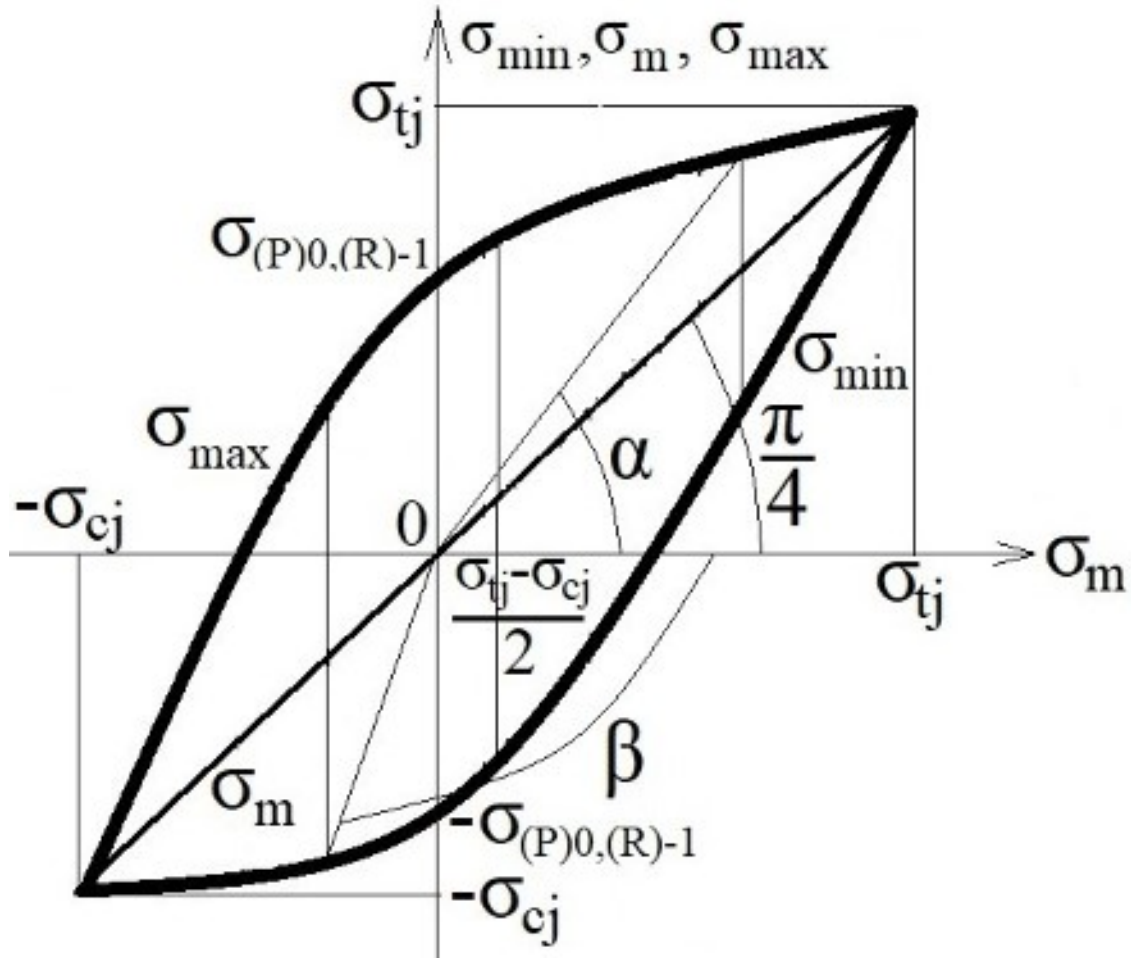


Рисунок 2.34. Диаграмма (в зависимости от средних  $\sigma_m$  напряжений циклов) наибольших  $\sigma_{\max}$ , средних  $\sigma_m$  и наименьших  $\sigma_{\min}$  напряжений циклов в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  для в общем случае анизотропных материалов, в этом направлении сильнее сопротивляющихся растяжению, чем сжатию ( $\sigma_{jt} > \sigma_{jc}$ ), что имеет место для некоторых материалов, например магниевых сплавов, а также древесины в направлении волокон.

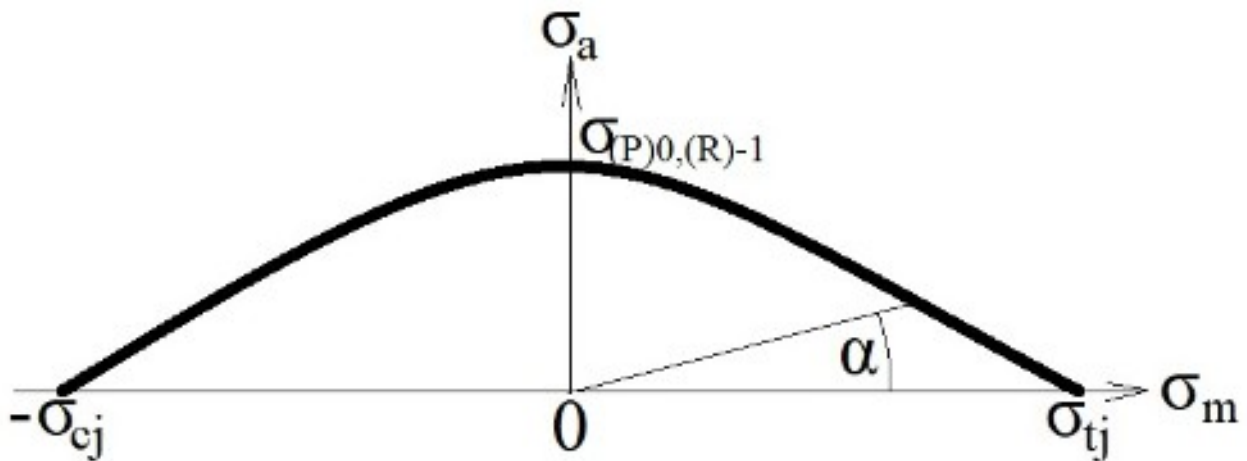


Рисунок 2.35. Диаграмма (в зависимости от средних  $\sigma_m$  напряжений циклов) амплитудных  $\sigma_a$  напряжений циклов в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  для в общем случае анизотропных материалов, в этом направлении примерно одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию ( $\sigma_{jt} = \sigma_{jc}$ ), что имеет место для многих пластичных материалов, допускающих пластические деформации на порядок больше упругих деформаций.

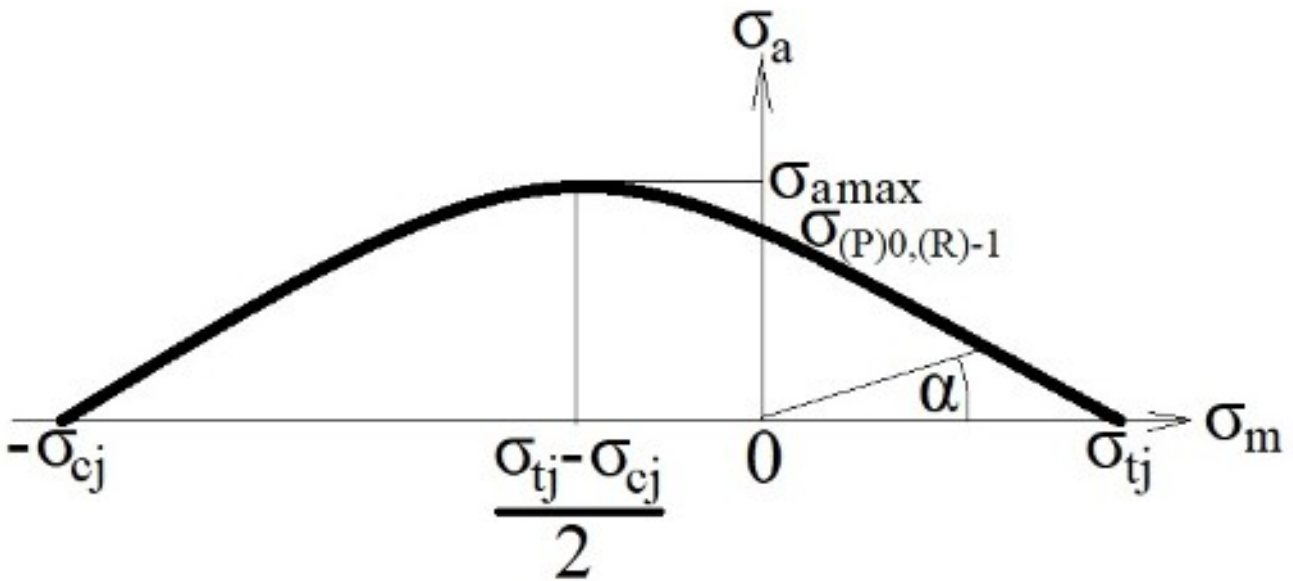


Рисунок 2.36. Диаграмма (в зависимости от средних  $\sigma_m$  напряжений циклов) амплитудных  $\sigma_a$  напряжений циклов в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  для в общем случае анизотропных материалов, в этом направлении сильнее сопротивляющихся сжатию, чем растяжению ( $\sigma_{jt} < \sigma_{jc}$ ), что имеет место для большинства хрупких материалов без заметных пластических деформаций и для большинства полухрупких материалов, допускающих пластические деформации порядка упругих деформаций.

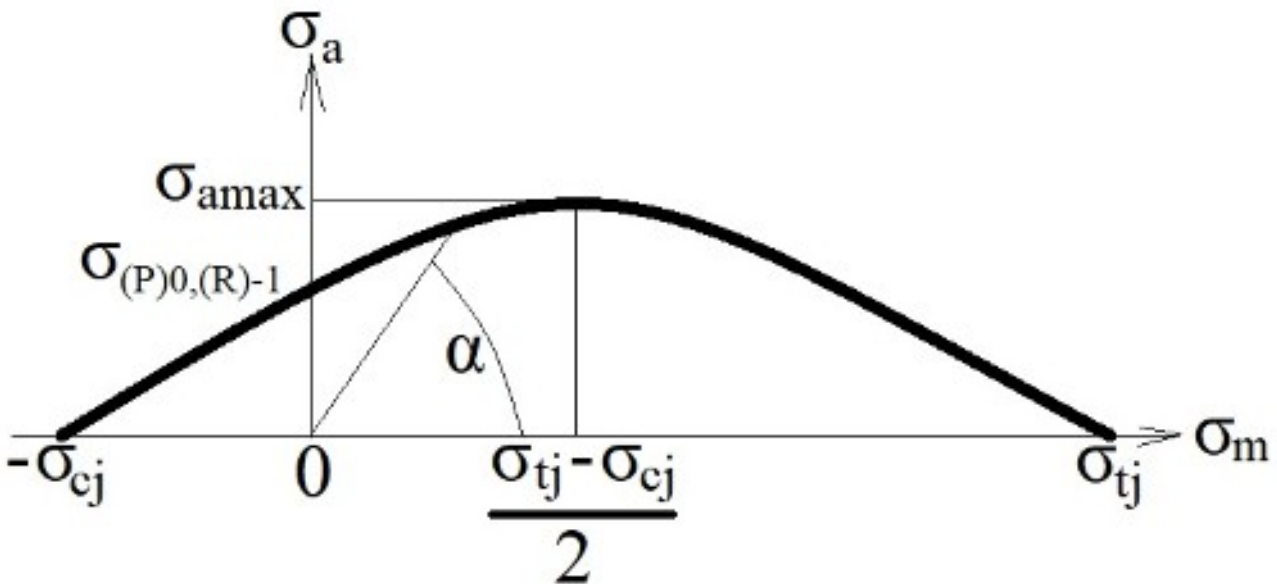


Рисунок 2.37. Диаграмма (в зависимости от средних  $\sigma_m$  напряжений циклов) амплитудных  $\sigma_a$  напряжений циклов в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  для в общем случае анизотропных материалов, в этом направлении сильнее сопротивляющихся растяжению, чем сжатию ( $\sigma_{jt} > \sigma_{jc}$ ), что имеет место для некоторых материалов, например магниевых сплавов, а также древесины в направлении волокон.

Сопоставление обоих этих преобразований по естественности, краткости и простоте ещё раз убеждает в преимуществах доли  $P$  асимметрии цикла перед коэффициентом  $R$  асимметрии цикла.

При этом на тех же рисунках 2.32, 2.33 и 2.34 исходящий из начала координат луч под углом  $\beta$  в отрицательном направлении по часовой стрелке для удобства изображения является множеством, или геометрическим местом, точек, изображающих допредельные (от начала координат до пересечения с кривой предельных алгебраически наименьших напряжений  $\sigma_{\min}$  циклов), предельные (на пересечении с кривой предельных алгебраически наименьших напряжений  $\sigma_{\min}$  циклов) и запредельные (за пересечением, то есть ниже пересечения, с кривой предельных алгебраически наименьших напряжений  $\sigma_{\min}$  циклов) алгебраически наименьшие напряжения  $\sigma_{\min}$  подобных циклов с одинаковыми между собой одноимёнными соответственно долями асимметрии  $P$  и коэффициентами асимметрии  $R$ , поскольку для тех и для других соответственно

$$\operatorname{tg} \alpha = \sigma_{\min} / \sigma_m = (\sigma_m - \sigma_a) / \sigma_m = 1 - 1/P;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sigma_{\max} / \sigma_m = \sigma_{\min} / [(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2] = 2\sigma_{\min} / (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) = 2(\sigma_{\min} / \sigma_{\max}) / (1 + \sigma_{\min} / \sigma_{\max}) = 2R / (1 + R).$$

Сопоставление обоих этих преобразований по естественности, краткости и простоте ещё раз убеждает в преимуществах доли  $P$  асимметрии цикла перед коэффициентом  $R$  асимметрии цикла.

При этом на рисунках 2.35, 2.36 и 2.37 исходящий из начала координат луч под углом  $\alpha$  в положительном направлении против часовой стрелки является множеством, или геометрическим местом, точек, изображающих допредельные (от начала координат до пересечения с кривой предельных амплитуд), предельные (на пересечении с кривой предельных амплитуд) и запредельные (за пересечением, то есть выше пересечения, с кривой предельных амплитуд) амплитудные напряжения  $\sigma_a$  подобных циклов с одинаковыми между собой одноимёнными соответственно долями асимметрии  $P$  и коэффициентами асимметрии  $R$ , поскольку для тех и для других соответственно

$$\operatorname{tg} \alpha = \sigma_a / \sigma_m = 1/P;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sigma_a / \sigma_m = [(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2] / [(\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2] = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) = (1 - \sigma_{\min} / \sigma_{\max}) / (1 + \sigma_{\min} / \sigma_{\max}) = (1 - R) / (1 + R).$$

Сопоставление обоих этих преобразований по естественности, краткости и простоте ещё раз убеждает в преимуществах доли  $P$  асимметрии цикла перед коэффициентом  $R$  асимметрии цикла.

При различной сопротивляемости материала растяжениям и сжатиям и при статическом нагружении ненулевое начало не менее естественно для отсчёта напряжений в направлении  $j$ , чем общепринятый нуль (это нельзя усмотреть без выхода за пределы статики).

Соответственно материал может рассматриваться и как одинаково сопротивляющийся растяжениям и сжатиям в направлении  $j$  при одноосном рассмотрении с тем же размахом

$$\sigma_{ij} - (-\sigma_{cj}) = \sigma_{ij} + \sigma_{cj} = 2\sigma_{Lj}$$

и начальным (остаточным) напряжением  $(-\sigma_{m0j})$  при  $\sigma_{m0j} = (\sigma_{ij} - \sigma_{cj}) / 2$ , а различная сопротивляемость материала растяжениям и сжатиям – как феноменологический макрорезультат микронапряжений и субмикронапряжений.

Соответствующее приведение

$$(2.141)$$

$$\sigma_j^\circ(t) = [\sigma_j(t) - \sigma_{m0j}(t)] / [\sigma_{Lj}(t) - \sigma_{m0j}(t)]$$

аналогично формуле (2.124) и обобщает её, если и при различной сопротивляемости материала растяжениям и сжатиям формально (например для компьютерного осуществления) допустить возможность

$$\sigma_{m0j}(t) = 0.$$

То есть логически приведение (2.141) является обобщением приведения (2.124), причём исторически оказалось предшественником приведения (2.124) на целое десятилетие по дате представления статьи [144] 1 ноября 1982 года как идейно использованное в ней для получения представленной в ней и далее в настоящей докторской диссертации предельной



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 241/556

кривой (рис. 2.38) для двухосного напряжённого состояния органического стекла, полученной из эллипса Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки его смещением в отрицательном направлении биссектрисы первого и третьего квадрантов как главной диагонали двухосного напряжённого состояния, или, равносильно, смещением начала координат в положительном направлении этой главной диагонали, в обоих случаях с обеспечением получения требуемых положительных одноосных пределов  $\sigma_t$  при растяжении и  $\sigma_c$  при сжатии. А именно целиком оба приведения (2.141) и (2.124) были представлены в монографии [100] 1992 года.

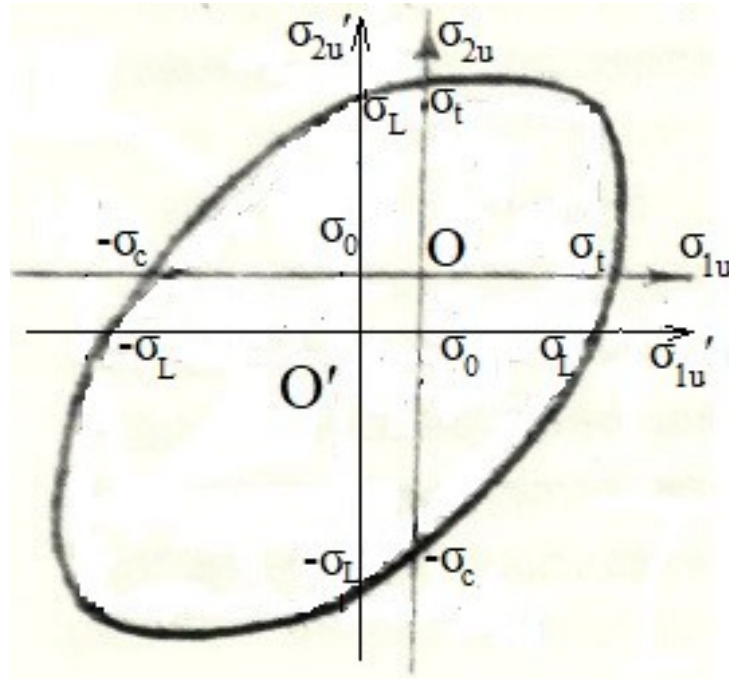


Рисунок 2.38. Показанное для двухосного напряжённого состояния обобщение классической четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки на общий случай изотропного материала с различными положительными одноосными пределами прочности  $\sigma_t$  при растяжении и  $\sigma_c$  при сжатии смещением начала  $O'$  координат  $O'\sigma_{1u}'\sigma_{2u}'$  в центре предельной кривой (эллипса) другого изотропного фиктивного материала с искомыми одинаковыми положительными одноосными пределами прочности  $\sigma_L$  при растяжении и при сжатии вдоль биссектрисы первого и третьего квадрантов в имеющее искомые координаты  $(\sigma_0, \sigma_0)$  в системе координат  $O'\sigma_{1u}'\sigma_{2u}'$  начало  $O$  системы координат  $O\sigma_{1u}\sigma_{2u}$  на плоскости двух неупорядоченных главных напряжений  $\sigma_{1u}$  и  $\sigma_{2u}$  при аннулировании третьего неупорядоченного главного напряжения  $\sigma_{3u} = 0$  без невозрастания алгебраических величин в порядке нумерации  $\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}$ .

Приведение (2.141) заложило основы общего метода геометрического (кинематического) обобщения критериев предельных состояний смещением начала отсчёта и поэтому также предельной поверхности.

Общий метод геометрического (кинематического) обобщения критериев предельных состояний смещением начала отсчёта и поэтому также предельной поверхности

Известен [333] двухэтапный поворот системы координат  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  пространства всех трёх главных напряжений.

Первый этап является вращением системы координат  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  вокруг оси  $O\sigma_3$  в направлении от оси  $O\sigma_1$  к оси  $O\sigma_2$  на угол  $\pi/4$  до биссектрисы прежнего угла между ними.

Второй этап является вращением полученной на первом этапе промежуточной системы координат вокруг оси, перпендикулярной оси  $O\sigma_3$  и этой биссектрисе, от оси  $O\sigma_3$  в

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 242/556

направлении этой биссектрисы на угол  $\arccos 3^{-1}$  до совмещения оси  $O\sigma_3$  с главной диагональю  $Oz$  старой системы координат  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ , так что в полученной новой системе координат  $Oxyz$  ось  $Ox$  получена из оси  $O\sigma_1$ , ось  $Oy$  получена из оси  $O\sigma_2$ , а оси  $Ox$  и  $Oy$  лежат в девиаторной плоскости системы координат  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ .

Главные напряжения выражаются через координаты новой системы  $Oxyz$  известными формулами [333]:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 6^{-1/2}x - 2^{-1/2}y + 3^{-1/2}z, \\ \sigma_2 &= 6^{-1/2}x + 2^{-1/2}y + 3^{-1/2}z, \\ \sigma_3 &= -(2/3)^{1/2}x + 3^{-1/2}z.\end{aligned}$$

Решением этой системы трёх линейных уравнений с ненулевым главным определителем получаются следующие формулы обратного преобразования координат:

$$\begin{aligned}x &= 6^{-1/2}\sigma_1 + 6^{-1/2}\sigma_2 - (2/3)^{1/2}\sigma_3, \\ y &= -2^{-1/2}\sigma_1 + 2^{-1/2}\sigma_2, \\ z &= 3^{-1/2}\sigma_1 + 3^{-1/2}\sigma_2 + 3^{-1/2}\sigma_3.\end{aligned}$$

Сущность этого общего метода геометрического (кинематического) обобщения критериев предельных состояний смещением начала отсчёта и поэтому также предельной поверхности заключается в смещении начала отсчёта  $O(0, 0, 0)$  системы координат  $Oxyz$  в новое начало отсчёта  $O'(x_0, y_0, z_0)$  новой системы координат  $O'x'y'z'$  с естественным плоскопараллельным преобразованием осей и формулами обратного преобразования:

$$\begin{aligned}x &= x' + x_0, \\ y &= y' + y_0, \\ z &= z' + z_0.\end{aligned}$$

Целью такого преобразования является создание общей принципиальной возможности учесть различие сопротивлений материала растяжению и сжатию.

При изотропии материала его предельная поверхность была и должна остаться симметричной относительно главной диагонали  $Oz$  пространства  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  всех трёх главных напряжений, так что

$$x_0 = y_0 = z_0.$$

Для общего метода обобщения критериев предельных состояний смещением начала отсчёта и поэтому также предельной поверхности неквадратичность критерия предельных состояний не является ни малейшим препятствием, и, как всегда, возможны переход от системы  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  главных напряжений к системе координат  $Oxyz$  и смещение начала отсчёта в девиаторной плоскости.

А именно, в общем случае анизотропного материала общий метод обобщения критериев предельных состояний смещением начала отсчёта и поэтому также предельной поверхности, приложенный к общему критерию предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L,$$

наложением (суперпозицией) последовательных подстановок указанных преобразований координат

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = F[6^{-1/2}x - 2^{-1/2}y + 3^{-1/2}z, 6^{-1/2}x + 2^{-1/2}y + 3^{-1/2}z, -(2/3)^{1/2}x + 3^{-1/2}z] = F[6^{-1/2}(x) - 2^{-1/2}(y) + 3^{-1/2}(z), 6^{-1/2}(x) + 2^{-1/2}(y) + 3^{-1/2}(z), -(2/3)^{1/2}(x) + 3^{-1/2}(z)] = F[6^{-1/2}(x' + x_0) - 2^{-1/2}(y' + y_0) + 3^{-1/2}(z' + z_0), 6^{-1/2}(x' + x_0) + 2^{-1/2}(y' + y_0) + 3^{-1/2}(z' + z_0), -(2/3)^{1/2}(x' + x_0) + 3^{-1/2}(z' + z_0)]$$

с допустимой упрощающей возможностью после перехода в новую систему координат  $O'x'y'z'$  всюду опустить штрихи даёт для этого общего критерия предельных состояний его обобщение

$$\sigma_e = F[6^{-1/2}(x + x_0) - 2^{-1/2}(y + y_0) + 3^{-1/2}(z + z_0), 6^{-1/2}(x + x_0) + 2^{-1/2}(y + y_0) + 3^{-1/2}(z + z_0), -(2/3)^{1/2}(x + x_0) + 3^{-1/2}(z + z_0)] = \sigma_L.$$

Если общий критерий предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$$

является квадратичным в смысле представимости квадрата равносильного (эквивалентного) напряжения

$$\sigma_e^2 = F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L^2$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 243/556

в виде общей квадратичной функции  $F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  главных напряжений с их квадратами, попарными произведениями, произведениями на постоянные и со свободными постоянными, то и обобщение этого общего критерия предельных состояний общим методом обобщения критериев предельных состояний смещением начала отсчёта и поэтому также предельной поверхности является квадратичным, причём в новой системе координат могут появиться как произведения главных напряжений на постоянные, так и свободные постоянные, даже если их не было в исходной чисто квадратичной функции  $F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  главных напряжений с их квадратами и попарными произведениями, что имеет место, в частности, для классической четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки

$$\sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_L.$$

То есть в таком случае такое обобщение сводится к возможному линейному изменению, в частности к возможному линейному добавлению алгебраических выражений первой и нулевой степеней при первоначальном их отсутствии.

Этим выводом теоретически обоснован общий метод обобщения критериев предельных состояний и прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции.

В частности, применительно к изотропному материалу вводится для удобства обозначение общего значения

$$c = x_0 = y_0 = z_0$$

проекций сдвига (смещения) начала отсчёта по всем трём координатным осям системы координат Охуз.

Тогда

$$F[6^{-1/2}(x + x_0) - 2^{-1/2}(y + y_0) + 3^{-1/2}(z + z_0), 6^{-1/2}(x + x_0) + 2^{-1/2}(y + y_0) + 3^{-1/2}(z + z_0), - (2/3)^{1/2}(x + x_0) + 3^{-1/2}(z + z_0)] = F[6^{-1/2}(x + c) - 2^{-1/2}(y + c) + 3^{-1/2}(z + c), 6^{-1/2}(x + c) + 2^{-1/2}(y + c) + 3^{-1/2}(z + c), - (2/3)^{1/2}(x + c) + 3^{-1/2}(z + c)] = F[6^{-1/2}x - 2^{-1/2}y + 3^{-1/2}z + c(6^{-1/2} - 2^{-1/2} + 3^{-1/2}), 6^{-1/2}x + 2^{-1/2}y + 3^{-1/2}z + c(6^{-1/2} + 2^{-1/2} + 3^{-1/2}), - (2/3)^{1/2}x + 3^{-1/2}z + c(-(2/3)^{1/2} + 3^{-1/2})],$$

так что применительно к изотропному материалу общий метод обобщения критериев предельных состояний смещением начала отсчёта и поэтому также предельной поверхности даёт для общего критерия предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$$

его обобщение

$$\sigma_e = F[6^{-1/2}x - 2^{-1/2}y + 3^{-1/2}z + c(6^{-1/2} - 2^{-1/2} + 3^{-1/2}), 6^{-1/2}x + 2^{-1/2}y + 3^{-1/2}z + c(6^{-1/2} + 2^{-1/2} + 3^{-1/2}), - (2/3)^{1/2}x + 3^{-1/2}z + c(-(2/3)^{1/2} + 3^{-1/2})] = \sigma_L.$$

Общий метод обобщения критериев предельных состояний и прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции приводит критерии предельных состояний к равносильному квадратичному виду.

Работу и полезность этого общего метода с линейным добавлением можно показать на примере обобщения классической четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки

$$\sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_L.$$

Единственная наличная постоянная материала (предельное напряжение  $\sigma_L$  при растяжении) позволяет прилагать классическую четвёртую теорию прочности только к изотропным материалам, в точности одинаково сопротивляющимся растяжению и сжатию.

Примерно одинаково сопротивляются растяжению и сжатию многие пластичные материалы, однако и они обычно сопротивляются сжатию всё-таки несколько сильнее, чем растяжению, так что и для таких материалов создание принципиальной возможности учесть именно различные сопротивления растяжению и сжатию ведёт к уточнению математического моделирования предельных поверхностей и поэтому полезно.

Хрупкие же материалы обычно сопротивляются сжатию намного и часто многократно сильнее, чем растяжению, так что для хрупких материалов создание принципиальной

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 244/556

возможности учесть именно различные сопротивления растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c > 0$  просто необходимо для математического моделирования предельных поверхностей.

То есть взамен единственной постоянной материала  $\sigma_L$  следует учесть две постоянные материала  $\sigma_t$  и  $\sigma_c > 0$  ( $\sigma_c \neq \sigma_t$ ) по испытаниям образцов на одноосные растяжение и сжатие как аргументы постоянных  $\sigma_L$  и смещения  $\sigma_0$  как функций этих аргументов  $\sigma_t$  и  $\sigma_c > 0$ .

Общий метод обобщения критериев предельных состояний смещением начала отсчёта и поэтому также предельной поверхности вводит необходимую вторую постоянную материала, а именно смещение  $\sigma_0$  начала отсчёта и поэтому также предельной поверхности, для плоского напряжённого состояния с  $\sigma_2 = 0$  одинаковое при изотропии материала для обеих остальных осей  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ .

Для плоского напряжённого состояния с  $\sigma_2 = 0$  классическая четвёртая теория прочности (критерий удельной энергии формоизменения, или критерий октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки даёт критериальное уравнение предельной кривой

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 = \sigma_L^2.$$

Указанное смещение  $\sigma_0$  начала отсчёта  $O(0, 0)$  в точку  $O'(\sigma_0, \sigma_0)$

$$\sigma_1 = \sigma_0,$$

$$\sigma_3 = \sigma_0$$

позволяет ввести новую систему координат  $O'\sigma_1'\sigma_3'$  с началом в этой точке, причём старые координаты  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  выражаются через новые координаты  $\sigma_1'$  и  $\sigma_3'$  следующими формулами:

$$\sigma_1 = \sigma_1' + \sigma_0,$$

$$\sigma_3 = \sigma_3' + \sigma_0.$$

Их подстановка в указанное критериальное уравнение предельной кривой при плоском напряжённом состоянии даёт:

$$(\sigma_1' + \sigma_0)^2 - (\sigma_1' + \sigma_0)(\sigma_3' + \sigma_0) + (\sigma_3' + \sigma_0)^2 = \sigma_L^2,$$

$$\sigma_1'^2 - \sigma_1'\sigma_3' + \sigma_3'^2 + \sigma_0(\sigma_1' + \sigma_3') + \sigma_0^2 = \sigma_L^2.$$

В новой системе координат  $O'\sigma_1'\sigma_3'$  опускаем штрихи:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 + \sigma_0(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_0^2 = \sigma_L^2.$$

Для получения искоемых выражений двух постоянных  $\sigma_L$  и  $\sigma_0$  через две постоянные  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$  естественно используем два опыта при предельных одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы:

$$\sigma_t^2 + \sigma_0\sigma_t + \sigma_0^2 = \sigma_L^2.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

даёт второе уравнение системы:

$$\sigma_c^2 - \sigma_0\sigma_c + \sigma_0^2 = \sigma_L^2.$$

Эта система двух уравнений с двумя неизвестными даёт искоемые значения обеих постоянных:

$$\sigma_0 = \sigma_c - \sigma_t,$$

$$\sigma_L^2 = \sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2.$$

Их подстановка в указанное последним критериальное уравнение предельной кривой при плоском напряжённом состоянии даёт:

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_3) + (\sigma_c - \sigma_t)^2 = \sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2,$$

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_3) = \sigma_c\sigma_t.$$

Это критериальное уравнение предельной кривой при плоском напряжённом состоянии является искомым обобщением такого уравнения по четвёртой теории прочности (критерию удельной энергии формоизменения, или критерию октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки, получаемой в частном случае одинаковых  $\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L$  сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$ , даёт принципиальную возможность

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 245/556

учесть различие сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e$  и единой базой  $(\sigma_c \sigma_t)^{1/2}$  его сравнения:

$$\sigma_e = [\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_3^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}.$$

Именно и только при квадратичном представлении исходного критерия предельных состояний смещение начала отсчёта аналитически выражается линейностью добавления, в данном случае при плоском напряжённом состоянии

$$(\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_3),$$

в уравнение предельной поверхности, в данном случае при плоском напряжённом состоянии в уравнение предельной кривой.

В общем случае трёхосного напряжённого состояния использование указанных квадратичности представления классической четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки, линейности добавления и равенства проекций смещения начала отсчёта на все оси координат пространства  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  всех трёх главных напряжений при изотропии материала приводит к следующему исходному общему виду искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными А и В:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + A(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = B.$$

Для получения искомого выражений двух постоянных А и В через две постоянные  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$  естественно используем два опыта при предельных одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы:

$$\sigma_t^2 + A\sigma_t = B.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

даёт второе уравнение системы:

$$\sigma_c^2 - A\sigma_c = B.$$

Эта система двух уравнений с двумя неизвестными даёт искомые значения обеих постоянных:

$$A = \sigma_c - \sigma_t,$$

$$B = \sigma_c \sigma_t.$$

Их подстановка в исходный общий вид искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными А и В даёт:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c \sigma_t.$$

Это обобщение классической четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки, получаемой в частном случае одинаковых  $\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L$  сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$ , даёт принципиальную возможность учесть различие сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e$  и единой базой  $(\sigma_c \sigma_t)^{1/2}$  его сравнения:

$$\sigma_e = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}.$$

Становится ясной и очевидной целесообразность дополнительного введения и другого определения всеобщего напряжения в материале с различными сопротивлениями растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  посредством деления обычного размерного главного напряжения  $\sigma_j$  независимо от его знака на среднее геометрическое  $(\sigma_c \sigma_t)^{1/2}$  сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$ :

$$\sigma_j^o = \sigma_j / (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}.$$

Очевидно и обобщение этого преобразования индексацией при анизотропии материала с указанием в направлении обычного размерного главного напряжения  $\sigma_j$ :

$$\sigma_j^o = \sigma_j / (\sigma_{c_j} \sigma_{t_j})^{1/2}.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 246/556

В таких всеобщих напряжениях это обобщение классической четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки принимает следующий вид:

$$\sigma_e^{\circ} = [\sigma_1^{\circ 2} + \sigma_2^{\circ 2} + \sigma_3^{\circ 2} - \sigma_1^{\circ} \sigma_2^{\circ} - \sigma_1^{\circ} \sigma_3^{\circ} - \sigma_2^{\circ} \sigma_3^{\circ} + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1^{\circ} + \sigma_2^{\circ} + \sigma_3^{\circ}) / (\sigma_c \sigma_t)]^{1/2} = 1.$$

В своём классическом виде третья теория прочности (критерий наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_L$$

при упорядоченности главных напряжений  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  является линейной, а не квадратичной. Для общего метода обобщения критериев предельных состояний смещением начала отсчёта и поэтому также предельной поверхности неквадратичность критерия предельных состояний не является ни малейшим препятствием, и, как всегда, возможны переход от системы  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  главных напряжений к системе координат Охуз и смещение начала отсчёта в девиаторной плоскости. А вот общий метод обобщения критериев предельных состояний и прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции предварительно приводит критерии к равносильному квадратичному виду.

Так что этим общим методом можно воспользоваться и для третьей теории прочности (критерия наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска, которая предварительно приводится к равносильному квадратичному виду:

$$\sigma_e^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = \sigma_L^2.$$

В общем случае трёхосного напряжённого состояния использование указанных квадратичности представления классической третьей теории прочности, линейности добавления и равенства проекций смещения начала отсчёта на все оси координат пространства  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  всех трёх главных напряжений при изотропии материала приводит к следующему исходному общему виду искомого уравнения предельной поверхности с двумя неопределёнными постоянными А и В:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + A(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = B.$$

Для получения искомого выражений двух постоянных А и В через две постоянные  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$  естественно используем два опыта при предельных одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы:

$$\sigma_t^2 + A\sigma_t = B.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

даёт второе уравнение системы:

$$\sigma_c^2 - A\sigma_c = B.$$

Эта система двух уравнений с двумя неизвестными даёт искомые значения обеих постоянных:

$$A = \sigma_c - \sigma_t, \\ B = \sigma_c \sigma_t.$$

Их подстановка в исходный общий вид искомого уравнения предельной поверхности с двумя неопределёнными постоянными А и В даёт:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c \sigma_t.$$

Это обобщение классической третьей теории прочности (критерия наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска, получаемой в частном случае одинаковых  $\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L$  сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$ , даёт принципиальную возможность учесть различие сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e$  и единой базой  $(\sigma_c \sigma_t)^{1/2}$  его сравнения:

$$\sigma_e = [(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 247/556

Становится ясной и очевидной целесообразность дополнительного введения и другого определения всеобщего напряжения в материале с различными сопротивлениями растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  посредством деления обычного размерного главного напряжения  $\sigma_j$  независимо от его знака на среднее геометрическое  $(\sigma_c \sigma_t)^{1/2}$  сопротивлений растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$ :

$$\sigma_j^{\circ} = \sigma_j / (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}.$$

Очевидно и обобщение этого преобразования индексацией при анизотропии материала с указанием в направлении обычного размерного главного напряжения  $\sigma_j$ :

$$\sigma_j^{\circ} = \sigma_j / (\sigma_{cj} \sigma_{tj})^{1/2}.$$

Во всеобщих напряжениях

$$\sigma_j^{\circ} = \sigma_j / (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}$$

это обобщение классической третьей теории прочности (критерия наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска принимает следующий вид:

$$\sigma_e^{\circ} = [(\sigma_1^{\circ} - \sigma_3^{\circ})^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1^{\circ} + \sigma_2^{\circ} + \sigma_3^{\circ}) / (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}]^{1/2} = 1.$$

Как всегда, считаем, что функция  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  ввиду её сравнения с предельным напряжением  $\sigma_L$  в общем виде критерия предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$$

является однородной функцией первого порядка относительно всех трёх главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и для любого одноосного напряжения равна абсолютной величине этого напряжения.

Общий метод обобщения критериев предельных состояний и прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции предварительно приводит общий вид критерия предельных состояний  $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$  к равносильному квадратичному виду:

$$\sigma_e^2 = F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L^2.$$

В общем случае трёхосного напряжённого состояния использование указанных квадратичности представления общего вида критерия предельных состояний, линейности добавления и равенства проекций смещения начала отсчёта на все оси координат пространства  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  всех трёх главных напряжений при изотропии материала приводит к следующему исходному общему виду искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными  $A$  и  $B$ :

$$F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + A(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = B.$$

Для получения искомого выражений постоянных  $A$  и  $B$  через постоянные  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$  естественно используем опыты при предельных одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы:

$$\sigma_t^2 + A\sigma_t = B.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

даёт второе уравнение системы:

$$\sigma_c^2 - A\sigma_c = B.$$

Эта система двух уравнений даёт искомого значения обеих постоянных:

$$A = \sigma_c - \sigma_t,$$

$$B = \sigma_c \sigma_t.$$

Их подстановка в исходный общий вид искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными  $A$  и  $B$  даёт:

$$F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c \sigma_t.$$

Это обобщение общего вида критерия предельных состояний даёт принципиальную возможность учесть различие сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e$  и единой базой  $(\sigma_c \sigma_t)^{1/2}$  его сравнения:

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 248/556

$$\sigma_c = [F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}.$$

Во всеобщих напряжениях

$$\sigma_j^o = \sigma_j / (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}$$

это обобщение общего вида критерия предельных состояний принимает следующий вид:

$$\sigma_c^o = [F^2(\sigma_1^o, \sigma_2^o, \sigma_3^o) + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1^o + \sigma_2^o + \sigma_3^o) / (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}]^{1/2} = 1.$$

Выше были изложены общий метод физического (знакочувствительного скалярно-векторного) обобщения критериев предельных состояний циклическим моделированием программ переменных одноосных напряжений, общий метод геометрического (кинематического) обобщения критериев предельных состояний смещением начала отсчёта и поэтому также предельной поверхности и общий метод обобщения критериев предельных состояний и прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции.

Общий метод аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и минус-степени суммы главных напряжений с произвольными положительными показателями  
В общем случае трёхосного напряжённого состояния и общего вида критерия предельных состояний

$$\sigma_c = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$$

изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, общий метод аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и минус-степени суммы главных напряжений с произвольными положительными показателями приводит для изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, к следующему исходному общему виду искомого уравнения предельной поверхности с положительными показателями степеней  $\alpha$  и  $\beta$  и неопределёнными постоянными  $A$  и  $B$ :

$$\sigma_c^\alpha = F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + A(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^{\alpha\beta} = B,$$

где по определению обозначенного прямой двойной кавычкой введённого автором минус-степенения минус-степень есть произведение функции знака основания на степень нормы (модуля, абсолютной величины) основания:

$$v^{\alpha\beta} = \text{sign}(v) |v|^\alpha.$$

Для получения искомого выражений постоянных  $A$  и  $B$  через постоянные  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$  естественно используем опыты при предельных одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Предельное одноосное растяжение  $\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$   
даёт первое уравнение системы:

$$\sigma_t^\alpha + A\sigma_t^\beta = B.$$

Предельное одноосное сжатие  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$   
даёт второе уравнение системы:

$$\sigma_c^\alpha - A\sigma_c^\beta = B.$$

Эта система двух уравнений даёт искомые значения обеих постоянных:

$$A = (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta),$$

$$B = (\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta).$$

Их подстановка в исходный общий вид искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными  $A$  и  $B$  даёт:

$$\sigma_c^\alpha = F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^{\alpha\beta} = (\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta).$$

Это обобщение общего вида критерия предельных состояний даёт принципиальную возможность учесть различие сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_c$  и единой базой

$$[(\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)]^{1/\alpha}$$

его сравнения:

$$\sigma_c = [F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^{\alpha\beta}]^{1/\alpha} = [(\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)]^{1/\alpha}.$$



Становится ясной и очевидной целесообразность дополнительного введения и другого определения всеобщего напряжения в изотропном материале с различными сопротивлениями растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  посредством деления

$$\sigma_j^{\circ} = \sigma_j(\sigma_c^{\beta} + \sigma_t^{\beta})^{1/\alpha} / (\sigma_c^{\alpha}\sigma_t^{\beta} + \sigma_c^{\beta}\sigma_t^{\alpha})^{1/\alpha}$$

обычного размерного главного напряжения  $\sigma_j$  независимо от его знака на единую базу сравнения для равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$ .

Очевидно и обобщение этого преобразования индексацией при анизотропии материала с указанием в направлении обычного размерного главного напряжения  $\sigma_j$ :

$$\sigma_j^{\circ} = \sigma_j(\sigma_{cj}^{\beta} + \sigma_{tj}^{\beta})^{1/\alpha} / (\sigma_{cj}^{\alpha}\sigma_{tj}^{\beta} + \sigma_{cj}^{\beta}\sigma_{tj}^{\alpha})^{1/\alpha}.$$

В таких всеобщих напряжениях это обобщение общего вида критерия предельных состояний принимает следующий вид:

$$\sigma_e^{\circ} = [F^{\alpha}(\sigma_1^{\circ}, \sigma_2^{\circ}, \sigma_3^{\circ}) + (\sigma_{cj}^{\alpha} - \sigma_{tj}^{\alpha}) / (\sigma_{cj}^{\beta} + \sigma_{tj}^{\beta})^{\beta/\alpha} (\sigma_{cj}^{\alpha}\sigma_{tj}^{\beta} + \sigma_{cj}^{\beta}\sigma_{tj}^{\alpha})^{\beta/\alpha-1} (\sigma_1^{\circ} + \sigma_2^{\circ} + \sigma_3^{\circ})^{\beta}]^{1/\alpha} = 1.$$

Общий метод аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и суммы одинаковых минус-степеней главных напряжений с произвольными положительными показателями

В общем случае трёхосного напряжённого состояния и общего вида критерия предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$$

изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, общий метод аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и суммы одинаковых минус-степеней главных напряжений с произвольными положительными показателями приводит для изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, к следующему исходному общему виду искомого уравнения предельной поверхности с положительными показателями степеней  $\alpha$  и  $\beta$  и неопределёнными постоянными  $A$  и  $B$ :

$$\sigma_e^{\alpha} = F^{\alpha}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + A(\sigma_1^{\beta} + \sigma_2^{\beta} + \sigma_3^{\beta}) = B,$$

где по определению обозначенного прямой двойной кавычкой введённого автором минус-степенения минус-степень есть произведение функции знака основания на степень нормы (модуля, абсолютной величины) основания:

$$v^{nw} = \text{sign}(v) \|v\|^w.$$

Для получения искоемых выражений постоянных  $A$  и  $B$  через постоянные  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$  естественно используем опыты при предельных одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы:

$$\sigma_t^{\alpha} + A\sigma_t^{\beta} = B.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

даёт второе уравнение системы:

$$\sigma_c^{\alpha} - A\sigma_c^{\beta} = B.$$

Эта система двух уравнений даёт искомые значения обеих постоянных:

$$A = (\sigma_c^{\alpha} - \sigma_t^{\alpha}) / (\sigma_c^{\beta} + \sigma_t^{\beta}),$$

$$B = (\sigma_c^{\alpha}\sigma_t^{\beta} + \sigma_c^{\beta}\sigma_t^{\alpha}) / (\sigma_c^{\beta} + \sigma_t^{\beta}).$$

Их подстановка в исходный общий вид искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными  $A$  и  $B$  даёт:

$$\sigma_e^{\alpha} = F^{\alpha}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c^{\alpha} - \sigma_t^{\alpha}) / (\sigma_c^{\beta} + \sigma_t^{\beta}) (\sigma_1^{\beta} + \sigma_2^{\beta} + \sigma_3^{\beta}) = (\sigma_c^{\alpha}\sigma_t^{\beta} + \sigma_c^{\beta}\sigma_t^{\alpha}) / (\sigma_c^{\beta} + \sigma_t^{\beta}).$$

Это обобщение общего вида критерия предельных состояний даёт принципиальную возможность учесть различие сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e$  и единой базой

$$[(\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)]^{1/\alpha}$$

его сравнения:

$$\sigma_e = [F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta) (\sigma_1^{\alpha\beta} + \sigma_2^{\alpha\beta} + \sigma_3^{\alpha\beta})]^{1/\alpha} = [(\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)]^{1/\alpha}$$

Становится ясной и очевидной целесообразность дополнительного введения и другого определения всеобщего напряжения в материале с различными сопротивлениями растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  посредством деления

$$\sigma_j^\circ = \sigma_j (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)^{1/\alpha} / (\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha)^{1/\alpha}$$

обычного размерного главного напряжения  $\sigma_j$  независимо от его знака на единую базу сравнения для равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$ .

В таких всеобщих напряжениях это обобщение общего вида критерия предельных состояний принимает следующий вид:

$$\sigma_e^\circ = [F^\alpha(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ) + (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)^{\beta/\alpha} (\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha)^{\beta/\alpha - 1} (\sigma_1^{\alpha\beta} + \sigma_2^{\alpha\beta} + \sigma_3^{\alpha\beta})]^{1/\alpha} = 1.$$

Общий метод аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и одинаковых минус-степеней главных напряжений с произвольными положительными показателями

В общем случае трёхосного напряжённого состояния и общего вида критерия предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$$

изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, общий метод аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и одинаковых минус-степеней главных напряжений с произвольными положительными показателями приводит для анизотропного материала, различно сопротивляющегося растяжениям и сжатиям, к следующему исходному общему виду искомого уравнения предельной поверхности с положительными показателями степеней  $\alpha$  и  $\beta$  и неопределёнными постоянными  $A_1, A_2, A_3$  и  $B_1, B_2, B_3$ , причём каждая из последних трёх становится существенной именно и только при отличии главного напряжения  $\sigma_j$  с тем же индексом ( $j = 1, 2, 3$ ) от нуля, а использование модуля (абсолютного значения)  $|\text{sign}(\sigma_j)|$  функции знака  $\text{sign}(\sigma_j)$  главного напряжения  $\sigma_j$  в общем случае необходимо и достаточно для правильного и приемлемого учёта различных знаков главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ :

$$\sigma_e^\alpha = F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + A_1 \sigma_1^{\alpha\beta} + A_2 \sigma_2^{\alpha\beta} + A_3 \sigma_3^{\alpha\beta} = |\text{sign}(\sigma_1)| B_1 + |\text{sign}(\sigma_2)| B_2 + |\text{sign}(\sigma_3)| B_3,$$

где по определению обозначенного прямой двойной кавычкой введённого автором минус-остепенения минус-степень есть произведение функции знака основания на степень нормы (модуля, абсолютной величины) основания:

$$v^{\alpha\beta} = \text{sign}(v) |v|^\alpha.$$

Для получения искомого выражений постоянных  $A_1, A_2, A_3$  и  $B_1, B_2, B_3$  через положительные постоянные (пределы одноосных растяжений и пределы одноосных сжатий соответственно)

$$\begin{aligned} \sigma_{t1} \text{ и } \sigma_{c1} & \text{ в направлении главного напряжения } \sigma_1, \\ \sigma_{t2} \text{ и } \sigma_{c2} & \text{ в направлении главного напряжения } \sigma_2, \\ \sigma_{t3} \text{ и } \sigma_{c3} & \text{ в направлении главного напряжения } \sigma_3 \end{aligned}$$

естественно используем опыты при предельных одноосных растяжениях и предельных одноосных сжатиях в направлении каждого главного напряжения  $\sigma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

Предельное одноосное растяжение в направлении главного напряжения  $\sigma_j$

$$\sigma_1 = \sigma_{tj}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы ( $j = 1, 2, 3$ ):

$$\sigma_{tj}^\alpha + A_j \sigma_{tj}^\beta = B_j.$$

Предельное одноосное сжатие в направлении главного напряжения  $\sigma_j$

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_{cj}$$

даёт второе уравнение системы ( $j = 1, 2, 3$ ):

$$\sigma_{cj}^\alpha - A_j \sigma_{cj}^\beta = B_j.$$

Эта система двух уравнений даёт искомые значения обеих постоянных ( $j = 1, 2, 3$ ):

$$A_j = (\sigma_{c_j}^\alpha - \sigma_{t_j}^\alpha) / (\sigma_{c_j}^\beta + \sigma_{t_j}^\beta),$$

$$B_j = (\sigma_{c_j}^\alpha \sigma_{t_j}^\beta + \sigma_{c_j}^\beta \sigma_{t_j}^\alpha) / (\sigma_{c_j}^\beta + \sigma_{t_j}^\beta).$$

Их подстановка в исходный общий вид искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными  $A_1, A_2, A_3$  и  $B_1, B_2, B_3$  даёт:

$$\sigma_e^\alpha = F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sum_{j=1}^3 A_j \sigma_j^{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| B_j,$$

$$\sigma_e^\alpha = F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sum_{j=1}^3 (\sigma_{c_j}^\alpha - \sigma_{t_j}^\alpha) / (\sigma_{c_j}^\beta + \sigma_{t_j}^\beta) \sigma_j^{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_{c_j}^\alpha \sigma_{t_j}^\beta + \sigma_{c_j}^\beta \sigma_{t_j}^\alpha) / (\sigma_{c_j}^\beta + \sigma_{t_j}^\beta).$$

Это обобщение общего вида критерия предельных состояний даёт принципиальную возможность учесть различие сопротивлений материала растяжениям  $\sigma_{t_j}$  и сжатиям  $\sigma_{c_j}$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e$  и единой базой

$$[\sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_{c_j}^\alpha \sigma_{t_j}^\beta + \sigma_{c_j}^\beta \sigma_{t_j}^\alpha) / (\sigma_{c_j}^\beta + \sigma_{t_j}^\beta)]^{1/\alpha}$$

его сравнения:

$$\sigma_e = [F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sum_{j=1}^3 (\sigma_{c_j}^\alpha - \sigma_{t_j}^\alpha) / (\sigma_{c_j}^\beta + \sigma_{t_j}^\beta) \sigma_j^{\alpha\beta}]^{1/\alpha} = [\sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_{c_j}^\alpha \sigma_{t_j}^\beta + \sigma_{c_j}^\beta \sigma_{t_j}^\alpha) / (\sigma_{c_j}^\beta + \sigma_{t_j}^\beta)]^{1/\alpha}.$$

Становится ясной и очевидной целесообразность дополнительного введения и другого определения всеобщего напряжения в материале с различными сопротивлениями растяжениям  $\sigma_{t_j}$  и сжатиям  $\sigma_{c_j}$  посредством деления

$$\sigma_j^\circ = \sigma_j / [\sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_{c_j}^\alpha \sigma_{t_j}^\beta + \sigma_{c_j}^\beta \sigma_{t_j}^\alpha) / (\sigma_{c_j}^\beta + \sigma_{t_j}^\beta)]^{1/\alpha}$$

обычного размерного главного напряжения  $\sigma_j$  независимо от его знака на единую базу сравнения для равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$ .

В таких всеобщих напряжениях это обобщение общего вида критерия предельных состояний принимает следующий вид:

$$\sigma_e^\circ = [F^\alpha(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ) + \sum_{j=1}^3 (\sigma_{c_j}^\alpha - \sigma_{t_j}^\alpha) / (\sigma_{c_j}^\beta + \sigma_{t_j}^\beta) / [\sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_{c_j}^\alpha \sigma_{t_j}^\beta + \sigma_{c_j}^\beta \sigma_{t_j}^\alpha) / (\sigma_{c_j}^\beta + \sigma_{t_j}^\beta)]] \sigma_j^{\circ\alpha\beta} [\sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_{c_j}^\alpha \sigma_{t_j}^\beta + \sigma_{c_j}^\beta \sigma_{t_j}^\alpha) / (\sigma_{c_j}^\beta + \sigma_{t_j}^\beta)]^{1/\alpha} = 1.$$

Очевидны упрощения для изотропного материала с различными сопротивлениями растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$ :

$$\sigma_{t_j} = \sigma_t \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$\sigma_{c_j} = \sigma_c \quad (j = 1, 2, 3);$$

$$A_j = (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)$$

независимо от индекса  $j$  с возможностью замены в общем случае различных  $A_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) их общим значением

$$A = A_j = (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta) \quad (j = 1, 2, 3)$$

и поэтому замены линейной комбинации

$$\sum_{j=1}^3 A_j \sigma_j^{\alpha\beta}$$

умноженной на постоянную  $A$  суммой

$$A \sum_{j=1}^3 \sigma_j^{\alpha\beta} = A (\sigma_1^{\alpha\beta} + \sigma_2^{\alpha\beta} + \sigma_3^{\alpha\beta});$$

$$B_j = (\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)$$

независимо от индекса  $j = 1, 2, 3$  с возможностью использования именно единой постоянной  $B$  без необходимости её разбиения

$$B = |\text{sign}(\sigma_1)| B_1 + |\text{sign}(\sigma_2)| B_2 + |\text{sign}(\sigma_3)| B_3$$

на части  $B_1, B_2, B_3$ , да ещё и с коэффициентами, которые аннулируются при равенствах нулю главных напряжений  $\sigma_j$  с соответствующими индексами  $j = 1, 2, 3$ ;

$$\sigma_e^\alpha = F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + A (\sigma_1^{\alpha\beta} + \sigma_2^{\alpha\beta} + \sigma_3^{\alpha\beta}) = B;$$

$$\sigma_e^\alpha = F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta) (\sigma_1^{\alpha\beta} + \sigma_2^{\alpha\beta} + \sigma_3^{\alpha\beta}) = (\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta);$$

$$\sigma_e = [F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta) (\sigma_1^{\alpha\beta} + \sigma_2^{\alpha\beta} + \sigma_3^{\alpha\beta})]^{1/\alpha} = [(\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)]^{1/\alpha};$$

$$\sigma_j^\circ = \sigma_j / [(\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)]^{1/\alpha};$$

$$\sigma_e = [F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta) (\sigma_1^{\alpha\beta} + \sigma_2^{\alpha\beta} + \sigma_3^{\alpha\beta})]^{1/\alpha} = [(\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)]^{1/\alpha};$$

$$\sigma_e^\circ = [F^\alpha(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ) + (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha) [(\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)]^{\beta/\alpha} (\sigma_1^{\circ\alpha\beta} + \sigma_2^{\circ\alpha\beta} + \sigma_3^{\circ\alpha\beta})]^{1/\alpha} = 1;$$

минус-остепенения неотрицательных оснований, в частности  $(\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha)$  и  $(\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)$ , суть обычные остепенения, тогда как главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и приведённые главные напряжения  $\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ$  могут быть положительными, нулевыми и отрицательными, так что для них приходится использовать минус-остепенения;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 252/556

$$\sigma_e^\circ = [F^\alpha(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ) + (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha)/(\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha) (\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha)^{\beta/\alpha} / (\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)^{\beta/\alpha} (\sigma_1^{\circ\beta} + \sigma_2^{\circ\beta} + \sigma_3^{\circ\beta})]^{1/\alpha} = 1;$$

$$\sigma_e^\circ = [F^\alpha(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ) + (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha)/(\sigma_c^\beta + \sigma_t^\beta)^{\beta/\alpha} (\sigma_c^\alpha \sigma_t^\beta + \sigma_c^\beta \sigma_t^\alpha)^{\beta/\alpha-1} (\sigma_1^{\circ\beta} + \sigma_2^{\circ\beta} + \sigma_3^{\circ\beta})]^{1/\alpha} = 1.$$

Тем самым доказано, что предыдущий общий метод аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и суммы одинаковых минус-степеней главных напряжений с произвольными положительными показателями для произвольных изотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, является частным случаем рассматриваемого общего метода аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и одинаковых минус-степеней главных напряжений с произвольными положительными показателями для произвольно анизотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжениям и сжатиям.

Общий метод аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и минус-степеней главных напряжений с произвольными положительными показателями для произвольно анизотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжениям и сжатиям

Иерархически вышестоящим по отношению к предыдущему общему методу аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и одинаковых минус-степеней главных напряжений с произвольными положительными показателями для произвольно анизотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжениям и сжатиям, является следующий общий метод аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и минус-степеней главных напряжений с произвольными положительными показателями для произвольно анизотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжениям и сжатиям.

В общем случае трёхосного напряжённого состояния и общего вида критерия предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$$

изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, общий метод аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольной линейной комбинацией степени функции главных напряжений и минус-степеней главных напряжений с произвольными положительными показателями для произвольно анизотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжениям и сжатиям, приводит к следующему исходному общему виду искомого уравнения предельной поверхности с положительными показателями минус-степеней

$$a_1 = a(1) > 0,$$

$$a_2 = a(2) > 0,$$

$$a_3 = a(3) > 0$$

и неопределёнными постоянными  $A_1, A_2, A_3$  и  $B_1, B_2, B_3$ , причём каждая из последних трёх становится существенной именно и только при отличии главного напряжения  $\sigma_j$  с тем же индексом ( $j = 1, 2, 3$ ) от нуля, а использование модуля (абсолютного значения)  $|\text{sign}(\sigma_j)|$  функции знака  $\text{sign}(\sigma_j)$  главного напряжения  $\sigma_j$  в общем случае необходимо и достаточно для правильного и приемлемого учёта различных знаков главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ :

$$\sigma_e^\alpha = F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + A_1 \sigma_1^{\alpha(1)} + A_2 \sigma_2^{\alpha(2)} + A_3 \sigma_3^{\alpha(3)} = |\text{sign}(\sigma_1)|B_1 + |\text{sign}(\sigma_2)|B_2 + |\text{sign}(\sigma_3)|B_3,$$

где по определению обозначенного прямой двойной кавычкой введённого автором минус-степенения минус-степень есть произведение функции знака основания на степень нормы (модуля, абсолютной величины) основания:

$$v^{\alpha w} = \text{sign}(v) \|v\|^\alpha.$$

Для получения искомым выражений постоянных  $A_1, A_2, A_3$  и  $B_1, B_2, B_3$  через положительные постоянные (пределы одноосных растяжений и пределы одноосных сжатий соответственно)

$$\begin{aligned} \sigma_{t1} \text{ и } \sigma_{c1} \text{ в направлении главного напряжения } \sigma_1, \\ \sigma_{t2} \text{ и } \sigma_{c2} \text{ в направлении главного напряжения } \sigma_2, \\ \sigma_{t3} \text{ и } \sigma_{c3} \text{ в направлении главного напряжения } \sigma_3 \end{aligned}$$

естественно используем опыты при предельных одноосных растяжениях и предельных одноосных сжатиях в направлении каждого главного напряжения  $\sigma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ).

Предельное одноосное растяжение в направлении главного напряжения  $\sigma_j$

$$\sigma_1 = \sigma_{tj}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы ( $j = 1, 2, 3$ ):

$$\sigma_{tj}^\alpha + A_j \sigma_{tj}^{a(j)} = B_j.$$

Предельное одноосное сжатие в направлении главного напряжения  $\sigma_j$

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_{cj}$$

даёт второе уравнение системы ( $j = 1, 2, 3$ ):

$$\sigma_{cj}^\alpha - A_j \sigma_{cj}^{a(j)} = B_j.$$

Эта система двух уравнений даёт искомые значения обеих постоянных ( $j = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} A_j &= (\sigma_{cj}^\alpha - \sigma_{tj}^\alpha) / (\sigma_{cj}^{a(j)} + \sigma_{tj}^{a(j)}), \\ B_j &= (\sigma_{cj}^\alpha \sigma_{tj}^{a(j)} + \sigma_{cj}^{a(j)} \sigma_{tj}^\alpha) / (\sigma_{cj}^{a(j)} + \sigma_{tj}^{a(j)}). \end{aligned}$$

Их подстановка в исходный общий вид искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными  $A_1, A_2, A_3$  и  $B_1, B_2, B_3$  даёт:

$$\begin{aligned} \sigma_e^\alpha &= F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sum_{j=1}^3 A_j \sigma_j^{a(j)} = \sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| B_j, \\ \sigma_e^\alpha &= F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sum_{j=1}^3 (\sigma_{cj}^\alpha - \sigma_{tj}^\alpha) / (\sigma_{cj}^{a(j)} + \sigma_{tj}^{a(j)}) \sigma_j^{a(j)} = \sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_{cj}^\alpha \sigma_{tj}^{a(j)} + \sigma_{cj}^{a(j)} \sigma_{tj}^\alpha) / (\sigma_{cj}^{a(j)} + \sigma_{tj}^{a(j)}). \end{aligned}$$

Это обобщение общего вида критерия предельных состояний даёт принципиальную возможность учесть различие сопротивлений материала растяжениям  $\sigma_{tj}$  и сжатиям  $\sigma_{cj}$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e$  и единой базой

$$\left[ \sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_{cj}^\alpha \sigma_{tj}^{a(j)} + \sigma_{cj}^{a(j)} \sigma_{tj}^\alpha) / (\sigma_{cj}^{a(j)} + \sigma_{tj}^{a(j)}) \right]^{1/\alpha}$$

его сравнения:

$$\sigma_e = \left[ F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sum_{j=1}^3 (\sigma_{cj}^\alpha - \sigma_{tj}^\alpha) / (\sigma_{cj}^{a(j)} + \sigma_{tj}^{a(j)}) \sigma_j^{a(j)} \right]^{1/\alpha} = \left[ \sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_{cj}^\alpha \sigma_{tj}^{a(j)} + \sigma_{cj}^{a(j)} \sigma_{tj}^\alpha) / (\sigma_{cj}^{a(j)} + \sigma_{tj}^{a(j)}) \right]^{1/\alpha}.$$

Становится ясной и очевидной целесообразность дополнительного введения и другого определения всеобщего напряжения в материале с различными сопротивлениями растяжениям  $\sigma_{tj}$  и сжатиям  $\sigma_{cj}$  посредством деления

$$\sigma_j^\circ = \sigma_j / \left[ \sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_{cj}^\alpha \sigma_{tj}^{a(j)} + \sigma_{cj}^{a(j)} \sigma_{tj}^\alpha) / (\sigma_{cj}^{a(j)} + \sigma_{tj}^{a(j)}) \right]^{1/\alpha}$$

обычного размерного главного напряжения  $\sigma_j$  независимо от его знака на единую базу сравнения для равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$ .

В таких всеобщих напряжениях это обобщение общего вида критерия предельных состояний принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_e^\circ &= \left[ F^\alpha(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ) + \sum_{j=1}^3 (\sigma_{cj}^\alpha - \sigma_{tj}^\alpha) / (\sigma_{cj}^{a(j)} + \sigma_{tj}^{a(j)}) \right] / \left[ \sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_{cj}^\alpha \sigma_{tj}^{a(j)} + \sigma_{cj}^{a(j)} \sigma_{tj}^\alpha) / (\sigma_{cj}^{a(j)} + \sigma_{tj}^{a(j)}) \right] \\ &\quad \sigma_j^{\circ a(j)} \left[ \sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_{cj}^\alpha \sigma_{tj}^{a(j)} + \sigma_{cj}^{a(j)} \sigma_{tj}^\alpha) / (\sigma_{cj}^{a(j)} + \sigma_{tj}^{a(j)}) \right]^{a(j)/\alpha} = 1. \end{aligned}$$

Очевидны упрощения для изотропного материала с различными сопротивлениями растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{tj} &= \sigma_t \quad (j = 1, 2, 3), \\ \sigma_{cj} &= \sigma_c \quad (j = 1, 2, 3); \\ A_j &= (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^{a(j)} + \sigma_t^{a(j)}), \\ B_j &= (\sigma_c^\alpha \sigma_t^{a(j)} + \sigma_c^{a(j)} \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^{a(j)} + \sigma_t^{a(j)}); \\ \sigma_e^\alpha &= F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sum_{j=1}^3 A_j \sigma_j^{a(j)} = \sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| B_j, \\ \sigma_e^\alpha &= F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sum_{j=1}^3 (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^{a(j)} + \sigma_t^{a(j)}) \sigma_j^{a(j)} = \sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_c^\alpha \sigma_t^{a(j)} + \sigma_c^{a(j)} \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^{a(j)} + \sigma_t^{a(j)}); \\ \sigma_e &= \left[ F^\alpha(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sum_{j=1}^3 (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^{a(j)} + \sigma_t^{a(j)}) \sigma_j^{a(j)} \right]^{1/\alpha} = \left[ \sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_c^\alpha \sigma_t^{a(j)} + \sigma_c^{a(j)} \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^{a(j)} + \sigma_t^{a(j)}) \right]^{1/\alpha}; \\ \sigma_j^\circ &= \sigma_j / \left[ \sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_c^\alpha \sigma_t^{a(j)} + \sigma_c^{a(j)} \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^{a(j)} + \sigma_t^{a(j)}) \right]^{1/\alpha}; \end{aligned}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 254/556

$$\sigma_c^\circ = [F^\alpha(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ) + \sum_{j=1}^3 (\sigma_c^\alpha - \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^{a(j)} + \sigma_t^{a(j)}) / [\sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_c^\alpha \sigma_t^{a(j)} + \sigma_c^{a(j)} \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^{a(j)} + \sigma_t^{a(j)})] \sigma_j^{\circ a(j)} [\sum_{j=1}^3 |\text{sign}(\sigma_j)| (\sigma_c^\alpha \sigma_t^{a(j)} + \sigma_c^{a(j)} \sigma_t^\alpha) / (\sigma_c^{a(j)} + \sigma_t^{a(j)})]^{a(j)/\alpha}]^{1/\alpha} = 1.$$

Общая методология иерархии обобщения общих методов аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний в самом общем случае произвольных анизотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжениям и сжатиям

Одним из красноречивых примеров приложения общей методологии изложенной иерархии обобщения общих методов аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний в самом общем случае произвольных анизотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжениям и сжатиям, является следующее обобщение критерия Ху–Марина [204, 238, 239]

$$\sigma_1^2/\sigma_{L1}^2 + \sigma_2^2/\sigma_{L2}^2 + \sigma_3^2/\sigma_{L3}^2 - \sigma_1\sigma_2/(\sigma_{L1}\sigma_{L2}) - \sigma_1\sigma_3/(\sigma_{L1}\sigma_{L3}) - \sigma_2\sigma_3/(\sigma_{L2}\sigma_{L3}) = 1.$$

Обобщение этого критерия предельных состояний на самый общий случай произвольных анизотропных материалов, различно сопротивляющихся растяжениям и сжатиям, ищется и достигается, во-первых, методом полностью свободного выбора отношений всех постоянных критерия между собой и, во-вторых, добавлением произвольной линейной комбинации всех главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , причём ввиду равносильности умножений обеих частей равенства на любые ненулевые числа один из ненулевых коэффициентов можно задать произвольно, в частности сохранить единицу в правой части уравнения предельной поверхности:

$$A_1\sigma_1^2 + A_2\sigma_2^2 + A_3\sigma_3^2 + A_{12}\sigma_1\sigma_2 + A_{13}\sigma_1\sigma_3 + A_{23}\sigma_2\sigma_3 + B_1\sigma_1 + B_2\sigma_2 + B_3\sigma_3 = 1.$$

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_{t1}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

в направлении главного напряжения  $\sigma_1$  в рассматриваемой точке произвольного анизотропного материала, различно сопротивляющегося растяжениям и сжатиям, даёт уравнение:

$$A_1\sigma_{t1}^2 + B_1\sigma_{t1} = 1.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_{c1}$$

в направлении главного напряжения  $\sigma_1$  в рассматриваемой точке произвольного анизотропного материала, различно сопротивляющегося растяжениям и сжатиям, даёт уравнение:

$$A_1\sigma_{c1}^2 - B_1\sigma_{c1} = 1.$$

Эта система умножаемых на  $\sigma_{c1}$  и на  $\sigma_{t1}$  соответственно двух линейных уравнений с двумя неизвестными  $A_1$  и  $B_1$  и ненулевым главным определителем имеет единственное решение, путь к которому открывает алгебраическое сложение умноженных уравнений:

$$A_1 = 1/(\sigma_{c1}\sigma_{t1});$$

$$B_1 = 1/\sigma_{t1} - 1/\sigma_{c1}.$$

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_{t2}, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

в направлении главного напряжения  $\sigma_2$  в рассматриваемой точке произвольного анизотропного материала, различно сопротивляющегося растяжениям и сжатиям, даёт уравнение:

$$A_2\sigma_{t2}^2 + B_2\sigma_{t2} = 1.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_{c2}$$

в направлении главного напряжения  $\sigma_2$  в рассматриваемой точке произвольного анизотропного материала, различно сопротивляющегося растяжениям и сжатиям, даёт уравнение:

$$A_2\sigma_{c2}^2 - B_2\sigma_{c2} = 1.$$

Эта система умножаемых на  $\sigma_{c2}$  и на  $\sigma_{t2}$  соответственно двух линейных уравнений с двумя неизвестными  $A_2$  и  $B_2$  и ненулевым главным определителем имеет единственное решение, путь к которому открывает алгебраическое сложение умноженных уравнений:

$$A_2 = 1/(\sigma_{e2}\sigma_{l2});$$

$$B_2 = 1/\sigma_{l2} - 1/\sigma_{e2}.$$

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_3, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

в направлении главного напряжения  $\sigma_3$  в рассматриваемой точке произвольного анизотропного материала, различно сопротивляющегося растяжениям и сжатиям, даёт уравнение:

$$A_3\sigma_3^2 + B_3\sigma_3 = 1.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_{e3}$$

в направлении главного напряжения  $\sigma_3$  в рассматриваемой точке произвольного анизотропного материала, различно сопротивляющегося растяжениям и сжатиям, даёт уравнение:

$$A_3\sigma_{e3}^2 - B_3\sigma_{e3} = 1.$$

Эта система умножаемых на  $\sigma_{e3}$  и на  $\sigma_3$  соответственно двух линейных уравнений с двумя неизвестными  $A_3$  и  $B_3$  и ненулевым главным определителем имеет единственное решение, путь к которому открывает алгебраическое сложение умноженных уравнений:

$$A_3 = 1/(\sigma_{e3}\sigma_3);$$

$$B_3 = 1/\sigma_3 - 1/\sigma_{e3}.$$

В итоге для  $j = 1, 2, 3$

$$A_j = 1/(\sigma_{ej}\sigma_{lj});$$

$$B_j = 1/\sigma_{lj} - 1/\sigma_{ej}.$$

Необходимо и достаточно для совокупности всех одноосных растяжений и сжатий

$$\sigma_1^2/(\sigma_{e1}\sigma_{l1}) + \sigma_2^2/(\sigma_{e2}\sigma_{l2}) + \sigma_3^2/(\sigma_{e3}\sigma_{l3}) + A_{12}\sigma_1\sigma_2 + A_{13}\sigma_1\sigma_3 + A_{23}\sigma_2\sigma_3 + (1/\sigma_{l1} - 1/\sigma_{e1})\sigma_1 + (1/\sigma_{l2} - 1/\sigma_{e2})\sigma_2 + (1/\sigma_{l3} - 1/\sigma_{e3})\sigma_3 = 1$$

при любых  $A_{12}, A_{13}, A_{23}$ , определяемых по дополнительным предельным опытам, например двухосным по трём сдвигам при трёх кручениях тонкостенных цилиндрических образцов.

Не необходимый, но естественный и в совокупности достаточный для исключения необходимости в дополнительных предельных опытах и для обобщения критерия Ху–Марина и критерия удельной энергии формоизменения на ортотропный материал с различными сопротивлениями растяжениям и сжатиям при главных напряжениях в основных направлениях ортотропии выбор значений  $A_{12}, A_{13}, A_{23}$ :

$$A_{12} = - (A_1A_2)^{1/2} = - 1/(\sigma_{e1}\sigma_{l1}\sigma_{e2}\sigma_{l2})^{1/2};$$

$$A_{13} = - (A_1A_3)^{1/2} = - 1/(\sigma_{e1}\sigma_{l1}\sigma_{e3}\sigma_{l3})^{1/2};$$

$$A_{23} = - (A_2A_3)^{1/2} = - 1/(\sigma_{e2}\sigma_{l2}\sigma_{e3}\sigma_{l3})^{1/2};$$

$$\sigma_1^2/(\sigma_{e1}\sigma_{l1}) + \sigma_2^2/(\sigma_{e2}\sigma_{l2}) + \sigma_3^2/(\sigma_{e3}\sigma_{l3}) - \sigma_1/(\sigma_{e1}\sigma_{l1})^{1/2} \sigma_2/(\sigma_{e2}\sigma_{l2})^{1/2} - \sigma_1/(\sigma_{e1}\sigma_{l1})^{1/2} \sigma_3/(\sigma_{e3}\sigma_{l3})^{1/2} - \sigma_2/(\sigma_{e2}\sigma_{l2})^{1/2} \sigma_3/(\sigma_{e3}\sigma_{l3})^{1/2} + (1/\sigma_{l1} - 1/\sigma_{e1})\sigma_1 + (1/\sigma_{l2} - 1/\sigma_{e2})\sigma_2 + (1/\sigma_{l3} - 1/\sigma_{e3})\sigma_3 = 1;$$

$$(\sigma_1/(\sigma_{e1}\sigma_{l1})^{1/2})^2 + (\sigma_2/(\sigma_{e2}\sigma_{l2})^{1/2})^2 + (\sigma_3/(\sigma_{e3}\sigma_{l3})^{1/2})^2 - \sigma_1/(\sigma_{e1}\sigma_{l1})^{1/2} \sigma_2/(\sigma_{e2}\sigma_{l2})^{1/2} - \sigma_1/(\sigma_{e1}\sigma_{l1})^{1/2} \sigma_3/(\sigma_{e3}\sigma_{l3})^{1/2} - \sigma_2/(\sigma_{e2}\sigma_{l2})^{1/2} \sigma_3/(\sigma_{e3}\sigma_{l3})^{1/2} + [(\sigma_{e1}/\sigma_{l1})^{1/2} - (\sigma_{l1}/\sigma_{e1})^{1/2}]\sigma_1/(\sigma_{e1}\sigma_{l1})^{1/2} + [(\sigma_{e2}/\sigma_{l2})^{1/2} - (\sigma_{l2}/\sigma_{e2})^{1/2}]\sigma_2/(\sigma_{e2}\sigma_{l2})^{1/2} + [(\sigma_{e3}/\sigma_{l3})^{1/2} - (\sigma_{l3}/\sigma_{e3})^{1/2}]\sigma_3/(\sigma_{e3}\sigma_{l3})^{1/2} = 1.$$

Естественное приведение главных напряжений

$$\sigma_j^\circ = \sigma_j/(\sigma_{ej}\sigma_{lj})^{1/2} \quad (j = 1, 2, 3):$$

$$\sigma_1^\circ = \sigma_1/(\sigma_{e1}\sigma_{l1})^{1/2},$$

$$\sigma_2^\circ = \sigma_2/(\sigma_{e2}\sigma_{l2})^{1/2},$$

$$\sigma_3^\circ = \sigma_3/(\sigma_{e3}\sigma_{l3})^{1/2}$$

даёт приведённый критерий предельных состояний

$$\sigma_1^{\circ 2} + \sigma_2^{\circ 2} + \sigma_3^{\circ 2} - \sigma_1^\circ\sigma_2^\circ - \sigma_1^\circ\sigma_3^\circ - \sigma_2^\circ\sigma_3^\circ + [(\sigma_{e1}/\sigma_{l1})^{1/2} - (\sigma_{l1}/\sigma_{e1})^{1/2}]\sigma_1^\circ + [(\sigma_{e2}/\sigma_{l2})^{1/2} - (\sigma_{l2}/\sigma_{e2})^{1/2}]\sigma_2^\circ + [(\sigma_{e3}/\sigma_{l3})^{1/2} - (\sigma_{l3}/\sigma_{e3})^{1/2}]\sigma_3^\circ = 1;$$

$$\sigma_e^\circ = \{ \sigma_1^{\circ 2} + \sigma_2^{\circ 2} + \sigma_3^{\circ 2} - \sigma_1^\circ\sigma_2^\circ - \sigma_1^\circ\sigma_3^\circ - \sigma_2^\circ\sigma_3^\circ + [(\sigma_{e1}/\sigma_{l1})^{1/2} - (\sigma_{l1}/\sigma_{e1})^{1/2}]\sigma_1^\circ + [(\sigma_{e2}/\sigma_{l2})^{1/2} - (\sigma_{l2}/\sigma_{e2})^{1/2}]\sigma_2^\circ + [(\sigma_{e3}/\sigma_{l3})^{1/2} - (\sigma_{l3}/\sigma_{e3})^{1/2}]\sigma_3^\circ \}^{1/2} = 1.$$

Обобщение произвольного критерия предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$$

изотропного материала с одинаковыми сопротивлениями растяжению и сжатию и однородной функцией

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

первого порядка относительно главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , дающей модуль любого одноосного напряжения

$$F(\sigma, 0, 0) = F(0, \sigma, 0) = F(0, 0, \sigma) = |\sigma|,$$

как критерий предельных состояний для произвольного анизотропного материала и произвольных главных направлений и главных напряжений в любой точке с различными пределами в направлениях главных напряжений при растяжениях и сжатиях:

$$\sigma_j^{\circ} = \sigma_j / (\sigma_{cj} \sigma_{tj})^{1/2} \quad (j = 1, 2, 3):$$

$$\sigma_1^{\circ} = \sigma_1 / (\sigma_{c1} \sigma_{t1})^{1/2},$$

$$\sigma_2^{\circ} = \sigma_2 / (\sigma_{c2} \sigma_{t2})^{1/2},$$

$$\sigma_3^{\circ} = \sigma_3 / (\sigma_{c3} \sigma_{t3})^{1/2};$$

$$\sigma_e^{\circ} = \{F^2(\sigma_1^{\circ}, \sigma_2^{\circ}, \sigma_3^{\circ}) + [(\sigma_{c1}/\sigma_{t1})^{1/2} - (\sigma_{t1}/\sigma_{c1})^{1/2}] \sigma_1^{\circ} + [(\sigma_{c2}/\sigma_{t2})^{1/2} - (\sigma_{t2}/\sigma_{c2})^{1/2}] \sigma_2^{\circ} + [(\sigma_{c3}/\sigma_{t3})^{1/2} - (\sigma_{t3}/\sigma_{c3})^{1/2}] \sigma_3^{\circ}\}^{1/2} = 1;$$

$$\sigma_e^{\circ} = \{F^2(\sigma_1/(\sigma_{c1}\sigma_{t1})^{1/2}, \sigma_2/(\sigma_{c2}\sigma_{t2})^{1/2}, \sigma_3/(\sigma_{c3}\sigma_{t3})^{1/2}) + [(\sigma_{c1}/\sigma_{t1})^{1/2} - (\sigma_{t1}/\sigma_{c1})^{1/2}] \sigma_1/(\sigma_{c1}\sigma_{t1})^{1/2} + [(\sigma_{c2}/\sigma_{t2})^{1/2} - (\sigma_{t2}/\sigma_{c2})^{1/2}] \sigma_2/(\sigma_{c2}\sigma_{t2})^{1/2} + [(\sigma_{c3}/\sigma_{t3})^{1/2} - (\sigma_{t3}/\sigma_{c3})^{1/2}] \sigma_3/(\sigma_{c3}\sigma_{t3})^{1/2}\}^{1/2} = 1.$$

Общий метод развития критериев предельных состояний учётом подлинного соотношения пределов прочности при одноосном и при равном двухосном растяжениях

Сущность общего метода развития критериев предельных состояний учётом подлинного соотношения пределов прочности при одноосном  $\sigma_t$  и при равном двухосном  $\sigma_{tt}$  растяжениях является следующей.

По третьей и четвёртой теориям прочности для изотропных одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию материалов указанное отношение  $\sigma_t/\sigma_{tt}$  равно единице, однако для некоторых материалов оно существенно отличается от единицы, и создание принципиальной возможности правильно учесть действительное значение этого отношения  $\sigma_t/\sigma_{tt}$  является необходимым.

Для большей общности рассматривается произвольный изотропный материал с могущими быть различными положительными пределами прочности  $\sigma_t$  при одноосном растяжении и  $\sigma_c$  при одноосном сжатии и с произвольным положительным пределом прочности  $\sigma_{tt}$  при равном двухосном растяжении.

Искомый критерий предельных состояний может быть выражен уравнением, левая часть которого является функцией главных напряжений и правая часть которого является ненулевой постоянной, которая может быть выражена через прочностные характеристики материала.

Равносильные деления обеих частей этого уравнения на эту постоянную приводят левую часть уравнения к функции главных напряжений, которая в любом предельном состоянии материала равна единице.

По принципу допустимой простоты следует вначале испытать возможности линейного критерия предельных состояний как линейного уравнения с постоянными  $A_1, A_2, A_3$  и с упорядоченностью главных напряжений  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ :

$$A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 + A_3 \sigma_3 = 1.$$

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t,$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = 0$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$A_1 \sigma_t = 1,$$

$$A_1 = 1/\sigma_t.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0,$$



$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = -\sigma_c$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$-A_3\sigma_c = 1,$$

$$A_3 = -1/\sigma_c.$$

Предельное равное двухосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_{tt},$$

$$\sigma_2 = \sigma_{tt},$$

$$\sigma_3 = 0$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$A_1\sigma_{tt} + A_2\sigma_{tt} = 1,$$

$$\sigma_{tt}/\sigma_t + A_2\sigma_{tt} = 1,$$

$$1/\sigma_t + A_2 = 1/\sigma_{tt},$$

$$A_2 = 1/\sigma_{tt} - 1/\sigma_t.$$

Искомый учитывающий подлинный предел  $\sigma_{tt}$  равного двухосного растяжения линейный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, с упорядоченностью главных напряжений

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

принимает вид:

$$\sigma_e^{\circ} = \sigma_1/\sigma_t + (1/\sigma_{tt} - 1/\sigma_t)\sigma_2 - \sigma_3/\sigma_c = 1,$$

$$\sigma_{et} = \sigma_1 + (\sigma_t/\sigma_{tt} - 1)\sigma_2 - (\sigma_t/\sigma_c)\sigma_3 = \sigma_t,$$

$$\sigma_{ec} = (\sigma_c/\sigma_t)\sigma_1 + (\sigma_c/\sigma_{tt} - \sigma_c/\sigma_t)\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_c.$$

В частности, искомый учитывающий подлинный предел  $\sigma_{tt}$  равного двухосного растяжения линейный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию с

$$\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L,$$

с упорядоченностью главных напряжений

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

принимает вид:

$$\sigma_e^{\circ} = \sigma_1/\sigma_L + (1/\sigma_{tt} - 1/\sigma_L)\sigma_2 - \sigma_3/\sigma_L = 1,$$

$$\sigma_e = \sigma_1 + (\sigma_L/\sigma_{tt} - 1)\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_L.$$

Далее представляется целесообразным испытать квадратичный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, как уравнение второй степени для неупорядоченных главных напряжений  $\sigma_{1u}$ ,  $\sigma_{2u}$ ,  $\sigma_{3u}$ , которые в уравнение при изотропии материала входят с одинаковыми коэффициентами, образуя симметрические функции с постоянными A, B, C:

$$A(\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2) + B(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) + C(\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}) = 1.$$

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_{1u} = \sigma_t,$$

$$\sigma_{2u} = 0,$$

$$\sigma_{3u} = 0$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$A\sigma_t^2 + C\sigma_t = 1.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_{1u} = 0,$$

$$\sigma_{2u} = 0,$$

$$\sigma_{3u} = -\sigma_c$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$A\sigma_c^2 - C\sigma_c = 1.$$

Эта система умножаемых на  $\sigma_c$  и на  $\sigma_t$  соответственно двух линейных уравнений с двумя неизвестными А и С и ненулевым главным определителем имеет единственное решение, путь к которому открывает алгебраическое сложение умноженных уравнений:

$$A = 1/(\sigma_c\sigma_t), \\ C = 1/\sigma_t - 1/\sigma_c.$$

Предельное равное двухосное растяжение

$$\sigma_{1u} = \sigma_{tt}, \\ \sigma_{2u} = \sigma_{tt}, \\ \sigma_3 = 0$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$2A\sigma_{tt}^2 + B\sigma_{tt}^2 + 2C\sigma_{tt} = 1, \\ 2\sigma_{tt}^2/(\sigma_c\sigma_t) + B\sigma_{tt}^2 + 2(1/\sigma_t - 1/\sigma_c)\sigma_{tt} = 1, \\ 2/(\sigma_c\sigma_t) + B + 2(1/\sigma_t - 1/\sigma_c)/\sigma_{tt} = 1/\sigma_{tt}^2, \\ B = 1/\sigma_{tt}^2 - 2/(\sigma_c\sigma_t) - 2(1/\sigma_t - 1/\sigma_c)/\sigma_{tt}.$$

Искомый учитывающий подлинный предел  $\sigma_{tt}$  равного двухосного растяжения квадратичный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, без упорядоченности главных напряжений  $\sigma_{1u}$ ,  $\sigma_{2u}$ ,  $\sigma_{3u}$  принимает вид:

$$\sigma_e^o = (\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2)/(\sigma_c\sigma_t) + (1/\sigma_{tt}^2 - 2/(\sigma_c\sigma_t) - 2(1/\sigma_t - 1/\sigma_c)/\sigma_{tt})(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) + (1/\sigma_t - 1/\sigma_c)(\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}) = 1, \\ \sigma_{et} = (\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2)/\sigma_c + (\sigma_t/\sigma_{tt}^2 - 2/\sigma_c - 2(1 - \sigma_t/\sigma_c)/\sigma_{tt})(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) + (1 - \sigma_t/\sigma_c)(\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}) = \sigma_t, \\ \sigma_{ec} = (\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2)/\sigma_t + (\sigma_c/\sigma_{tt}^2 - 2/\sigma_t - 2(\sigma_c/\sigma_t - 1)/\sigma_{tt})(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) + (\sigma_c/\sigma_t - 1)(\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}) = \sigma_c.$$

В частности, искомый учитывающий подлинный предел  $\sigma_{tt}$  равного двухосного растяжения квадратичный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию с

$$\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L,$$

без упорядоченности главных напряжений  $\sigma_{1u}$ ,  $\sigma_{2u}$ ,  $\sigma_{3u}$  принимает вид:

$$\sigma_e^o = (\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2)/\sigma_L^2 + (1/\sigma_{tt}^2 - 2/\sigma_L^2)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) = 1, \\ \sigma_e = (\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2)/\sigma_L + (\sigma_L/\sigma_{tt}^2 - 2/\sigma_L)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) = \sigma_L.$$

Пусть исходным является произвольный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, с функцией именно упорядоченных главных напряжений

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

которая приравнивается положительной прочностной постоянной материала и вместе с ней равносильно делится на неё, так что критерий выражается уравнением

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1$$

с однородной функцией  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  первого порядка, в каждом одноосном напряжённом состоянии равной неотрицательному отношению соответствующего напряжения к предельному напряжению того же знака, в частности равной единице именно и только при предельности напряжённого состояния.

Тогда общий метод развития критериев предельных состояний учётом подлинного соотношения пределов прочности при одноосном и при равном двухосном растяжениях естественно обобщает следующим образом последний линейный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию.

По опыту последнего линейного критерия предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, и по принципу допустимой простоты следует вначале испытать возможности простейшего линейного добавления  $A_2\sigma_2$  с

постоянной  $A_2$  к левой части последнего уравнения с упорядоченностью главных напряжений

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3;$$

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + A_2\sigma_2 = 1.$$

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t,$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = 0$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, учитывается правильно независимо от  $A_2$ :

$$F(\sigma_t, 0, 0) = 1.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0,$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = -\sigma_c$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, учитывается правильно независимо от  $A_2$ :

$$F(0, 0, -\sigma_c) = 1.$$

Предельное равное двухосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_{tt},$$

$$\sigma_2 = \sigma_{tt},$$

$$\sigma_3 = 0$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0) + A_2\sigma_{tt} = 1,$$

$$A_2 = (1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))/\sigma_{tt}.$$

Искомый учитывающий подлинный предел  $\sigma_{tt}$  равного двухосного растяжения общий критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, с упорядоченностью главных напряжений

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

принимает вид:

$$\sigma_c^\circ = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))\sigma_2/\sigma_{tt} = 1,$$

$$\sigma_{et} = \sigma_t F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sigma_t(1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))\sigma_2/\sigma_{tt} = \sigma_t,$$

$$\sigma_{ec} = \sigma_c F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sigma_c(1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))\sigma_2/\sigma_{tt} = \sigma_c.$$

В частности, искомый учитывающий подлинный предел  $\sigma_{tt}$  равного двухосного растяжения общий критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию с

$$\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L,$$

с упорядоченностью главных напряжений

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

принимает вид:

$$\sigma_c^\circ = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))\sigma_2/\sigma_{tt} = 1,$$

$$\sigma_e = \sigma_L F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sigma_L(1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))\sigma_2/\sigma_{tt} = \sigma_L.$$

Пусть исходным является произвольный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, с функцией именно неупорядоченных главных напряжений  $\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}$ , которая приравняется положительной прочностной постоянной материала и вместе с ней равносильно делится на неё, так что критерий выражается уравнением

$$F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) = 1$$

с симметрической ввиду изотропности материала однородной функцией  $F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u})$  первого порядка, в каждом одноосном напряжённом состоянии равной неотрицательному

отношению соответствующего напряжения к предельному напряжению того же знака, в частности равной единице именно и только при предельности напряжённого состояния. Тогда общий метод развития критериев предельных состояний учётом подлинного соотношения пределов прочности при одноосном и при равном двухосном растяжениях естественно обобщает следующим образом последний квадратичный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию.

По опыту последнего квадратичного критерия предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, и по принципу допустимой простоты следует вначале испытать возможности смешанного квадратичного добавления  $V(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})$  с постоянной  $V$  к левой части последнего уравнения без упорядоченности главных напряжений  $\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}$ :

$$F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + V(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) = 1.$$

Предельное одноосное растяжение

$$\begin{aligned}\sigma_{1u} &= \sigma_t, \\ \sigma_{2u} &= 0, \\ \sigma_{3u} &= 0\end{aligned}$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, учитывается правильно независимо от постоянной  $V$ :

$$F(\sigma_t, 0, 0) = 1.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\begin{aligned}\sigma_{1u} &= 0, \\ \sigma_{2u} &= 0, \\ \sigma_{3u} &= -\sigma_c\end{aligned}$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, учитывается правильно независимо от постоянной  $V$ :

$$F(0, 0, -\sigma_c) = 1.$$

Предельное равное двухосное растяжение

$$\begin{aligned}\sigma_{1u} &= \sigma_{tt}, \\ \sigma_{2u} &= \sigma_{tt}, \\ \sigma_{3u} &= 0\end{aligned}$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$\begin{aligned}F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0) + V\sigma_{tt}^2 &= 1, \\ V &= (1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))/\sigma_{tt}^2.\end{aligned}$$

Искомый учитывающий подлинный предел  $\sigma_{tt}$  равного двухосного растяжения общий критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, без упорядоченности главных напряжений  $\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}$  принимает вид:

$$\begin{aligned}\sigma_e^o &= F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + (1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\sigma_{tt}^2 = 1, \\ \sigma_{et} &= \sigma_t F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + \sigma_t(1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\sigma_{tt}^2 = \sigma_t, \\ \sigma_{ec} &= \sigma_c F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + \sigma_c(1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\sigma_{tt}^2 = \sigma_c.\end{aligned}$$

В частности, искомый учитывающий подлинный предел  $\sigma_{tt}$  равного двухосного растяжения общий критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию с

$$\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L,$$

без упорядоченности главных напряжений  $\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}$  принимает вид:

$$\begin{aligned}\sigma_e^o &= F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + (1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\sigma_{tt}^2 = 1, \\ \sigma_c &= \sigma_L F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + \sigma_L(1 - F(\sigma_{tt}, \sigma_{tt}, 0))(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\sigma_{tt}^2 = \sigma_L.\end{aligned}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 261/556

Общий метод развития критериев предельных состояний учётом подлинного соотношения пределов прочности при одноосных растяжении и сжатии и при чистом сдвиге

Сущность общего метода развития критериев предельных состояний учётом подлинного соотношения пределов прочности при одноосных растяжении  $\sigma_t$  и сжатии  $\sigma_c$  и при чистом сдвиге  $\tau_L$  является следующей.

Для изотропных одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию материалов с

$$\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L$$

отношение этого единого предела прочности  $\sigma_L$  при одноосных растяжении и сжатии к пределу прочности при чистом сдвиге  $\tau_L$

$$\sigma_L/\tau_L = 2$$

по третьей теории прочности и

$$\sigma_L/\tau_L = 3^{1/2}$$

по четвёртой теории прочности, однако для некоторых материалов оно значительно отличается от указанных двух численных значений, существенно различных и между собой, и создание принципиальной возможности правильно учесть действительное значение этого отношения  $\sigma_L/\tau_L$  именно для требуемого материала является необходимым.

Для большей общности рассматривается произвольный изотропный материал с могущими быть различными положительными пределами прочности  $\sigma_t$  при одноосном растяжении и  $\sigma_c$  при одноосном сжатии и с произвольным положительным пределом прочности  $\tau_L$  при чистом сдвиге и тем самым с произвольным соотношением всех указанных пределов прочности.

Искомый критерий предельных состояний может быть выражен уравнением, левая часть которого является функцией главных напряжений и правая часть которого является ненулевой постоянной, которая может быть выражена через прочностные характеристики материала.

Равносильные деления обеих частей этого уравнения на эту постоянную приводят левую часть уравнения к функции главных напряжений, которая в любом предельном состоянии материала равна единице.

По принципу допустимой простоты следует вначале испытать возможности линейного критерия предельных состояний как линейного уравнения с постоянными  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и с упорядоченностью главных напряжений  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ :

$$A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3 = 1.$$

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$A_1\sigma_t = 1, \\ A_1 = 1/\sigma_t.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$-A_3\sigma_c = 1, \\ A_3 = -1/\sigma_c.$$

Предельный чистый сдвиг

$$\sigma_1 = \tau_L, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau_L$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, приводящий к уравнению

$$A_1\tau_L - A_3\tau_L = 1, \\ \tau_L/\sigma_t + \tau_L/\sigma_c = 1,$$

не даёт искомой возможности использовать  $A_2$  и приводит к обычному отношению

$$\sigma_L/\tau_L = 2$$

по третьей теории прочности для изотропных одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию материалов с

$$\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L.$$

Следовательно, обеспечить линейность искомого критерия не удаётся.

Тогда с учётом специфики напряжённого состояния чистого сдвига, заключающейся в противоположности крайних главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  и в обнулении промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$ , представляется целесообразным испытать этот линейный критерий предельных состояний с добавлением произведения  $\sigma_1\sigma_3$  с постоянным коэффициентом  $A_{13}$ :

$$A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3 + A_{13}\sigma_1\sigma_3 = 1.$$

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$A_1\sigma_t = 1, \\ A_1 = 1/\sigma_t.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$-A_3\sigma_c = 1, \\ A_3 = -1/\sigma_c.$$

Предельный чистый сдвиг

$$\sigma_1 = \tau_L, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau_L$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$A_1\tau_L - A_3\tau_L - A_{13}\tau_L^2 = 1, \\ \tau_L/\sigma_t + \tau_L/\sigma_c - A_{13}\tau_L^2 = 1, \\ A_{13} = 1/(\tau_L\sigma_t) + 1/(\tau_L\sigma_c) - 1/\tau_L^2.$$

Поскольку во всех трёх опытах обнулялось промежуточное главное напряжение  $\sigma_2$ , то остаётся неопределённой постоянная  $A_2$ , требующая хотя бы одного опыта с ненулевым промежуточным главным напряжением  $\sigma_2$ . При отсутствии такого опыта следует для определённости обнулить эту постоянную  $A_2$ . Это тем более целесообразно, что третья теория прочности и критерий предельных состояний Кулона–Мора вообще не учитывают промежуточное главное напряжение  $\sigma_2$ .

Искомый учитывающий подлинное соотношение пределов прочности при одноосных растяжении  $\sigma_t$  и сжатии  $\sigma_c$  и при чистом сдвиге  $\tau_L$  критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, с упорядоченностью главных напряжений  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  принимает вид:

$$\sigma_c^\circ = \sigma_1/\sigma_t - \sigma_3/\sigma_c + (1/(\tau_L\sigma_t) + 1/(\tau_L\sigma_c) - 1/\tau_L^2)\sigma_1\sigma_3 = 1, \\ \sigma_{ct} = \sigma_1 - \sigma_3\sigma_t/\sigma_c + (1/\tau_L + \sigma_t/(\tau_L\sigma_c) - \sigma_t/\tau_L^2)\sigma_1\sigma_3 = \sigma_t, \\ \sigma_{cc} = \sigma_1\sigma_c/\sigma_t - \sigma_3 + (\sigma_c/(\tau_L\sigma_t) + 1/\tau_L - \sigma_c/\tau_L^2)\sigma_1\sigma_3 = \sigma_c.$$

В частности, искомый учитывающий подлинное соотношение единого предела прочности

$$\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L$$

при одноосных растяжении  $\sigma_t$  и сжатии  $\sigma_c$  и при чистом сдвиге  $\tau_L$  критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, с упорядоченностью главных напряжений  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  принимает вид:

$$\sigma_c^\circ = \sigma_1/\sigma_L - \sigma_3/\sigma_L + (2/(\tau_L\sigma_L) - 1/\tau_L^2)\sigma_1\sigma_3 = 1, \\ \sigma_c = \sigma_1 - \sigma_3 + (2/\tau_L - \sigma_1/\tau_L^2)\sigma_1\sigma_3 = \sigma_L.$$

Далее представляется целесообразным испытать квадратичный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, как уравнение второй степени для неупорядоченных главных напряжений  $\sigma_{1u}, \sigma_{2u},$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 263/556

$\sigma_{3u}$ , которые в уравнение при изотропии материала входят с одинаковыми коэффициентами, образуя симметрические функции с постоянными A, B, C:

$$A(\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2) + B(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) + C(\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}) = 1.$$

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_{1u} = \sigma_t, \sigma_{2u} = 0, \sigma_{3u} = 0$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$A\sigma_t^2 + C\sigma_t = 1.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_{1u} = 0, \sigma_{2u} = 0, \sigma_{3u} = -\sigma_c$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$A\sigma_c^2 - C\sigma_c = 1.$$

Эта система умножаемых на  $\sigma_c$  и на  $\sigma_t$  соответственно двух линейных уравнений с двумя неизвестными A и C и ненулевым главным определителем имеет единственное решение, путь к которому открывает алгебраическое сложение умноженных уравнений:

$$A = 1/(\sigma_c\sigma_t),$$

$$C = 1/\sigma_t - 1/\sigma_c.$$

Предельный чистый сдвиг

$$\sigma_1 = \tau_L, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\tau_L$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$2A\tau_L^2 - B\tau_L^2 = 1,$$

$$B = 2A - 1/\tau_L^2,$$

$$B = 2/(\sigma_c\sigma_t) - 1/\tau_L^2.$$

Искомый учитывающий подлинное соотношение пределов прочности при одноосных растяжении  $\sigma_t$  и сжатии  $\sigma_c$  и при чистом сдвиге  $\tau_L$  квадратичный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, без упорядоченности главных напряжений  $\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}$  принимает вид:

$$\sigma_e^o = (\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2)/(\sigma_c\sigma_t) + (2/(\sigma_c\sigma_t) - 1/\tau_L^2)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) + (1/\sigma_t - 1/\sigma_c)(\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}) = 1,$$

$$\sigma_{et} = (\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2)/\sigma_c + (2/\sigma_c - \sigma_t/\tau_L^2)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) + (1 - \sigma_t/\sigma_c)(\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}) = \sigma_t,$$

$$\sigma_{ec} = (\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2)/\sigma_t + (2/\sigma_t - \sigma_c/\tau_L^2)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) + (\sigma_c/\sigma_t - 1)(\sigma_{1u} + \sigma_{2u} + \sigma_{3u}) = \sigma_c.$$

В частности, искомый учитывающий подлинное соотношение единого предела прочности

$$\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L$$

при одноосных растяжении  $\sigma_t$  и сжатии  $\sigma_c$  и при чистом сдвиге  $\tau_L$  критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, без упорядоченности главных напряжений  $\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}$  принимает вид:

$$\sigma_e^o = (\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2)/\sigma_L^2 + (2/\sigma_L^2 - 1/\tau_L^2)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) = 1,$$

$$\sigma_{eL} = (\sigma_{1u}^2 + \sigma_{2u}^2 + \sigma_{3u}^2)/\sigma_L + (2/\sigma_L - \sigma_L/\tau_L^2)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) = \sigma_L.$$

Пусть исходным является произвольный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, с функцией именно упорядоченных главных напряжений

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3,$$

которая приравнивается положительной прочностной постоянной материала и вместе с ней равносильно делится на неё, так что критерий выражается уравнением

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1$$

с однородной функцией  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  первого порядка, в каждом одноосном напряжённом состоянии равной неотрицательному отношению соответствующего напряжения к предельному напряжению того же знака, в частности равной единице именно и только при предельности напряжённого состояния.

Тогда общий метод развития критериев предельных состояний учётом подлинного соотношения пределов прочности при одноосных растяжении  $\sigma_t$  и сжатии  $\sigma_c$  и при чистом сдвиге  $\tau_L$  естественно обобщает следующим образом последний снабжённый нелинейным добавлением линейный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию.

По опыту последнего снабжённого нелинейной добавкой линейного критерия предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, и по принципу допустимой простоты следует вначале испытать возможности того же нелинейного добавления  $A_{13}\sigma_1\sigma_3$  с постоянной  $A_{13}$  к левой части последнего уравнения с упорядоченностью главных напряжений  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ :

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + A_{13}\sigma_1\sigma_3 = 1.$$

Предельное одноосное растяжение

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_t, \\ \sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3 &= 0\end{aligned}$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, учитывается правильно независимо от  $A_{13}$ :

$$F(\sigma_t, 0, 0) = 1.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0, \\ \sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3 &= -\sigma_c\end{aligned}$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, учитывается правильно независимо от  $A_{13}$ :

$$F(0, 0, -\sigma_c) = 1.$$

Предельный чистый сдвиг

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \tau_L, \\ \sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3 &= -\tau_L\end{aligned}$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$\begin{aligned}F(\tau_L, 0, -\tau_L) - A_{13}\tau_L^2 &= 1, \\ A_{13} &= (F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)/\tau_L^2.\end{aligned}$$

Искомый учитывающий подлинное соотношение пределов прочности при одноосных растяжении  $\sigma_t$  и сжатии  $\sigma_c$  и при чистом сдвиге  $\tau_L$  общий критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, с упорядоченностью главных напряжений

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

принимает вид:

$$\begin{aligned}\sigma_c^\circ &= F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)\sigma_1\sigma_3/\tau_L^2 = 1, \\ \sigma_{et} &= \sigma_t F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sigma_t(F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)\sigma_1\sigma_3/\tau_L^2 = \sigma_t, \\ \sigma_{ec} &= \sigma_c F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sigma_c(F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)\sigma_1\sigma_3/\tau_L^2 = \sigma_c.\end{aligned}$$

В частности, искомый учитывающий подлинное соотношение единого предела прочности

$$\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L$$

при одноосных растяжении  $\sigma_t$  и сжатии  $\sigma_c$  и при чистом сдвиге  $\tau_L$  общий критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию с упорядоченностью главных напряжений

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

принимает вид:

$$\begin{aligned}\sigma_c^\circ &= F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)\sigma_1\sigma_3/\tau_L^2 = 1, \\ \sigma_c &= \sigma_L F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \sigma_L(F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)\sigma_1\sigma_3/\tau_L^2 = \sigma_L.\end{aligned}$$



Пусть исходным является произвольный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, с функцией именно неупорядоченных главных напряжений

$$\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u},$$

которая приравнивается положительной прочностной постоянной материала и вместе с ней равносильно делится на неё, так что критерий предельных состояний выражается уравнением

$$F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) = 1$$

с симметрической ввиду изотропности материала однородной функцией  $F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u})$  первого порядка, в каждом одноосном напряжённом состоянии равной неотрицательному отношению соответствующего напряжения к предельному напряжению того же знака, в частности равной единице именно и только при предельности напряжённого состояния.

Тогда общий метод развития критериев предельных состояний учётом подлинного соотношения пределов прочности при одноосных растяжении  $\sigma_t$  и сжатии  $\sigma_c$  и при чистом сдвиге  $\tau_L$  естественно обобщает следующим образом последний квадратичный критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию.

По опыту последнего квадратичного критерия предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, и по принципу допустимой простоты следует вначале испытать возможности смешанного квадратичного добавления

$$B(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})$$

с постоянной  $B$  к левой части последнего уравнения без упорядоченности главных напряжений  $\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}$ :

$$F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + B(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) = 1.$$

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_{1u} = \sigma_t, \sigma_{2u} = 0, \sigma_{3u} = 0$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, учитывается правильно независимо от постоянной  $B$ :

$$F(\sigma_t, 0, 0) = 1.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_{1u} = 0,$$

$$\sigma_{2u} = 0,$$

$$\sigma_{3u} = -\sigma_c$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, учитывается правильно независимо от постоянной  $B$ :

$$F(0, 0, -\sigma_c) = 1.$$

Предельный чистый сдвиг

$$\sigma_1 = \tau_L,$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = -\tau_L$$

в рассматриваемой точке произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, даёт

$$F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + B(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u}) = 1,$$

$$F(\tau_L, 0, -\tau_L) - B\tau_L^2 = 1,$$

$$B = (F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)/\tau_L^2.$$

Искомый учитывающий подлинное соотношение пределов прочности при одноосных растяжении  $\sigma_t$  и сжатии  $\sigma_c$  и при чистом сдвиге  $\tau_L$  общий критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, различно сопротивляющегося растяжению и сжатию, без упорядоченности главных напряжений  $\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}$  принимает вид:

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 266/556

$$\begin{aligned}\sigma_c^\circ &= F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + (F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\tau_L^2 = 1, \\ \sigma_{et} &= \sigma_t F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + \sigma_t (F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\tau_L^2 = \sigma_t, \\ \sigma_{ec} &= \sigma_c F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + \sigma_c (F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\tau_L^2 = \sigma_c.\end{aligned}$$

В частности, искомым учитывающий подлинное соотношение единого предела прочности

$$\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L$$

при одноосных растяжении  $\sigma_t$  и сжатии  $\sigma_c$  и при чистом сдвиге  $\tau_L$  общий критерий предельных состояний произвольного изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию без упорядоченности главных напряжений  $\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}$  принимает вид:

$$\begin{aligned}\sigma_c^\circ &= F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + (F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\tau_L^2 = 1, \\ \sigma_c &= \sigma_L F(\sigma_{1u}, \sigma_{2u}, \sigma_{3u}) + \sigma_L (F(\tau_L, 0, -\tau_L) - 1)(\sigma_{1u}\sigma_{2u} + \sigma_{1u}\sigma_{3u} + \sigma_{2u}\sigma_{3u})/\tau_L^2 = \sigma_L.\end{aligned}$$

Иерархия (многоуровневость) законов природы, в частности законов прочности материалов  
Общая теория прочности приводит к следующей иерархии (многоуровневости) законов природы, в частности законов прочности материалов:

- 1) универсальные (всеобщие) законы. Например, универсальный (всеобщий) закон прочности материалов (общее механическое состояние в точке произвольно нагруженного твёрдого тела определяется общим отношением между универсальными параметрами состояния, включающими главные напряжения, делённые на модули их одноосных предельных значений тех же направлений и знаков);
- 2) сверхобщие законы, в частности, для определённого типа общего отношения, например определённого общенепредельного отношения, скажем, определённого условия прочности;
- 3) общие законы, например дополнительно для определённого типа общего преобразования размерных главных напряжений для их приведения к безразмерным;
- 4) подобие законы, например дополнительно для определённого типа нагружения, скажем, постоянного, циклического и т. д.;
- 5) отдельные законы, например дополнительно для определённого типа анизотропии тела, скажем, ортотропного;
- 6) особенные законы, например дополнительно для определённого типа взаимной направленности главных напряжений и анизотропии в точке тела, скажем, для случая совпадения главных направлений напряжённо-деформированного состояния и основных направлений ортотропии;
- 7) частные законы, например дополнительно для определённого типа различной сопротивляемости материала растяжениям и сжатиям, скажем, одинаково сопротивляющегося растяжениям и сжатиям материала;
- 8) специальные законы, например дополнительно для определённого типа предельности состояния, скажем, текучести;
- 9) конкретные законы, например дополнительно для определённого выбора возможной, или общей, непредельности состояния, скажем, допредельности, предельности или запредельности;
- 10) единичные законы, например дополнительно для данного материала (но для любого нагружения выбранного типа).

Предложенные приведённые критерии предельных состояний полезны для решения задач прочности пространственных тел и дают результаты, согласующиеся с известными при статических и циклических нагружениях [110, 111, 204, 238, 239, 324, 325].

Приведённые главные напряжения физически не менее действительны, чем обычные главные напряжения, и даже являются более объективной и исчерпывающей характеристикой для решения задач прочности, поскольку не зависят от системы единиц и эталонов и включают сопоставление действующих напряжений с предельными значениями каждого из них.

Если приводимый критерий предельных состояний имеет физический смысл, то он может быть усмотрен таким же и у приведённого критерия предельных состояний, но уже применительно к приведённым главным напряжениям.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 267/556

Однако из этого сама по себе никоим образом не следует приемлемость того или иного приведённого критерия предельных состояний для исследуемого материала, что подлежит проверке в каждом конкретном случае.

Более того, совокупность известных данных о прочности материалов при именно переменных сложных напряжённых состояниях [204] весьма ограничена из-за огромной трудности экспериментов.

Поэтому приведённые критерии предельных состояний следует и в дальнейшем непременно испытывать теоретически и экспериментально сопоставлением получаемых результатов с известными и/или такими, которые даются известными, испытанными критериями предельных состояний, в том числе вытекающими из достаточно универсальной теории Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева [238, 239].

### **2.23. Общая теория запаса с общей методологией всеобщего запаса, мультипликативной и аддитивной методологиями общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных с открытием и обоснованием явления многократного завышения подлинных запасов прочности по независимым нагрузкам обычным запасом прочности по равносильному (эквивалентному) напряжению при сложном нагружении**

Метод определения запаса прочности математически строго проанализирован и обобщён общей теорией прочности объектов с дальнейшими обобщениями всеобщих прочностных законов природы с предельных состояний также на непредельные состояния с запасом прочности при сложном нагружении как функцией индивидуальных запасов независимых нагрузок с учётом наиболее опасного их сочетания и общей теорией запаса.

Осуществляющееся напряжённое состояние в рассматриваемой, в частности наиболее опасной, точке пространственного объекта при его схематизации приближается расчётным напряжённым состоянием с неизбежной погрешностью.

Поэтому для обеспечения необходимой и достаточной прочности проектируемого объекта требуется некоторый запас расчётного напряжённого состояния относительно ближайшего предельного напряжённого состояния.

Мерой запаса прочности может служить соответствующий коэффициент запаса прочности, который по идее должен показывать, во сколько раз можно ошибиться как в сторону увеличения, так и в сторону уменьшения, чтобы в самом худшем осуществимом случае объект сохранял прочность.

Известен коэффициент запаса прочности по предельному состоянию, которое характеризуется предельным напряжением  $\sigma_L$  при одноосном растяжении [225]:

$$(2.142) \\ n_L = \sigma_L / \sigma_e,$$

где  $\sigma_e$  – равносильное (эквивалентное) напряжение, определяемое приемлемым критерием предельных состояний.

Такая мера запаса прочности первоначально была предложена именно для простейшего случая одноосного растяжения, к тому же при простом нагружении единственной парой осевых сил.

В общем случае именно простое нагружение предполагает существование такого одного переменного параметра, которому пропорциональны в процессе нагружения все приложенные нагрузки [140].

Однако на практике коэффициент запаса прочности (2.142) используется как единственная мера запаса прочности также в общем случае сложного напряжённого состояния и сложного нагружения.

В предыдущем подразделе настоящей докторской диссертации, посвящённом созданию и развитию общей теории предельных состояний и общей теории прочности с открытием первых в истории всеобщих прочностных законов природы, анализ как первый общенаучный

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 268/556

метод использовался как разделение различных методов определения как выражения равносильного (эквивалентного) напряжения в точке материала нагруженного деформируемого твёрдого тела при сложном напряжённом состоянии через главные напряжения в этой точке. При этом для краткости речи и формул к каждому методу определения равносильного (эквивалентного) напряжения сразу присоединялись со знаком равенства условие предельности состояния и со знаком нестрогого неравенства, а именно «меньше или равно», условие прочности, причём в обоих случаях с дальнейшим указанием модуля соответствующего предельного одноосного напряжения. Кроме того, допускались как объединение названий взаимно однозначно соответствующих друг другу классической теории прочности и классического критерия предельных состояний, в обоих случаях с одним и тем же классическим методом определения равносильного (эквивалентного) напряжения, так и использование обоих этих названий или любого одного из них и для соответствующего критерия предельных состояний, и для соответствующего критерия прочности. Ввиду их взаимно однозначного соответствия такая вольность речи не приводит к существенным недоразумениям, поскольку эти критерии различаются использованием знака равенства и знака нестрогого неравенства «меньше или равно» перед модулем предельного одноосного напряжения соответственно.

В данном подразделе настоящей докторской диссертации при создании и развитии общей теории запаса с дальнейшим качественным и даже количественным обобщением именно в этом порядке нарастания меры и степени, важности и сложности обобщения общей теории предельных состояний и общей теории прочности с предельных состояний также на любые непредельные (допредельные и запредельные) состояния достигнут принципиально значимый переход от общепринятой дискретной именно конечной логики к бесконечной и даже непрерывной, то есть континуальной, логике. Открыт философский закон перехода анализа как первого общенаучного метода от качественного различения к количественному измерению различий. Анализ как первый общенаучный метод используется как двухстадийное (качественное различение и далее обобщающее и уточняющее эту качественность ещё и количественное измерение соответствующих различий) разделение различных состояний (допредельных, предельных и запредельных) по любому методу определения как выражения равносильного (эквивалентного) напряжения в точке материала нагруженного деформируемого твёрдого тела при сложном напряжённом состоянии через главные напряжения в этой точке, причём с именно полной математической строгостью без каких бы то ни было вольностей речи.

На первой, качественной, стадии этого анализа равносильное (эквивалентное) напряжение соединяется с модулем предельного напряжения посредством знаков равенства и строгого (в обоих случаях для чистого состояния с анализом без синтеза) или нестрогого (для смешанного состояния с анализом и последующим именно логично смежным частичным или полным синтезом) неравенства.

Вначале естественно рассмотреть чисто аналитические именно чистые состояния. Чистых состояний ровно три: допредельность, предельность и запредельность.

Допредельности состояния взаимно однозначно соответствует знак строгого неравенства «меньше».

Предельности состояния взаимно однозначно соответствует знак равенства.

Запредельности состояния взаимно однозначно соответствует знак строгого неравенства «больше».

Далее естественно рассмотреть смешанные аналитико-синтетические состояния именно с логично смежным частичным синтезом. Таких состояний ровно два, поскольку именно совокупность частичности и смежности требует соединения предельности или с допредельностью, или с запредельностью.

Прочности (или допредельности, или предельности состояния) взаимно однозначно соответствует знак нестрогого неравенства «меньше или равно».

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 269/556

Разрушению (или запредельности, или предельности состояния) взаимно однозначно соответствует знак нестромого неравенства «больше или равно».

Наконец, естественно рассмотреть единственное ввиду полноты смешанное аналитико-синтетическое состояние именно с логично смежным (каждого из краёв с промежуточностью) полным синтезом, то есть дизъюнктивное соединение допредельности, предельности и запредельности.

Сопредельности, а именно или допредельности, или предельности, или запредельности, состояния в итоге, или в совокупности, то есть любому состоянию в наиболее общем возможном случае, взаимно однозначно соответствует единственно возможная именно логично полная с нарастанием зеркально, или центрально, симметричная дизъюнктивная последовательность знаков равенства и строого неравенства, то есть или «меньше», или «равно», или «больше»:

$\Leftrightarrow$ , то есть дизъюнктивное соединение допредельности, предельности и запредельности.

Принципиально допустимы, но менее логичны ввиду или асимметрии, или повторения равенства, полные с нарастанием асимметричные дизъюнктивные последовательности знаков строого и нестроого неравенств в ровно двух возможных сочетаниях:

$\diamond$ , то есть дизъюнктивное соединение прочности и запредельности;

$\diamondleftarrow$ , то есть дизъюнктивное соединение допредельности и разрушения,

а также единственно возможная дизъюнктивная полная с нарастанием симметричная с повторением равенства последовательность знаков обоих нестрогих неравенств:

$\diamondleftarrowrightarrow$ , то есть дизъюнктивное соединение прочности и разрушения.

По общему принципу допустимой простоты, в данном случае принципу наибольшей возможной известности с применением или полностью известной терминологии, что удаётся в редких случаях, или хотя бы отчасти новой терминологии с наибольшим возможным использованием известной терминологии и соответствующих аналогий, что получается в остальных случаях, на первой, качественной, стадии этого анализа равносильное (эквивалентное) напряжение соединяется с модулем предельного напряжения посредством знаков равенства и строого (в обоих случаях для чистого состояния с анализом без синтеза) или нестроого (для смешанного состояния с анализом и последующим именно логично смежным частичным или полным синтезом) неравенства.

В итоге получаются следующие некоторые основные примеры определений для изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию.

Первая теория эквивалентного напряжения, или эквивалентное напряжение критерия наибольших нормальных напряжений,

$$\sigma_e = \max \{ |\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3| \} = \max \{ |\sigma_j|; j = 1; 2; 3 \}.$$

Первая теория допредельных состояний, или критерий допредельных наибольших нормальных напряжений,

$$\sigma_e = \max \{ |\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3| \} = \max \{ |\sigma_j|; j = 1; 2; 3 \} < \sigma_L.$$

Первая теория предельных состояний, или критерий предельных наибольших нормальных напряжений,

$$\sigma_e = \max \{ |\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3| \} = \max \{ |\sigma_j|; j = 1; 2; 3 \} = \sigma_L.$$

Первая теория запредельных состояний, или критерий запредельных наибольших нормальных напряжений,

$$\sigma_e = \max \{ |\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3| \} = \max \{ |\sigma_j|; j = 1; 2; 3 \} > \sigma_L.$$

Первая теория прочности, или критерий допредельных или предельных наибольших нормальных напряжений,

$$\sigma_e = \max \{ |\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3| \} = \max \{ |\sigma_j|; j = 1; 2; 3 \} \leq \sigma_L.$$

Первая теория разрушения, или критерий запредельных или предельных наибольших нормальных напряжений,

$$\sigma_e = \max \{ |\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3| \} = \max \{ |\sigma_j|; j = 1; 2; 3 \} \geq \sigma_L.$$

Первая теория сопредельности, или критерий допредельных, предельных или запредельных наибольших нормальных напряжений,

$$\sigma_e = \max\{|\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3|\} = \max\{|\sigma_j|; j = 1; 2; 3\} \Leftrightarrow \sigma_L.$$

Вторая теория эквивалентного напряжения, или эквивалентное напряжение критерия наибольших нормальных деформаций,

$$\sigma_e = \max\{|\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)|; |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)|\}.$$

Вторая теория допредельных состояний, или критерий допредельных наибольших нормальных деформаций,

$$\sigma_e = \max\{|\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)|; |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)|\} < \sigma_L.$$

Вторая теория предельных состояний, или критерий предельных наибольших нормальных деформаций,

$$\sigma_e = \max\{|\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)|; |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)|\} = \sigma_L.$$

Вторая теория запредельных состояний, или критерий запредельных наибольших нормальных деформаций,

$$\sigma_e = \max\{|\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)|; |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)|\} > \sigma_L.$$

Вторая теория прочности, или критерий допредельных или предельных наибольших нормальных деформаций,

$$\sigma_e = \max\{|\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)|; |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)|\} \leq \sigma_L.$$

Вторая теория разрушения, или критерий запредельных или предельных наибольших нормальных деформаций,

$$\sigma_e = \max\{|\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)|; |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)|\} \geq \sigma_L.$$

Вторая теория сопредельности, или критерий допредельных, предельных или запредельных наибольших нормальных деформаций,

$$\sigma_e = \max\{|\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)|; |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)|\} \Leftrightarrow \sigma_L.$$

Третья теория эквивалентного напряжения, или эквивалентное напряжение критерия наибольших сдвиговых напряжений,

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3.$$

Третья теория допредельных состояний, или критерий допредельных наибольших сдвиговых напряжений,

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 < \sigma_L.$$

Третья теория предельных состояний, или критерий предельных наибольших сдвиговых напряжений,

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_L.$$

Третья теория запредельных состояний, или критерий запредельных наибольших сдвиговых напряжений,

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 > \sigma_L.$$

Третья теория прочности, или критерий допредельных или предельных наибольших сдвиговых напряжений,

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_L.$$

Третья теория разрушения, или критерий запредельных или предельных наибольших сдвиговых напряжений,

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 \geq \sigma_L.$$

Третья теория сопредельности, или критерий допредельных, предельных или запредельных наибольших сдвиговых напряжений,

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 \Leftrightarrow \sigma_L.$$

Четвёртая теория эквивалентного напряжения, или эквивалентное напряжение критерия октаэдрических сдвиговых напряжений,

$$\sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}.$$

Четвёртая теория допредельных состояний, или критерий допредельных октаэдрических сдвиговых напряжений,

$$\sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} < \sigma_L.$$

Четвёртая теория предельных состояний, или критерий предельных октаэдрических сдвиговых напряжений,

$$\sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_L.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 271/556

Четвёртая теория запредельных состояний, или критерий запредельных октаэдрических сдвиговых напряжений,

$$\sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} > \sigma_L.$$

Четвёртая теория прочности, или критерий допредельных или предельных октаэдрических сдвиговых напряжений,

$$\sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \leq \sigma_L.$$

Четвёртая теория разрушения, или критерий запредельных или предельных октаэдрических сдвиговых напряжений,

$$\sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \geq \sigma_L.$$

Четвёртая теория сопредельности, или критерий допредельных, предельных или запредельных октаэдрических сдвиговых напряжений,

$$\sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \Leftrightarrow \sigma_L.$$

Общий критерий эквивалентного напряжения

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

Общий критерий допредельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_L.$$

Общий критерий предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L.$$

Общий критерий запредельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) > \sigma_L.$$

Общий критерий прочности, или общий критерий допредельных или предельных состояний,

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_L.$$

Общий критерий разрушения, или общий критерий запредельных или предельных состояний,

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \geq \sigma_L.$$

Общий критерий сопредельности, или общий критерий допредельных, предельных или запредельных состояний,

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \Leftrightarrow \sigma_L.$$

По общему принципу допустимой простоты, в данном случае принципу наибольшей возможной известности с применением или полностью известной терминологии, что удаётся в редких случаях, или хотя бы отчасти новой терминологии с наибольшим возможным использованием известной терминологии и соответствующих аналогий, что получается в остальных случаях, на второй, качественной и количественной, стадии этого анализа мультипликативный коэффициент запаса определяется как частное от деления модуля предельного одноосного напряжения на равносильное (эквивалентное) напряжение. То есть на второй, качественной и количественной, стадии этого анализа результат оказывается не только качественным в виде равенства или того или иного неравенства, как это было на первой, качественной, стадии этого анализа, а качественным и к тому же ещё и количественным в виде мультипликативного коэффициента запаса как положительного числа. При этом качественность результата выражается мультипликативным коэффициентом запаса посредством его сравнения с единицей следующим образом.

На первой, качественной, стадии этого анализа равносильное (эквивалентное) напряжение соединяется с модулем предельного напряжения посредством знаков равенства и строого (в обоих случаях для чистого состояния с анализом без синтеза) или нестроого (для смешанного состояния с анализом и последующим именно логично смежным частичным или полным синтезом) неравенства.

Вначале естественно рассмотреть чисто аналитические именно чистые состояния. Чистых состояний ровно три: допредельность, предельность и запредельность.

Допредельности состояния взаимно однозначно соответствует знак строого неравенства «меньше» для эквивалентного напряжения  $\sigma_e$  и поэтому строго больший единицы мультипликативный коэффициент запаса, то есть  $n > 1$ .

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 272/556

Предельности состояния взаимно однозначно соответствует знак равенства для напряжения  $\sigma_e$  и поэтому равный единице мультипликативный коэффициент запаса, то есть  $n = 1$ .

Запредельности состояния взаимно однозначно соответствует знак строгого неравенства «больше» для эквивалентного напряжения  $\sigma_e$  и поэтому строго меньший единицы мультипликативный коэффициент запаса, то есть  $n < 1$ .

Далее естественно рассмотреть смешанные аналитико-синтетические состояния именно с логично смежным частичным синтезом. Таких состояний ровно два, поскольку именно совокупность частичности и смежности требует соединения предельности или с допредельностью, или с запредельностью.

Прочности (или допредельности, или предельности состояния) взаимно однозначно соответствует знак нестрогого неравенства «меньше или равно» для напряжения  $\sigma_e$  и поэтому не меньший единицы мультипликативный коэффициент запаса, то есть  $n \geq 1$ .

Разрушению (или запредельности, или предельности состояния) взаимно однозначно соответствует знак нестрогого неравенства «больше или равно» для напряжения  $\sigma_e$  и поэтому не больший единицы мультипликативный коэффициент запаса, то есть  $n \leq 1$ .

Наконец, естественно рассмотреть единственное ввиду полноты смешанное аналитико-синтетическое состояние именно с логично смежным (каждого из краёв с промежуточностью) полным синтезом, то есть дизъюнктивное соединение допредельности, предельности и запредельности.

Сопредельности, а именно или допредельности, или предельности, или запредельности, состояния в итоге, или в совокупности, то есть любому состоянию в наиболее общем возможном случае, взаимно однозначно соответствует единственно возможная именно логично полная с нарастанием зеркально, или центрально, симметричная дизъюнктивная последовательность знаков равенства и строгого неравенства, то есть или «меньше», или «равно», или «больше» для эквивалентного напряжения  $\sigma_e$ :

$\Leftrightarrow$ , то есть дизъюнктивное соединение допредельности, предельности и запредельности, и поэтому с изменением последовательности знаков на противоположную (с убыванием знаков) или больший единицы, или равный единице, или меньший единицы мультипликативный коэффициент запаса, так что  $n \geq 1$ .

Принципиально допустимы, но менее логичны ввиду или асимметрии, или повторения равенства, полные с нарастанием асимметричные дизъюнктивные последовательности знаков строгого и нестрогого неравенств в ровно двух возможных сочетаниях:

$n \supseteq 1$ , то есть дизъюнктивное соединение разрушения и допредельности;

$n \supseteq 1$ , то есть дизъюнктивное соединение запредельности и прочности,

а также единственно возможная дизъюнктивная полная с нарастанием симметричная с повторением равенства последовательность знаков обоих нестрогих неравенств:

$n \supseteq 1$ , то есть дизъюнктивное соединение разрушения и прочности.

По общему принципу допустимой простоты, в данном случае принципу наибольшей возможной известности с применением или полностью известной терминологии, что удаётся в редких случаях, или хотя бы отчасти новой терминологии с наибольшим возможным использованием известной терминологии и соответствующих аналогий, что получается в остальных случаях, на второй, качественной и количественной, стадии этого анализа в итоге получают следующие некоторые основные примеры определений для изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию. При этом соответствие тому или иному состоянию условно для краткости и наглядности выражается ставящимся перед мультипликативным коэффициентом запаса одним прилагательным, характеризующим это состояние.

Мультипликативный коэффициент запаса по первой теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших нормальных напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / \max \{ |\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3| \} = \sigma_L / \max \{ |\sigma_j|; j = 1; 2; 3 \}.$$

Допредельный мультипликативный коэффициент запаса по первой теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших нормальных напряжений,



$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / \max \{ |\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3| \} = \sigma_L / \max \{ |\sigma_j|; j = 1; 2; 3 \} > 1.$$

Предельный мультипликативный коэффициент запаса по первой теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших нормальных напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / \max \{ |\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3| \} = \sigma_L / \max \{ |\sigma_j|; j = 1; 2; 3 \} = 1.$$

Запредельный мультипликативный коэффициент запаса по первой теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших нормальных напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / \max \{ |\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3| \} = \sigma_L / \max \{ |\sigma_j|; j = 1; 2; 3 \} < 1.$$

Прочный (допредельный или предельный) мультипликативный коэффициент запаса по первой теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших нормальных напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / \max \{ |\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3| \} = \sigma_L / \max \{ |\sigma_j|; j = 1; 2; 3 \} \geq 1.$$

Разрушительный (запредельный или предельный) мультипликативный коэффициент запаса по первой теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших нормальных напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / \max \{ |\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3| \} = \sigma_L / \max \{ |\sigma_j|; j = 1; 2; 3 \} \leq 1.$$

Сопредельный (допредельный, предельный или запредельный) мультипликативный коэффициент запаса по первой теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших нормальных напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / \max \{ |\sigma_1|; |\sigma_2|; |\sigma_3| \} = \sigma_L / \max \{ |\sigma_j|; j = 1; 2; 3 \} \geq < 1.$$

Мультипликативный коэффициент запаса по второй теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших нормальных деформаций,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / \max \{ |\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)|; |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)| \}.$$

Допредельный мультипликативный коэффициент запаса по второй теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших нормальных деформаций,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / \max \{ |\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)|; |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)| \} > 1.$$

Предельный мультипликативный коэффициент запаса по второй теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших нормальных деформаций,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / \max \{ |\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)|; |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)| \} = 1.$$

Запредельный мультипликативный коэффициент запаса по второй теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших нормальных деформаций,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / \max \{ |\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)|; |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)| \} < 1.$$

Прочный (допредельный или предельный) мультипликативный коэффициент запаса по второй теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших нормальных деформаций,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / \max \{ |\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)|; |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)| \} \geq 1.$$

Разрушительный (запредельный или предельный) мультипликативный коэффициент запаса по второй теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших нормальных деформаций,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / \max \{ |\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)|; |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)| \} \leq 1.$$

Сопредельный (допредельный, предельный или запредельный) мультипликативный коэффициент запаса по второй теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших нормальных деформаций,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / \max \{ |\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)|; |\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)| \} \geq < 1.$$

Мультипликативный коэффициент запаса по третьей теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших сдвиговых напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / (\sigma_1 - \sigma_3).$$

Допредельный мультипликативный коэффициент запаса по третьей теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших сдвиговых напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / (\sigma_1 - \sigma_3) > 1.$$

Предельный мультипликативный коэффициент запаса по третьей теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших сдвиговых напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / (\sigma_1 - \sigma_3) = 1.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 274/556

Запредельный мультипликативный коэффициент запаса по третьей теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших сдвиговых напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / (\sigma_1 - \sigma_3) < 1.$$

Прочный (допредельный или предельный) мультипликативный коэффициент запаса по третьей теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших сдвиговых напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / (\sigma_1 - \sigma_3) \geq 1.$$

Разрушительный (запредельный или предельный) мультипликативный коэффициент запаса по третьей теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших сдвиговых напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / (\sigma_1 - \sigma_3) \leq 1.$$

Сопредельный (допредельный, предельный или запредельный) мультипликативный коэффициент запаса по третьей теории эквивалентного напряжения, или по критерию наибольших сдвиговых напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / (\sigma_1 - \sigma_3) \geq 1.$$

Мультипликативный коэффициент запаса по четвёртой теории эквивалентного напряжения, или по критерию октаэдрических сдвиговых напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = 2^{1/2} \sigma_L / [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2}.$$

Допредельный мультипликативный коэффициент запаса по четвёртой теории эквивалентного напряжения, или по критерию октаэдрических сдвиговых напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = 2^{1/2} \sigma_L / [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} > 1.$$

Предельный мультипликативный коэффициент запаса по четвёртой теории эквивалентного напряжения, или по критерию октаэдрических сдвиговых напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = 2^{1/2} \sigma_L / [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = 1.$$

Запредельный мультипликативный коэффициент запаса по четвёртой теории эквивалентного напряжения, или по критерию октаэдрических сдвиговых напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = 2^{1/2} \sigma_L / [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} < 1.$$

Прочный (допредельный или предельный) мультипликативный коэффициент запаса по четвёртой теории эквивалентного напряжения, или по критерию октаэдрических сдвиговых напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = 2^{1/2} \sigma_L / [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \geq 1.$$

Разрушительный (запредельный или предельный) мультипликативный коэффициент запаса по четвёртой теории эквивалентного напряжения, или по критерию октаэдрических сдвиговых напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = 2^{1/2} \sigma_L / [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \leq 1.$$

Сопредельный (допредельный, предельный или запредельный) мультипликативный коэффициент запаса по четвёртой теории эквивалентного напряжения, или по критерию октаэдрических сдвиговых напряжений,

$$n = \sigma_L / \sigma_e = 2^{1/2} \sigma_L / [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} \geq 1.$$

Мультипликативный коэффициент запаса по общему критерию эквивалентного напряжения

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

Допредельный мультипликативный коэффициент запаса по общему критерию эквивалентного напряжения

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) > 1.$$

Предельный мультипликативный коэффициент запаса по общему критерию эквивалентного напряжения

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 1.$$

Запредельный мультипликативный коэффициент запаса по общему критерию эквивалентного напряжения

$$n = \sigma_L / \sigma_e = \sigma_L / F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 1.$$

Прочный (допредельный или предельный) мультипликативный коэффициент запаса по общему критерию эквивалентного напряжения

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 275/556

$$n = \sigma_1 / \sigma_e = \sigma_1 / F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \geq 1.$$

Разрушительный (запредельный или предельный) мультипликативный коэффициент запаса по общему критерию эквивалентного напряжения

$$n = \sigma_1 / \sigma_e = \sigma_1 / F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq 1.$$

Сопредельный (допредельный, предельный или запредельный) мультипликативный коэффициент запаса по общему критерию эквивалентного напряжения

$$n = \sigma_1 / \sigma_e = \sigma_1 / F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \geq < 1.$$

Созданная общая теория запаса привела к открытию и обоснованию системы явлений и законов запаса.

1. Открытое явление и закон качественного обобщения критерия предельных состояний и критерия прочности критерием сопредельности с обоснованным качественным различием допредельных, предельных и запредельных состояний отношениями «меньше», «равно» и «больше» между равносильным (эквивалентным) и предельным напряжениями соответственно.
2. Открытое явление и закон углубляющего именно количественного обобщения критерия сопредельности критерием запаса с измерением степеней допредельности, предельности и запредельности состояний.
3. Открытое явление и закон неопределённости и произвольности обычного запаса прочности.
4. Открытое явление и закон возможности явных недостаточности и неприемлемости именно единственного обычного запаса прочности по равносильному (эквивалентному) напряжению при сложном нагружении.
5. Открытое явление и закон явной необходимости дополнения обычного запаса прочности по равносильному (эквивалентному) напряжению индивидуальными запасами отдельных существенных независимых нагрузок при сложном нагружении.
6. Открытое явление и закон определмости индивидуальных запасов отдельных существенных независимых нагрузок при сложном нагружении по наиболее опасному осуществимому сочетанию значений совокупности отдельных существенных независимых нагрузок в пределах, устанавливаемых этими индивидуальными запасами.
7. Открытое явление и закон выражаемости критерием предельных состояний общего запаса равносильного (эквивалентного) напряжения при сложном напряжённом состоянии через частные запасы отдельных главных напряжений при одноосных напряжённых состояниях.
8. Открытое явление и закон выражаемости критерием запаса общего запаса равносильного (эквивалентного) напряжения при сложном нагружении через индивидуальные запасы отдельных существенных независимых нагрузок.
9. Открытое явление и закон возможности многократного превышения подлинных индивидуальных запасов отдельных существенных независимых нагрузок обычным запасом прочности по равносильному (эквивалентному) напряжению при сложном нагружении.
10. Открытое явление и закон качественного обобщения общей теории предельных состояний общей теорией сопредельности (прочности и разрушения) с обоснованным качественным различием допредельных, предельных и запредельных состояний.
11. Открытое явление и закон углубляющего именно количественного обобщения общей теории сопредельности (прочности и разрушения) общей теорией запаса с измерением степеней допредельности, предельности и запредельности состояний.
12. Открытое явление и закон обобщения запаса прочности запасом множества относительно допустимого множества, например относительно окрестности множества или её замыкания.
13. Открытое явление и закон функциональной зависимости общего запаса зависимой переменной от индивидуальных запасов независимых переменных.
14. Открытое явление и закон иерархичности запасов, а именно первичности индивидуальных запасов независимых переменных при вторичности общего запаса зависимой переменной.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 276/556

15. Открытые явление и закон принципиальной различимости аддитивной (с симметрией окрестностей и независимостью от выбора начала отсчёта) и мультипликативной (с асимметрией окрестностей и зависимостью от выбора начала отсчёта) методологий запаса.

Нетрудно видеть, что при сложном напряжённом состоянии равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e$ , в отличие от предельного напряжения  $\sigma_L$  при одноосном растяжении  $\sigma_L$  и других именно действительных характеристик предельных напряжённых состояний и напряжений, является, вообще говоря, чисто расчётным (фиктивным) и в непредельном состоянии материала принципиально не может быть проверено опытом.

Теорема. Обычный запас прочности любого непредельного состояния по равносильному (эквивалентному) напряжению согласно любому критерию предельных состояний может принимать произвольное положительное значение и поэтому является неопределённым.

Доказательство. Одна и та же предельная поверхность в пространстве главных напряжений согласно любому критерию предельных состояний описывается не только уравнением

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L,$$

но и любым его эквивалентом, в частности при любом  $\gamma \neq 0$

$$F^\gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L^\gamma.$$

Однако тогда наряду с обычным определением равносильного (эквивалентного) напряжения

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

вполне возможно и определение равносильного (эквивалентного) напряжения

$$\sigma_{e\gamma} = F^\gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) / \sigma_L^{\gamma-1}$$

в не обязательно предельном состоянии, причём соответствующие значения  $\sigma_e$  и  $\sigma_{e\gamma}$  совпадают лишь в случае предельности напряжённого состояния.

Согласно подходу (2.142) наряду с самой формулой (2.142) возможно определение

$$n_{L\gamma} = \sigma_L / \sigma_{e\gamma} = \sigma_L^\gamma / F^\gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = n_L^\gamma,$$

и этот коэффициент запаса прочности  $n_{L\gamma}$  при непредельности напряжённого состояния ( $n_L \neq 1$ ) может быть сделан любым положительным числом за счёт выбора числа  $\gamma$ , что и требовалось доказать.

Даже если по принципу допустимой простоты подразумевать единственный выбор  $\gamma = 1$ , то коэффициент запаса прочности (2.142) всё же нормирует не причины напряжённого состояния, характеризуемого параметрами нагружения, геометрии тела и реологии его материала, а только их следствие – равносильное (эквивалентное) напряжение как сложную их функцию, выраженную через главные напряжения по критерию предельных состояний.

Коэффициент запаса прочности (2.142) никоим образом не показывает, во сколько раз можно изменить (увеличить или уменьшить) каждый из исходных параметров, чтобы при наиболее опасном осуществляющемся сочетании их значений напряжённое состояние в соответствующей точке тела стало предельным.

Такая недостаточность обычного коэффициента запаса прочности особенно очевидна при сложном нагружении, в частности при наложении (суперпозиции) независимых нагрузок.

Так, если в рассматриваемой точке тела вызваны каждое своей независимой нагрузкой все три главных напряжения

$$\sigma_1 = 250 \text{ МПа}, \sigma_2 = 240 \text{ МПа}, \sigma_3 = 210 \text{ МПа}$$

при

$$\sigma_L = 235 \text{ МПа}$$

(пример 1, рис. 2.39, 2.40), то по третьей теории прочности запас прочности (2.142)

$$n_L = \sigma_L / (\sigma_1 - \sigma_3) = 5.9$$

явно неприемлем: при допущении одинаковой кратности погрешностей главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  в обе стороны возможны (при независимости нагрузок) сочетания предельных значений

$$n_L \sigma_1 - \sigma_3 / n_L = 1139 \text{ МПа} \gg \sigma_L$$

с многократным превышением  $\sigma_L$ .

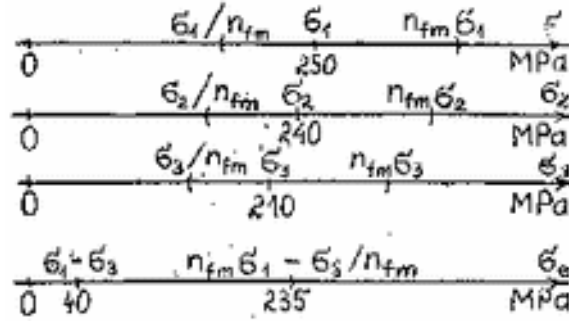


Рисунок 2.39. Мультипликативный подход к запасу при трёх близких между собой главных напряжениях в точке изотропного одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию материала, вызванных независимыми нагрузками.

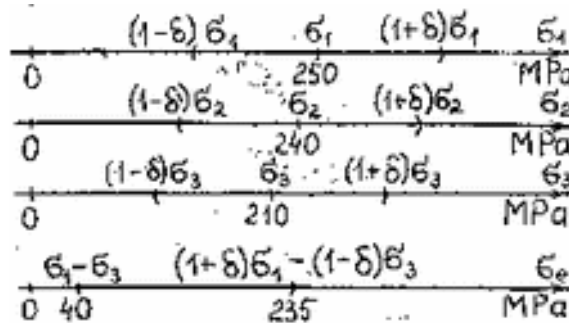


Рисунок 2.40. Аддитивный подход к запасу при трёх близких между собой главных напряжениях в точке изотропного одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию материала, вызванных независимыми нагрузками.

Если стержень из материала с пределом прочности на одноосное растяжение

$$\sigma_t = 100 \text{ МПа}$$

и положительным пределом прочности на одноосное сжатие

$$\sigma_c = 800 \text{ МПа}$$

как модулем соответствующего отрицательного напряжения сжат и растянут двумя независимыми парами сил с напряжениями

$$\sigma = \sigma^- + \sigma^+ = -500 \text{ МПа} + 400 \text{ МПа} = -100 \text{ МПа}$$

(пример 2, рис. 2.41), то запас прочности (2.142)

$$n_L = \sigma_c / |\sigma| = 8$$

явно неприемлем: при допущении одинаковой кратности погрешностей обоих слагаемых в обе стороны возможны (при независимости нагрузок) сочетания предельных значений

$$n_L \sigma^- + \sigma^+ / n_L = -3950 \text{ МПа} \ll -\sigma_c;$$

$$\sigma^- / n_L + n_L \sigma^+ = 3137.5 \text{ МПа} \gg \sigma_t$$

с многократным превышением значения  $\sigma_c$  модулем и особенно значения  $\sigma_t$ .

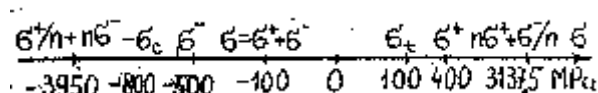


Рисунок 2.41. Мультипликативный подход к запасу при близких между собой по модулям имеющих противоположные знаки слагаемых одноосного напряжённого состояния в точке изотропного различно сопротивляющегося растяжению и сжатию материала, вызванных независимыми нагрузками.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 278/556

Поэтому создана общая теория запаса с общей методологией всеобщего запаса (обобщением всеобщей погрешности впервые измеряющего надёжность точности, наибольшую для суперпсевдорешения задачи), мультипликативной и аддитивной методологиями общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных с открытием, обоснованием и верным учётом явления кратного завышения подлинных запасов прочности по взаимно независимым нагрузкам обычным запасом прочности по равносильному (эквивалентному) напряжению при сложном нагружении как обобщение критериев предельных состояний на непредельные состояния и для общего случая функции системы аргументов в гильбертовых пространствах с запасами множеств значений по сравнению с допускаемыми множествами.

Общая методология всеобщего запаса вводит и использует всеобщий запас и в множестве псевдорешений (формальных решений, точных или неточных, являющихся решениями или нерешениями, имеющих форму и вид решений, могущих быть подставленными во все условия задачи, при этом становящиеся проверяемыми, выполненными или не выполненными) задачи понятие суперпсевдорешения (наилучшего псевдорешения в смысле обладания наибольшим всеобщим запасом), оказывающегося или квазирешением, если является именно неточным псевдорешением, или суперрешением, если является именно точным псевдорешением, то есть решением.

В классической науке вообще не различаются точные решения общей математической задачи между собой по мере надёжности именно точности (уверенности в именно точности) решений задачи.

Например, в континууме точных решений неравенства

$$x > 1$$

в классической науке не различаются по мере надёжности именно точности (уверенности в именно точности) решений два точных решения:

крайне ненадёжное при возможности хотя бы ничтожной погрешности точное решение

$$x_1 = 1 + 10^{-10}$$

и чрезвычайно надёжное при любых реальных погрешностях точное решение

$$x_2 = 1 + 10^{10}.$$

Всеобщность оценивания неточности обеспечивается введённой выше всеобщей погрешностью, обозначаемой  $E$  во избежание возможной путаницы с относительной погрешностью  $\delta$ :

$$E_{a \approx b} = \|a - b\| / (\|a\| + \|b\|).$$

Однако и всеобщая погрешность неспособна различать по мере надёжности именно точности (уверенности в именно точности) решений точные решения, поскольку аннулируется при любом из них. Действительно, подстановка любого точного решения задачи в эту задачу делает все её условия именно точно выполненными. Например, для указанного простейшего выражения всеобщей погрешности  $E$  применительно к приравниванию

$$a \approx b$$

как формальному (независимому от правильности, то есть верному или ошибочному) равенству подстановка точного решения в уравнение делает его именно тождеством (верным числовым равенством) вида

$$a = a,$$

так что

$$E_{a=a} = \|a - a\| / (\|a\| + \|a\|) = 0.$$

Следовательно, всеобщая погрешность вполне достаточна именно и только для определения квазирешения как обладающего наименьшей всеобщей погрешностью и в этом смысле наилучшего из всех именно неточных псевдорешений задачи при условии, что точных решений этой задачи не существует.

Общая методология всеобщего запаса вводит и использует всеобщий запас. Всеобщий запас оцениваемого формального отношения определяется как умноженная на минус единицу всеобщая погрешность этого формального отношения, если оцениваемое формальное

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 279/556

отношение является неверным, и как всеобщая погрешность другого формального отношения, противоречащего (в частности противоположного, так что эти формальные отношения симметричны друг другу относительно их общей границы верности и неверности) оцениваемому формальному отношению, если оцениваемое формальное отношение является верным. Поскольку множеством значений всеобщей погрешности является отрезок от нуля до единицы, то множеством значений всеобщего запаса является отрезок от минус единицы до единицы.

Следовательно, всеобщий запас вполне достаточен для определения суперпсевдорешения как обладающего наибольшим всеобщим запасом и в этом смысле наилучшего из именно всех как неточных, так и точных псевдорешений задачи, оказывающегося или квазирешением как наилучшим неточным псевдорешением при условии, что точных решений этой задачи не существует, или суперрешением как наилучшим из решений, то есть точных псевдорешений задачи, при условии, что точные решения этой задачи существуют.

В частности, всеобщий запас оцениваемого неравенства определяется как умноженная на минус единицу всеобщая погрешность оцениваемого неравенства, причём как наименьшая возможная для его предельного случая, а именно всеобщая погрешность соответствующего формального равенства, если оцениваемое неравенство является неверным, и как всеобщая погрешность другого неравенства, противоречащего (в частности противоположного) оцениваемому неравенству, причём как наименьшая возможная для предельного случая противоречащего неравенства, а именно всеобщая погрешность соответствующего формального равенства, если оцениваемое неравенство является верным.

Замечание. Всеобщая погрешность неверного неравенства определяется как наименьшая возможная для его предельного случая, а именно соответствующего формального равенства, в свою очередь соответствующего границе верности и неверности этого неверного неравенства, подобно тому, что расстояние от точки до множества определяется как точная нижняя грань расстояний от этой точки до каждой из точек этого множества, равная расстоянию от этой точки до ближайшей к ней точки границы этого множества при условии, что эта ближайшая точка границы существует.

Разумеется, ввиду последующего перехода ко всеобщей погрешности соответствующего формального равенства можно равносильно переходить как ко всеобщей погрешности противоречащего неравенства, так и ко всеобщей погрешности неравенства противоположного смысла, то есть знак «меньше» переходит в знак «больше», знак «больше» переходит в знак «меньше», а знак равенства в случае нестрогого неравенства сохраняется и сохраняет случай нестрогого неравенства, однако противоположного смысла. Ясно, что различие при этих двух равносильных переходах касается только случая равенства в неравенствах и при переходе к соответствующему формальному равенству исчезает.

Например, для формального неравенства

$$x >? a$$

всеобщий запас определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{x >? a} &= - E_{x >? a} = - E_{x =? a} (x \leq a), \\ R_{x >? a} &= E_{x \leq? a} = E_{x <? a} = E_{x =? a} (x > a). \end{aligned}$$

В частности, в континууме именно точных решений рассмотренного выше неравенства

$$x > 1$$

всеобщий запас чётко и весьма принципиально различает по мере надёжности именно точности (уверенности в именно точности) решений указанные выше два именно точных решения.

Всеобщий запас крайне ненадёжного при возможности хотя бы ничтожной погрешности именно точного решения

$$x_1 = 1 + 10^{-10}$$

составляет ничтожно малую строго положительную величину

$$R_{x > 1}(x_1) = R_{x > 1}(1 + 10^{-10}) = E_{x \leq? 1}(1 + 10^{-10}) = E_{x <? 1}(1 + 10^{-10}) = E_{x =? 1}(1 + 10^{-10}) = 10^{-10}/(2 + 10^{-10}).$$

Всеобщий запас чрезвычайно надёжного при любых реальных погрешностях именно точного решения

$$x_2 = 1 + 10^{10}$$

меньше единицы на ничтожно малую строго положительную величину:

$$R_{x>1}(x_2) = R_{x>1}(1 + 10^{10}) = E_{x \leq 1}(1 + 10^{10}) = E_{x < 1}(1 + 10^{10}) = E_{x = 1}(1 + 10^{10}) = 10^{10}/(2 + 10^{10}).$$

Мультипликативная методология общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных осуществляет мультипликативный подход к определению и использованию общего и индивидуальных запасов.

Аддитивная методология общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных осуществляет аддитивный подход к определению и использованию общего и индивидуальных запасов.

Действенность этих методологий целесообразно показать на конкретных примерах математического моделирования задач прочности.

Математической моделью сравнения непременно неотрицательного наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения с предельным одноосным растягивающим напряжением в изотропном материале, одинаково сопротивляющемся растяжению и сжатию, для определения классического мультипликативного коэффициента запаса является математическая задача о сравнении неотрицательной переменной  $x$  с её максимально допусаемым положительным значением  $[x]$ , и поэтому допусаемое неравенство, которое определяет множество (в данном случае отрезок)  $[0, [x]]$  всех допусаемых значений неотрицательной переменной  $x$ , имеет вид

$$x \leq [x],$$

или, в данном случае заведомой неотрицательности переменной  $x$  с отсутствием необходимости сравнивать значения переменной  $x$  с нулём равносильно,

$$0 \leq x \leq [x].$$

Аддитивная методология общего запаса даёт для  $x \leq [x]$  краевое (от края  $[x]$ ) отклонение

$$\Delta = [x] - x$$

значения неотрицательной переменной  $x$  вовнутрь, то есть с положительным направлением вовнутрь, в область точности и верности решений, в данном случае в область выполненности неравенства  $x \leq [x]$ , с ростом  $x$  строго монотонно убывающее от  $[x]$  при  $x = 0$  до минус бесконечности при стремлении неотрицательной переменной  $x$  к плюс бесконечности и аннулирующееся при  $x = [x]$ , а при необходимости и/или полезности даёт и относительное (относительно  $[x] > 0$ ) краевое отклонение вовнутрь

$$\delta = \Delta/[x] = ([x] - x)/[x] = 1 - x/[x],$$

которое вполне естественным образом с ростом неотрицательной переменной  $x$  строго монотонно убывает от единицы при  $x = 0$  до минус бесконечности при стремлении  $x$  к плюс бесконечности и аннулируется при  $x = [x]$ . Поэтому  $x = 0$  является единственным суперпсевдорешением задачи, которое при этом как точное решение есть суперрешение.

Следует заметить, что краевое отклонение вовнутрь

$$\Delta = [x] - x$$

является и отклонением формального равенства  $x = ? [x]$ , причём именно и только при  $x \leq [x]$  абсолютной погрешностью формального равенства  $x = ? [x]$ , и поэтому использует обозначение  $\Delta$  абсолютной погрешности, однако сохраняет обозначение  $\Delta$  и при  $x > [x]$ , когда отклонение

$$\Delta = [x] - x$$

формального равенства  $x = ? [x]$  отрицательно и противоположно абсолютной погрешности формального равенства  $x = ? [x]$ . То есть неотрицательность краевого отклонения вовнутрь

$$\Delta = [x] - x$$

является признаком допустимости (допредельности) и (вместе с абсолютной величиной отклонения) мериллом (критерием) неотрицательного аддитивного запаса значения  $x$  неотрицательной переменной  $x$  по сравнению с её максимально допусаемым положительным значением  $[x]$ . А отрицательность краевого отклонения вовнутрь



$$\Delta = [x] - x$$

является признаком недопустимости (запредельности) и (вместе с абсолютной величиной отклонения) мерилom (критерием) отрицательного аддитивного запаса значения  $x$  неотрицательной переменной  $x$  по сравнению с её максимально допустимым положительным значением  $[x]$ . Поэтому удобно определить аддитивный запас значения  $x$  неотрицательной переменной  $x$  по сравнению с её максимально допустимым положительным значением  $[x]$  именно как краевое отклонение вовнутрь

$$\Delta = [x] - x.$$

Подобно этому относительное краевое отклонение вовнутрь

$$\delta = \Delta/[x] = ([x] - x)/[x] = 1 - x/[x]$$

является относительным (относительно  $[x] > 0$ ) отклонением формального равенства  $x = ? [x]$ , причём именно и только при  $x \leq [x]$  относительной (относительно  $[x] > 0$ ) погрешностью формального равенства  $x = ? [x]$ , и поэтому использует обозначение  $\delta$  относительной погрешности, однако сохраняет обозначение  $\delta$  и при  $x > [x]$ , когда относительное отклонение формального равенства  $x = ? [x]$  отрицательно и противоположно относительной погрешности формального равенства  $x = ? [x]$ . То есть неотрицательность относительного краевого отклонения вовнутрь

$$\delta = \Delta/[x] = ([x] - x)/[x] = 1 - x/[x]$$

является признаком допустимости (допредельности) и (вместе с абсолютной величиной относительного краевого отклонения вовнутрь) мерилom (критерием) неотрицательного аддитивного запаса значения  $x$  неотрицательной переменной  $x$  по сравнению с её максимально допустимым положительным значением  $[x]$ . А отрицательность относительного краевого отклонения вовнутрь

$$\delta = \Delta/[x] = ([x] - x)/[x] = 1 - x/[x]$$

является признаком недопустимости (запредельности) и (вместе с абсолютной величиной отклонения) мерилom (критерием) отрицательного аддитивного запаса значения  $x$  неотрицательной переменной  $x$  по сравнению с её максимально допустимым положительным значением  $[x]$ . Поэтому удобно определить относительный (относительно  $[x] > 0$ ) аддитивный запас значения  $x$  неотрицательной переменной  $x$  по сравнению с её максимально допустимым положительным значением  $[x]$  именно как относительное краевое отклонение вовнутрь

$$\delta = \Delta/[x] = ([x] - x)/[x] = 1 - x/[x].$$

Мультипликативная методология общего запаса математически обобщает коэффициент запаса в задачах прочности и даёт для значения  $x$  неотрицательной переменной  $x$  по сравнению с её максимально допустимым положительным значением  $[x]$  коэффициент запаса

$$n = [x]/x,$$

который вполне естественным образом с ростом  $x$  строго монотонно убывает от плюс бесконечности при стремлении  $x$  к нулю справа, равен единице при  $x = [x]$  и стремится к нулю справа при стремлении  $x$  к плюс бесконечности.

Ещё важнее то, что во избежание деления на нуль мультипликативная методология общего запаса вводит во многих случаях гораздо более удобную, чем сам коэффициент запаса  $n$ , долю предельности

$$v = 1/n = x/[x]$$

как обращение  $1/n$  коэффициента запаса  $n$ , а главное, как дальнейшее обобщение всеобщего напряжения как самопредельного, то есть напряжения, делённого на собственный предел. Доля предельности  $v$  вполне естественным образом с ростом  $x$  строго монотонно возрастает от нуля при нулевом  $x$ , равна единице при  $x = [x]$  и стремится к плюс бесконечности при стремлении  $x$  к плюс бесконечности.

Поэтому  $x = 0$  является единственным суперпсевдорешением задачи, которое при этом как точное решение есть суперрешение.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 282/556

Общая методология всеобщего запаса вводит и использует для значения  $x$  неотрицательной переменной  $x$  по сравнению с её максимально допускаемым положительным значением  $[x]$  всеобщий запас  $R_{x \leq [x]}(x)$

$$R_{x \leq [x]} = E_{x > [x]} = E_{x \geq [x]} = E_{x = [x]} = ([x] - x)/([x] + x) = 2[x]/([x] + x) - 1 = 2/(1 + x/[x]) - 1 \quad (x \leq [x]),$$

$$R_{x \leq [x]} = -E_{x < [x]} = -E_{x \leq [x]} = -([x] - x)/([x] + x) = 1 - 2[x]/([x] + x) = 1 - 2/(1 + x/[x]) \quad (x > [x]).$$

С ростом  $x$  (и, следовательно, доли предельности  $v = x/[x] = 1/n$  как обращения коэффициента запаса  $n$ ) всеобщий запас  $R_{x \leq [x]}(x)$  вполне естественным образом строго монотонно убывает от максимума 1 при  $x = 0$ , аннулируется при  $x = [x]$  и стремится к минус единице при стремлении  $x$  к плюс бесконечности. Поэтому  $x = 0$  является единственным суперпсевдорешением задачи, которое при этом как точное решение есть суперрешение.

Ввиду указанного строго монотонного убывания всеобщего запаса с ростом доли предельности

$$v = x/[x] = 1/n$$

как обращения коэффициента запаса  $n$  общая методология всеобщего запаса даёт при положительности концов и длины промежутка то же суперпсевдорешение задачи, которое даётся и мультипликативной методологией общего запаса.

Тривиальность этого единого для общей методологии всеобщего запаса, мультипликативной и аддитивной методологий общего запаса поэтому не различающего их итогового единственного нулевого суперрешения для значения  $x$  неотрицательной переменной  $x$  по сравнению с её максимально допускаемым положительным значением  $[x]$  обусловлена строгой монотонностью их целевых параметров (всеобщего запаса, коэффициента запаса и краевого отклонения вовнутрь соответственно), связанной с сопоставлением значений в промежутке с одним лишь значением, в данном случае с правым концом допускаемого промежутка.

Поэтому есть смысл рассмотреть определяемый характеристическим двойным неравенством произвольный допускаемый промежуток непременно строго положительной длины и сопоставить значения в промежутке с обоими концами этого промежутка. Каждое из значений в промежутке является именно точным решением характеристического двойного неравенства. Поэтому, если суперпсевдорешение задачи существует, оно как точное решение является суперрешением характеристического двойного неравенства. Целевые параметры (всеобщий запас, коэффициент запаса и краевое отклонение вовнутрь соответственно) общей методологии всеобщего запаса, мультипликативной и аддитивной методологий общего запаса определяются именно по концам этого промежутка независимо от принадлежности или непринадлежности ему любого из его концов. Все внутренние точки промежутка непременно принадлежат ему. Четыре случая строгости или нестрогости каждого из неравенств в двойном неравенстве вполне аналогичны друг другу и ведут к одинаковым суперпсевдорешениям задачи для каждой из этих трёх методологий в отдельности. Поэтому приведём формулы для суперпсевдорешения  $x$  в случае строгости обоих неравенств в двойном неравенстве

$$a < x < b$$

для каждой из этих трёх методологий в отдельности.

Для углубления понимания принципиальной общности соответствующих проблем для всех трёх этих методологий полезны следующие две двойственные (логически симметричные) друг другу теоремы минимакса и максимина без требований непрерывности функций.

Теорема минимакса. Пусть на отрезке  $[a, b]$  строго положительной длины  $b - a > 0$  определены две принимающие их общее (единое, одно и то же) значение  $i(t) = d(t)$  во внутренней точке  $t$  отрезка  $[a, b]$  неубывающая функция  $i(x)$  и невозрастающая функция  $d(x)$ . Тогда функция

$$M(x) = \max \{i(x), d(x)\}$$

максимума этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$  не возрастает на левой части  $[a, t]$  отрезка  $[a, b]$ , имеет строгий или нестрогий минимум в этой точке  $t$  равенства значений этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$  и не убывает на правой части  $[t, b]$  отрезка  $[a, b]$ . Если к тому же это строго

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 283/556

монотонно возрастающая функция  $i(x)$  и строго монотонно убывающая функция  $d(x)$ , то функция

$$M(x) = \max \{i(x), d(x)\}$$

максимума этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$  строго монотонно убывает на левой части  $[a, t]$  отрезка  $[a, b]$ , достигает строгого и поэтому единственного минимума в этой точке  $t$  равенства значений этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$  и строго монотонно возрастает на правой части  $[t, b]$  отрезка  $[a, b]$ .

Доказательство.

Во-первых, на левой части  $[a, t]$  отрезка  $[a, b]$

$$\begin{aligned}i(x) &\leq i(t) = d(t), \\d(x) &\geq d(t) = i(t), \\d(x) &\geq i(x),\end{aligned}$$

функция

$$M(x) = \max \{i(x), d(x)\} = d(x)$$

максимума этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$

не возрастает при отсутствии и строго монотонно убывает при наличии строгой монотонности функции  $d(x)$ .

Во-вторых, на правой части  $[t, b]$  отрезка  $[a, b]$

$$\begin{aligned}i(x) &\geq i(t) = d(t), \\d(x) &\leq d(t) = i(t), \\i(x) &\geq d(x),\end{aligned}$$

функция

$$M(x) = \max \{i(x), d(x)\} = i(x)$$

максимума этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$

не убывает при отсутствии и строго монотонно возрастает при наличии строгой монотонности функции  $i(x)$ .

В-третьих, на левой части  $[a, t]$  отрезка  $[a, b]$

$$M(x) = \max \{i(x), d(x)\} \geq M(t) = \max \{i(t), d(t)\} = i(t) = d(t),$$

на правой части  $[t, b]$  отрезка  $[a, b]$

$$M(x) = \max \{i(x), d(x)\} \geq M(t) = \max \{i(t), d(t)\} = i(t) = d(t),$$

так что функция

$$M(x) = \max \{i(x), d(x)\}$$

максимума этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$

имеет строгий или нестрогий минимум

$$M(t) = \max \{i(t), d(t)\} = i(t) = d(t)$$

в этой точке  $t$  равенства значений этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$ .

В-четвёртых, при изъятии этой точки  $t$  равенства значений этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$  из ранее указанных частей отрезка  $[a, b]$  при наличии именно строгой монотонности обеих функций  $i(x), d(x)$

на левой части  $[a, t]$  отрезка  $[a, b]$

$$M(x) = \max \{i(x), d(x)\} > M(t) = \max \{i(t), d(t)\} = i(t) = d(t),$$

на правой части  $(t, b]$  отрезка  $[a, b]$

$$M(x) = \max \{i(x), d(x)\} > M(t) = \max \{i(t), d(t)\} = i(t) = d(t),$$

так что минимум

$$M(t) = \max \{i(t), d(t)\} = i(t) = d(t)$$

максимума обеих функций  $i(x), d(x)$

$$M(x) = \max \{i(x), d(x)\},$$

достигаемый в этой точке  $t$  равенства значений обеих функций  $i(x), d(x)$ ,

является непременно строгим и поэтому единственным, что и завершает доказательство теоремы минимакса.

Двойственна (логически симметрична) предыдущей теореме минимакса следующая теорема максимина.

Теорема максимина. Пусть на отрезке  $[a, b]$  строго положительной длины  $b - a > 0$  определены две принимающие их общее (единое, одно и то же) значение  $i(t) = d(t)$  во внутренней точке  $t$  отрезка  $[a, b]$  неубывающая функция  $i(x)$  и невозрастающая функция  $d(x)$ . Тогда функция

$$m(x) = \min\{i(x), d(x)\}$$

минимума этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$  не убывает на левой части  $[a, t]$  отрезка  $[a, b]$ , имеет строгий или нестрогий максимум в этой точке  $t$  равенства значений этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$  и не возрастает на правой части  $[t, b]$  отрезка  $[a, b]$ . Если к тому же это строго монотонно возрастающая функция  $i(x)$  и строго монотонно убывающая функция  $d(x)$ , то функция

$$m(x) = \min\{i(x), d(x)\}$$

минимума этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$  строго монотонно возрастает на левой части  $[a, t]$  отрезка  $[a, b]$ , достигает строгого и поэтому единственного максимума в этой точке  $t$  равенства значений этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$  и строго монотонно убывает на правой части  $[t, b]$  отрезка  $[a, b]$ .

Доказательство.

Во-первых, на левой части  $[a, t]$  отрезка  $[a, b]$

$$\begin{aligned}i(x) &\leq i(t) = d(t), \\d(x) &\geq d(t) = i(t), \\d(x) &\geq i(x),\end{aligned}$$

функция

$$m(x) = \min\{i(x), d(x)\} = i(x)$$

минимума этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$

не убывает при отсутствии и строго монотонно возрастает при наличии строгой монотонности функции  $i(x)$ .

Во-вторых, на правой части  $[t, b]$  отрезка  $[a, b]$

$$\begin{aligned}i(x) &\geq i(t) = d(t), \\d(x) &\leq d(t) = i(t), \\i(x) &\geq d(x),\end{aligned}$$

функция

$$m(x) = \min\{i(x), d(x)\} = d(x)$$

минимума этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$

не возрастает при отсутствии и строго монотонно убывает при наличии строгой монотонности функции  $d(x)$ .

В-третьих, на левой части  $[a, t]$  отрезка  $[a, b]$

$$m(x) = \min\{i(x), d(x)\} \leq m(t) = \min\{i(t), d(t)\} = i(t) = d(t),$$

на правой части  $[t, b]$  отрезка  $[a, b]$

$$m(x) = \min\{i(x), d(x)\} \leq m(t) = \min\{i(t), d(t)\} = i(t) = d(t),$$

так что функция

$$m(x) = \min\{i(x), d(x)\}$$

минимума этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$

имеет строгий или нестрогий максимум

$$m(t) = \min\{i(t), d(t)\} = i(t) = d(t)$$

в этой точке  $t$  равенства значений этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$ .

В-четвёртых, при изъятии этой точки  $t$  равенства значений этих двух функций  $i(x)$  и  $d(x)$  из ранее указанных частей отрезка  $[a, b]$  при наличии именно строгой монотонности обеих функций  $i(x), d(x)$

на левой части  $[a, t)$  отрезка  $[a, b]$

$$m(x) = \min\{i(x), d(x)\} < m(t) = \min\{i(t), d(t)\} = i(t) = d(t),$$

на правой части  $(t, b]$  отрезка  $[a, b]$

$$m(x) = \min\{i(x), d(x)\} < m(t) = \min\{i(t), d(t)\} = i(t) = d(t),$$

так что максимум

$$m(t) = \min\{i(t), d(t)\} = i(t) = d(t)$$

минимума обеих функций  $i(x)$ ,  $d(x)$

$$m(x) = \min \{i(x), d(x)\},$$

достигаемый в этой точке  $t$  равенства значений обеих функций  $i(x)$ ,  $d(x)$ ,

является непременно строгим и поэтому единственным, что и завершает доказательство теоремы максимина.

Эти общие математические теоремы минимакса и максимина общеприменимы, в частности применимы к определению суперпсевдорешения рассматриваемого двойного строгого неравенства

$$a < x < b$$

для каждой из этих трёх методологий в отдельности.

Общая методология всеобщего запаса вводит и использует всеобщий запас и ввиду строгой монотонности его и всеобщей погрешности ведёт при определении суперпсевдорешения рассматриваемого двойного строгого неравенства

$$a < x < b$$

к равенству всеобщих запасов  $R$  и далее всеобщих погрешностей  $E$  именно единственного искомого суперпсевдорешения  $t$  (суперрешения при  $a < b$  и квазирешения при  $a \geq b$ ) относительно обоих концов  $a$  и  $b$  промежутка:

$$R_{t > a}(t) = R_{t < b}(t),$$

$$E_{t < ? a} = E_{t > ? b},$$

$$E_{t = ? a} = E_{t = ? b},$$

$$\|t - a\| / (\|t\| + \|a\|) = \|t - b\| / (\|t\| + \|b\|).$$

Действительно, при  $a < b$  на отрезке  $[a, b]$  строго положительной длины  $b - a > 0$  определены две принимающие их общее (единое, одно и то же) значение  $R_{t > a}(t) = R_{t < b}(t)$  во внутренней точке  $t$  отрезка  $[a, b]$  строго монотонно возрастающая функция  $R_{x > a}(x)$  и строго монотонно убывающая функция  $R_{x < b}(x)$ . По теореме максимина функция

$$R_{a < x < b}(x) = \min \{R_{x > a}(x), R_{x < b}(x)\}$$

минимума этих двух функций  $R_{x > a}(x)$  и  $R_{x < b}(x)$  строго монотонно возрастает на левой части  $[a, t]$  отрезка  $[a, b]$ , достигает строгого и поэтому единственного максимума в этой точке  $t$  равенства значений этих двух функций  $R_{x > a}(x)$  и  $R_{x < b}(x)$  и строго монотонно убывает на правой части  $[t, b]$  отрезка  $[a, b]$ . Этого вполне достаточно для обоснования выкладок. Но для углубления понимания сущности определения суперпсевдорешения задачи полезны следующие добавления. Во-первых, при  $a < b$  на отрезке  $[a, b]$  строго положительной длины  $b - a > 0$  определены две принимающие их общее (единое, одно и то же) значение  $E_{t < ? a} = E_{t > ? b}$  во внутренней точке  $t$  отрезка  $[a, b]$  строго монотонно возрастающая функция  $E_{x < ? a}(x)$  и строго монотонно убывающая функция  $E_{x > ? b}(x)$ . По теореме минимакса функция

$$E(x) = \max \{E_{x < ? a}(x), E_{x > ? b}(x)\}$$

максимума этих двух функций  $E_{x < ? a}(x)$  и  $E_{x > ? b}(x)$  строго монотонно убывает на левой части  $[a, t]$  отрезка  $[a, b]$ , достигает строгого и поэтому единственного минимума в этой точке  $t$  равенства значений этих двух функций  $E_{x < ? a}(x)$  и  $E_{x > ? b}(x)$  и строго монотонно возрастает на правой части  $[t, b]$  отрезка  $[a, b]$ . Во-вторых, при  $a < b$  на отрезке  $[a, b]$  строго положительной длины  $b - a > 0$  определены две принимающие их общее (единое, одно и то же) значение  $E_{t = ? a} = E_{t = ? b}$  во внутренней точке  $t$  отрезка  $[a, b]$  строго монотонно возрастающая функция  $E_{x = ? a}(x)$  и строго монотонно убывающая функция  $E_{x = ? b}(x)$ . По теореме минимакса функция

$$E(x) = \max \{E_{x = ? a}(x), E_{x = ? b}(x)\}$$

максимума этих двух функций  $E_{x = ? a}(x)$  и  $E_{x = ? b}(x)$  строго монотонно убывает на левой части  $[a, t]$  отрезка  $[a, b]$ , достигает строгого и поэтому единственного минимума в этой точке  $t$  равенства значений этих двух функций  $E_{x = ? a}(x)$  и  $E_{x = ? b}(x)$  и строго монотонно возрастает на правой части  $[t, b]$  отрезка  $[a, b]$ .

Для раскрытия норм, в данном случае достаточных модулей (абсолютных значений), следует с учётом двойного строгого неравенства  $a < t < b$  рассмотреть различные случаи знаков  $a$ ,  $t$  и  $b$ :

при  $a \geq 0$

$$\begin{aligned} \|t - a\| / (\|t\| + \|a\|) &= \|t - b\| / (\|t\| + \|b\|), \\ (t - a) / (t + a) &= - (t - b) / (t + b), \\ (t - a)(t + b) + (t - b)(t + a) &= 0, \\ t^2 - at + bt - ab + t^2 - bt + at - ab &= 0, \\ 2t^2 &= 2ab, \\ t &= (ab)^{1/2}; \end{aligned}$$

при  $b \leq 0$

$$\begin{aligned} \|t - a\| / (\|t\| + \|a\|) &= \|t - b\| / (\|t\| + \|b\|), \\ (t - a) / (-t - a) &= - (t - b) / (-t - b), \\ (t - a) / (t + a) &= - (t - b) / (t + b), \\ (t - a)(t + b) + (t - b)(t + a) &= 0, \\ t^2 - at + bt - ab + t^2 - bt + at - ab &= 0, \\ 2t^2 &= 2ab, \\ t &= - (ab)^{1/2}; \end{aligned}$$

при  $a \leq t \leq 0 \leq b$

$$\begin{aligned} \|t - a\| / (\|t\| + \|a\|) &= \|t - b\| / (\|t\| + \|b\|), \\ (t - a) / (-t - a) &= - (t - b) / (-t + b) = 1, \\ t - a &= -t - a, \\ t &= 0; \end{aligned}$$

при  $a \leq 0 \leq t \leq b$

$$\begin{aligned} \|t - a\| / (\|t\| + \|a\|) &= \|t - b\| / (\|t\| + \|b\|), \\ 1 = (t - a) / (t - a) &= - (t - b) / (t + b), \\ t + b &= -t + b, \\ t &= 0. \end{aligned}$$

Ввиду одного и того же нулевого итога

$$t = 0$$

в последних двух случаях их можно объединить в один случай независимо от знака  $t$ , если опустить промежуточные выкладки:

при  $a \leq 0 \leq b$

$$\begin{aligned} \|t - a\| / (\|t\| + \|a\|) &= \|t - b\| / (\|t\| + \|b\|), \\ t &= 0. \end{aligned}$$

Во всех указанных случаях точно таково же множество суперпсевдорешений переопределённой системы двух уравнений в разрешённом виде с одним неизвестным  $x$

$$x = a,$$

$$x = b$$

с единственным тривиальным суперрешением

$$x = a$$

при  $b = a$

и с квазирешениями во всех остальных случаях.

Мультипликативная методология общего запаса при определении суперпсевдорешения рассматриваемого двойного строгого неравенства

$$a < x < b$$

даёт при условии  $0 < a < b$  то же самое среднее геометрическое суперрешение

$$t = (ab)^{1/2}.$$

Действительно, на отрезке  $[a, b]$  строго положительной длины  $b - a > 0$  определены две принимающие их общее (единое, одно и то же) значение  $n_{t > a}(t) = n_{t < b}(t)$  во внутренней точке  $t$  отрезка  $[a, b]$  строго монотонно возрастающая функция  $n_{x > a}(x)$  и строго монотонно убывающая функция  $n_{x < b}(x)$ . По теореме максимина функция

$$n_{a < x < b}(x) = \min \{n_{x > a}(x), n_{x < b}(x)\}$$

минимума этих двух функций  $n_{x > a}(x)$  и  $n_{x < b}(x)$  строго монотонно возрастает на левой части  $[a, t]$  отрезка  $[a, b]$ , достигает строгого и поэтому единственного максимума в этой точке  $t$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 287/556

равенства значений этих двух функций  $n_{x > a}(x)$  и  $n_{x < b}(x)$  и строго монотонно убывает на правой части  $[t, b]$  отрезка  $[a, b]$ . А именно,

$$\begin{aligned}n_{x > a}(x) &= x/a, \\n_{x < b}(x) &= b/x, \\n_{t > a}(t) &= n_{t < b}(t), \\t/a &= b/t, \\t &= (ab)^{1/2}.\end{aligned}$$

То есть мультипликативная методология общего запаса даёт при определении суперпсевдорешения рассматриваемого двойного строгого неравенства

$$a < x < b$$

при условии  $0 < a < b$  то же самое среднее геометрическое суперрешение

$$t = (ab)^{1/2},$$

которое даётся и общей методологией всеобщего запаса, дополнительно к охвату других условий дающей чрезвычайно полезный и сам по себе всеобщий запас. Так что общая методология всеобщего запаса обобщает мультипликативную методологию общего запаса, во многом успешно проверенную огромной практикой использования обычного мультипликативного коэффициента запаса при решении задач прочности. Этим подтверждаются правомерность общей методологии всеобщего запаса и приемлемость всеобщего запаса и всеобщей погрешности.

Аддитивная методология общего запаса даёт при определении суперпсевдорешения рассматриваемого двойного строгого неравенства

$$a < x < b$$

при условии  $a < b$  среднее арифметическое суперрешение

$$t = (a + b)/2.$$

Действительно, на отрезке  $[a, b]$  строго положительной длины  $b - a > 0$  определены две принимающие их общее (единое, одно и то же) значение  $\Delta_{t > a}(t) = \Delta_{t < b}(t)$  во внутренней точке  $t$  отрезка  $[a, b]$  строго монотонно возрастающая функция  $\Delta_{x > a}(x)$  и строго монотонно убывающая функция  $\Delta_{x < b}(x)$ . По теореме максимина функция

$$\Delta_{a < x < b}(x) = \min \{ \Delta_{x > a}(x), \Delta_{x < b}(x) \}$$

минимума этих двух функций  $\Delta_{x > a}(x)$  и  $\Delta_{x < b}(x)$  строго монотонно возрастает на левой части  $[a, t]$  отрезка  $[a, b]$ , достигает строгого и поэтому единственного максимума в этой точке  $t$  равенства значений этих двух функций  $\Delta_{x > a}(x)$  и  $\Delta_{x < b}(x)$  и строго монотонно убывает на правой части  $[t, b]$  отрезка  $[a, b]$ . А именно,

$$\begin{aligned}\Delta_{x > a}(x) &= x - a, \\ \Delta_{x < b}(x) &= b - x, \\ \Delta_{t > a}(t) &= \Delta_{t < b}(t), \\ t - a &= b - t, \\ 2t &= a + b, \\ t &= (a + b)/2.\end{aligned}$$

При этом для двойного неравенства с границами, которые обе могут быть ненулевыми, аддитивная методология общего запаса ограничивается именно и только краевым отклонением вовнутрь  $\Delta$  от каждого из обоих концов промежутка и не использует сужающее область применения и в любом случае именно общего знаменателя для обоих концов промежутка не вносящее ничего нового относительное краевое отклонение вовнутрь  $\delta$  от каждого из обоих концов промежутка, каждое из которых принципиально разумно относить либо к своему (и тем самым к разным для разных концов) концу промежутка, либо к некоторому общему значению, в частности к оцениваемому промежуточному значению, к некоторой одной и той же функции оцениваемого промежуточного значения и/или любого одного или обоих концов промежутка, в том числе к минимуму, максимуму, средним гармоническому, геометрическому, арифметическому, квадратическому обоих концов промежутка, по свободному выбору к одному и тому же, например или левому, или правому, концу промежутка. Если относить краевые отклонения вовнутрь от каждого из обоих концов

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 288/556

промежутка к одному и тому же общему значению, то есть использовать общий знаменатель, то в случае его отличия от нуля относительное краевое отклонение вовнутрь даёт очевидным образом в точности тот же итог, что и краевое отклонение вовнутрь.

А вот если относить краевые отклонения вовнутрь от каждого из обоих концов  $a$ ,  $b$  промежутка к этому концу как своему знаменателю, то в случае  $0 < a < b$  положительности обоих концов  $a$ ,  $b$  и длины  $b - a > 0$  промежутка (общий знак обоих концов  $a$ ,  $b$  необходим и достаточен для противоположных направленностей монотонности обеих функций в условиях теоремы минимакса и теоремы максимина) относительное краевое отклонение вовнутрь даёт в итоге среднее гармоническое концов  $a$ ,  $b$  промежутка как суперрешение. Докажем это. Действительно, тогда относительные краевые отклонения вовнутрь от каждого из обоих концов промежутка  $a$ ,  $b$  соответственно составляют  $\delta_{x>a}(x)$  и  $\delta_{x<b}(x)$  и дают

$$\begin{aligned}\delta_{x>a}(x) &= (x - a)/a = x/a - 1, \\ \delta_{x<b}(x) &= (b - x)/b = 1 - x/b, \\ \delta_{t>a}(t) &= \delta_{t<b}(t), \\ t/a - 1 &= 1 - t/b, \\ t/a + t/b &= 2, \\ t &= 2/(1/a + 1/b) = 2ab/(a + b),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Выше были именно впервые поставлены и полностью решены однопараметрические математические задачи оптимизации псевдорешения, доведённые до нахождения суперпсевдорешения задачи, которое в случае его точности является суперрешением.

В итоге общая теория запаса открыла три качественно дискретные и количественно непрерывные иерархии, первые две из которых взаимно однозначно связаны между собой.

Во-первых, это качественно дискретная и количественно непрерывная иерархия псевдорешений задачи от нерешений (неточных решений), включающих нечёткие (размытые) приближённые решения, до суперпсевдорешения задачи, при отсутствии точных решений являющегося квазирешением, а при наличии точных решений являющегося суперрешением, которому в этом случае в этой возрастающей иерархии качества псевдорешений предшествуют точные решения.

Во-вторых, это качественно дискретная и количественно непрерывная иерархия псевдоточности псевдорешений задачи от неточности нерешений (неточных решений), включающей нечёткую (размытую) приближённую приближённых решений, до суперпсевдоточности суперпсевдорешения, при отсутствии точных решений являющейся квазиточностью квазирешения, а при наличии точных решений являющейся суперточностью суперрешения, которой в этом случае в этой возрастающей иерархии псевдоточности предшествует точность точных решений.

В-третьих, и это наиболее общее и поэтому самое главное, – это качественно дискретная и количественно непрерывная иерархия псевдоправильности (любого предмета вообще) как соответствия или несоответствия предмета в той или иной мере тем или иным правилам (условиям, требованиям) от квазинеправильности как максимально возможного несоответствия предмета правилам (условиям, требованиям), которая совпадает с супернеправильностью (полной неправильностью) как полным несоответствием предмета именно всем правилам (условиям, требованиям) при её возможности, с промежуточной частичной правильностью как частичным соответствием предмета правилам (условиям, требованиям) до квазиправильности как максимально возможного соответствия предмета правилам (условиям, требованиям), которая совпадает с суперправильностью (полной правильностью) как полным соответствием предмета именно всем правилам (условиям, требованиям) при её возможности. Это иерархия общей псевдоправильности предмета для всей системы правил (условий, требований), сходная с иерархией индивидуальной псевдоправильности для каждого отдельного правила (условия, требования), рассматриваемого как частный случай системы правил (условий, требований). В итоге общая псевдоправильность предмета является функцией всей системы индивидуальных



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 289/556

псевдоправильностей предмета. Разумеется, для общей и индивидуальных псевдоправильностей принципиально возможны и качественные словесные оценки, например доводами и противододами (замечаниями, возражениями, опровержениями), и дискретные численные оценки, например отношением суммы весов выполненных к сумме весов всех правил (условий, требований) их системы, и непрерывные численные оценки, например всеобщим запасом, в частности именно непрерывная, например отрезок от минус единицы до плюс единицы, шкала истинности бесконечной и даже непрерывной всеобщей логики, причём именно чёткой в отличие от нечёткой логики, тогда как классическая логика является конечной, дискретной, всего лишь двухзначной. Следует также иметь в виду и непременно правильно учитывать расширенным всеобщим запасом, например числами полуотрезка-полуинтервала  $[-2, -1]$  занижение («ниже всякой критики») и числами полуинтервала-полуотрезка  $(1, 2]$  превышение («выше всяких похвал»), предметом системы правил (условий, требований) и каждого отдельного правила (условия, требования).

Анализ как постановки, так и процесса решения каждой задачи оптимизации псевдорешения показывает их двухстадийность. На первой стадии определяется запас именно произвольного псевдорешения задачи. А по результатам первой стадии уже на второй стадии осуществляется оптимизация именно произвольного псевдорешения задачи посредством максимизации его запаса. Однопараметричности соответствует в задачах механики и прочности простейший частный случай так называемого простого нагружения, при котором существует единственный параметр, которому прямо пропорциональны непременно все действующие нагрузки. Именно применительно к этому простейшему случаю и был разработан простейший классический метод определения как раз единственного коэффициента запаса путём деления предельного напряжения на наибольшее в нагруженном теле равносильное (эквивалентное) напряжение.

Далее предстоит обобщение на именно общий случай функции целой системы с множеством взаимно независимых исходных параметров общей математической задачи с многopараметричностью. Многopараметричности соответствует в задачах механики и прочности сложнейший общий случай так называемого сложного нагружения, при котором как раз и не существует единственный параметр, которому прямо пропорциональны непременно все действующие нагрузки. Именно в этом сложнейшем общем случае сложного нагружения ясна заведомая недостаточность простейшего классического метода определения как раз единственного коэффициента запаса путём деления предельного напряжения на наибольшее в нагруженном теле равносильное (эквивалентное) напряжение.

Для достаточно простой именно аналитической осуществимости такого обобщения целесообразен ряд упрощений. Главным из них является первоначальное ограничение как постановки, так и процесса решения каждой такой задачи оптимизации псевдорешения их первой стадией, то есть определением запаса именно произвольного псевдорешения задачи. При этом имеется в виду, что при необходимости и полезности обеспечена явная возможность по результатам первой стадии уже на второй стадии достаточно просто непременно аналитически осуществить оптимизацию именно произвольного псевдорешения задачи посредством максимизации его запаса.

Далее в этом разделе общая методология всеобщего запаса даёт точно такие же итоги, как и менее общая и более простая мультипликативная методология общего запаса, так что рассматриваются аддитивная методология общего запаса и мультипликативная методология общего запаса.

Кроме того, в аддитивной методологии общего запаса оставляется в запасе относительное краевое отклонение вовнутрь с отнесением краевых отклонений вовнутрь от каждого из обоих концов промежутка к этому концу как своему знаменателю, которое даёт в итоге среднее гармоническое концов промежутка как суперрешение, а используется равносильное краевому отклонению вовнутрь относительное краевое отклонение вовнутрь с отнесением краевых отклонений вовнутрь от каждого из обоих концов промежутка именно к оцениваемому промежуточному значению как общему знаменателю. То есть, в частности, в

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 290/556

однопараметрической задаче математического моделирования для произвольного допустимого множества в виде отрезка  $[a, b]$  именно положительной длины  $b - a > 0$  и для произвольного оцениваемого промежуточного значения  $x$  ( $a < x < b$ ) его аддитивный запас определяется аддитивной методологией общего запаса как такое наибольшее возможное строго положительное число  $\delta$ , что именно оба числа  $(1 - \delta)x$  и  $(1 + \delta)x$  принадлежат отрезку  $[a, b]$ , так что независимо от обусловленной знаком числа  $x$  упорядоченности этих обоих чисел отрезок между ними, содержащий и число  $x$  в середине этого отрезка, как именно симметричная относительно числа  $x$  замкнутая окрестность числа  $x$  включается в отрезок  $[a, b]$ .

В этой же однопараметрической задаче математического моделирования для произвольного допустимого множества в виде отрезка  $[a, b]$  именно положительной длины  $b - a > 0$  и для произвольного оцениваемого промежуточного значения  $x$  ( $a < x < b$ ) его мультипликативный коэффициент запаса определяется мультипликативной методологией общего запаса как такое наибольшее возможное число  $n > 1$ , что именно оба числа  $x/n$  и  $nx$  принадлежат отрезку  $[a, b]$ , так что независимо от обусловленной знаком числа  $x$  упорядоченности этих обоих чисел отрезок между ними, содержащий и число  $x$  в общем случае не в середине этого отрезка, как в общем случае именно асимметричная относительно числа  $x$  замкнутая окрестность числа  $x$  включается в отрезок  $[a, b]$ .

Необходимое введение индивидуального запаса для каждого из исходных параметров задачи принципиально допускает различные постановки, названные А. А. Лебедевым.

В прямой постановке индивидуальные запасы известны и позволяют обычным путём установить множество значений равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$  как функции исходных параметров, принимающих значения в соответствующих множествах, а затем однозначно определяется запас  $n_L$ .

Заметим, что согласно (2.124) и (2.141) приведённое главное напряжение

$$\sigma_j^\circ = 1/r_j^\circ$$

может отличаться от обращённого индивидуального коэффициента запаса

$$1/n_j = 1/(\sigma_{Lj}/|\sigma_j|) = |\sigma_j|/\sigma_{Lj} = |\sigma_j^\circ| = \|\sigma_j^\circ\|$$

лишь знаком при постоянном нагружении и векторным направлением при переменном нагружении, а

$$\sigma_e^\circ = 1/r_e^\circ = 1/n_L$$

ввиду неотрицательности равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$ .

Следовательно, приведённый критерий предельных состояний (2.135), (2.138) прямо выражает общий запас равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$  через частные запасы

$$1/n_j = 1/(\sigma_{Lj}/|\sigma_j|) = |\sigma_j|/\sigma_{Lj} = |\sigma_j^\circ| = \|\sigma_j^\circ\|$$

главных напряжений, принципиально выражаемые через индивидуальные запасы исходных параметров.

Сложнее и важнее обратная постановка, при которой известен запас  $n_L$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$  и требуется определение индивидуальных запасов всех или хотя бы самых существенных исходных параметров, погрешности в определении значений которых наиболее вероятны и заметны по величине и по вкладу в равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e$ .

Если, как всегда при сложном нагружении, число существенных исходных параметров в задаче не менее двух, то для однозначного обращения её постановки необходимо на единицу меньшее число зависимостей между индивидуальными запасами этих параметров.

В частности, все эти запасы могут быть выражены через один единый для всех запас, который может и входить в их множество.

В результате по коэффициенту запаса  $n_L$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$  может быть однозначно определён этот единый запас как некоторая единая мера всех индивидуальных запасов, устанавливаемых именно через единый запас.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 291/556

Заметим, что коэффициент запаса как допускаемая кратность двусторонней погрешности соответствует мультипликативному подходу к формированию окрестности расчётного значения и влечёт её асимметрию и зависимость от выбора начала отсчёта.

Наряду с изложенной мультипликативной методологией общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных с мультипликативным подходом к выражению двусторонних пределов возможна и часто удобна аддитивная методология общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных с аддитивным подходом к выражению двусторонних пределов, обеспечивающим симметрию окрестности расчётного значения и независимость от выбора начала отсчёта и обобщающим определением абсолютной или относительной погрешности.

Рассмотрение абсолютной погрешности может оказаться более уместным в случае малости расчётного значения и достаточно приемлемо исчерпывается известными методами [138, 209, 287].

Поэтому при аддитивном подходе есть смысл ограничиться обобщением именно относительной погрешности  $\delta$ :

допускаемая относительная погрешность  $\delta$ ,

$$(1 - \delta \text{sign} \sigma) \sigma \leq \sigma \leq (1 + \delta \text{sign} \sigma) \sigma,$$

относительный запас в сторону уменьшения ( $-\delta$ ),

относительный запас в сторону увеличения  $\delta$ ,

коэффициент запаса в сторону уменьшения

$$n_{a-} = 1/(1 - \delta),$$

коэффициент запаса в сторону увеличения

$$n_{a+} = 1 + \delta.$$

Общая методология всеобщего запаса, мультипликативная и аддитивная методологии общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных применимы не только к прочности как частному случаю, но и к общему случаю функции системы аргументов с областями определения и множествами значений в соответствующих гильбертовых пространствах с обобщением для них понятий окрестности множества и запаса множества при мультипликативном и аддитивном подходах (см. приложение П.5).

В частности, общую методологию всеобщего запаса, мультипликативную и аддитивную методологии общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных можно применить и к приведённым примерам в простейшем предположении равенства индивидуальных запасов для исходных параметров единому для них запасу и, следовательно, между собой.

В примере 1 по аддитивной методологии общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных (см. рис. 2.40) из уравнения

$$(1 + \delta \text{sign} \sigma_1) \sigma_1 - (1 - \delta \text{sign} \sigma_3) \sigma_3 = \sigma_L$$

допускаемая относительная погрешность

$$\delta = (\sigma_L - \sigma_1 + \sigma_3) / (|\sigma_1| + |\sigma_3|) = 0.423,$$

относительный запас в сторону уменьшения

$$-\delta = -(\sigma_L - \sigma_1 + \sigma_3) / (|\sigma_1| + |\sigma_3|) = -0.423,$$

относительный запас в сторону увеличения

$$\delta = (\sigma_L - \sigma_1 + \sigma_3) / (|\sigma_1| + |\sigma_3|) = 0.423,$$

коэффициент запаса в сторону уменьшения

$$n_{a-} = 1/(1 - \delta) = 1/(1 - (\sigma_L - \sigma_1 + \sigma_3) / (|\sigma_1| + |\sigma_3|)) = 1/(1 - 0.423) = 1.733,$$

коэффициент запаса в сторону увеличения

$$n_{a+} = 1 + \delta = 1 + (\sigma_L - \sigma_1 + \sigma_3) / (|\sigma_1| + |\sigma_3|) = 1.423.$$

В примере 1 по мультипликативной методологии общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных (см. рис. 2.39) по уравнению

$$n_m^{\text{sign} \sigma(1)} \sigma_1 - \sigma_3 / n_m^{\text{sign} \sigma(3)} = \sigma_L$$

коэффициент запаса

$$n_m = [2\sigma_L + |\text{sign} \sigma_1 + \text{sign} \sigma_3| (\sigma_L^2 + 4\sigma_1 \sigma_3)^{1/2}] / [2(\sigma_1 - \sigma_3) + (\text{sign} \sigma_1 + \text{sign} \sigma_3)(\sigma_1 + \sigma_3)] = 1.5.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 292/556

В примере 2 по мультипликативной методологии общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных (см. рис. 2.41) ввиду

$$-\sigma_c = n_{mc}\sigma^- + \sigma^+/n_{mc} \leq \sigma \leq \sigma^-/n_{mt} + n_{mt}\sigma^+ = \sigma_t$$

из уравнений

$$\begin{aligned} n_{mc}\sigma^- + \sigma^+/n_{mc} &= -\sigma_c; \\ \sigma^-/n_{mt} + n_{mt}\sigma^+ &= \sigma_t \end{aligned}$$

коэффициенты запаса по сжатию и растяжению соответственно

$$\begin{aligned} n_{mc} &= [-\sigma_c - (\sigma_c^2 - 4\sigma^+\sigma^-)^{1/2}]/(2\sigma^-) = 2; \\ n_{mt} &= [\sigma_t + (\sigma_t^2 - 4\sigma^+\sigma^-)^{1/2}]/(2\sigma^+) = 1.25, \end{aligned}$$

то есть в данной задаче получаются эти обычно недостаточные запасы взамен обманчивого избыточного запаса прочности (2.142)

$$n_L = \sigma_c/|\sigma| = 8,$$

соответствующего абсолютной точности каждого из слагаемых в их алгебраической сумме  $\sigma$ . В функциях большого числа переменных (в частности напряжений) при взаимосвязанных погрешностях слагаемые одинаковых знаков группируются: отрицательные в их подсумму  $\sigma^-$  и положительные в их подсумму  $\sigma^+$ .

Возможно и разбиение слагаемых в их алгебраической сумме на большее число групп с близкими между собой внутри групп запасами.

Полезно ввести общее понятие действительного запаса, приведённого к показанному квадратными скобками нормативному запасу, как отношения действительного запаса к нормативному запасу

$$n_{[m]} = n_m/[n_m].$$

В частности, полезны приведённый к нормативному действительный запас по растяжению

$$n_{[m]t} = n_{mt}/[n_{mt}]$$

и приведённый к нормативному действительный запас по сжатию

$$n_{[m]c} = n_{mc}/[n_{mc}].$$

При превышении отношения действительных запасов по растяжению и сжатию отношением показанных квадратными скобками нормативных запасов по растяжению и сжатию

$$[n_{mt}]/[n_{mc}] > n_{mt}/n_{mc}$$

приведённый к нормативному действительный запас по растяжению меньше приведённого к нормативному действительного запаса по сжатию

$$\begin{aligned} n_{mc}/[n_{mc}] &> n_{mt}/[n_{mt}], \\ n_{[m]t} = n_{mt}/[n_{mt}] &< n_{[m]c} = n_{mc}/[n_{mc}], \end{aligned}$$

так что наиболее опасно сочетание исходных параметров задачи, дающее предельное напряжение при растяжении  $\sigma_t$ .

При превышении отношения показанных квадратными скобками нормативных запасов по растяжению и сжатию отношением действительных запасов по растяжению и сжатию

$$[n_{mt}]/[n_{mc}] < n_{mt}/n_{mc}$$

приведённый к нормативному действительный запас по растяжению больше приведённого к нормативному действительного запаса по сжатию

$$\begin{aligned} n_{mc}/[n_{mc}] &< n_{mt}/[n_{mt}], \\ n_{[m]t} = n_{mt}/[n_{mt}] &> n_{[m]c} = n_{mc}/[n_{mc}], \end{aligned}$$

так что наиболее опасно сочетание исходных параметров задачи, дающее предельное напряжение при сжатии ( $-\sigma_c$ ).

При равенстве отношения показанных квадратными скобками нормативных запасов по растяжению и сжатию и отношения действительных запасов по растяжению и сжатию

$$[n_{mt}]/[n_{mc}] = n_{mt}/n_{mc}$$

равны между собой приведённый к нормативному действительный запас по растяжению и приведённый к нормативному действительный запас по сжатию

$$\begin{aligned} n_{mc}/[n_{mc}] &= n_{mt}/[n_{mt}], \\ n_{[m]t} = n_{mt}/[n_{mt}] &= n_{[m]c} = n_{mc}/[n_{mc}], \end{aligned}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 293/556

так что наиболее опасные сочетания исходных параметров задачи, порознь дающие  $\sigma_t$  и  $(-\sigma_c)$ , равноопасны с единым приведённым к нормативному действительным запасом по растяжению и сжатию

$$n_{[m]} = n_m/[n_m] = n_{[m]t} = n_{mt}/[n_{mt}] = n_{[m]c} = n_{mc}/[n_{mc}].$$

Созданные общая теория запаса, общая методология всеобщего запаса, мультипликативная и аддитивная методологии общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных ведут к дальнейшей дифференциации выражения общего запаса прочности через отдельные запасы для главных напряжений на стадии применения критериев предельных состояний и далее через индивидуальные запасы для каждой из независимых нагрузок.

До стадии применения критериев предельных состояний приведение напряжений их делением на модули их одноосных пределов тех же направлений и знаков недопустимо и при наличии слагаемых разных знаков может привести не только и грубому нарушению принципа наложения (суперпозиции), но и к неприемлемой оценке опасности напряжённого состояния.

В данном случае в примере 2 такое недопустимое приведение напряжений с умножением на  $\sigma_t$  дало бы

$$\sigma' = \chi\sigma^- + \sigma^+ = \chi\sigma^- + \sigma^+ = \sigma^-\sigma_t/\sigma_c + \sigma^+ = -500/8 \text{ МПа} + 400 \text{ МПа} = 337.5 \text{ МПа}$$

с более чем трёхкратным превышением  $\sigma_t$  взамен верного

$$\sigma = \sigma^- + \sigma^+ = -500 \text{ МПа} + 400 \text{ МПа} = -100 \text{ МПа}$$

с запасом прочности (2.142)

$$n_L = \sigma_c/|\sigma| = 8$$

при отсутствии погрешностей или

$$n_{mt} = [\sigma_t + (\sigma_t^2 - 4\sigma^+\sigma^-)^{1/2}]/(2\sigma^+) = 1.25$$

при наличии погрешностей.

Эти преобразования возможны и полезны на стадии применения критериев предельных состояний, на которой принцип наложения (суперпозиции) уже не действует.

Созданные общая теория запаса, общая методология всеобщего запаса, мультипликативная и аддитивная методологии общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных, в частности решения задач прочности с определением запасов прочности при наложении (суперпозиции) нагрузок, могущих быть независимыми при сложном нагружении, обладают гибкостью, позволяющей учесть специфику как решаемой задачи прочности, так и исходного решения задачи механики деформируемого твёрдого тела.

Созданные общая теория запаса, общая методология всеобщего запаса, мультипликативная и аддитивная методологии общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных существенно дополняют, уточняют и развивают известный подход к определению коэффициента запаса для равносильного (эквивалентного) напряжения, а сами индивидуальные запасы определяются через единый для них всех один из них или дополнительный запас по наиболее опасному осуществляющемуся сочетанию значений независимых переменных.

В результате вскрываются подлинные резервы прочности объекта и появляется возможность рационального управления ими.

## 2.24. Выводы по главе 2

1. Предложено обобщение схем нагружения тел путём типизации. Открыто явление существования основного типа, линейные комбинации схем которого исчерпывает общий тип, и введены соответствующие понятия общего и основного типов схем нагружения. Открыт тип схем нагружения с одним свободным основанием как основной тип для общего типа схем осесимметричного нагружения без объёмных сил и кручения трёхмерных цилиндрических тел. Открыт тип схем нагружения с равномерными давлениями на боковую поверхность, на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 294/556

как основной в технике высоких давлений тип схем нагружения для общего типа схем осесимметричного нагружения без объёмных сил и кручения трёхмерных цилиндрических тел с равномерным давлением на боковую поверхность и ступенчатыми давлениями на оба основания.

2. Поставлена применительно к определению напряжённо-деформированных состояний пространственных элементов конструкций задача о произвольной системе функциональных уравнений с обобщением интегральных и дифференциальных уравнений, их систем и краевых задач. Введено понятие полной линейности оператора для даже бесконечной линейной комбинации. Введено понятие вполне линейно независимой системы, даже бесконечная линейная комбинация элементов которой обращается в нуль только при аннулировании всех её коэффициентов. Введены понятия класса (совокупности классов) искомых функций, собственного (собственной соответственно) для системы заданных операторов, каждый из которых принимает значения из своего класса линейных комбинаций вполне линейно независимых координатных функций, с глубокими и очень полезными обобщениями неподвижной точки отображения и собственной функции для оператора.

3. Создана полная линейно-комбинационная методология решения системы функциональных уравнений, заключающаяся в явном установлении решения в собственной для системы заданных операторов совокупности классов искомых функций сведением к системе уравнений относительно коэффициентов даже бесконечных линейных комбинаций.

4. Приложением полной линейно-комбинационной методологии решения системы функциональных уравнений создан общий (полу)степенной метод, которым получены общие решения гармонического и бигармонического уравнений в собственных для соответствующих операторов классах (полу)степенных рядов как линейных комбинаций вполне линейно независимых степенных функций применительно к решению трёхмерной и осесимметричной упругих задач в форме Папковича-Нейбера и через функцию напряжений Лява соответственно.

5. Создана целочастичная (парциальная) методология решения системы функциональных уравнений, заключающаяся в её разбиении на подсистемы, в частности на две подсистемы созданным по этой методологии общим интегральным методом. Первая из подсистем, разрешающая, позволяет наиболее просто отыскать частичное аналитическое решение, а вторая, оценочная, подсистема используется только для оценки его погрешности.

6. Открыты системы взаимосвязанных принципиальных изъянов абсолютной погрешности и нелогичной относительной погрешности. Введена безупречная всеобщая погрешность как инвариантная мера неточности, обобщающей нечёткую приближённость, с оценкой их и меры несовместности противоречивой задачи и с общими методами дополнительной косвенной оценки неточности и аналитического приближения к наилучшему из псевдорешений квазирешению, обобщающему точное решение, невозможное в противоречивой задаче, в том числе в переопределённой задаче обработки данных. Открыта система взаимосвязанных принципиальных изъянов безальтернативного в классической науке и опирающегося на наихудшие сохраняемые данные метода наименьших квадратов Гаусса и Лежандра. Создана общая методология решения задач с исходящим из решения по методу наименьших квадратов итерационным общим методом симметризации и нормального взвешивания данных безотносительно нормальности их распределения с использованием простейших и удобнейших формул метода наименьших квадратов и с опорой именно на самые лучшие данные при правильном учёте всей совокупности данных. На этих методах и методологии основана созданная общая методология аналитического приближения именно полной кривой усталостной прочности Вёлера.

7. Создана аналитическая методология макроэлементов применительно к решению осесимметричных упругих задач для пространственных тел под кусочно-гладкими поверхностными нагрузками. Сущность общего (полу)степенного аналитического метода макроэлементов как (полу)степенной модификации аналитической методологии макроэлементов, получаемого приложением общего (полу)степенного метода, заключается в

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 295/556

поэтапном точном или приближённом удовлетворении полученного общего (полу)степенного представления функции напряжений граничным условиям задачи и, возможно, условиям сопряжения решений для смежных макроэлементов разбиения тела. Сущность общего интегрального аналитического метода макроэлементов как интегральной модификации аналитической методологии макроэлементов, получаемого приложением общего интегрального метода к системе уравнений равновесия и совместности деформаций в напряжениях, состоит в прямом определении напряжений в целом теле через простейшее статически возможное распределение сдвигового напряжения как именно естественной функции напряжений. Впервые поставлен и решён целый ряд существенно трёхмерных задач упругости и прочности.

8. Открыто явление ограничения не только снизу, но и сверху степени функции напряжений граничными условиями задачи, в том числе в обоих названных основных типах схем нагружения. Открыты причины крайней ограниченности совокупности точных решений нетривиальных задач осесимметричных нагружений без объёмных сил и кручения именно существенно трёхмерных цилиндрических тел с наперёд заданными граничными условиями по существу классическим решением Ламе и его линейным обобщением без возможности именно точных нелинейных обобщений.

9. Для напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением созданной общий (полу)степенной метод аналитически обобщает и численно кратко, примерно на порядок по стрелам прогиба круглой центральной части и всего частично нагруженного основания, уточняет занижающую эти стрелы прогиба теорию круглой пластины, с погрешностью до 11 % применимую для перемещений при толщине до четверти радиуса и для напряжений при толщине до половины радиуса.

10. Открыты и обоснованы четыре принципиально новых явления и закона напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с периферическим повышенным противодавлением. При отсутствии давления на боковую поверхность открыты и обоснованы явление и закон существенного нарушения взаимной противоположности радиальных напряжений в центрах оснований по теории пластин и теории плит. Открыты и обоснованы явление и закон существования взаимосвязанных критических значений отношения давлений на боковую поверхность и на полностью нагруженное основание не меньше  $5/8$  и коэффициента поперечной деформации Пуассона для утонения или утолщения трёхмерного цилиндрического тела вдоль его оси. Открыты и обоснованы явление и закон кратного превышения, например в три-четыре раза, стрел прогиба центральной части и всего полностью нагруженного основания соответственно стрелами прогиба центральной части и всего частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, что и является главным законом его деформирования вопреки одинаковости искривлений частично нагруженного основания и полностью нагруженного основания по теории пластин и по теории плит. Открыты и обоснованы явление и закон смещения точки правильно по величине определённого созданным общим (полу)степенным методом достигаемого именно на цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей максимума сдвигового напряжения с середины толщины (высоты) в сторону частично нагруженного основания сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением, причём в малой окрестности края ненагруженной круглой центральной части частично нагруженного основания тела (элемента) действует сдвиговое напряжение величиной, весьма близкой к его максимуму.

11. Созданы общая теория предельных состояний и общая теория прочности с общей методологией учёта действительных соотношений прочностных свойств материалов, с

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 296/556

общей методологией приведения главных напряжений к всеобщим напряжениям и с общей методологией приведения критериев предельных состояний и критериев прочности впервые к всеобщим прочностным законам природы для произвольно анизотропных тел с различными сопротивлениями растяжениям и сжатиям при любых переменных нагружениях с возможными вращениями главных направлений напряжённого состояния. Общий метод синхронного самопредельного приведения главных напряжений к всеобщим напряжениям предусматривает деление каждого из главных напряжений на модуль предельного его значения, в частности того же направления и знака в тот же момент времени в той же точке того же тела при одноосном напряжённом состоянии и прочих равных условиях нагружения, и обобщается общим методом начально смещённого синхронного самопредельного приведения главных напряжений к всеобщим напряжениям с предварительным смещением начала отсчёта напряжений. Также созданы общий метод физического (знакочувствительного скалярно-векторного) обобщения критериев предельных состояний циклическим моделированием программ переменных одноосных напряжений, общий метод развития критериев предельных состояний учётом упрочнения при трёхмерном равноосном сжатии, общий метод развития критериев предельных состояний учётом подлинного соотношения пределов прочности при одноосных растяжении и сжатии и при чистом сдвиге, общий метод развития критериев предельных состояний учётом подлинного соотношения пределов прочности при одноосном и при равном двухосном растяжениях, общий метод правильного учёта непременно положительных алгебраически наибольших главных напряжений и деформации, общий метод геометрического (кинематического) обобщения критериев предельных состояний смещением начала отсчёта, общий метод обобщения критериев предельных состояний и прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции, общие методы аналитического (минус-степенного) обобщения критериев предельных состояний произвольными линейными комбинациями степени функции главных напряжений и минус-степени суммы главных напряжений или одинаковых или различных минус-степеней главных напряжений с произвольными положительными показателями при использовании введённого альтернативного минус-остепенения умножением функции направления (знака) основания на степень нормы основания.

12. Метод определения запаса прочности математически строго проанализирован и обобщён общей теорией прочности объектов с дальнейшими обобщениями всеобщих прочностных законов природы с предельных состояний также на неопредельные состояния с запасом прочности при сложном нагружении как функцией индивидуальных запасов независимых нагрузок с учётом наиболее опасного осуществимого их сочетания. Создана общая теория запаса с общей методологией всеобщего запаса (обобщением всеобщей погрешности впервые измеряющего надёжность точности, наибольшую для суперпсевдорешения задачи), мультипликативной и аддитивной методологиями общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных при наихудших сочетаниях возможных их значений в определяемых этими запасами пределах. Открыто, обосновано и верно учитывается явление кратного завышения подлинных запасов прочности по взаимно независимым нагрузкам обычным запасом прочности по равносильному (эквивалентному) напряжению при сложном напряжённом состоянии и сложном нагружении. Достигнуто обобщение для любой функции системы аргументов с множествами значений и их допускаемыми множествами в гильбертовых пространствах с обобщением для них понятий окрестности множества и запаса множества. Общая методология всеобщего запаса вводит и использует всеобщий запас и в множестве псевдорешений (формальных решений, точных или неточных, являющихся решениями или нерешениями, имеющих форму и вид решений, могущих быть подставленными во все условия задачи, при этом становящиеся проверяемыми, выполненными или не выполненными) задачи понятие суперпсевдорешения (наилучшего псевдорешения в смысле обладания наибольшим всеобщим запасом), оказывающегося или квазирешением, если является именно неточным псевдорешением, или



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 297/556

суперрешением, если является именно точным псевдорешением, то есть решением. Выявлены принципиальные изъяны обычного запаса прочности, по его замыслу приемлемого для одноосного напряжённого состояния при простом нагружении. Открыты и обоснованы явления и законы:

качественного обобщения критерия предельных состояний и критерия прочности критерием сопредельности с обоснованным качественным различием допредельных, предельных и запредельных состояний отношениями «меньше», «равно» и «больше» между равносильным (эквивалентным) и предельным напряжениями соответственно;

углубляющего именно количественного обобщения критерия сопредельности критерием запаса с измерением степеней допредельности, предельности и запредельности состояний;

неопределённости и произвольности обычного запаса прочности;

недостаточности обычного запаса прочности при сложном нагружении;

необходимости дополнения обычного запаса прочности индивидуальными запасами отдельных существенных независимых нагрузок при сложном нагружении;

определимости индивидуальных запасов отдельных существенных независимых нагрузок при сложном нагружении по наиболее опасному осуществимому сочетанию значений совокупности этих нагрузок в пределах, устанавливаемых этими запасами;

выражаемости критерием предельных состояний общего запаса равносильного (эквивалентного) напряжения при сложном напряжённом состоянии через частные запасы отдельных главных напряжений при одноосных напряжённых состояниях;

выражаемости критерием запаса общего запаса равносильного (эквивалентного) напряжения при сложном нагружении через индивидуальные запасы независимых нагрузок;

возможности многократного превышения подлинных индивидуальных запасов отдельных существенных независимых нагрузок обычным запасом прочности при сложном нагружении;

качественного обобщения общей теории предельных состояний общей теорией прочности с качественным различием допредельных, предельных и запредельных состояний;

углубляющего именно количественного обобщения общей теории прочности общей теорией запаса с измерением степеней допредельности, предельности и запредельности состояний;

обобщения запаса прочности запасом множества относительно допускаемого множества, например относительно окрестности множества или её замыкания;

функциональной зависимости общего запаса зависимой переменной от индивидуальных запасов независимых переменных;

иерархичности запасов, а именно первичности индивидуальных запасов независимых переменных при вторичности общего запаса зависимой переменной;

принципиальной различимости аддитивной (с симметрией окрестностей и независимостью от выбора начала отсчёта) и мультипликативной (с асимметрией окрестностей и зависимостью от выбора начала отсчёта) методологий запаса.

13. Общая теория запаса открыла три качественно дискретные и количественно непрерывные иерархии, первые две из которых взаимно однозначно связаны между собой. Во-первых, это качественно дискретная и количественно непрерывная иерархия псевдорешений задачи от нерешений (неточных решений), включающих нечёткие (размытые) приближённые решения, до суперпсевдорешения задачи, при отсутствии точных решений являющегося квазирешением, а при наличии точных решений являющегося суперрешением, которому в этом случае в этой возрастающей иерархии качества псевдорешений предшествуют точные решения. Во-вторых, это качественно дискретная и количественно непрерывная иерархия псевдоточности псевдорешений задачи от неточности нерешений (неточных решений), включающей нечёткую (размытую) приближённость приближённых решений, до суперпсевдоточности суперпсевдорешения, при отсутствии точных решений являющейся квазиточностью квазирешения, а при наличии точных решений являющейся суперточностью суперрешения, которой в этом случае в этой возрастающей иерархии псевдоточности предшествует точность точных решений. В-третьих, и это наиболее общее и поэтому самое главное, – это качественно дискретная и количественно непрерывная иерархия

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 298/556

псевдоправильности (любого предмета вообще) как соответствия или несоответствия предмета в той или иной мере тем или иным правилам (условиям, требованиям) от квазинеправильности как максимально возможного несоответствия предмета правилам (условиям, требованиям), которая совпадает с супернеправильностью (полной неправильностью) как полным несоответствием предмета именно всем правилам (условиям, требованиям) при её возможности, с промежуточной частичной правильностью как частичным соответствием предмета правилам (условиям, требованиям) до квазиправильности как максимально возможного соответствия предмета правилам (условиям, требованиям), которая совпадает с суперправильностью (полной правильностью) как полным соответствием предмета именно всем правилам (условиям, требованиям) при её возможности. Это иерархия общей псевдоправильности предмета для всей системы правил (условий, требований), сходная с иерархией индивидуальной псевдоправильности для каждого отдельного правила (условия, требования), рассматриваемого как частный случай системы правил (условий, требований). В итоге общая псевдоправильность предмета является функцией всей системы индивидуальных псевдоправильностей предмета. Разумеется, для общей и индивидуальных псевдоправильностей принципиально возможны и качественные словесные оценки, например доводами и противододами (замечаниями, возражениями, опровержениями), и дискретные численные оценки, например отношением суммы весов выполненных к сумме весов всех правил (условий, требований) их системы, и непрерывные численные оценки, например всеобщим запасом, в частности именно непрерывная, например отрезок от минус единицы до плюс единицы, шкала истинности бесконечной и даже непрерывной всеобщей логики, причём именно чёткой в отличие от нечёткой логики, тогда как классическая логика является конечной, дискретной, всего лишь двузначной. Следует также иметь в виду и непременно правильно учитывать расширенным всеобщим запасом, например числами полуотрезка-полуинтервала  $[-2, -1]$  занижение («ниже всякой критики») и числами полуинтервала-полуотрезка  $(1, 2]$  превышение («выше всяких похвал»), предметом системы правил (условий, требований) и каждого отдельного правила (условия, требования).

14. Открыт философский закон перехода анализа как первого общенаучного метода от качественного различения к количественному измерению различий. При создании и развитии общей теории предельных состояний и общей теории прочности с открытием первых в истории всеобщих прочностных законов природы анализ как первый общенаучный метод использовался как разделение различных методов определения как выражения равносильного (эквивалентного) напряжения в точке материала нагруженного деформируемого твёрдого тела при сложном напряжённом состоянии через главные напряжения в этой точке. При создании и развитии общей теории запаса с дальнейшим качественным и даже количественным обобщением именно в этом порядке нарастания меры и степени, важности и сложности обобщения общей теории предельных состояний и общей теории прочности с предельных состояний также на любые непредельные (допредельные и запредельные) состояния достигнут принципиально значимый переход от общепринятой дискретной именно конечной логики к бесконечной и даже непрерывной, то есть континуальной, всеобщей логике. Открыт философский закон перехода анализа как первого общенаучного метода от качественного различения к количественному измерению различий. Анализ как первый общенаучный метод используется как двухстадийное (качественное различение и далее обобщающее и уточняющее эту качественность ещё и количественное измерение соответствующих различий) разделение различных состояний (допредельных, предельных и запредельных) по любому методу определения как выражения равносильного (эквивалентного) напряжения в точке материала нагруженного деформируемого твёрдого тела при сложном напряжённом состоянии через главные напряжения в этой точке. На первой, качественной, стадии этого анализа равносильное (эквивалентное) напряжение соединяется с модулем предельного напряжения посредством знаков равенства и строгого (в обоих случаях для чистого состояния с анализом без синтеза) или нестрогого (для

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 299/556

смешанного состояния с анализом и последующим именно логично смежным частичным или полным синтезом) неравенства. Чисто аналитические чистые состояния – допредельность со знаком «меньше», предельность со знаком равенства и запредельность со знаком «больше». Смешанные аналитико-синтетические состояния с логично смежным частичным синтезом – прочность со знаком «меньше или равно» и разрушение со знаком «больше или равно». Единственное ввиду полноты смешанное аналитико-синтетическое состояние с логично смежным (каждого из краёв с промежуточностью) полным синтезом – сопредельность как дизъюнктивное соединение допредельности, предельности и запредельности. На второй, качественной и количественной, стадии этого анализа мультипликативный коэффициент запаса определяется как частное от деления модуля предельного одноосного напряжения на равносильное (эквивалентное) напряжение. То есть результат оказывается не только качественным в виде равенства или того или иного неравенства, как это было на первой, качественной, стадии этого анализа, а качественным и к тому же количественным в виде мультипликативного коэффициента запаса как положительного числа. Качество результата выражается мультипликативным коэффициентом запаса, большим единицы при допредельности, равным единице при предельности, меньшим единицы при запредельности, не меньшим единицы при прочности, не большим единицы при разрушении, произвольно сравнимым с единицей при сопредельности.

### **3. ПРИМЕНЕНИЕ СОЗДАННОЙ СИСТЕМЫ ОБЩИХ ТЕОРИЙ, МЕТОДОЛОГИЙ И МЕТОДОВ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ТЕОРИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ, ЖЁСТКОСТИ, ОПТИКИ, ПРОЧНОСТИ И РАЗРУШЕНИЯ СПЛОШНЫХ ТРЁХМЕРНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ, В ЧАСТНОСТИ СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ИЛЛЮМИНАТОРОВ ДЛЯ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ**

#### **3.1. Создание теории прочности сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением**

В рациональной конструкции иллюминатора для высоких давлений поле зрения не должно сужаться и высокое давление  $p$  действует на всё внешнее основание светопрозрачного элемента.

Ввиду нежелательности значительных силовых его контактов с металлическими деталями иллюминатора (например с оправой или промежуточным кольцом) целесообразно уравновесить стеклоэлемент гидростатическим давлением соответствующей величины на кольцевую периферическую часть частично нагруженного внутреннего основания.

В связи с малостью отношения

$$\chi = \sigma_t / \sigma_c$$

пределов прочности неорганического стекла при растяжении  $\sigma_t$  и сжатии  $\sigma_c$  полезно обжатие стеклоэлемента боковым давлением  $p_1$ .

Поскольку его увеличение от нуля повышает прочность, а при достаточно больших значениях боковое давление  $p_1$  разрушает стеклоэлемент, то существует наилучшее значение отношения

$$\Pi = p_1 / p,$$

зависящее от конструктивных параметров иллюминатора и, вообще говоря, не равное 1.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 300/556

В результате светопрозрачный элемент нагружен по схеме основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением (см. рис. 2.22, а) с осуществлением именно в рациональной конструкции иллюминатора (см. рис. 2.22, б) и напряжениями по формулам (2.81) и (2.83).

Специфика задачи прочности для трёхмерного сплошного цилиндрического элемента из хрупкого материала, например стекла К8 с

$$\begin{aligned}\sigma_t &= 29 \text{ МПа}, \\ \sigma_c &= 1400 \text{ МПа}, \\ \chi &= 0.0207,\end{aligned}$$

заключается в недопустимости пренебрежения последней малой величиной, обуславливающей влияние выбора критерия предельных состояний на решение задачи.

Для определения предельной поверхности при сложном напряжённом состоянии именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из неорганического стекла по известным результатам опытов при одноосных растяжении и сжатии есть смысл начать с известных критериев предельных состояний, в частности с критерия Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева [204, 238, 239, 305]

$$(3.1) \quad \sigma_e = (1 - \chi)\sigma_1 + 2^{-1/2}\chi[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_t,$$

где  $\sigma_e$  – равносильное (эквивалентное) напряжение в рассматриваемой точке тела;

$\chi$  – доля пластичности материала тела,  $\chi = \sigma_t/\sigma_c$  при условии  $\sigma_t \leq \sigma_c$ ;

$1 - \chi$  – доля хрупкости материала тела;

$\sigma_t, \sigma_c > 0$  – пределы прочности материала тела при одноосных растяжении и сжатии;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные напряжения в рассматриваемой точке тела, причём  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Для хрупких материалов, в частности неорганического стекла, также могут быть использованы первая теория прочности [111, 204, 238, 239, 305, 333], необходимо для определения опаснейшей точки равносильно преобразованная автором в его кандидатской диссертации

(Гелимсон Лев Г. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов: дис. ... канд. техн. наук: 01.02.06. Киев: Ин-т проблем прочности АН УССР, 1987. 148 с.)

к виду с равносильным (эквивалентным) напряжением и единой базой сравнения

$$(3.2) \quad \sigma_e = \max\{\sigma_1; -\chi\sigma_3\} = \sigma_t,$$

и критерий Кулона–Мора [111, 204, 238, 239, 305, 333]

$$(3.3) \quad \sigma_e = \sigma_1 - \chi\sigma_3 = \sigma_t.$$

Отметим ещё раз, что для стекла К8  $\chi = 0.0207 \ll 1$ , но пренебречь этой величиной нельзя. Кроме того, таблица 1.1 даёт представление о кратковременной прочности. Можно ожидать, что для длительных испытаний величины окажутся примерно вдвое меньшими [216].

Применение критерия Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева и критерия Кулона–Мора

Рассмотрим вначале применение критерия Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева (3.1).

В связи с тем, что для неорганического стекла  $1 - \chi \gg \chi$ ,

расчёты по формулам (2.81) и (2.83) показывают, что максимум  $\sigma_{e\max}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$  должен иметь место в ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, то есть при

$$0 \leq r \leq a_1, z = 0,$$

где радиальное  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$  напряжения максимальны, а осевое напряжение обращается в нуль:  $\sigma_z(r, z) = 0$ .

Подстановка в формулу для равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$  формул для радиального  $\sigma_r(r, 0)$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, 0)$  и осевого  $\sigma_z(r, 0) = 0$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 301/556

напряжений в ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания согласно формулам (2.81) убеждает, что при отсутствии бокового давления  $p_1 = 0$  равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e(r, z)$  максимально в точке  $(0, 0)$ , в которой радиальное  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$  напряжения максимальны и равны между собой, а при отсутствии давления  $p_1$  на боковую поверхность ещё и положительны:

$$\sigma_r(r, z) = \sigma_t(r, z) > 0.$$

Поэтому существует такое значение

$$\Pi_0 = -1/2 + (1/2)(1+m)(1+\mu) + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2a^2/[h^2(a^2-a_1^2)] \ln(a/a_1)$$

отношения  $\Pi = p_1/p$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$ , что при  $\Pi = \Pi_0$  в центре  $(0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания максимальные в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, и равные между собой радиальное  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$  напряжения аннулируются:

$$\sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0) = 0.$$

При условии отсутствия растягивающих радиального  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциального (окружного)  $\sigma_t(r, z)$  напряжений

$$(3.4)$$

$$\Pi = p_1/p \geq -1/2 + (1/2)(1+m)(1+\mu) + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2a^2/[h^2(a^2-a_1^2)] \ln(a/a_1) = \Pi_0$$

имеет место формула

$$\sigma_e^2/(\chi p)^2 = (A_1 - \Pi)^2 - (A_1 - \Pi)(A_2 + A_3)R + (A_2^2 - A_2A_3 + A_3^2)R^2,$$

где

$$A_1 = -1/2 + (1/2)(1+m)(1+\mu) + (3/8)(1-\mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1+\mu)a_1^2a^2/[h^2(a^2-a_1^2)] \ln(a/a_1) = \Pi_0;$$

$$A_2 = (3/8)(3+\mu) + (1/2)mh^2(a^4 - 2a_1^4)/[a^2a_1^2(a^2 - a_1^2)];$$

$$A_3 = (3/8)(1+3\mu) + (1/2)(1+m)\mu a^2/(a^2 - a_1^2);$$

$$R = r^2/h^2.$$

При этом в ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания алгебраически наибольшим из всех трёх главных напряжений оказывается нулевое осевое напряжение:

$$\sigma_1 = \sigma_2(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r \leq a_1).$$

Следовательно, внутри отрезка  $0 \leq R \leq a_1^2/h^2$  может быть лишь минимум равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, 0)$ , максимум же – только на концах отрезка.

При этом

$$\sigma_e^2(a_1 - 0, 0)/(\chi p)^2 - \sigma_e^2(0, 0)/(\chi p)^2 = - (A_1 - \Pi)(A_2 + A_3)a_1^2/h^2 + (A_2^2 - A_2A_3 + A_3^2)a_1^4/h^4 > 0,$$

поскольку

$$A_2^2 - A_2A_3 + A_3^2 = (A_2 - A_3/2)^2 + (3/4)A_3^2 \geq 0$$

и аннулируется лишь при  $A_2 = A_3 = 0$ , что в данном случае исключается.

Следует также учесть принятое условие (3.4) и положительность не только  $A_3$ , но и  $A_2$ . Ведь

$$A_2 \leq 0$$

при

$$a - a_1 \ll a_1,$$

что не имеет места в иллюминаторах для высоких давлений, а по коллокационному методу минимизации невязок сопряжения всегда

$$A_2 > 0.$$

Таким образом, показано, что при условии (3.4) равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e(r, z)$  является наибольшим на краю ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания:

$$\sigma_{e\max} = \sigma_e(a_1 - 0, 0).$$

Последнее соотношение тем более справедливо, что в соответствии с результатами расчётов по методу конечных элементов, подтвердившими правильность аналитического определения величины  $\tau_{\max}$ , но показавшими смещение точки этого максимума  $\tau_{\max}$  сдвигового напряжения

$\tau_{rz}(r, z)$  от срединной плоскости в сторону точки  $(a_1 - 0, 0)$ , в этой точке надо учесть сдвиговое напряжение  $\tau_{rz}(r, z)$ .

Уже вблизи этой точки  $(a_1 - 0, 0)$  в связи со скачком осевого напряжения  $\sigma_z(r, 0)$  действует сдвиговое напряжение  $\tau_{rz}(r, z)$  близкой к  $\tau_{\max}$  величины, причём зона подобного возмущения сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r, z)$  резко сосредоточена вблизи точки  $(a_1, 0)$ .

Поэтому представляется целесообразным и оправданным считать, что в этой точке действует сдвиговое напряжение  $\tau_{rz}(r, z)$  величиной  $\tau_{\max}$ .

Тогда согласно [242, 302, 319, 321]

$$\sigma_i(a_1 - 0, 0) = (1/2) \{ \sigma_r(a_1, 0) + [\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2]^{1/2} \}$$

и

$$\sigma_e(a_1 - 0, 0) = (1 - \chi)/2 \{ \sigma_r(a_1, 0) + [\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2]^{1/2} \} + \chi \{ \sigma_r^2(a_1, 0) - \sigma_r(a_1, 0)\sigma_i(a_1, 0) + \sigma_i^2(a_1, 0) + 3\tau_{\max}^2 \}^{1/2}. \quad (3.5)$$

При

$$\Pi \leq \Pi_0$$

(см. формулу (3.4)) в центре  $(0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания равносильное (эквивалентное) напряжение

$$\sigma_e(0, 0) = (1 - \chi)\sigma_r(0, 0) + \chi\sigma_i(0, 0) = \sigma_r(0, 0) = \sigma_i(0, 0). \quad (3.6)$$

При

$$\Pi \geq \Pi_0$$

(см. формулу (3.4)) в центре  $(0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания равносильное (эквивалентное) напряжение

$$\sigma_e(0, 0) = (1 - \chi)\sigma_z(0, 0) + \chi|\sigma_r(0, 0)| = -\chi\sigma_r(0, 0) = -\chi\sigma_i(0, 0).$$

Как уже отмечалось выше, при  $\Pi = 0$  равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e(r, z)$  является наибольшим в центре  $(0, 0)$  и строго превышает своё значение на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания:

$$\sigma_{\max} = \sigma_e(0, 0) > \sigma_e(a_1 - 0, 0).$$

А при  $\Pi \geq \Pi_0$  равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e(r, z)$  является наибольшим на краю  $(a_1 - 0, 0)$  и строго превышает своё значение в центре  $(0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания:

$$\sigma_{\max} = \sigma_e(a_1 - 0, 0) > \sigma_e(0, 0).$$

Поэтому ввиду непрерывности изменения разности частей последнего неравенства существует такое значение  $\Pi_e$  отношения  $\Pi$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$\Pi = \Pi_e \quad (0 < \Pi_e < \Pi_0),$$

что при  $\Pi = \Pi_e$  равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e(r, z)$  является наибольшим и в центре  $(0, 0)$ , и на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания, так что достигается равенство обоих этих значений между собой:

$$\sigma_{\max} = \sigma_e(0, 0) = \sigma_e(a_1 - 0, 0).$$

При этом оказывается, что при

$$0 \leq \Pi < \Pi_e$$

равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e(r, z)$  является наибольшим в центре  $(0, 0)$  и строго превышает своё значение на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания:

$$\sigma_{\max} = \sigma_e(0, 0) > \sigma_e(a_1 - 0, 0),$$

а при  $\Pi > \Pi_e$  равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e(r, z)$  является наибольшим на краю  $(a_1 - 0, 0)$  и строго превышает своё значение в центре  $(0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания:

$$\sigma_{\max} = \sigma_e(a_1 - 0, 0) > \sigma_e(0, 0).$$

Фактическое определение такого значения  $\Pi_e$  отношения  $\Pi$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  выполняется путём приравнивания значений равносильного (эквивалентного)

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 303/556

напряжения  $\sigma_c(r, z)$  в центре  $(0, 0)$  и на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания между собой:

$$\sigma_c(0, 0) = \sigma_c(a_1 - 0, 0).$$

Попытка точного решения соответствующего уравнения четвёртой степени относительно  $\Pi$  приводит к слишком сложной для практических приложений формуле.

Поскольку формулы (2.81) являются приближёнными, представляется логичным следующее упрощение.

Заменим в формуле (3.5) второй радикал

$$[\sigma_r^2(a_1, 0) - \sigma_r(a_1, 0)\sigma_t(a_1, 0) + \sigma_t^2(a_1, 0) + 3\tau_{\max}^2]^{1/2}$$

на первый радикал

$$[\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2]^{1/2},$$

воспользовавшись близостью значений  $\sigma_r(a_1, 0)$  и  $\sigma_t(a_1, 0)$ , которая следует из расчётов по общему (полу)степенному методу и по методу конечных элементов, и имея в виду, что

$$\begin{aligned} \sigma_r^2(a_1, 0) - \sigma_r(a_1, 0)\sigma_t(a_1, 0) + \sigma_t^2(a_1, 0) + 3\tau_{\max}^2 = \\ \sigma_r(a_1, 0)\sigma_t(a_1, 0) + [\sigma_r(a_1, 0) - \sigma_t(a_1, 0)]^2 + 3\tau_{\max}^2 \approx \\ \sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2, \end{aligned}$$

тем более что первый радикал берётся с коэффициентом  $(1 - \chi)/2$ , второй радикал берётся с коэффициентом  $\chi$ , а для неорганического стекла

$$\chi \ll (1 - \chi)/2.$$

Тогда взамен формулы (3.5) получаем на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания равносильное (эквивалентное) напряжение

$$(3.7)$$

$$\sigma_c(a_1 - 0, 0) = (1 - \chi)/2 \sigma_r(a_1, 0) + (1 + \chi)/2 [\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2]^{1/2}.$$

Расчёты показывают, что неточность в определении равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_c(a_1 - 0, 0)$  на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания по формуле (3.7) взамен формулы (3.5) не превышает долей процента, зато приводит к резкому упрощению.

К такому же результату (3.7), но уже точному, ведёт критерий (3.3).

Приравнявая (3.6) и (3.7), получаем для указанного критического значения  $\Pi_c$  отношения  $\Pi$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  формулу

$$(3.8)$$

$$\Pi_c = [\sigma_r^2(0, 0) - (1 - \chi)\sigma_r(0, 0)\sigma_r(a_1, 0) - \chi\sigma_r^2(a_1, 0) - (1 + \chi)^2\tau_{\max}^2] / \{(1 + \chi)p[\sigma_r(0, 0) - \sigma_r(a_1, 0)]\} |_{\Pi=0}.$$

То есть в правой части формулы (3.8) все соответствующие значения радиального напряжения  $\sigma_r(r, z)$  берутся по соответствующим формулам (2.81) при условии  $\Pi = 0$ , или, равносильно, при условии  $p_1 = 0$ .

Превышение этого критического значения  $\Pi_c$  (3.8) отношения

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  соответствует скачкообразному переходу места наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_{\max}$  в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле (светопрозрачном элементе) из неорганического стекла из центра  $(0, 0)$  на край  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания.

При  $\Pi = \Pi_c$  напряжённые состояния в обеих точках  $(0, 0)$  и  $(a_1 - 0, 0)$  равноопасны.

При  $0 \leq \Pi < \Pi_c$  следует ожидать зарождения разрушения в центре  $(0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

При  $\Pi > \Pi_c$  следует ожидать зарождения разрушения на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Нетрудно видеть, что максимум  $\sigma_{\max}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_c(r, z)$

$$\sigma_{\max} = \max \{ \sigma_c(0, 0), \sigma_c(a_1 - 0, 0) \}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 304/556

убывает, а являющаяся целевой функцией при прочностной оптимизации иллюминатора для высоких давлений давление разрушения

(3.9)

$$p_u = p\sigma_t/\sigma_{\text{emax}} = p\sigma_t/\max\{\sigma_e(0, 0), \sigma_e(a_1 - 0, 0)\}$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, возрастает ввиду формулы (3.6) на начальном этапе возрастания  $\Pi$  (от 0 до  $\Pi_e$ ).

В связи с ограниченностью берущегося по абсолютной величине, то есть положительным, предела прочности  $\sigma_e$  при одноосном сжатии должно существовать наилучшее значение

$$\Pi = \Pi_{\text{max}}$$

отношения

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$ , обеспечивающее минимум максимума  $\sigma_{\text{emax}}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$  и максимум давления разрушения  $p_u$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Из предыдущего ясно, что

$$\Pi_{\text{max}} \geq \Pi_e.$$

При последнем условии имеет место для максимума  $\sigma_{\text{emax}}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$  в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, формула

$$\sigma_{\text{emax}} = \max\{\sigma_e(0, 0), \sigma_e(a_1 - 0, 0)\} = \sigma_e(a_1 - 0, 0).$$

Вновь оказывается рациональной замена второго радикала в формуле (3.5) первым радикалом с последующим анализом формулы (3.7).

Дифференцирование формулы (3.7) по  $\sigma_r(a_1, 0)$  приводит к единственному критическому значению

$$\sigma_r(a_1, 0) = -(1 - \chi)\chi^{-1/2}\tau_{\text{max}},$$

обеспечивающему искомый экстремум максимума  $\sigma_e(a_1 - 0, 0)$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$  в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе.

Отсюда следует наилучшее значение

$$\Pi = \Pi_{\text{max}}$$

отношения

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$ , обеспечивающее минимум максимума  $\sigma_{\text{emax}}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$  и максимум давления разрушения  $p_u$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

(3.10)

$$\Pi_{\text{max}} = (3/4)(1 - \chi)\chi^{-1/2}a_1/h + p^{-1}\sigma_r(a_1, 0)|_{\Pi=0} = (3/4)(1 - \chi)\chi^{-1/2}a_1/h - 1/2 + (1/2)(1 + m)(1 + \mu) - (3/4)(1 + \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2a^2/[h^2(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1) - (1/2)m(a^4 - 2a_1^4)/[a^2(a^2 - a_1^2)].$$

Если и только если выполняется условие

$$\chi(1/p)\sigma_r(0, 0)|_{\Pi=0} - (1 - \chi)/2 (1/p)\sigma_r(a_1, 0)|_{\Pi=0} - 1 - \chi\mu/2 \geq 0,$$

то дополнительно существует и второе критическое значение

$$\Pi_{e2} = \{s_{ra1}^2 + (9/4)a_1^2/h^2 - [2\chi/(1 + \chi) s_{r0} - (1 - \chi)/(1 + \chi) s_{ra1} - (2 + \chi\mu)/(1 + \chi)]^2/[4\chi/(1 + \chi) (s_{r0} + s_{ra1}) - (4 + 2\chi\mu)/(1 + \chi)]\}$$

$$(s_{r0} = - 1/2 + (1/2)(1 + m)(1 + \mu) + (3/8)(1 - \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1);$$

$$s_{ra1} = - 1/2 + (1/2)(1 + m)(1 + \mu) - (3/4)(1 + \mu)a_1^2/h^2 + (3/2)(1 + \mu)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1) + (a_1^4 - a^4/2)/(a^2(a^2 - a_1^2)) m)$$

отношения бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$\Pi = p_1/p,$$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 305/556

при превышении которого место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_{\text{emax}}$  скачком (минуя промежуточные значения) переходит с края  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания в центр  $(0, h)$  полностью нагруженного внешнего основания с наибольшим равносильным (эквивалентным) напряжением

$$\sigma_{\text{emax}} = \sigma_e(0, h) = \chi\sigma_r(0, 0) - p(1 + \chi\mu/2) + 2\chi p_1.$$

Применение первой теории прочности, необходимо для определения опаснейшей точки равносильно преобразованной автором к виду с равносильным (эквивалентным) напряжением и единой базой сравнения

Результаты применения первой теории прочности (3.2), необходимо для определения опаснейшей точки равносильно преобразованной автором к виду с равносильным (эквивалентным) напряжением и единой базой сравнения и приводящей к упрощению выкладок, таковы.

При отсутствии превышения критического значения

$$\Pi = \Pi_e$$

отношения

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$(3.11)$$

$$0 \leq \Pi \leq \Pi_e = p^{-1} \{ \sigma_r(0, 0) |_{\Pi=0} - \tau_{\text{max}}^2 / [ \sigma_r(0, 0) - \sigma_r(a_1, 0) ] \}$$

максимум  $\sigma_{\text{emax}}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$  в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, имеет место в центре  $(0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания:

$$(3.12)$$

$$\sigma_{\text{emax}} = \sigma_e(0, 0) = \sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0).$$

При значениях отношения

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  между критическим  $\Pi_e$  и наилучшим  $\Pi_{\text{max}}$  значениями в обоих случаях включительно

$$\Pi_e \leq \Pi \leq \Pi_{\text{max}}$$

максимум  $\sigma_{\text{emax}}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$  в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, имеет место на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания:

$$(3.13)$$

$$\sigma_{\text{emax}} = \sigma_e(a_1 - 0, 0) = (1/2) \{ \sigma_r(a_1, 0) + [ \sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\text{max}}^2 ]^{1/2} \}.$$

Максимум  $\sigma_{\text{emax}}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$

$$\sigma_{\text{emax}} = \max \{ \sigma_e(0, 0), \sigma_e(a_1 - 0, 0) \}$$

убывает, а являющееся целевой функцией при прочностной оптимизации давление разрушения

$$p_u = p\sigma_t/\sigma_{\text{emax}} = p\sigma_t/\max \{ \sigma_e(0, 0), \sigma_e(a_1 - 0, 0) \}$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, возрастает при росте отношения

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  между нулём и наилучшим значением  $\Pi_{\text{max}}$  в обоих случаях включительно

$$0 \leq \Pi \leq \Pi_{\text{max}}.$$

Наибольшее давление разрушения

$$(3.14)$$

$$p_{\text{umax}} = p\sigma_t/\sigma_{\text{emax}}|_{\Pi=\Pi_{\text{max}}} = p\sigma_t/\max \{ \sigma_e(0, 0), \sigma_e(a_1 - 0, 0) \} |_{\Pi=\Pi_{\text{max}}} = p\sigma_t/\sigma_e(a_1 - 0, 0) |_{\Pi=\Pi_{\text{max}}} = 2p\sigma_t/\{ \sigma_r(a_1, 0) + [ \sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\text{max}}^2 ]^{1/2} \} |_{\Pi=\Pi_{\text{max}}}$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, достигается при наилучшем значении  $\Pi_{\max}$  отношения

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$ .

Если отношение

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  не меньше наилучшего значения  $\Pi_{\max}$

$$\Pi \geq \Pi_{\max},$$

то максимум  $\sigma_{\max}$  равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e(r, z)$  в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, имеет место в центре  $(0, h)$  полностью нагруженного внешнего основания:

$$(3.15)$$

$$\sigma_{\max} = \sigma_e(0, h) = \chi[\sigma_r(0, 0) - (1/2)\mu p + 2p_1].$$

Отметим следующие обстоятельства.

Формула в (3.11) для критического значения  $\Pi_c$  отношения

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  является точной.

Точная формула для наилучшего значения  $\Pi_{\max}$  отношения

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  имеет вид

$$(3.16)$$

$$\Pi_{\max} = (1/2)(1 + \chi)^{-1}p^{-1} \{ \sigma_r(a_1, 0) + (1 + 2\chi)\sigma_r(0, h) + [(\sigma_r(a_1, 0) + (1 + 2\chi)\sigma_r(0, h))^2 + 4(1 + \chi)\chi^{-1}\tau_{\max}^2 - \sigma_r(a_1, 0)\sigma_r(0, h) - \chi\sigma_r^2(0, h)]^{1/2} \}.$$

Но расчёты показывают, что наилучшее значение  $\Pi_{\max}$  отношения

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  по точной формуле (3.16) завышается примерно на 5 % простой приближённой формулой

$$\Pi_{\max} = (3/4)\chi^{-1/2}a_1/h$$

и выражается с погрешностью порядка 1 % довольно простой приближённой формулой

$$(3.17)$$

$$\Pi_{\max} = (57/80)\chi^{-1/2}a_1/h.$$

Расхождение критического значения  $\Pi_c$  по формулам (3.8) и (3.11) и расхождение наилучшего значения  $\Pi_{\max}$  по формулам (3.10) и (3.16) или (3.17) не слишком значительны, особенно это относится к критическому значению  $\Pi_c$  отношения

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$ .

Однако наилучшее значение  $\Pi_{\max}$  отношения

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  по формулам (3.16) или (3.17) к тому же является вторым критическим значением  $\Pi_{c2}$  в смысле скачкообразного перехода места наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, из неорганического стекла с края  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания в центр  $(0, h)$  полностью нагруженного равномерным давлением  $p$  внешнего основания, а не в смысле обеспечения того минимума прежнего максимума  $\sigma_e(a_1 - 0, 0)$  равносильного (эквивалентного) напряжения (на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания), который достигается при большем и уже не играющем роли значении отношения

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$ .

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 307/556

Впрочем, правомерность использования первой теории прочности (3.2) при таких напряжённых состояниях, когда именно сжимающее первое главное напряжение  $\sigma_1$  сопоставимо по величине с третьим главным напряжением  $\sigma_3$ , представляется сомнительной. По-видимому, критерий Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева (3.1) и критерий Кулона–Мора (3.3) приводят к более достоверным результатам.

Итак, применение созданного общего (полу)степенного метода даёт возможность предсказывать характер разрушения (по месту наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения) и давление разрушения существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при любом значении отношения

$$\Pi = p_1/p,$$

а также отыскивать переходные и экстремальные значения этого отношения.

Отметим, что при

$$0 \leq \Pi < \Pi_e,$$

когда равносильное (эквивалентное) напряжение максимально в точке (0, 0), разрушение должно носить обычный для изгибаемых круглых пластин характер радиального растрескивания с зарождением в этой точке.

Если же

$$\Pi > \Pi_e$$

и равносильное (эквивалентное) напряжение максимально в точке ( $a_1 - 0, 0$ ), то представляет интерес предсказание направления развития первой трещины в начальный момент разрушения.

Если на основании представлений о разрушении хрупких материалов, в частности неорганического стекла, считать нормаль к поверхности первой трещины в точке ( $a_1 - 0, 0$ ) её зарождения параллельной направлению алгебраически наибольшего главного напряжения  $\sigma_1$ , то оказывается, что первая трещина должна выходить из этой точки под углом к отрицательному направлению оси  $r$

$$(3.18) \\ \alpha = (1/2)\arctg[2\tau_{\max}/\sigma_r(a_1, 0)]$$

(аргумент и сам арктангенс отрицательны, при этом положительным, как обычно [302], считается поворот против часовой стрелки).

Иными словами, первая трещина должна быть направлена к оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, откалывая сегмент над центральной частью частично нагруженного внутреннего основания примерно по сферической поверхности, вписанной с соприкосновением по краю этой центральной части в коническую поверхность, вершина которой направлена в сторону внешнего основания, а образующая наклонена к основанию конуса под углом минус  $\alpha$ .

Геометрическая интерпретация результатов расчёта давления разрушения, величины и направления максимального напряжения в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом теле, в частности светопрозрачном элементе, по созданному общему (полу)степенному методу при использовании однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок дана (рисунок 3.1) для стекла К8, произвольных значений отношения  $\Pi = p_1/p$  и при

$$h:a_1:a = 2:1:(11/6)$$

(что соответствует размерам светопрозрачного элемента

$$h = 60 \text{ мм};$$

$$a = 55 \text{ мм};$$

$$a_1 = 30 \text{ мм}).$$

При этом второе критическое значение  $\Pi_{e2}$  по указанным здесь критериям не существует.

Нетрудно видеть, что по критериям предельных состояний (3.1) и (3.3) при

$$0 \leq \Pi \leq \Pi_e = 0.338$$

давление разрушения  $p_1$  вначале медленнее, а затем быстрее возрастает с 42.0 до 82.3 МПа, при этом должна образовываться система радиальных трещин с зарождением в центре

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 308/556

частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

При переходном значении отношения

$$\Pi = \Pi_e = 0.338$$

место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения скачком переходит из центра на край центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

При

$$\Pi > \Pi_e = 0.338$$

угол откола минус  $\alpha$  уменьшается с  $45^\circ$  вначале быстро, затем медленнее и составляет  $8^\circ$  при

$$\Pi = 3.$$

Разрушающее давление  $p_u$  растёт гораздо медленнее, чем на предыдущем участке  $0 \leq \Pi \leq \Pi_e = 0.338$ , и составляет 255 МПа при

$$\Pi = 2,$$

далее оно растёт ещё медленнее, при

$$\Pi = \Pi_{\max} = 2.83$$

достигая максимума, равного 272 МПа, после чего медленно убывает (менее чем на 1 МПа при  $\Pi = 3$ ).

По первой теории прочности (3.2) при

$$0 \leq \Pi \leq 0.338,$$

то есть на соответствующем критериям (4.1) и (4.3) отрезке, результаты ввиду формул (3.6) и (3.12) тождественны предыдущим, значение

$$\Pi = \Pi_e = 0.354$$

лишь менее чем на 5 % превышает предыдущее 0.338 по критериям (3.1) и (3.3), в очень небольших пределах до

$$\Pi = \Pi_e = 0.354$$

закономерности первого участка  $0 \leq \Pi \leq 0.338$  изменения  $\Pi$  сохраняются.

Затем место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения таким же скачком переходит в точку  $(a_1 - 0, 0)$ , меняя характер разрушения. Углы откола те же, что и выше, а давление разрушения  $p_u$  растёт хотя и медленнее, чем в конце первого участка, но быстрее, чем по критериям (3.1) и (3.3) (расхождение малосущественно – в пределах до 10 % – при

$$\Pi \leq 1,$$

далее резко возрастает).

Давление разрушения  $p_u$  растёт с учётом формулы (3.13) почти линейно до 461 МПа при

$$\Pi = \Pi_{\max} = 2.45,$$

затем резко убывает по гиперболическому закону с учётом формулы (3.14) до 390 МПа при

$$\Pi = 3.$$

Максимум давления разрушения  $p_u$  оказывается уже резким, и  $\Pi_{\max} = \Pi_{e2}$  есть и второе критическое значение отношения  $\Pi$ , которое соответствует скачкообразному переходу места наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения из точки  $(a_1 - 0, 0)$  в точку  $(0, h)$ .

Дальнейшее увеличение отношения  $\Pi = p_1/p$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  ведёт к убыванию давления разрушения  $p_u$  и не имеет практического смысла.

Применение приведённого критерия Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева в размерном виде

Приведённый критерий Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева (2.136) в размерном виде

$$(3.19)$$

$$\sigma_e = (1 - \chi) \max \{ |\sigma_{1d}|; |\sigma_{2d}|; |\sigma_{3d}| \} + 2^{-1/2} \chi [(\sigma_{1d} - \sigma_{2d})^2 + (\sigma_{2d} - \sigma_{3d})^2 + (\sigma_{3d} - \sigma_{1d})^2]^{1/2} = \sigma_t$$

с эквивалентным преобразованием (2.129) приведением к пределу прочности при растяжении  $\sigma_t$

$$(3.20)$$

$$\sigma_{jd} = \sigma_j, \sigma_j \geq 0;$$

$$\sigma_{jd} = \chi \sigma_j, \sigma_j \leq 0$$

даёт следующие результаты.

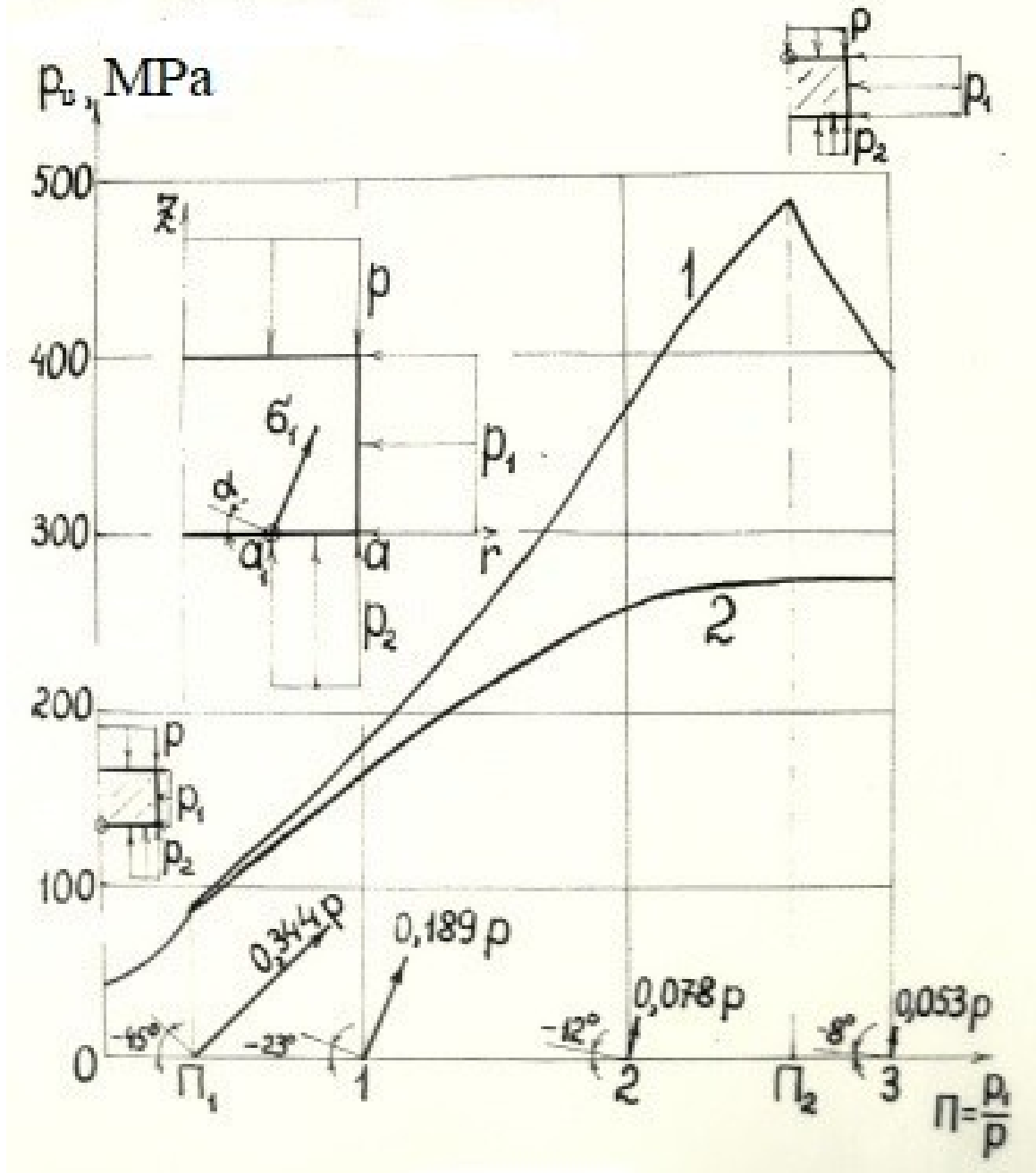


Рисунок 3.1. Влияние относительной (к внешнему давлению  $p$ ) величины  $\Pi = r_1/p$  давления  $p_1$ , приложенного к боковой поверхности нагруженного по схеме основного типа в технике высоких давлений (с повышенным периферическим противодействием) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из неорганического стекла К8 с соотношением размеров  $h:a_1:a = 2:1:(11/6)$ , на величину и ориентацию разрушающего главного напряжения  $\sigma_1$  и на вероятный угол  $\alpha$  скалывания далее растрескиваемого сегмента у края ненагруженной центральной части частично нагруженного основания, на положение (кружок в центре или на краю центральной части частично нагруженного основания) места наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения в теле (светопрозрачном элементе) и на давление его разрушения  $p_u$  по первой теории прочности (и приведённой) и приведённому критерию Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева (кривая 1), по критериям Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева, Кулона–Мора, приведённой третьей теории прочности и приведённой четвёртой теории прочности (кривая 2).

Существует критическое значение

$$(3.21)$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 310/556

$\Pi_e = [\sigma_r^2(0, 0) - (1 - \chi^2)\sigma_r(0, 0)\sigma_r(a_1, 0) - \chi^2\sigma_r^2(a_1, 0) + (1 + \chi^2)^2\tau_{\max}^2] / \{(1 + \chi^2)p[\sigma_r(0, 0) - \sigma_r(a_1, 0)]\} |_{\Pi=0}$   
 отношения бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$\Pi = p_1/p,$$

при превышении которого место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_{e\max}$  скачком (минуя промежуточные значения) переходит из центра  $(0, 0)$  частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, с

$$\sigma_{e\max} = \sigma_e(0, 0) = \sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0)$$

на край  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания с максимумом равносильного (эквивалентного) напряжения в теле (элементе)

$$\sigma_{e\max} = \sigma_e(a_1 - 0, 0) = (1/2)(1 - \chi) \{ \sigma_r(a_1, 0) + [\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2]^{1/2} \} + 2^{-1/2}\chi \{ [(1/2)(\sigma_r(a_1, 0) + (\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2)^{1/2}) - \chi\sigma_r(a_1, 0)]^2 + [(1/2)(1 - \chi)\sigma_r(a_1, 0) + (1/2)(1 + \chi)(\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2)^{1/2}]^2 \}^{1/2}.$$

Здесь с учётом решения задачи по методу конечных элементов (МКЭ) принято, что на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, действует сдвиговое напряжение

$$\tau_{rz}(a_1 - 0, 0) = \tau_{\max},$$

а главные напряжения для формул (3.20) найдены известными методами [302, 319, 321].

По данным многочисленных расчётов замена под радикалом с малым множителем  $2^{-1/2}\chi$  суммы первых двух квадратов третьим квадратом влечёт погрешность до 1...2 % при определении равносильного (эквивалентного) напряжения, и можно принять

$$(3.22)$$

$$\sigma_{e\max} = \sigma_e(a_1 - 0, 0) = (1/2)(1 - \chi^2)\sigma_r(a_1, 0) + (1/2)(1 + \chi^2)[\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2]^{1/2}.$$

Существует и наилучшее значение

$$(3.23)$$

$$\Pi_{\max} = (3/4)\chi^{-1}a_1/h$$

отношения бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$\Pi = p_1/p,$$

при котором давление разрушения

$$(3.24)$$

$$p_u = \sigma_t / [(3/4)\chi^{1/2}(a_1/h) + (\chi/p)\sigma_r(0, 0)] |_{\Pi=0} - (\chi^2 + \mu\chi/2)$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, максимально, а при превышении которого место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_{e\max}$  скачком (минуя промежуточные значения) переходит с края  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания в центр  $(0, h)$  полностью нагруженного внешнего основания с наибольшим равносильным (эквивалентным) напряжением

$$(3.25)$$

$$\sigma_{e\max} = \sigma_e(0, h) = \chi^2[p_1 + \sigma_r(0, 0)] |_{\Pi=0} + [1 - (2 + \mu/2)\chi]\chi p.$$

Применение приведённой первой теории прочности в размерном виде

Приведённая первая теория прочности (2.125) в размерном виде с учётом формул (3.20)

$$(3.26)$$

$$\sigma_e = \max \{ |\sigma_{1d}|; |\sigma_{2d}|; |\sigma_{3d}| \} = \sigma_t$$

равносильна классической первой теории прочности, отличается от неё введением равносильного (эквивалентного) напряжения и единой базы его сравнения с предельным напряжением и даёт точно такие же итоги.

Существует критическое значение

$$(3.27)$$

$$\Pi_e = p^{-1} \{ \sigma_r(0, 0) |_{\Pi=0} - \tau_{\max}^2 / [\sigma_r(0, 0) - \sigma_r(a_1, 0)] \}$$

отношения бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$\Pi = p_1/p,$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 311/556

при превышении которого место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_{\text{emax}}$  скачком (минуя промежуточные значения) переходит из центра (0, 0) частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, с

$$\sigma_{\text{emax}} = \sigma_e(0, 0) = \sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0)$$

на край (a<sub>1</sub> - 0, 0) ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания с наибольшим равносильным (эквивалентным) напряжением

$$\sigma_{\text{emax}} = \sigma_e(a_1 - 0, 0) = (1/2)\{\sigma_r(a_1, 0) + [\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\text{max}}^2]^{1/2}\}.$$

Здесь с учётом решения задачи по методу конечных элементов (МКЭ) принято, что на краю (a<sub>1</sub> - 0, 0) ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, действует сдвиговое напряжение

$$\tau_{rz}(a_1 - 0, 0) = \tau_{\text{max}},$$

а главные напряжения для формул (3.20) найдены известными методами [302, 319, 321].

Существует и наилучшее значение  $\Pi_{\text{max}}$  (здесь приводится завышающая итог примерно на 5 % простейшая формула), также являющееся вторым критическим значением  $\Pi_{e2}$ ,

$$(3.28)$$

$$\Pi_{\text{max}} = \Pi_{e2} = (3/4)\chi^{1/2}a_1/h$$

отношения бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$\Pi = p_1/p,$$

при котором давление разрушения

$$(3.29)$$

$$p_u = p\sigma_t/\sigma_{\text{emax}} = p\sigma_t/\max\{\sigma_e(0, 0), \sigma_e(a_1 - 0, 0)\} = p\sigma_t/\sigma_e(a_1 - 0, 0) = 2p\sigma_t/\{\sigma_r(a_1, 0) + [\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\text{max}}^2]^{1/2}\}$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, максимально, а при превышении которого место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_{\text{emax}}$  скачком (минуя промежуточные значения) переходит с края (a<sub>1</sub> - 0, 0) ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания в центр (0, h) полностью нагруженного внешнего основания с наибольшим равносильным (эквивалентным) напряжением

$$(3.30)$$

$$\sigma_{\text{emax}} = \sigma_e(0, h) = \chi[p_1 + \sigma_r(0, 0)|_{\Pi=0} - \mu p/2].$$

Применение приведённой третьей теории прочности в размерном виде

Приведённая третья теория прочности (2.130) в размерном виде с учётом формул (3.20)

$$(3.31)$$

$$\sigma_e = \sigma_{1d} - \sigma_{3d} = \sigma_t$$

даёт такие итоги.

Существует критическое значение

$$(3.32)$$

$$\Pi_c = [\sigma_r^2(0, 0) - (1 - \chi)\sigma_r(0, 0)\sigma_r(a_1, 0) - \chi\sigma_r^2(a_1, 0) + (1 + \chi)^2\tau_{\text{max}}^2]/\{(1 + \chi)p[\sigma_r(0, 0) - \sigma_r(a_1, 0)]\}|_{\Pi=0}$$

отношения бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$\Pi = p_1/p,$$

при превышении которого место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_{\text{emax}}$  скачком (минуя промежуточные значения) переходит из центра (0, 0) частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, с

$$\sigma_{\text{emax}} = \sigma_e(0, 0) = \sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0)$$

на край (a<sub>1</sub> - 0, 0) ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания с наибольшим равносильным (эквивалентным) напряжением

$$(3.33)$$

$$\sigma_{\text{emax}} = \sigma_e(a_1 - 0, 0) = (1/2)(1 - \chi)\sigma_r(a_1, 0) + (1/2)(1 + \chi)[\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\text{max}}^2]^{1/2}.$$

Здесь с учётом решения задачи по методу конечных элементов (МКЭ) принято, что на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, действует сдвиговое напряжение

$$\tau_{rz}(a_1 - 0, 0) = \tau_{\max},$$

а главные напряжения для формул (3.20) найдены известными методами [302, 319, 321]. Существует и наилучшее значение

$$\Pi_{\max} = (3/4)(1 - \chi)\chi^{-1/2}(a_1/h) + p^{-1}\sigma_r(a_1, 0)|_{\Pi=0} \quad (3.34)$$

отношения бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$\Pi = p_1/p,$$

при котором давление разрушения

$$p_u = 2p\sigma_t / \{(1 - \chi)\sigma_r(a_1, 0) + (1 + \chi)[\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\max}^2]^{1/2}\} \quad (3.35)$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, максимально.

Если и только если выполняется условие

$$[\sigma_r(0, 0) + \sigma_r(a_1, 0)]|_{\Pi=0} \geq (1 + \mu/2)p, \quad (3.36)$$

то дополнительно существует и второе критическое значение

$$\Pi_{e2} = 8\chi^{-1}(1 + \chi)^{-1}p^{-1}\tau_{\max}^2 / \{[\sigma_r(0, 0) + \sigma_r(a_1, 0)]|_{\Pi=0} - (1 + \mu/2)p\} \quad (3.37)$$

отношения бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$\Pi = p_1/p,$$

при превышении которого место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_{e\max}$  скачком (минуя промежуточные значения) переходит с края  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания в центр  $(0, h)$  полностью нагруженного внешнего основания с наибольшим равносильным (эквивалентным) напряжением

$$\sigma_{e\max} = \sigma_e(0, h) = \chi[p_1 + \sigma_r(0, 0)]|_{\Pi=0} - (1 + \mu/2)p. \quad (3.38)$$

#### Применение приведённой четвёртой теории прочности в размерном виде

Приведённая четвёртая теория прочности (2.130) в размерном виде с учётом формул (3.20)

$$\sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_{1d} - \sigma_{2d})^2 + (\sigma_{2d} - \sigma_{3d})^2 + (\sigma_{3d} - \sigma_{1d})^2]^{1/2} = \sigma_t \quad (3.39)$$

при такой же замене подкоренного выражения, как при использовании приведённого критерия Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева в размерном виде, даёт с инженерной точностью такие же итоги, как и приведённая третья теория прочности в размерном виде.

Существует критическое значение

$$\Pi_e = [\sigma_r^2(0, 0) - (1 - \chi)\sigma_r(0, 0)\sigma_r(a_1, 0) - \chi\sigma_r^2(a_1, 0) + (1 + \chi)^2\tau_{\max}^2] / \{(1 + \chi)p[\sigma_r(0, 0) - \sigma_r(a_1, 0)]\}|_{\Pi=0} \quad (3.40)$$

отношения бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$\Pi = p_1/p,$$

при превышении которого место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_{e\max}$  скачком (минуя промежуточные значения) переходит из центра  $(0, 0)$  частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, с

$$\sigma_{e\max} = \sigma_e(0, 0) = \sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0)$$

на край  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания с наибольшим равносильным (эквивалентным) напряжением

$$(3.41)$$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 313/556

$$\sigma_{\text{emax}} = \sigma_{\text{e}}(a_1 - 0, 0) = 2^{-1/2} \{ [(1/2)(\sigma_r(a_1, 0) + (\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\text{max}}^2)^{1/2}) - \chi\sigma_t(a_1, 0)]^2 + [(1/2)\chi(\sigma_r(a_1, 0) - (\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\text{max}}^2)^{1/2}) - \chi\sigma_t(a_1, 0)]^2 + [(1/2)(1 - \chi)\sigma_r(a_1, 0) + (1/2)(1 + \chi)(\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\text{max}}^2)^{1/2}]^2 \}^{1/2}.$$

Здесь с учётом решения задачи по методу конечных элементов (МКЭ) принято, что на краю  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, действует сдвиговое напряжение

$$\tau_{tz}(a_1 - 0, 0) = \tau_{\text{max}},$$

а главные напряжения для формул (3.20) найдены известными методами [302, 319, 321].

По данным многочисленных расчётов замена в фигурных скобках суммы первых двух квадратов третьим квадратом допустима с инженерной точностью при определении равносильного (эквивалентного) напряжения, и можно принять

$$(3.42)$$

$$\sigma_{\text{emax}} = \sigma_{\text{e}}(a_1 - 0, 0) = (1/2)(1 - \chi)\sigma_r(a_1, 0) + (1/2)(1 + \chi)[\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\text{max}}^2]^{1/2}.$$

Существует и наилучшее значение

$$(3.43)$$

$$\Pi_{\text{max}} = (3/4)(1 - \chi)\chi^{1/2}(a_1/h) + p^{-1}\sigma_r(a_1, 0)|_{\Pi=0}$$

отношения бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$\Pi = p_1/p,$$

при котором давление разрушения

$$(3.44)$$

$$p_u = 2p\sigma_t / \{ (1 - \chi)\sigma_r(a_1, 0) + (1 + \chi)[\sigma_r^2(a_1, 0) + 4\tau_{\text{max}}^2]^{1/2} \}$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, максимально.

Если и только если выполняется условие

$$(3.45)$$

$$[\sigma_r(0, 0) + \sigma_r(a_1, 0)]|_{\Pi=0} > (1 + \mu/2)p,$$

то дополнительно существует и второе критическое значение

$$(3.46)$$

$$\Pi_{\text{e2}} = 8\chi^{-1}(1 + \chi)^{-1}p^{-1}\tau_{\text{max}}^2 / \{ [\sigma_r(0, 0) + \sigma_r(a_1, 0)]|_{\Pi=0} - (1 + \mu/2)p \}$$

отношения бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$

$$\Pi = p_1/p,$$

при превышении которого место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_{\text{emax}}$  скачком (минуя промежуточные значения) переходит с края  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания в центр  $(0, h)$  полностью нагруженного внешнего основания с наибольшим равносильным (эквивалентным) напряжением

$$(3.47)$$

$$\sigma_{\text{emax}} = \sigma_{\text{e}}(0, h) = \chi[p_1 + \sigma_r(0, 0)]|_{\Pi=0} - (1 + \mu/2)p.$$

Критерий Кулона–Мора (1.3) для частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, даёт результаты, идентичные даваемым приведённой третьей теорией прочности в размерном виде, а для внешнего основания, где даже алгебраически наибольшее первое главное напряжение  $\sigma_1$  оказывается сжимающим, неприемлем.

Например, он даёт

$$\sigma_{\text{e}}(0, h) = -p + \chi[p_1 + \sigma_r(0, 0)]|_{\Pi=0} - \mu p/2 < 0,$$

что нельзя сопоставлять с положительным пределом прочности на растяжение  $\sigma_t$ , как предписывает критерий Кулона–Мора (1.3).

Все рассмотренные здесь критерии предельных состояний показывают, что при превышении критического значения  $\Pi_{\text{e}}$  отношения

$$\Pi = p_1/p$$

бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  место наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_{\text{emax}}$  скачком (минуя промежуточные значения) переходит из

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 314/556

центра  $(0, 0)$  частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, с

$$\sigma_{\text{emax}} = \sigma_e(0, 0) = \sigma_r(0, 0) = \sigma_t(0, 0)$$

на край  $(a_1 - 0, 0)$  ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания с наибольшим равносильным (эквивалентным) напряжением

$$\sigma_{\text{emax}} = \sigma_e(a_1 - 0, 0).$$

Это приводит к изменению характера разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента: вместо его радиального растрескивания с зарождением в центре основания с ненагруженной центральной частью можно предсказать скалывание далее растрескиваемого сегмента над этой частью под отрицательным углом

(3.48)

$$\alpha = 0.5 \arctg[2\tau_{\text{max}}/\sigma_r(a_1 - 0, 0)]$$

(по правилу знаков [302]) к отрицательному направлению оси  $Oz$ .

Геометрическое изображение полученных результатов при соотношениях

$$h : a_1 : a = 2 : 1 : (11/6)$$

(см. рис. 3.1) показывает следующее:

увеличение бокового давления на стеклоэлемент примерно до  $1/3$  внешнего давления сохраняет тождественность результатов всех использованных критериев предельных состояний и приводит к удвоению разрушающего давления и к скачку места наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения из центра на край ненагруженной центральной части частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нагруженного по схеме основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением;

дальнейшее увеличение бокового давления до внешнего давления приводит к новому удвоению давления разрушения и к расхождению результатов по различным критериям предельных состояний в пределах 10 %;

дальнейшее увеличение отношения  $\Pi = p_1/p$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$  до наилучшего по совокупности критериев предельных состояний значения 2.6 приводит к дополнительному повышению разрушающего давления – в 1.6 раза с замедлением по критерию Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева, приведённым третьей и четвёртой теориям прочности, которые обе проверены критерием Кулона–Мора в пределах его приемлемости, и почти равномерному в 2.5 раза с резким максимумом и интенсивным последующим уменьшением по гиперболическому закону вследствие скачка места наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения в теле (элементе) в центр внешнего основания по приведённому критерию Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева и первой теории прочности (и приведённой), причём относительные различия результатов критериев предельных состояний внутри каждой из этих обеих групп находятся в пределах 1...2 %.

Таким образом, применение созданных аналитической методологии макроэлементов, общей теории предельных состояний и общей теории прочности с их общими методологиями и методами и приведением критериев предельных состояний материала к всеобщим прочностным законам природы даёт возможность предсказывать и объяснять характер (по месту наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения) и давление разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического стекла, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением при любом значении отношения  $\Pi = p_1/p$  бокового давления  $p_1$  к внешнему давлению  $p$ , а также отыскивать критические и экстремальные значения этого отношения.

Даже столь малая величина отношения  $\chi$  пределов прочности материала при одноосных растяжении и сжатии оказывается весьма существенной.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 315/556

А приложение к именно существенно трёхмерному сплошному цилиндрическому телу, в частности светопрозрачному элементу из неорганического стекла, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием бокового давления с превышением критического значения его отношения к внешнему давлению качественно меняет характер разрушения тела (элемента) и при наилучшей величине названного отношения повышает давление разрушения на порядок.

### **3.2. Создание общих теории и методов обобщения критериев предельных состояний и прочности линейно-функциональным преобразованием главных напряжений с деформированием и/или движением (смещением, вращением) предельной поверхности на случай анизотропии и/или различных сопротивлений материала растяжению и сжатию для исследований прочности органического стекла при сложном напряжённом состоянии**

В лаборатории прочности кафедры сопротивления материалов Сумского филиала Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина выполнен комплекс исследований жёсткости и прочности стеклоэлементов в различных конструкциях иллюминаторов, а также прочности и разрушения основных светопрозрачных материалов.

По инициативе А. А. Каминского на установке О. Е. Ольховика (Ленинградское высшее военно-инженерное строительное училище) были выполнены экспериментальные исследования прочности органического стекла при плоском напряжённом состоянии, на основе которых автор осуществил соответствующие теоретические исследования прочности органического стекла при сложном напряжённом состоянии [144].

В процессе исследований первоначально можно ограничиться рассмотрением прочности органического стекла при плоском напряжённом состоянии и далее перейти к сложному напряжённом состоянию с помощью известных или новых критериев прочности.

Плоское напряжённое состояние можно характеризовать значениями могущих быть ненулевыми главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ . Поэтому по предельной кривой прочности в координатах  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  можно определить такие сочетания значений могущих быть ненулевыми главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , при которых наступает разрушение.

Цель этих исследований прочности органического стекла – построить предельную кривую прочности и описать её аналитически с помощью известных или новых критериев прочности.

Чтобы построить предельную кривую, необходимо располагать данными о прочности образцов во всех четырёх квадрантах плоскости могущих быть ненулевыми главных напряжений при различных напряжённых состояниях, например двухосном растяжении, двухосном сжатии и сдвиге.

С учётом изотропности органического стекла его предельная поверхность должна быть симметричной относительно главной диагонали пространства главных напряжений, а при двухосном напряжённом состоянии предельная кривая должна быть симметричной относительно главной диагонали плоскости могущих быть ненулевыми главных напряжений, то есть биссектрисы угла между осями  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  и её продолжения в третьем квадранте.

Для испытаний использовались трубчатые образцы внутренним радиусом  $v = 6$  мм и толщиной стенки  $w = 1$  мм, нагружаемые внешним  $p$  и внутренним  $p + \Delta p$  (с избыточным  $\Delta p$  по сравнению с внешним  $p$ ) давлениями.

Рассмотрим напряжённое состояние трубчатых образцов.

Полагая, что толщина стенки  $w$  мала по сравнению с радиусом  $v$ , для радиального, тангенциального (окружного) и осевого напряжений в случае нагружения образца только внутренним давлением  $\Delta p$  имеем:

$$(3.49)$$

$$\sigma_r^* = 0;$$

$$\sigma_t^* = \Delta p v / w = \sigma_1;$$

$$\sigma_z^* = \Delta p v / (2w) = \sigma_2;$$

при нагружении внешним  $p$  и внутренним  $p + \Delta p$  давлениями

$$(3.50)$$

$$\sigma_r = -p + \sigma_r^* = -p;$$

$$\sigma_t = -p + \sigma_t^* = -p + \Delta p v / w = \sigma_1;$$

$$\sigma_z = -p + \sigma_z^* = -p + \Delta p v / (2w) = \sigma_2.$$

Следовательно, при  $p = 0$  осуществляется двухосное растяжение, причём

$$\sigma_1 = 2\sigma_2,$$

$$\sigma_3 = 0;$$

$$(3.51)$$

$$\sigma_1 = \sigma_t = \Delta p v / w;$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = \Delta p v / (2w);$$

$$\sigma_3 = \sigma_r = 0;$$

при  $p = \Delta p v / (2w)$  имеет место чистый сдвиг, причём

$$\sigma_1 = -\sigma_3,$$

$$\sigma_2 = 0;$$

$$(3.52)$$

$$\sigma_1 = \sigma_t = \Delta p v / (2w);$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = 0;$$

$$\sigma_3 = \sigma_r = -\Delta p v / (2w);$$

при  $p = \Delta p v / w$  получается двухосное сжатие, причём

$$\sigma_1 = 0,$$

$$\sigma_3 = 2\sigma_2;$$

$$(3.53)$$

$$\sigma_1 = \sigma_t = 0;$$

$$\sigma_2 = \sigma_z = -\Delta p v / (2w);$$

$$\sigma_3 = \sigma_r = -\Delta p v / w.$$

Нагружением образца внешним и внутренним избыточным давлениями в указанных соотношениях можно было бы определить точки на предельной кривой, соответствующие формулам (3.51) – (3.53), и использовать эти точки для построения предельной кривой.

Однако создание внешнего и внутреннего давлений в заданных соотношениях сопряжено с техническими трудностями.

Поэтому испытания образцов проводили следующим образом.

Извне и внутри образца создавалось давление  $p$ , затем внешнее давление оставалось без изменений, а внутри образец догружался избыточным давлением  $\Delta p$  до разрушения.

Значения  $p$  и  $\Delta p$  фиксировали, причём значению  $\Delta p$  соответствовало полное разрушение образца.

Для обработки результатов испытаний применяли следующую методику.

Сначала определяли тангенциальное (окружное)  $\sigma_t^*$  и осевое  $\sigma_z^*$  напряжения в образцах при разрушении в предположении действия только избыточного внутреннего давления  $\Delta p$ .

Затем строили график, на оси абсцисс которого откладывали внешнее давление  $p$ , а на оси ординат – тангенциальное (окружное)  $\sigma_t^*$  и осевое  $\sigma_z^*$  напряжения.

Далее из начала координат проводили биссектрису первого квадранта (под углом  $45^\circ$  к оси абсцисс), пересекающую кривые  $\sigma_t^*$  и  $\sigma_z^*$ , и рассматривали предельные напряжённые состояния, которым на графике соответствовали точки пересечения этой биссектрисы с началом координат и с кривыми  $\sigma_t^*$  и  $\sigma_z^*$ .

В начале координат  $p = 0$ , поэтому согласно уравнениям (3.49) и (3.51) такому давлению соответствовали напряжения разрушения

$$\sigma_1 = 2\sigma_2,$$

$$\sigma_3 = 0.$$

То есть в этой точке осуществилось напряжённое состояние двухосного растяжения, причём

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_t^* = \Delta p v / w; \\ \sigma_2 &= \sigma_z^* = \Delta p v / (2w) = \sigma_t^* / 2; \\ \sigma_3 &= \sigma_r = 0.\end{aligned}$$

В точке пересечения проведённой биссектрисы с кривой  $\sigma_z^*$  согласно уравнениям (3.49), (3.50) и (3.52) такому давлению  $p = \Delta p v / (2w)$  соответствовало напряжённое состояние чистого сдвига, причём

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\sigma_3, \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_1 &= \sigma_t = p = \Delta p v / (2w); \\ \sigma_2 &= \sigma_z = 0; \\ \sigma_3 &= \sigma_r = -p = -\Delta p v / (2w).\end{aligned}$$

В точке пересечения биссектрисы с кривой  $\sigma_t^*$  по уравнениям (3.49), (3.50) и (3.53) такому давлению  $p = \Delta p v / w$  соответствовало напряжённое состояние двухосного сжатия, причём

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0, \\ \sigma_3 &= 2\sigma_2; \\ \sigma_1 &= \sigma_t = 0; \\ \sigma_2 &= \sigma_z = -\Delta p v / (2w) = -p/2; \\ \sigma_3 &= \sigma_r = -\Delta p v / w = -p.\end{aligned}$$

Таким образом, с учётом симметричности предельной кривой определены шесть точек, характеризующих напряжённые состояния во всех четырёх квадрантах – по две точки в первом и третьем квадрантах, где отражаются соответственно области двухосного растяжения и двухосного сжатия, и во втором и четвёртом квадрантах по одной точке, где имеет место чистый сдвиг.

Испытания проводились на установке, схема которой показана на рис. 3.2, при температуре 277 К.

Данные этих испытаний приведены в таблице 3.1, где в графе для  $\Delta p$  указаны средние арифметические значения для пяти испытанных при данном внешнем давлении  $p$  образцов.

По данным, приведённым в таблице 3.1, был построен рис. 3.3, из которого определено следующее.

В начале координат  $p = 0$ , поэтому согласно уравнениям (3.49) и (3.51) такому давлению соответствовали напряжения разрушения

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2\sigma_2, \\ \sigma_3 &= 0,\end{aligned}$$

то есть в этой точке осуществилось напряжённое состояние двухосного растяжения, причём

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_t^* = \Delta p v / w = 68.4 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= \sigma_z^* = \Delta p v / (2w) = \sigma_t^* / 2 = 34.2 \text{ МПа}; \\ \sigma_3 &= \sigma_r = 0.\end{aligned}$$

В точке пересечения проведённой биссектрисы с кривой  $\sigma_z^*$  согласно уравнениям (3.49), (3.50) и (3.52) такому давлению  $p = \Delta p v / (2w)$  соответствовали напряжения чистого сдвига, причём

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -\sigma_3, \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_1 &= \sigma_t = p = \Delta p v / (2w) = 39 \text{ МПа}; \\ \sigma_2 &= \sigma_z = 0; \\ \sigma_3 &= \sigma_r = -p = -\Delta p v / (2w) = -39 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

В точке пересечения проведённой биссектрисы с кривой  $\sigma_t^*$  согласно уравнениям (3.49), (3.50) и (3.53) такому давлению  $p = \Delta p v / w$  соответствовали напряжения двухосного сжатия, причём  $\sigma_1 = 0$ ,  $\sigma_3 = 2\sigma_2$ :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_t = 0; \\ \sigma_2 &= \sigma_z = -\Delta p v / (2w) = -p/2 = -43 \text{ МПа}; \\ \sigma_3 &= \sigma_r = -p = -\Delta p v / w = -86 \text{ МПа}.\end{aligned}$$

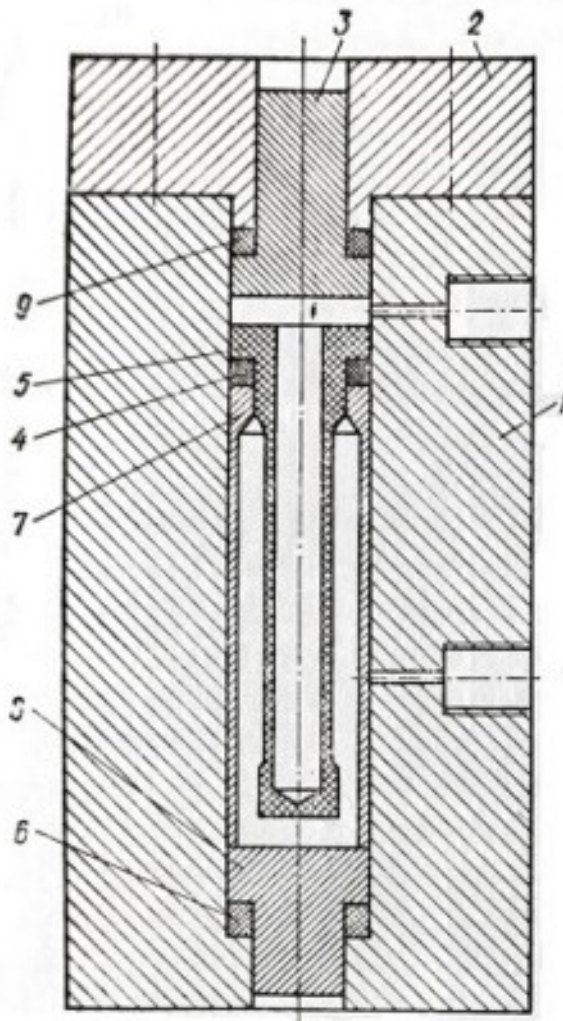


Рис. 3.2. Схема установки для испытания трубчатых образцов:  
 1 – корпус; 2 – крышка; 3, 8 – заглушки; 4, 6, 9 – уплотнения;  
 5 – образец; 7 – стакан.

Рисунок 3.2. Схема установки для испытания трубчатых образцов:  
 1 – корпус; 2 – крышка; 3, 8 – заглушки; 4, 6, 9 – уплотнения; 5 – образец; 7 – стакан.

Таблица 3.1. Данные испытаний предельных напряжённых состояний образцов из органического стекла.

$p$ , МПа	$\Delta p$ , МПа	$\sigma_z^*$ опыт, МПа	$\sigma_t^*$ опыт, МПа	$\sigma_z^*$ теория, МПа	$\sigma_t^*$ теория, МПа	Расхождение, %
0	5.70	34.2	68.4	35.4	70.9	3.6
50	6.40	38.4	76.8	38.7	77.4	0.8
100	7.42	44.5	89.0	42.0	84.0	5.7
150	7.80	46.8	93.6	45.2	90.5	3.3
200	8.16	49.0	98.0	48.5	97.0	1.0
250	8.25	49.5	99.0	51.8	103.5	4.6

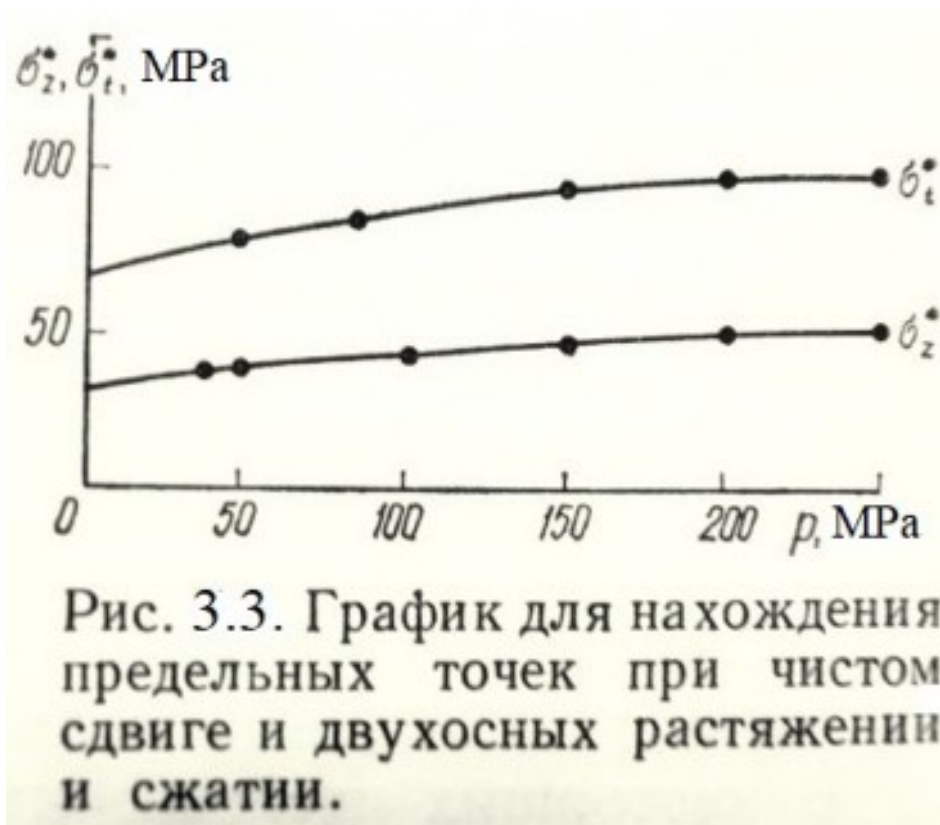


Рисунок 3.3. График для нахождения предельных точек при чистом сдвиге и двухосных растяжении и сжатии.

Полученные экспериментальные данные позволили построить предельные линии (рис. 3.4). Для аналитического представления предельной кривой прочности органического стекла из широко применяемых критериев прочности [111, 204, 238, 302] выбран двухпараметрический критерий Писаренко–Лебедева.

С инженерной точностью подобные итоги даёт обобщение четвёртой теории прочности. Анализ известных критериев прочности и практики их использования [111, 204, 238, 302] показывает, что для пластичных конструкционных материалов обычно применяются третья теория прочности (критерий наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$$

и четвёртая теория прочности (критерий удельной энергии формоизменения, или критерий октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки

$$\sigma_e = 2^{-1/2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_s,$$

а для хрупких материалов обычно применяются первая теория прочности (критерий наибольших нормальных напряжений) да-Винчи–Галилея–Лейбница–Ламе и критерий Кулона–Мора

$$\sigma_e = \sigma_1 - \chi\sigma_3 = \sigma_t,$$

где

$\sigma_e$  – эквивалентное одноосное напряжение;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ) – главные напряжения в соответствующей точке деформированного тела;

$\sigma_s, \sigma_u$  – предел текучести и предел прочности пластичного материала;

$\sigma_t, \sigma_c$  – пределы прочности хрупкого материала при одноосных растяжении и сжатии;

$\chi$  – доля пластичности материала тела, при условии  $\sigma_t \leq \sigma_c$

$$\chi = \sigma_t / \sigma_c;$$

$1 - \chi$  – доля хрупкости материала тела.

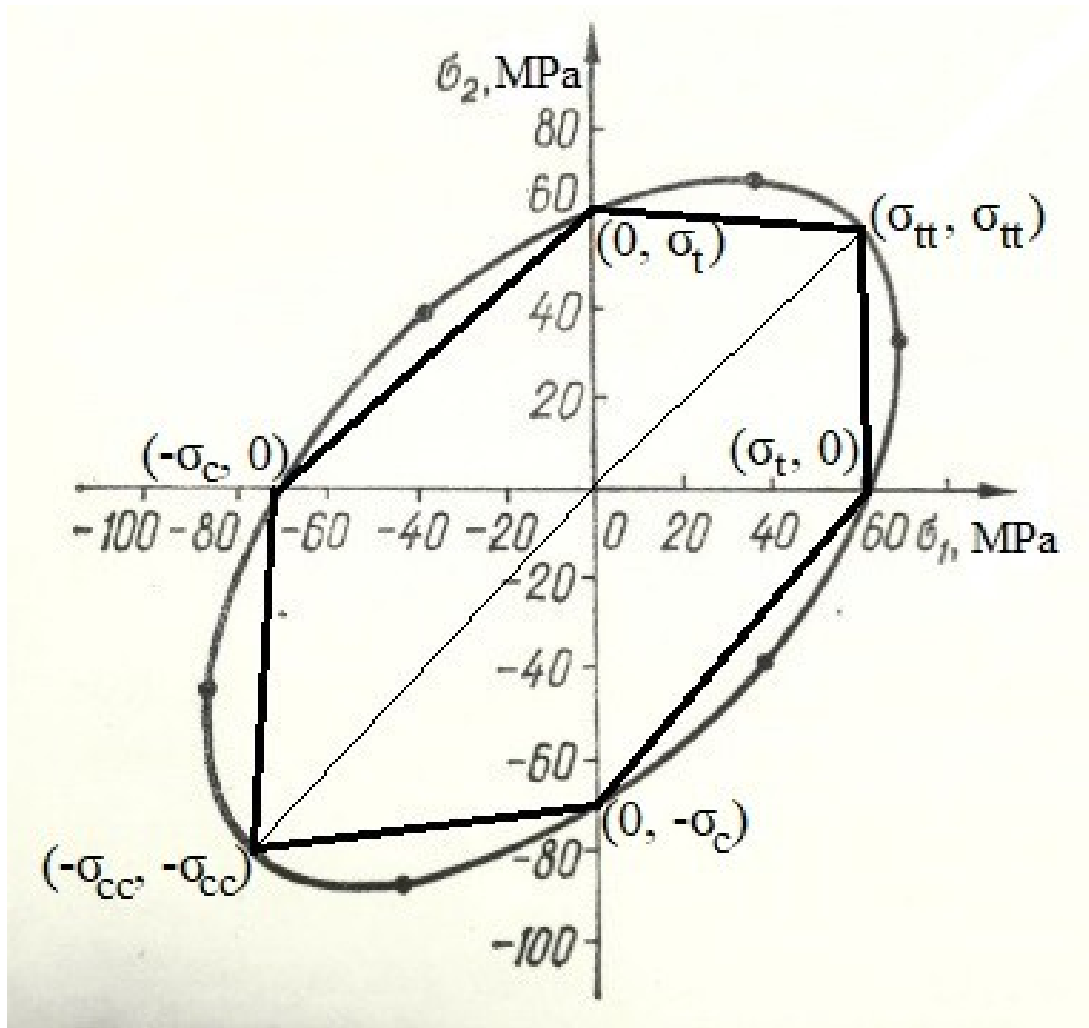


Рисунок 3.4. Предельная ломаная (по обобщению третьей теории прочности) и предельная кривая (по критерию Писаренко–Лебедева и по обобщению четвёртой теории прочности) органического стекла.

Среди известных теорий и критериев прочности и предельных состояний наилучшие результаты даёт общая теория Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева о совместном влиянии сопротивления материала нормальным и сдвиговым нагрузкам на наступление предельного его состояния.

Учёные предложили искать критерии прочности в виде инвариантных по отношению к напряжённому состоянию функций сдвиговых напряжений и наибольшего нормального напряжения.

Предложен, например, наиболее распространенный и удобный критерий Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева

$$(3.54) \quad \sigma_e = (1 - \chi)\sigma_1 + 2^{-1/2}\chi[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]^{1/2} = \sigma_t.$$

В таблице 3.1 приведены ожидаемые значения напряжений разрушения  $\sigma_z^*$  теория и  $\sigma_t^*$  теория, определённые согласно выражениям (3.50) и (3.54), а также их относительные расхождения с данными эксперимента.

Общая теория и общие методы обобщения критериев предельных состояний и прочности линейно-функциональным преобразованием главных напряжений, в частности деформированием и/или движением (смещением и/или вращением) предельной поверхности, на случай анизотропии и/или различных сопротивлений материала растяжению и сжатию



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 321/556

созданы и для исследований прочности и разрушения органического стекла при сложном напряжённом состоянии. Органическое стекло – изотропный пластичный материал, обычно считается одинаково сопротивляющимся растяжению и сжатию с единственным предельным напряжением, например текучести или прочности, и предельной поверхностью по третьей теории прочности (критерию наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска или по четвёртой теории прочности (критерию удельной энергии формоизменения, или критерию октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки. Но опыты доказывают: органическое стекло явно лучше сопротивляется сжатию, чем растяжению, как и хрупкие материалы. Полезны общая теория и общие методы обобщения изотропного критерия предельных состояний  $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$  и прочности  $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_L$  для  $\sigma_L = \sigma_t = \sigma_c$  с однородной первого порядка функцией  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , для любого одноосного напряжения равной его модулю, на общий случай анизотропного материала с различными положительными одноосными пределами  $\sigma_{ij}$  при растяжении и  $\sigma_{cj}$  при сжатии в направлении главного напряжения  $\sigma_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) линейно-функциональным преобразованием главных напряжений  $\sigma_j$ , в частности деформированием и/или движением (смещением и/или вращением) предельной поверхности:

$$\sigma_j = A_{j1}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_1 + A_{j2}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_2 + A_{j3}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_3 + \sigma_{j0}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3) \quad (j = 1, 2, 3),$$

где  $A_{j1}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ ,  $A_{j2}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$ ,  $A_{j3}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$  – безразмерные функции преобразованных главных напряжений  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ , в частности постоянные;

$\sigma_{j0}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$  – имеющая размерность напряжения функция преобразованных главных напряжений  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ , в частности постоянная.

Подстановки преобразований главных напряжений  $\sigma_j$  дают общие анизотропные критерии предельных состояний и прочности в преобразованных главных напряжениях  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ :

$$\sigma_e = F(A_{11}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_1 + A_{12}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_2 + A_{13}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_3 + \sigma_{10}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3), A_{21}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_1 + A_{22}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_2 + A_{23}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_3 + \sigma_{20}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3), A_{31}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_1 + A_{32}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_2 + A_{33}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_3 + \sigma_{30}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)) = \sigma_L;$$

$$\sigma_e = F(A_{11}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_1 + A_{12}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_2 + A_{13}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_3 + \sigma_{10}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3), A_{21}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_1 + A_{22}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_2 + A_{23}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_3 + \sigma_{20}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3), A_{31}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_1 + A_{32}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_2 + A_{33}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)\sigma'_3 + \sigma_{30}(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)) \leq \sigma_L.$$

В частности, прямой круговой цилиндр Мизеса может быть сделан эллиптическим и смещаться, а для анизотропного материала ещё и произвольно наклоняться.

Для полноты восприятия нового полезно привести под несколько иным углом зрения некоторые рассуждения выше.

В частности, при плоском напряжённом состоянии  $\sigma_1, \sigma_3$  ( $\sigma_2 = 0$ ) изотропного материала с различными положительными одноосными пределами  $\sigma_t$  при растяжении и  $\sigma_c$  при сжатии по общему принципу допустимой простоты достаточно смещение предельной кривой другого изотропного материала с искомой одинаковой прочностью  $\sigma_L$  при растяжении и сжатии смещением начала координат вдоль главной диагонали в точку с искомыми одинаковыми при изотропии обеими координатами  $\sigma_0$ .

Для отличия от основной системы координат  $\sigma_1\sigma_3$  на плоскости главных напряжений применительно к предельной кривой изотропного материала с различными положительными одноосными пределами  $\sigma_t$  при растяжении и  $\sigma_c$  при сжатии достаточно снабдить штрихами главные напряжения  $\sigma'_1$  и  $\sigma'_3$  в соответствующей вспомогательной системе координат  $\sigma'_1\sigma'_3$  плоскости главных напряжений применительно к предельной кривой этого другого изотропного фиктивного материала с одинаковыми положительными одноосными пределами  $\sigma_L$  при растяжении и при сжатии. Тогда во вспомогательной системе координат  $\sigma'_1\sigma'_3$  координаты начала  $O$  основной системы координат  $\sigma_1\sigma_3$  составляют

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 = \sigma_0.$$

Формулы взаимных переходов от одной системы координат к другой принимают вид

$$\sigma_1 = \sigma'_1 - \sigma_0,$$

$$\sigma_3 = \sigma'_3 - \sigma_0;$$

$$\sigma'_1 = \sigma_1 + \sigma_0,$$

$$\sigma_3' = \sigma_3 + \sigma_0.$$

Во вспомогательной системе координат  $\sigma_1'O'\sigma_3'$  для определения предельных состояний этого другого изотропного фиктивного материала с одинаковыми положительными одноосными пределами  $\sigma_L$  при растяжении и при сжатии четвертая теория прочности (критерий удельной энергии формоизменения, или критерий октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки даёт

$$2^{-1/2}[(\sigma_1' - \sigma_2')^2 + (\sigma_2' - \sigma_3')^2 + (\sigma_3' - \sigma_1')^2]^{1/2} = \sigma_L,$$

в плоском напряженном состоянии  $\sigma_1', \sigma_3' (\sigma_2' = 0)$

$$(\sigma_1'^2 - \sigma_1'\sigma_3' + \sigma_3'^2)^{1/2} = \sigma_L.$$

Тогда в основной системе координат  $\sigma_1O\sigma_3$  искомое обобщение четвертой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки для определения предельных состояний изотропного материала с различными положительными одноосными пределами  $\sigma_t$  при растяжении и  $\sigma_c$  при сжатии в плоском напряженном состоянии  $\sigma_1, \sigma_3 (\sigma_2 = 0)$  даёт

$$\begin{aligned} [(\sigma_1 + \sigma_0)^2 - (\sigma_1 + \sigma_0)(\sigma_2 + \sigma_0) + (\sigma_2 + \sigma_0)^2]^{1/2} &= \sigma_L, \\ [\sigma_1^2 + 2\sigma_0\sigma_1 + \sigma_0^2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_0(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_0^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_0\sigma_3 + \sigma_0^2]^{1/2} &= \sigma_L, \\ [\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 + \sigma_0(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_0^2]^{1/2} &= \sigma_L, \\ \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 + \sigma_0(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_0^2 &= \sigma_L^2. \end{aligned}$$

Для получения искоемых выражений двух постоянных  $\sigma_L$  и  $\sigma_0$  через две постоянные  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$  естественно используем два опыта при предельных одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы:

$$\sigma_t^2 + \sigma_0\sigma_t + \sigma_0^2 = \sigma_L^2.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

даёт второе уравнение системы:

$$\sigma_c^2 - \sigma_0\sigma_c + \sigma_0^2 = \sigma_L^2.$$

Эта система двух уравнений с двумя неизвестными даёт искоемые значения обеих постоянных:

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sigma_c - \sigma_t, \\ \sigma_L^2 &= \sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2. \end{aligned}$$

Их подстановка в указанное последним критериальное уравнение предельной кривой при плоском напряжённом состоянии даёт:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_3) + (\sigma_c - \sigma_t)^2 &= \sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2, \\ \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_3) &= \sigma_c\sigma_t. \end{aligned}$$

Это критериальное уравнение предельной кривой при плоском напряжённом состоянии является искомым обобщением такого уравнения по четвертой теории прочности (критерию удельной энергии формоизменения, или критерию октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки, получаемой в частном случае одинаковых  $\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L$  сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$ , даёт принципиальную возможность учесть различие сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_c$  и единой базой  $(\sigma_c\sigma_t)^{1/2}$  его сравнения:

$$\sigma_c = [\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_3 + \sigma_3^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c\sigma_t)^{1/2}.$$

Именно и только при квадратичном представлении исходного критерия предельных состояний смещение начала отсчёта аналитически выражается линейностью добавления, в данном случае при плоском напряжённом состоянии

$$(\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_3),$$

в уравнение предельной поверхности, в данном случае при плоском напряжённом состоянии в уравнение предельной кривой.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 323/556

В общем случае трёхосного напряжённого состояния использование указанных квадратичности представления классической четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки, линейности добавления и равенства проекций смещения начала отсчёта на все оси координат пространства  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  всех трёх главных напряжений при изотропии материала приводит к следующему исходному общему виду искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными А и В:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + A(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = B.$$

Для получения искоемых выражений двух постоянных А и В через две постоянные  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$  естественно используем два опыта при предельных одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы:

$$\sigma_t^2 + A\sigma_t = B.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

даёт второе уравнение системы:

$$\sigma_c^2 - A\sigma_c = B.$$

Эта система двух уравнений с двумя неизвестными даёт искомые значения обеих постоянных:

$$A = \sigma_c - \sigma_t,$$

$$B = \sigma_c\sigma_t.$$

Их подстановка в исходный общий вид искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными А и В даёт:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c\sigma_t.$$

Это обобщение классической четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки, получаемой в частном случае одинаковых  $\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L$  сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$ , даёт принципиальную возможность учесть различие сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e$  и единой базой  $(\sigma_c\sigma_t)^{1/2}$  его сравнения:

$$\sigma_e = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c\sigma_t)^{1/2}.$$

В своём классическом виде третья теория прочности (критерий наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска

$$\sigma_e = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_L$$

при упорядоченности главных напряжений  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  является линейной, а не квадратичной. Для общей теории и общих методов обобщения критериев предельных состояний и критериев прочности линейно-функциональным преобразованием главных напряжений, в частности деформированием и/или движением (смещением и/или вращением) предельной поверхности неквадратичность критерия предельных состояний не является ни малейшим препятствием. А вот общий метод обобщения критериев предельных состояний и прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции предварительно приводит критерии предельных состояний и критерии прочности к равносильному квадратичному виду.

Функция  $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  ввиду её сравнения с предельным напряжением  $\sigma_L$  в общем виде критерия предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$$

является однородной функцией первого порядка относительно всех трёх главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и для любого одноосного напряжения равна абсолютной величине этого напряжения.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 324/556

Общий метод обобщения критериев предельных состояний и прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции предварительно приводит общий вид критерия предельных состояний  $\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$  к равносильному квадратичному виду:

$$\sigma_e^2 = F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L^2.$$

В общем случае трёхосного напряжённого состояния использование указанных квадратичности представления общего вида критерия предельных состояний, линейности добавления и равенства проекций смещения начала отсчёта на все оси координат пространства  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  всех трёх главных напряжений при изотропии материала приводит к следующему исходному общему виду искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными А и В:

$$F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + A(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = B.$$

Для получения искоемых выражений постоянных А и В через постоянные  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$  естественно используем опыты при предельных одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы:

$$\sigma_t^2 + A\sigma_t = B.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

даёт второе уравнение системы:

$$\sigma_c^2 - A\sigma_c = B.$$

Эта система двух уравнений даёт искоемые значения обеих постоянных:

$$A = \sigma_c - \sigma_t,$$

$$B = \sigma_c\sigma_t.$$

Их подстановка в исходный общий вид искомого уравнения предельной поверхности с неопределёнными постоянными А и В даёт:

$$F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c\sigma_t.$$

Это обобщение общего вида критерия предельных состояний даёт принципиальную возможность учесть различие сопротивлений изотропного материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e$  и единой базой  $(\sigma_c\sigma_t)^{1/2}$  его сравнения:

$$\sigma_e = [F^2(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c\sigma_t)^{1/2}.$$

Так что этим общим методом обобщения критериев предельных состояний и прочности добавлением линейной комбинации главных напряжений к квадрату их критериальной функции можно воспользоваться и для третьей теории прочности (критерия наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска, которая предварительно приводится к равносильному квадратичному виду:

$$\sigma_e^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = \sigma_L^2.$$

В общем случае трёхосного напряжённого состояния использование указанных квадратичности представления классической третьей теории прочности, линейности добавления и равенства проекций смещения начала отсчёта на все оси координат пространства  $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  всех трёх главных напряжений при изотропии материала приводит к следующему исходному общему виду искомого уравнения предельной поверхности с двумя неопределёнными постоянными А и В:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + A(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = B.$$

Для получения искоемых выражений двух постоянных А и В через две постоянные  $\sigma_t$  и  $\sigma_c$  естественно используем два опыта при предельных одноосном растяжении и одноосном сжатии.

Предельное одноосное растяжение

$$\sigma_1 = \sigma_t, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = 0$$

даёт первое уравнение системы:

$$\sigma_t^2 + A\sigma_t = B.$$

Предельное одноосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma_c$$

даёт второе уравнение системы:

$$\sigma_c^2 - A\sigma_c = B.$$

Эта система двух уравнений с двумя неизвестными даёт искомые значения обеих постоянных:

$$A = \sigma_c - \sigma_t,$$

$$B = \sigma_c\sigma_t.$$

Их подстановка в исходный общий вид искомого уравнения предельной поверхности с двумя неопределёнными постоянными A и B даёт:

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c\sigma_t.$$

Это обобщение классической третьей теории прочности (критерия наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска, получаемой в частном случае одинаковых  $\sigma_t = \sigma_c = \sigma_L$  сопротивлений материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$ , даёт принципиальную возможность учесть различие сопротивлений изотропного материала растяжению  $\sigma_t$  и сжатию  $\sigma_c$  и может быть также представлено в виде с равносильным (эквивалентным) напряжением  $\sigma_e$  и единой базой  $(\sigma_c\sigma_t)^{1/2}$  его сравнения:

$$\sigma_e = [(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c\sigma_t)^{1/2}.$$

Для аналитического определения изображённой на рисунке 3.4 соответствующей плоскому напряжённому состоянию предельной ломаной кусочно-линейного обобщения классической третьей теории прочности (критерия наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска достаточно указать координаты всех шести вершин ломаной. Четыре вершины на осях координат соответствуют предельным одноосным растяжениям и сжатиям и имеют координаты

$$(\sigma_t, 0), (0, \sigma_t), (-\sigma_c, 0), (0, -\sigma_c).$$

Одна вершина предельного шестиугольника на главной диагонали в первом квадранте соответствует искомому равному двухосному растяжению

$$\sigma_1 = \sigma_{tt}, \sigma_2 = \sigma_{tt}, \sigma_3 = 0 \quad (\sigma_{tt} > 0).$$

Искомые равные непременно строго положительные координаты этой вершины  $(\sigma_{tt}, \sigma_{tt})$  удовлетворяют достигнутому обобщению

$$\sigma_e = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c\sigma_t)^{1/2}$$

классической четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c\sigma_t,$$

$$\sigma_{tt}^2 + \sigma_{tt}^2 - \sigma_{tt}^2 + 2(\sigma_c - \sigma_t)\sigma_{tt} = \sigma_c\sigma_t,$$

$$\sigma_{tt}^2 + 2(\sigma_c - \sigma_t)\sigma_{tt} - \sigma_c\sigma_t = 0,$$

$$\sigma_{tt} = -(\sigma_c - \sigma_t) + [(\sigma_c - \sigma_t)^2 + \sigma_c\sigma_t]^{1/2} = (\sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} - (\sigma_c - \sigma_t) > 0,$$

поскольку

$$\sigma_c^2 - \sigma_c\sigma_t + \sigma_t^2 - (\sigma_c - \sigma_t)^2 = \sigma_c\sigma_t > 0.$$

Если

$$\sigma_t \leq \sigma_c,$$

то

$$\sigma_{tt} \leq \sigma_t$$

и внутренний угол предельного шестиугольника при этой его вершине является прямым или тупым, причём прямым вместе с равенством

$$\sigma_{tt} = \sigma_t$$

именно и только при равенстве

$$\sigma_t = \sigma_c,$$

а тупым вместе со строгим неравенством

$$\sigma_{tt} < \sigma_t$$

именно и только при строгом неравенстве (что и имеет место для органического стекла и показано на рисунке 3.4)

$$\sigma_t < \sigma_c,$$

поскольку равносильны следующие нестрогие неравенства и отдельно строгости и нестрогости в них:

$$\begin{aligned} (\sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} - (\sigma_c - \sigma_t) &\leq \sigma_t, \\ (\sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} &\leq \sigma_c, \\ \sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2 &\leq \sigma_c^2, \\ \sigma_t^2 &\leq \sigma_c \sigma_t, \\ \sigma_t &\leq \sigma_c. \end{aligned}$$

А если

$$\sigma_t \geq \sigma_c,$$

то

$$\sigma_{tt} \geq \sigma_t$$

и внутренний угол предельного шестиугольника при этой его вершине является прямым или острым, причём прямым вместе с равенством

$$\sigma_{tt} = \sigma_t$$

именно и только при равенстве

$$\sigma_t = \sigma_c,$$

а острым вместе со строгим неравенством

$$\sigma_{tt} > \sigma_t$$

именно и только при строгом неравенстве (что встречается у магниевых сплавов)

$$\sigma_t > \sigma_c,$$

поскольку равносильны следующие нестрогие неравенства и отдельно строгости и нестрогости в них:

$$\begin{aligned} (\sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} - (\sigma_c - \sigma_t) &\geq \sigma_t, \\ (\sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} &\geq \sigma_c, \\ \sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2 &\geq \sigma_c^2, \\ \sigma_t^2 &\geq \sigma_c \sigma_t, \\ \sigma_t &\geq \sigma_c. \end{aligned}$$

Одна вершина предельного шестиугольника на главной диагонали в третьем квадранте соответствует искомому равному двухосному сжатию

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -\sigma_{cc}, \sigma_3 = -\sigma_{cc} (\sigma_{cc} > 0).$$

Искомые равные непременно строго отрицательные координаты этой вершины  $(-\sigma_{cc}, -\sigma_{cc})$  при строго положительном  $\sigma_{cc}$  удовлетворяют достигнутому обобщению

$$\sigma_c = [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]^{1/2} = (\sigma_c \sigma_t)^{1/2}$$

классической четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3 + (\sigma_c - \sigma_t)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_c \sigma_t,$$

$$\sigma_{cc}^2 + \sigma_{cc}^2 - \sigma_{cc}^2 - 2(\sigma_c - \sigma_t)\sigma_{cc} = \sigma_c \sigma_t,$$

$$\sigma_{cc}^2 - 2(\sigma_c - \sigma_t)\sigma_{cc} - \sigma_c \sigma_t = 0,$$

$$\sigma_{cc} = \sigma_c - \sigma_t + [(\sigma_c - \sigma_t)^2 + \sigma_c \sigma_t]^{1/2} > 0,$$

поскольку

$$\sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2 - (\sigma_c - \sigma_t)^2 = \sigma_c \sigma_t > 0.$$

Если

$$\sigma_t \leq \sigma_c,$$

то

$$\sigma_{cc} \geq \sigma_c > 0$$

и внутренний угол предельного шестиугольника при этой его вершине является прямым или острым, причём прямым вместе с равенством

$$\sigma_{cc} = \sigma_c$$

именно и только при равенстве

$$\sigma_t = \sigma_c,$$

а острым вместе со строгим неравенством

$$\sigma_{cc} > \sigma_c$$

именно и только при строгом неравенстве (что и имеет место для органического стекла и показано на рисунке 3.4)

$$\sigma_t < \sigma_c,$$

поскольку равносильны следующие нестрогие неравенства и отдельно строгости и нестрогости в них:

$$\begin{aligned}\sigma_c - \sigma_t + [(\sigma_c - \sigma_t)^2 + \sigma_c \sigma_t]^{1/2} &\geq \sigma_c, \\ (\sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} &\geq \sigma_t, \\ \sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2 &\geq \sigma_t^2, \\ \sigma_c^2 &\geq \sigma_c \sigma_t, \\ \sigma_c &\geq \sigma_t.\end{aligned}$$

А если

$$\sigma_t \geq \sigma_c,$$

то

$$\sigma_{cc} \leq \sigma_c$$

и внутренний угол предельного шестиугольника при этой его вершине является прямым или тупым, причём прямым вместе с равенством

$$\sigma_{cc} = \sigma_c$$

именно и только при равенстве

$$\sigma_t = \sigma_c,$$

а тупым вместе со строгим неравенством

$$\sigma_{cc} < \sigma_c$$

именно и только при строгом неравенстве (что встречается у магниевых сплавов)

$$\sigma_t > \sigma_c,$$

поскольку равносильны следующие нестрогие неравенства и отдельно строгости и нестрогости в них:

$$\begin{aligned}\sigma_c - \sigma_t + [(\sigma_c - \sigma_t)^2 + \sigma_c \sigma_t]^{1/2} &\leq \sigma_c, \\ (\sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2)^{1/2} &\leq \sigma_t, \\ \sigma_c^2 - \sigma_c \sigma_t + \sigma_t^2 &\leq \sigma_t^2, \\ \sigma_c^2 &\leq \sigma_c \sigma_t, \\ \sigma_c &\leq \sigma_t.\end{aligned}$$

Простота этого общего метода обобщения критериев предельных состояний и прочности и самих обобщённых критериев – их большие принципиальные преимущества.

В итоге обработки экспериментальных данных о предельной поверхности органического стекла методом наименьших квадратов получены

$$\begin{aligned}\sigma_t &= 62.5 \text{ МПа}, \\ \sigma_c &= 70.8 \text{ МПа}, \\ \chi &= 0.883.\end{aligned}$$

Именно поэтому столь прост и естествен рисунок 3.4.

Следует заметить, что критерий Писаренко–Лебедева, обобщение третьей теории прочности (критерия наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска и обобщение четвёртой теории прочности (критерия удельной энергии формоизменения, или критерия октаэдрических сдвиговых напряжений) Максвелла–Губера–фон-Мизеса–Генки можно применять и при объёмном напряжённом состоянии с использованием полученных постоянных органического стекла

$$\sigma_t = 62.5 \text{ МПа}, \sigma_c = 70.8 \text{ МПа}, \chi = 0.883.$$

Анализируя полученные результаты, можно сделать вывод, что прочность органического стекла в области сжатия несколько выше, чем при растяжении.

Поэтому на первый взгляд кажется, что при конструировании изделий из органического стекла необходимо стремиться к тому, чтобы материал работал именно в области сжатия.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 328/556

Однако опыт проектирования и использования изделий из органического стекла показывает, что при действии напряжений, близких к пределу прочности на сжатие, происходит нарушение структуры материала, при последующих нагружениях приводящее к появлению трещины, а также возникновению «серебра», нарушающего оптическую прозрачность изделия.

Поэтому, несмотря на то, что сжатие – более предпочтительный вид напряжённого состояния, чем растяжение и сдвиг, напряжений сжатия, близких к предельным, в конструкциях из органического стекла допускать нельзя.

Применение приведённой третьей теории прочности (2.130) и приведённой четвёртой теории прочности (2.132) даёт подобные предыдущим (рисунок 3.5) математические модели прочности органического стекла с

$$\begin{aligned}\sigma_t &= 68 \text{ МПа;} \\ \sigma_c &= 86 \text{ МПа;} \\ \chi &= \sigma_t/\sigma_c = 0.795.\end{aligned}$$

Результат испытания при чистом сдвиге используется лишь для проверки, которая приводит к 1.0237 взамен 1.

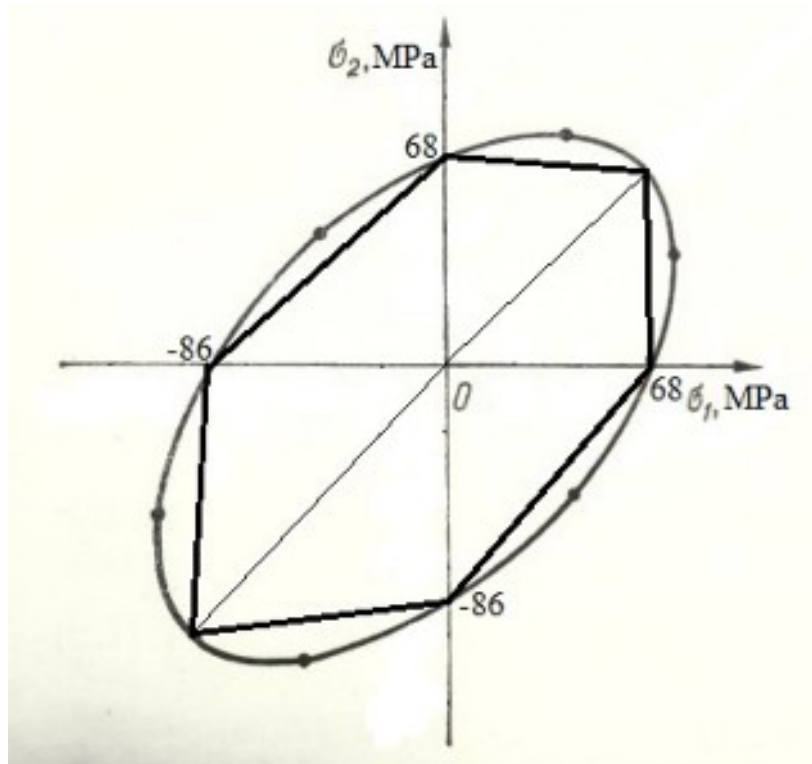


Рисунок 3.5. Предельная ломаная (по приведённой третьей теории прочности) и предельная кривая (по приведённой четвёртой теории прочности) органического стекла.

Представляется целесообразным использовать и другие критерии для оценки роли промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$ , но известные критерии не позволяют получить такую оценку в достаточно простом виде.

Применительно к одинаково сопротивляющемуся растяжению и сжатию материалу обобщим принятое для различно сопротивляющегося растяжению и сжатию материалу условие Н. Н. Давиденкова и И. И. Тарасенко [238] для наступления предельных состояний

$$F[\sum_{j=1}^3 \sigma_j^3] + \sum_{j=1}^3 A_j \sigma_j = B,$$

имея в виду установленное П. Бриджменом [74] квазилинейное повышение прочности с увеличением всестороннего давления.

Метод линейного исправления частных и общего критериев предельных состояний постоянно нагруженного изотропного материала, одинаково сопротивляющегося растяжению



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 329/556

и сжатия, математически строго проанализирован и обобщён методом линейного исправления частных и общего критериев предельных состояний произвольно нагруженного любого материала, в частности для учёта экспериментально установленного лауреатом Нобелевской премии П. Бриджменом упрочняющего влияния равномерного всестороннего сжатия.

Опыты при одноосных растяжении и сжатии, а также при равноосном растяжении  $\sigma_{III}$  (безотносительно осуществимости) дают

$$(3.55)$$

$$\sigma_e = F[\sum_{j=1}^3 \sigma_j] + (\sigma_L/\sigma_{III})\sigma_2 = \sigma_L;$$

$$\sigma_e = \sigma_1 + (\sigma_L/\sigma_{III})\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_L.$$

Испытание при чистом сдвиге ввиду  $\sigma_2 = 0$  вновь позволяет лишь оценить точность.

Взамен равноосного растяжения практически можно использовать, например, двухосное сжатие

$$\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_{cc},$$

и тогда

$$\sigma_e = \sigma_1 + (1 - \sigma_L/\sigma_{cc})\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_L.$$

Но, поскольку обычно  $\sigma_{cc}$  и  $\sigma_L$  имеют близкие значения, лучше использовать состояние

$$\sigma_1 = \sigma_{tcc}, \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_{tcc}.$$

Тогда для изотропного одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию материала

$$\sigma_e = \sigma_1 + (2 - \sigma_L/\sigma_{tcc})\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_L,$$

для изотропного различно сопротивляющегося растяжению и сжатию материала

$$1/n_L = \sigma_e^\circ = \sigma_1^\circ + (1 + \sigma_c/\sigma_t - \sigma_c/\sigma_{tcc})\sigma_2^\circ - \sigma_3^\circ = 1,$$

для анизотропного различно сопротивляющегося растяжениям и сжатиям материала

$$1/n_L = \sigma_e^\circ = \sigma_1^\circ + \sigma_{c2}(1/\sigma_{t1} + 1/\sigma_{c3} - 1/\sigma_{tcc})\sigma_2^\circ - \sigma_3^\circ = 1.$$

В более общем случае использование предложенного метода совместных универсализации и исправления даёт исправленное добавлением произведения постоянной  $x$  на приведённое второе главное напряжение  $\sigma_2^\circ$  приведение третьей теории прочности к прочностному закону природы во всеобщих напряжениях

$$(3.56)$$

$$1/r_e^\circ = 1/n_L = \sigma_e^\circ = \sigma_1^\circ + x\sigma_2^\circ - \sigma_3^\circ = 1$$

и исправленное добавлением произведения постоянной  $x$  на приведённое второе главное напряжение  $\sigma_2^\circ$  приведение четвёртой теории прочности к прочностному закону природы во всеобщих напряжениях

$$(3.57)$$

$$1/r_e^\circ = 1/n_L = \sigma_e^\circ = \{[(\sigma_1^\circ - \sigma_2^\circ)^2 + (\sigma_2^\circ - \sigma_3^\circ)^2 + (\sigma_3^\circ - \sigma_1^\circ)^2]/2\}^{1/2} + x\sigma_2^\circ = 1$$

с зависимостью постоянной  $x$  от преобразования главных напряжений:

для (2.128) вновь

$$x = \sigma_t/\sigma_{III}$$

(рисунок 3.6),

для (2.141)

$$x = (\sigma_t + \sigma_c)/(2\sigma_{III} - \sigma_t + \sigma_c)$$

и критерий предельных состояний

$$\sigma_e = \sigma_1 + [(\sigma_t + \sigma_c)/(2\sigma_{III} - \sigma_t + \sigma_c)][\sigma_2 + (\sigma_c - \sigma_t)/2] - \sigma_3 = (\sigma_t + \sigma_c)/2$$

с очевидным обобщением индексацией на случай анизотропных материалов.

Для изотропного различно сопротивляющегося растяжению и сжатию материала практически целесообразно определение  $x$  из совокупности опытов при произвольных трёхосных состояниях по наименьшему среднеквадратичному отклонению.

Например, для алюминиевого сплава АЛ-15В

$$(\sigma_t = 158 \text{ МПа}; \sigma_c = 306 \text{ МПа}; \chi = 0.518)$$

по данным Ю. Г. Важенцева для 15 опытов получается

$$x = 0.326$$

и роль  $\sigma_2$  вполне ясна.

Попутно можно предсказать предел равного трёхосного растяжения

$$\sigma_{\text{итт}} = 485 \text{ МПа.}$$

В рассматриваемой задаче для органического стекла аналогично получаем

$$\sigma_t = 72 \text{ МПа; } \sigma_c = 81 \text{ МПа; } \chi = 0.889; \alpha = 0.1165,$$

так что

$$1/r_e^\circ = 1/n_L = \sigma_e^\circ = \sigma_1^\circ + 0.1165\sigma_2^\circ - \sigma_3^\circ = 1$$

с явной ролью  $\sigma_2$  и предсказанным пределом равного трёхосного растяжения

$$\sigma_{\text{итт}} = \sigma_t/\alpha = 618 \text{ МПа.}$$

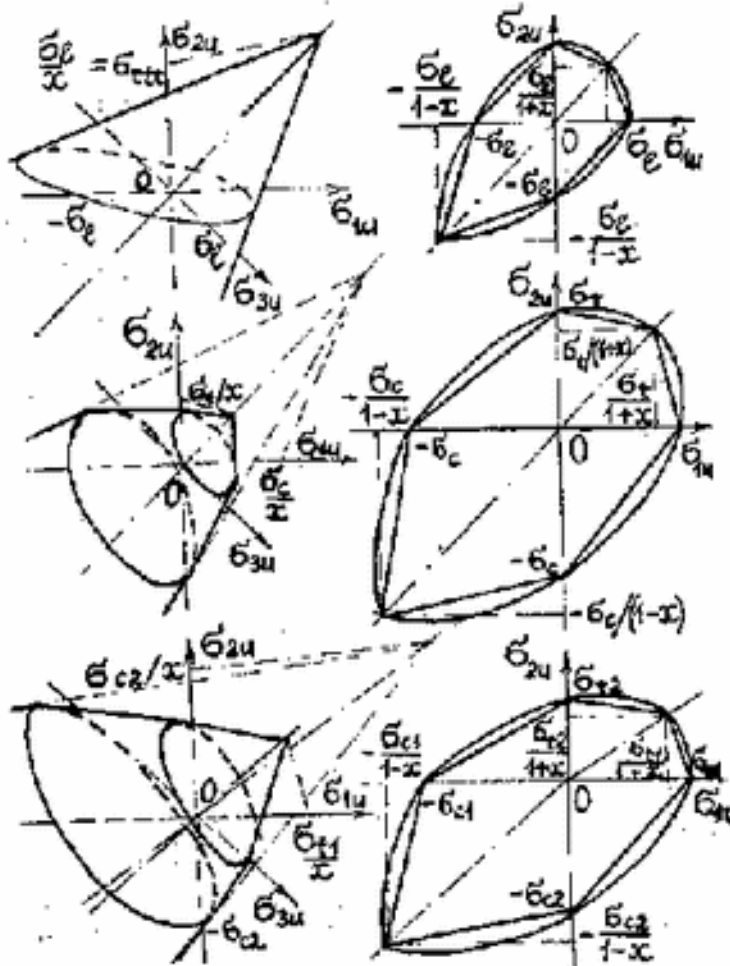


Рисунок 3.6. Поверхности и диаграммы предельных состояний одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию изотропного материала (вверху), различно сопротивляющегося растяжению и сжатию изотропного материала (посередине) и различно сопротивляющегося растяжениям и сжатиям анизотропного материала (внизу) согласно

предложенным и приведённым линейному

$$1/r_e^\circ = 1/n_L = \sigma_e^\circ = \sigma_1^\circ + \alpha\sigma_2^\circ - \sigma_3^\circ = 1 \quad (3.56)$$

и квадратично-линейному

$$1/r_e^\circ = 1/n_L = \sigma_e^\circ = \{[(\sigma_1^\circ - \sigma_2^\circ)^2 + (\sigma_2^\circ - \sigma_3^\circ)^2 + (\sigma_3^\circ - \sigma_1^\circ)^2]/2\}^{1/2} + \alpha\sigma_2^\circ = 1 \quad (3.57)$$

критериям предельных состояний с преобразованием (2.124) главных напряжений при статическом нагружении.

В ещё более общем случае для произвольного критерия предельных состояний

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$$

использование предложенного метода совместных универсализации и исправления даёт исправленное добавлением произведения постоянной  $\alpha$  на приведённое второе главное

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 331/556  
 напряжение  $\sigma_2^\circ$  приведение произвольного критерия предельных состояний во всеобщих напряжениях

$$(3.58) \\ 1/r_e^\circ = 1/n_L = \sigma_e^\circ = F(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ) + x\sigma_2^\circ = 1.$$

### 3.3. Создание итерационного общего метода наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов, применительно к теоретическим и экспериментальным исследованиям прочности и разрушения неорганического стекла при повторно-статическом нагружении

По инициативе А. А. Каминского были выполнены экспериментальные исследования прочности и разрушения неорганического стекла при повторно-статическом нагружении и на основе рассмотрения энергетического баланса при разрушении опёртой по краю круглой пластины из неорганического стекла радиусом  $a$  и толщиной  $h$  под действием гидростатического давления  $p$  с использованием классического решения теории пластин [319–321] установлена зависимость между разрушающими напряжениями в стекле и числом трещин  $n$  [229].

Уравнение энергетического баланса имеет вид:

$$W_{\text{whole}} - W_{\text{parts}} = W_u,$$

где

$W_{\text{whole}}$  – потенциальная энергия изогнутой пластины, численно равная работе, затраченной на изгиб пластины,

$$W_{\text{whole}} = \pi p \int_0^a w(r) r dr;$$

$W_{\text{parts}}$  – потенциальная энергия образовавшихся осколков;

$W_u$  – работа, затраченная на образование трещин при разрушении;

$r, w(r)$  – текущие радиус и прогиб пластины соответственно.

Разрушение опёртой по краю круглой пластины, изгибаемой равномерным давлением на одно основание, происходит с образованием радиальной системы трещин.

Образовавшиеся осколки имеют потенциальную энергию, которая тратится на восстановление их первоначальной формы.

Если принять, что прогиб изменяется по линейному закону, то получим:

$$W_{\text{whole}} - W_{\text{parts}} = \pi p \int_0^a w_0 (1 - r/a) r dr.$$

После подстановки

$$p = 8[3(3 + \mu)]^{-1} (h/a)^2 \sigma_t, \\ w_0 = (3/16)(1 - \mu)(5 + \mu)(p/E)a^4/h^3$$

получаем:

$$W_{\text{whole}} - W_{\text{parts}} = (\pi/32)(1 - \mu)(5 + \mu)(p^2/E)a^6/h^3,$$

где

$E$  – модуль продольной упругости Юнга;

$\mu$  – коэффициент поперечной деформации Пуассона;

$\sigma_t$  – разрушающее растягивающее напряжение.

Работа, затраченная на образование трещин при разрушении опёртой по краю круглой пластины, изгибаемой равномерным давлением на одно основание, составляет

$$W_u = 2nahq,$$

где

$n$  – число сквозных трещин;

$q$  – энергия, необходимая для образования единицы свободной поверхности (плотность поверхностной энергии), являющаяся универсальной постоянной стекла,

$$q = 1.95 \cdot 10^{-5} \text{ МПа} \cdot \text{м}.$$

После соответствующих преобразований получим:

$$\sigma_t = 3\pi^{-1/2}(3 + \mu)(1 - \mu)^{-1/2}(5 + \mu)^{-1/2}(Eq)^{1/2}(n/a)^{1/2} = B(n/a)^{1/2}.$$

По имеющимся экспериментальным данным было установлено для стекла К8 значение  $B = 3.34 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ .

Таким образом, подтверждено, что зависимость между числом трещин и разрушающим напряжением носит вполне определённый характер, однако зависит не только от механических характеристик материала, как считалось ранее, но и от геометрических характеристик тела в направлении развития трещин.

Автор создал общий (полу)степенной метод решения осесимметричной упругой задачи, позволивший впервые получать именно аналитические решения нетривиальных задач для существенно трёхмерных сплошных цилиндрических упругих тел с глубокими обобщениями и принципиальными уточнениями теории плит и теории пластин, в том числе для указанной опёртой по краю круглой пластины, что создало научные основы оценки, обобщения и развития исследований данного раздела, и выполнил соответствующие теоретические исследования зависимости числа циклов повторно-статического нагружения от разрушающего напряжения.

В табл. 3.2 приведены результаты разрушающих испытаний ряда типоразмеров стеклоэлементов, а также расчётов разрушающих напряжений  $\sigma_i$ , значения которых определялись как по разрушающему давлению  $p_u$  ( $\sigma_i(p) = \sigma_{up}$ ), так и по числу трещин  $n$  ( $\sigma_i(n) = \sigma_{un}$ ) с использованием универсальной постоянной стекла

$$q = 1.95 \cdot 10^{-5} \text{ МПа} \cdot \text{м}$$

и постоянной

$$B = 3.34 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2},$$

универсальность которой для стеклянных пластин показана не только теоретически, но и экспериментально.

Таблица 3.2. Сопоставление значений разрушающего напряжения, определённых по разрушающему давлению или по числу трещин в стеклоэлементах.

№ п/п	Радиус стеклоэлемента а, мм	Толщина стеклоэлемента h, мм	Разрушающее давление $p_u$ , МПа	Число трещин n	Постоянная B, МПа*м <sup>1/2</sup>	Разрушающее напряжение	
						по разрушающему давлению $\sigma_{up}$ , МПа	по числу трещин $\sigma_{un}$ , МПа
1	27.5	3.0	1.2	33	3.47	121.0	115.7
2	35.0	7.0	2.0	12	3.24	60.0	62.0
3	35.0	7.0	2.5	19	3.21	75.0	77.7
4	40.0	10.0	8.0	82	3.40	154.0	151.4

Явление снижения прочности при повторных приложениях нагрузки присуще большинству конструкционных материалов. При проектировании изделий это явление учитывается соответствующим снижением значений допускаемых напряжений.

В связи с этим для многих материалов в литературе имеются данные, позволяющие определить допускаемые напряжения в зависимости от требуемого ресурса работоспособности.

Опыт использования стекла в качестве конструкционного материала ещё невелик, и данных, позволяющих учесть это явление в конструкциях из стекла, крайне недостаточно.

Работоспособность высоконапряжённых светопрозрачных элементов должна быть обеспечена при 200–300 циклах нагружения.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 333/556

Для изучения основных закономерностей разрушения стекла при действии повторно-статических нагрузок были проведены испытания, результаты которых позволяют в некоторой степени оценить надёжность стеклянных изделий, а также выбрать допускаемые напряжения для стекла.

В качестве образцов использовались круглые пластины, опёртые по краю, нагружаемые равномерным давлением, что позволило создать в наиболее опасной точке двухосное растяжение.

Радиус пластины  $a = 35$  мм, толщина  $h = 7$  мм, материал – неорганическое стекло К8.

Рассмотрим напряжённое состояние образцов.

Согласно [319–321] равносильное (эквивалентное)  $\sigma_e(r, z)$  по третьей и четвёртой теориям прочности, радиальное  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_t(r, z)$  напряжения максимальны и равны между собой в центре поверхности низкого давления, где осевое напряжение  $\sigma_z(r, z)$  равно нулю:

$$(3.59) \quad \sigma_{e\max} = \sigma_e(0, 0) = \sigma_t(0, 0) = \sigma_r(0, 0) = (3/8)(3 + \mu)pa^2/h^2.$$

В этом случае трещины располагаются вдоль прямых линий, проходящих через центр пластины, то есть образуется радиальная система трещин.

Таким образом, напряжение (3.59) пластины в центре поверхности низкого давления можно считать разрушающим.

Вывод о том, что при разрушении именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нагруженного равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания без бокового давления, образуется радиальная система трещин, можно использовать при анализе разрушенных образцов.

Если образовавшаяся система трещин значительно отличается от радиальной, то либо образец имел дефект, в результате которого разрушение началось не в предполагаемой точке, либо условия опирания образца не соответствовали принятым вследствие попадания на контактную поверхность осколков, других посторонних предметов, вызывающих неравномерность распределения контактных усилий, либо и то, и другое.

Нагружение образцов проводили на специальной установке с помощью плунжерного насоса.

Первыми были испытаны три образца до разрушения однократно прилагаемыми нагрузками.

Давления разрушения составили соответственно

$$2.1; 2.0; 2.0 \text{ МПа.}$$

После этого давления нагружения были снижены и дальнейшие испытания проводили повторяющимися нагрузками.

Цикл изменения нагрузки состоял из подъёма давления до заданного значения со скоростью 0.3 МПа/мин, выдержки при этом давлении в течение 10 с, сброса давления со скоростью 2 МПа/мин и выдержки в течение 30 с, после чего цикл повторялся.

Число циклов до разрушения фиксировали.

Результаты испытаний приведены в табл. 3.3.

Разрушение образцов происходило либо при подъёме давления, либо при его выдержке.

В одних случаях образец с образовавшейся системой трещин оставался на месте, в других – осколки с небольшой скоростью выбрасывались в полость низкого давления, практически не разбиваясь дополнительно, о чём свидетельствует сохранившаяся форма секторов.

Степень дробности разрушения была также различной.

После разрушения образцов осколки собирали и анализировали картину разрушения.

Система образовавшихся трещин большинства образцов была близка к радиальной.

Приемлемыми считались такие результаты, при которых центр системы трещин был смещён от геометрического центра диска не более чем на четверть радиуса, тогда как остальные результаты отбрасывались.

В таблицу 3.3 не внесены результаты испытания образцов, которые разрушились со значительным смещением центра системы трещин.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 334/556

Однако, несмотря на принятую методику, разброс результатов получился значительным, что можно объяснить тем, что хотя образцы и не имели видимых дефектов, но микротрещины на их поверхностях имели различные размеры.

Таблица 3.3. Данные испытаний прочности и разрушения неорганического стекла К8 при повторно-статическом нагружении.

Давление разрушения p, МПа	Число циклов нагрузки до разрушения n	Напряжение разрушения $\sigma$ , МПа	Показательное приближение числа n циклов $n_1(\sigma)$	Среднее степенное приближение числа n циклов $n_2(\sigma)$	Крайнее степенное приближение числа n циклов $n_3(\sigma)$
2.1	1	63	0.55	0.89	0.74
2.0	1	60	1	1.10	1
2.0	1	60	1	1.19	1
1.8	2	54	2.4	2.23	1.91
1.4	6	42	13.6	9.99	8.94
1.4	7	42	13.6	9.99	8.94
1.2	14	36	32.4	25	23
1.2	56	36	32.4	25	23
1.2	87	36	32.4	25	23
1.1	49	33	50.1	42	39.3
1.1	20	33	50.1	42	39.3
1.0	45	30	77.4	74	70.5
1.0	88	30	77.4	74	70.5
1.0	107	30	77.4	74	70.5
1.0	120	30	77.4	74	70.5
0.9	25	27	120	139	134
0.8	237	24	185	280	278
0.8	325	24	185	280	278

Как видно из формулы Гриффитса

$$\sigma_{кр} = 2(Eq/(\pi L))^{1/2},$$

где  $\sigma_{кр}$  – критическое напряжение;

q – плотность поверхностной энергии;

L – длина трещины,

напряжения зависят от размеров микротрещин, и разрушающие напряжения зависят от состояния поверхностей образцов.

Однако, поскольку при работе возможно соприкосновение стекла с различными телами и абразивными частицами, а следовательно, повреждение поверхности, полученные результаты приемлемы для практического использования.

При обработке результатов разрушающие напряжения определяли в центре пластины, так как при смещении точки начала разрушения на четверть радиуса от центра пластины

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 335/556

погрешность в определении радиального и тангенциального (окружного) напряжений не превышает 5 %.

Для аналитического представления полученных результатов использованы показательная и степенная функции.

Классический метод наименьших квадратов Лежандра и Гаусса является простейшим и по существу единственным широко применяемым в классической математике для решения переопределённых задач, в которых количество уравнений больше количества неизвестных, однако обладает целым рядом принципиальных изъянов.

Во-первых, метод наименьших квадратов минимизирует сумму квадратов отклонений, в которую наименее уклоняющиеся и поэтому наилучшие данные вносят ничтожный вклад, так что в действительности осуществляется уравнивание наихудших сохраняемых данных и поэтому опора на них, а не на самые лучшие данные.

Во-вторых, метод наименьших квадратов не предусматривает никакого улучшения получаемых итогов и никакого их оценивания, а просто объявляет их единственно возможными наподобие истины в последней инстанции.

Итог (псевдорешение) метода наименьших квадратов можно взять начальным приближением созданного итерационного общего метода наименьших нормально взвешенных степеней, в частности метода наименьших нормально взвешенных квадратов.

Итерационный общий метод наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов, позволяет получить квазирешение (наилучшее псевдорешение) и тем самым при необходимости и/или полезности уточнить псевдорешение метода наименьших квадратов.

Сущность общего метода и алгоритма наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов, является следующей.

1. Соразмеривание, в частности обезразмеривание, всех уравнений их, возможно, не имеющей точного решения, например переопределённой, системы и всех их неизвестных с исключением итогового влияния равносильных умножений некоторых уравнений системы на свои различные ненулевые множители, в частности единообразным нормированием системы всех уравнений, например для системы линейных уравнений делением каждого из них на квадратный корень из суммы квадратов коэффициентов при всех неизвестных уравнения с допуском умножением некоторых из уравнений на минус единицу.

2. Взятие некоторого псевдорешения, в частности методом наименьших квадратов, системы уравнений как начального приближения к её квазирешению (наилучшему псевдорешению).

3. Установление общей для всех уравнений упорядоченной пары совпадающих или различных между собой неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений любым псевдорешением системы уравнений как предыдущим приближением к её квазирешению (наилучшему псевдорешению). Первая, взвешивающая, из этих двух неотрицательных мер своей положительной степенью своей введённой приведённой плотности вероятности даёт вес своей положительной степени второй, взвешиваемой, из этих двух неотрицательных мер. Такими неотрицательными мерами могут быть наряду с другими всеобщая погрешность, абсолютная погрешность, относительная погрешность, расстояние изображающей псевдорешение точки от графика уравнения, модуль разности одной из координат этой точки и точки этого графика с теми же всеми остальными координатами. В частности, в качестве взвешивающей неотрицательной меры может браться всеобщая погрешность (её введённая приведённая плотность вероятности своей положительной степенью даёт вес), а в качестве взвешиваемой неотрицательной меры – абсолютная погрешность (в том числе модуль разности частей каждого из уравнений решаемой системы), далее возводимая в свою положительную степень, например во вторую степень с целью именно правильного использования простейших и удобнейших формул метода наименьших квадратов.

4. Симметризация совокупности взвешивающих неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы (с указанием, например левыми индексами, и точным учётом кратностей этих мер при их одинаковости для различных уравнений системы) на числовой оси относительно нуля пополнением совокупности взвешивающих неотрицательных мер

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 336/556

совокупностью противоположных им значений с теми же кратностями с их указанием, например левыми индексами. Это удобнее равносильного использования на левую половину усечённого симметричного относительно оси ординат нормального распределения.

5. Определение дисперсии распределения расширенной совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер и всех противоположных им значений, симметричной относительно нуля и поэтому обладающей нулевым средним. Дисперсия этого распределения с учётом нулевого среднего той расширенной совокупности может быть равносильно определена по неотрицательной половине той расширенной совокупности, а именно как начальный момент второго порядка только совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы её псевдорешением.

6. Определение свойственной модельному нормальному распределению (с нулевым средним и дисперсией распределения той расширенной совокупности) введённой приведённой (единообразно для всех уравнений системы и поэтому для наших целей равносильно умноженной на квадратный корень из произведения  $2\pi$  и дисперсии) плотности вероятности каждой взвешивающей неотрицательной меры. Так что формулы этого нормального распределения используются чисто условно, а от (симметричного относительно нуля и поэтому обладающего нулевым средним) подлинного распределения расширенной совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер и всех противоположных им значений никоим образом не требуется его нормальность.

7. Взвешивание одинаковых положительных степеней взвешиваемых неотрицательных мер (быть может, другими) одинаковыми положительными степенями приведённых плотностей вероятности взвешивающих неотрицательных мер в модельном нормальном распределении (с нулевым средним и дисперсией распределения той расширенной совокупности). При этом независимо от принятия предположения об априорной нормальности и от возможных отклонений от неё распределения расширенной совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер и всех противоположных им значений относительно нуля каждое из уравнений их системы снабжается тем большим весом (положительной степенью введённой приведённой плотности вероятности взвешивающей неотрицательной меры нарушения уравнения псевдорешением системы уравнений), чем меньше уравнение нарушается этим псевдорешением. Так что выбросы влияют на итог тем слабее, чем дальше они от правильности, и поэтому не нуждаются в выбрасывании и полностью учитываются. Как следствие имеет место опора не на уравновешиваемое худшее оставляемое и учитываемое, как это делает метод наименьших квадратов, а на лучшее из всех наличных данных без исключения при полном их учёте. По существу в действительности принимается не предположение об априорной никак не требуемой нормальности распределения расширенной совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер и всех противоположных им значений относительно нуля, а принцип взвешивания достаточно быстро растущих степеней взвешиваемых неотрицательных мер (с ростом этих мер) степенями куда быстрее показательно убывающих введённых приведённых плотностей вероятности взвешивающих неотрицательных мер (с ростом этих мер) в модельном нормальном распределении (с нулевым средним и дисперсией распределения той расширенной совокупности) для преимущественного опирания непременно на самые точные данные. Обычно вполне достаточна простейшая первая степень этих приведённых плотностей вероятности.

8. Минимизация суммы произведений одинаковых положительных степеней приведённых плотностей вероятности взвешивающих неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы в модельном нормальном распределении (с нулевым средним и дисперсией распределения той расширенной совокупности) на в общем случае другие одинаковые положительные степени взвешиваемых неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы, то есть со степенным нормальным взвешиванием степеней взвешиваемых неотрицательных мер.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 337/556

9. По совокупности условий этой минимизации определение в общем случае другого псевдорешения исходной системы уравнений как следующего приближения к квазирешению (наилучшему псевдорешению) исходной системы уравнений.

10. Пошаговое продолжение этого итерационного процесса до соответствующего необходимой и достаточной точности определяемого по соответствующим разностям достижения почти постоянства последовательных приближений и характеристик условий указанной минимизации. Определение, обоснование и оценивание полученного квазирешения исходной системы уравнений последовательностью значений её всеобщей погрешности для этих последовательных приближений. Предел этой последовательности есть всеобщая погрешность этого квазирешения как мера несовместности (противоречивости) этой системы.

Если, в частности, минимизируется сумма взвешенных любыми положительными весами квадратов разностей обеих частей каждого из уравнений их совокупности, то можно использовать простейшие и удобнейшие формулы метода наименьших квадратов именно правильно благодаря единообразной выравнивающей нормализации каждого из уравнений и их вкладов, которая предшествует минимизации.

Для примера взята произвольная переопределённая система  $m$  линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, m)$$

с  $n < m$  искомыми неизвестными ( $m$  и  $n$  – положительные целые числа)

$$x_j \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n)$$

с известными коэффициентами  $a_{ij}$  при неизвестных  $x_j$  и известными правыми частями  $b_i$ .

1. Эта переопределённая система линейных уравнений предполагается для простоты полностью обезразмеренной, то есть все известные и неизвестные являются действительными числами. Кроме того, считается выполненным единообразное нормирование системы всех линейных уравнений делением каждого из них на квадратный корень из суммы квадратов его коэффициентов при всех неизвестных с допуском умножением некоторых из уравнений их системы на минус единицу.

2. Как начальное приближение к квазирешению (наилучшему псевдорешению) этой переопределённой системы линейных уравнений берётся её псевдорешение по методу наименьших квадратов. А именно, существующий минимум суммы  $S$  квадратов разностей обеих частей каждого из уравнений их системы

$$S = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i)^2$$

достигается при совокупности условий аннулирования половин частных производных этой суммы  $S$  по каждому из неизвестных этой системы уравнений:

$$(1/2)\partial S/\partial x_{j'} = \sum_{i=1}^m a_{ij'}(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i) = 0 \quad (j' = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n).$$

Как известно, эта система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными имеет положительный главный определитель и поэтому является определённой с единственным решением

$$x_j = x_{j(0)} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n),$$

которое является одним из псевдорешений, а именно берущимся в качестве начального приближения псевдорешением по методу наименьших квадратов, исходной переопределённой системы  $m$  линейных уравнений с  $n < m$  искомыми неизвестными.

3. Установление общей для всех уравнений упорядоченной пары совпадающих или различных между собой неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы псевдорешением этой системы уравнений как предыдущим  $k$ -ым приближением к её квазирешению (наилучшему псевдорешению). Первая, взвешивающая, из этих двух неотрицательных мер своей положительной степенью своей введённой приведённой плотности вероятности даёт вес своей положительной степени второй, взвешиваемой, из этих двух неотрицательных мер. В качестве взвешивающей из этих двух неотрицательных мер берётся (без дальнейшего возведения своей введённой приведённой плотности вероятности в степень, то есть оставляемой в первой степени) всеобщая погрешность

$$E_{i(k)} = |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_{j(k)} - b_i| / \sum_{j=1}^n (|a_{ij}||x_{j(k)}| + |b_i|) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, m; k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$$

как общая для всех уравнений их системы

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 338/556

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, m)$$

неотрицательная мера нарушения каждого из них псевдорешением

$$x_j = x_{j(k)} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n)$$

совокупности уравнений как предыдущим  $k$ -ым приближением к квазирешению (наилучшему псевдорешению) системы уравнений. А в качестве взвешиваемой из этих двух неотрицательных мер берётся абсолютная погрешность – модуль разности обеих частей каждого из уравнений их системы – для дальнейшего возведения во вторую степень, дающего квадрат разности обеих частей каждого из уравнений их системы с целью использования простейших и удобнейших формул метода наименьших квадратов именно правильно благодаря единообразной выравнивающей нормализации каждого из уравнений их системы и их вкладов, которая предшествует минимизации.

4. Симметризация совокупности взвешивающих неотрицательных мер

$$E_{1(k)}, E_{2(k)}, E_{3(k)}, \dots, E_{m(k)}$$

нарушения каждого из уравнений их системы (с указанием, например левыми индексами, и точным учётом кратностей этих мер при их одинаковости для различных уравнений системы) на числовой оси относительно нуля пополнением совокупности взвешивающих неотрицательных мер совокупностью соответствующих противоположных значений

$$-E_{1(k)}, -E_{2(k)}, -E_{3(k)}, \dots, -E_{m(k)}$$

с теми же кратностями с их указанием, например левыми индексами.

5. Определение дисперсии

$$\sigma_{(k)}^2 = [\sum_{i=1}^m (-E_{i(k)})^2 + \sum_{i=1}^m E_{i(k)}^2] / (2m) = [\sum_{i=1}^m E_{i(k)}^2] / m$$

распределения расширенной совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер и всех противоположных им значений, симметричной относительно нуля и поэтому обладающей нулевым средним. Дисперсия  $\sigma_{(k)}^2$  этого распределения с учётом его нулевого среднего может быть равносильно определена по неотрицательной половине той расширенной совокупности, а именно как начальный момент второго порядка только совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы её псевдорешением. Следует заметить, что в знаменателе дисперсии, единой для всех уравнений их системы, оказывается  $m$ , а не  $(m - 1)$  с вычитанием этой единицы для исключения смещения оценки дисперсии всей генеральной совокупности целиком по дисперсии меньшей выборки, определяемой относительно среднего значения этой выборки. В данном случае выборкой является вся генеральная совокупность целиком, так что смещение принципиально исключено, тем более что из взвешивающих мер не вычитается их среднее по всем уравнениям именно благодаря пополнению совокупности всех  $m$  взвешивающих неотрицательных мер совокупностью всех  $m$  противоположных им значений. Объединение обеих этих совокупностей как раз и образует эту генеральную совокупность  $(2m)$  значений. Ввиду их симметрии относительно нуля все начальные  $\alpha_v$  и соответствующего неотрицательного целого порядка  $v$  центральные  $\mu_v$  моменты попарно совпадают  $\alpha_v = \mu_v$ , причём для нечётных порядков  $v$  аннулируются, так что оказывается нулевой и асимметрия распределения  $\gamma = \mu_3/\sigma^3$ , как и у нормального распределения. А эксцесс  $\varepsilon = \mu_4/\sigma^4 - 3$  распределения этой генеральной совокупности в общем случае не обязан быть нулевым, свойственным нормальному распределению. Причём предложенное введение альтернативного, сохраняющего знак основания, возведения в степень (минус-остепенения)

$$a^{''b} = |a|^b \text{sign}(a)$$

впервые позволяет рассматривать показательные и степенные функции для отрицательных оснований, в т. ч. начальные, центральные и смещённые моменты любых нецелых порядков.

6. Определение свойственной модельному нормальному распределению (с нулевым средним и такой же дисперсией  $\sigma_{(k)}^2$ ) введённой приведённой (единообразно для всех уравнений системы и поэтому для наших целей равносильно умноженной на квадратный корень из произведения  $2\pi$  и дисперсии) плотности вероятности

$$\exp[-E_{1(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \exp[-E_{2(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \exp[-E_{3(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \dots, \exp[-E_{m(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)]$$

каждой взвешивающей неотрицательной меры соответственно

$$E_{1(k)}, E_{2(k)}, E_{3(k)}, \dots, E_{m(k)}.$$

Так что формулы этого нормального распределения используются чисто условно, а от (симметричного относительно нуля и поэтому обладающего нулевым средним) подлинного распределения расширенной совокупности всех взвешивающих неотрицательных мер и всех противоположных им значений никоим образом не требуется его нормальность.

7. Взвешивание одинаковых положительных степеней со своим показателем  $q > 0$  взвешиваемых неотрицательных мер (в частности абсолютных погрешностей, в данном случае модулей разностей частей каждого из уравнений их системы, например во второй степени ( $q = 2$ ) с целью именно правильного использования простейших и удобнейших формул метода наименьших квадратов) нарушения каждого из уравнений их системы

$$|\sum_{j=1}^n a_{1j}x_{j(k)} - b_1|^q, |\sum_{j=1}^n a_{2j}x_{j(k)} - b_2|^q, |\sum_{j=1}^n a_{3j}x_{j(k)} - b_3|^q, \dots, |\sum_{j=1}^n a_{mj}x_{j(k)} - b_m|^q$$

(быть может, другими) одинаковыми положительными степенями

$$\exp[-pE_{1(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \exp[-pE_{2(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \exp[-pE_{3(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \dots, \exp[-pE_{m(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)]$$

со своим показателем  $p > 0$  приведённых плотностей вероятности

$$\exp[-E_{1(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \exp[-E_{2(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \exp[-E_{3(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)], \dots, \exp[-E_{m(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)]$$

взвешивающих неотрицательных мер соответственно

$$E_{1(k)}, E_{2(k)}, E_{3(k)}, \dots, E_{m(k)}$$

в модельном нормальном распределении (с нулевым средним и такой же дисперсией  $\sigma_{(k)}^2$ ).

8. Минимизация суммы

$$S_{(k+1)} = \sum_{i=1}^m \exp[-pE_{i(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)] |\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i|^q$$

произведений одинаковых положительных степеней со своим показателем  $p > 0$  приведённых плотностей вероятности взвешивающих неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы на в общем случае другие одинаковые положительные степени со своим показателем  $q > 0$  взвешиваемых неотрицательных мер нарушения каждого из уравнений их системы. Обычно вполне достаточна и принимается здесь простейшая первая степень  $p = 1$  этих приведённых плотностей вероятности взвешивающих неотрицательных мер. А в качестве взвешиваемой из этих двух неотрицательных мер берётся абсолютная погрешность и возводится во вторую степень  $q = 2$ , что даёт квадрат разности обеих частей каждого из уравнений их системы с целью именно правильного использования формул метода наименьших квадратов. В указанном частном случае при  $p = 1, q = 2$  названная сумма принимает вид

$$S_{(k+1)} = \sum_{i=1}^m \exp[-E_{i(k)}^2/(2\sigma_{(k)}^2)] (\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i)^2,$$

тождественный таковому для классического метода наименьших квадратов применительно к предварительному равносильному умножению каждого из уравнений исходной системы на строго положительный квадратный корень из приведённой плотности вероятности как веса для вклада этого уравнения в минимизируемую сумму, то есть применительно к системе уравнений

$$\sum_{j=1}^n \exp[-E_{i(k)}^2/(4\sigma_{(k)}^2)] a_{ij}x_j = \exp[-E_{i(k)}^2/(4\sigma_{(k)}^2)] b_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, m).$$

9. Определение по совокупности условий этой минимизации в общем случае другого псевдорешения исходной переопределённой системы линейных уравнений как следующего  $(k+1)$ -го приближения к квазирешению как именно наилучшему псевдорешению исходной системы уравнений по методу наименьших квадратов применительно к равносильной системе уравнений

$$\sum_{j=1}^n \exp[-E_{i(k)}^2/(4\sigma_{(k)}^2)] a_{ij}x_j = \exp[-E_{i(k)}^2/(4\sigma_{(k)}^2)] b_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, m).$$

А именно, существующий минимум суммы  $S_{(k+1)}$  квадратов разностей обеих частей каждого из уравнений их системы

$$S_{(k+1)} = \sum_{i=1}^m \{ \sum_{j=1}^n \exp[-E_{i(k)}^2/(4\sigma_{(k)}^2)] a_{ij}x_j - \exp[-E_{i(k)}^2/(4\sigma_{(k)}^2)] b_i \}^2$$

достигается при совокупности условий аннулирования половин частных производных этой суммы  $S_{(k+1)}$  по каждому из неизвестных этой системы уравнений ( $j' = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$ ):

$$(1/2)\partial S_{(k+1)}/\partial x_{j'} = \sum_{i=1}^m \exp[-E_{i(k)}^2/(4\sigma_{(k)}^2)] a_{ij'} (\sum_{j=1}^n \exp[-E_{i(k)}^2/(4\sigma_{(k)}^2)] a_{ij}x_j - \exp[-E_{i(k)}^2/(4\sigma_{(k)}^2)] b_i) = 0.$$

Как известно, эта система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными имеет положительный главный определитель и поэтому является определённой с единственным решением

$$x_j = x_{j(k+1)} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n),$$

которое является одним из псевдорешений исходной переопределённой системы  $m$  линейных уравнений с  $n < m$  искомыми неизвестными и принимается как следующее  $(k+1)$ -ое приближение к квазирешению как именно наилучшему псевдорешению исходной переопределённой системы  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, m)$

$m$  линейных уравнений с  $n < m$  искомыми неизвестными.

10. Пошаговое продолжение этого итерационного процесса до соответствующего необходимой и достаточной точности определяемого по соответствующим разностям достижения почти постоянства последовательных приближений и характеристик условий указанной минимизации. Определение, обоснование и оценивание полученного квазирешения исходной переопределённой системы  $m$  линейных уравнений с  $n < m$  искомыми неизвестными последовательностью значений её всеобщей погрешности для этих последовательных приближений. Предел этой последовательности является всеобщей погрешностью этого квазирешения как мерой несовместности этой системы.

Обработка данных о зависимости прочности стекла от числа циклов нагружения велась методом наименьших нормально взвешенных квадратов для получения первых двух зависимостей и опорой на данные при наименьшем и наибольшем разрушающих давлениях для получения третьей зависимости, причём при равенстве разрушающих давлений берётся среднее геометрическое соответствующих разрушающих напряжений:

(3.60)

$$n_1(\sigma) = 6 * 10^3 e^{-0.15\sigma/\text{МПа}},$$

$$n_2(\sigma) = 4.7 * 10^{10}/(\sigma/\text{МПа})^6;$$

$$n_3(\sigma) = (61\text{МПа}/\sigma)^{6.03}$$

$$((237 * 325)^{1/2} = 278 = (61/24)^x, x \ln(61/24) = \ln(278), x = \ln(278)/\ln(61/24) = 6.03).$$

Зависимости изображены на рис. 3.7, где данные эксперимента показаны точками.

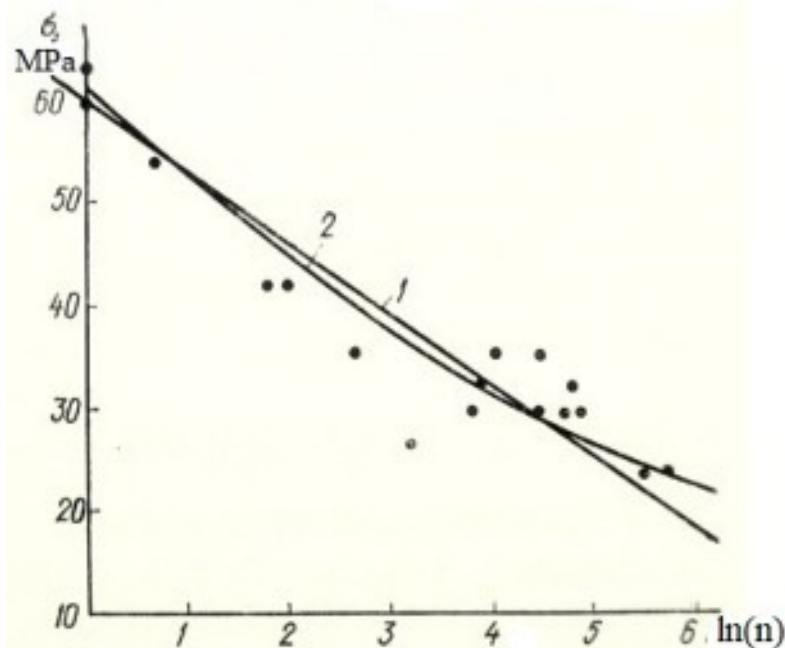


Рис. 3.7. Зависимость прочности стекла К8 от числа циклов нагружения:  
1, 2 — аппроксимации соответственно показательной и степенной функциями согласно выражениям (3.60).

Рисунок 3.7. Зависимость прочности стекла от числа  $n$  циклов нагружения: 1, 2 – приближения соответственно показательной и степенной функциями по формулам (3.60).

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 341/556

В табл. 3.3 приведены математические ожидания чисел циклов нагружения до разрушения образцов  $n_1(\sigma)$ ,  $n_2(\sigma)$  и  $n_3(\sigma)$ , рассчитанные по выражениям (3.60), и видны расхождения между  $n$  и  $n_1(\sigma)$ , между  $n$  и  $n_2(\sigma)$ , а также между  $n$  и  $n_3(\sigma)$ .

Аналогичные результаты для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нагруженного равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания без бокового давления (достаточное условие именно радиального растрескивания при разрушении), получаются при использовании созданных общего (полу)степенного метода и теорий деформирования, прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что для обеспечения работоспособности светопрозрачных элементов из неорганического стекла в пределах 200–300 циклов необходимо снизить максимально действующие напряжения в 2...2.5 раза по сравнению с разрушающими напряжениями при однократном кратковременном нагружении таких светопрозрачных элементов.

### **3.4. Экспериментальная проверка достоверности созданных общего (полу)степенного метода и теорий деформирования, прочности и разрушения сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением**

В лаборатории прочности кафедры сопротивления материалов Сумского филиала Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина были выполнены экспериментальные исследования деформирования и разрушения именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов из неорганического и органического стекла, помещаемых в камеру (рис. 3.8). Гидростатическое давление до 245 МПа в её полости создавалось модернизированной (с электромагнитным регулятором подачи и с электрическим приводом на сбросный клапан и благодаря этому дистанционно управляемой) насосной установкой УНГР-2000. Давления измерялись манометрами ОБМГ 81-160 класса 1.5 (в диапазоне давлений до 98.1 МПа) и СВ 2500 класса 1 (в диапазоне давлений от 98.1 до 245 МПа).

Созданный общий (полу)степенной метод и теории деформирования, прочности и разрушения сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на одно основание, на кольцевую периферическую часть другого основания и на боковую поверхность при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением открыли явление кратного превышения стрел прогиба круглой центральной части и всего полностью нагруженного основания стрелами прогиба круглой центральной части и всего частично нагруженного основания соответственно как главенствующую особенность деформирования именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, вопреки одинаковости искривлений обоих оснований по теории круглых пластин и теории круглых плит.

Поэтому экспериментальная проверка достоверности созданных общего (полу)степенного метода и теорий деформирования, прочности и разрушения сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением сосредоточилась на измерении именно и только осевого перемещения точек вблизи края  $r = a_1 = 30$  мм ненагруженной центральной части частично нагруженного основания относительно её центра индикатором (микрометром) часового типа (с ценой деления 2 мкм в опытах с неорганическим стеклом и 10 мкм в опытах с органическим

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 342/556 (стеклом), установленным на опоре, включающей [155] три ножки (см. рис. 3.8), внутренние края заострённых концов которых лежат на окружности радиусом  $r = 26$  мм.

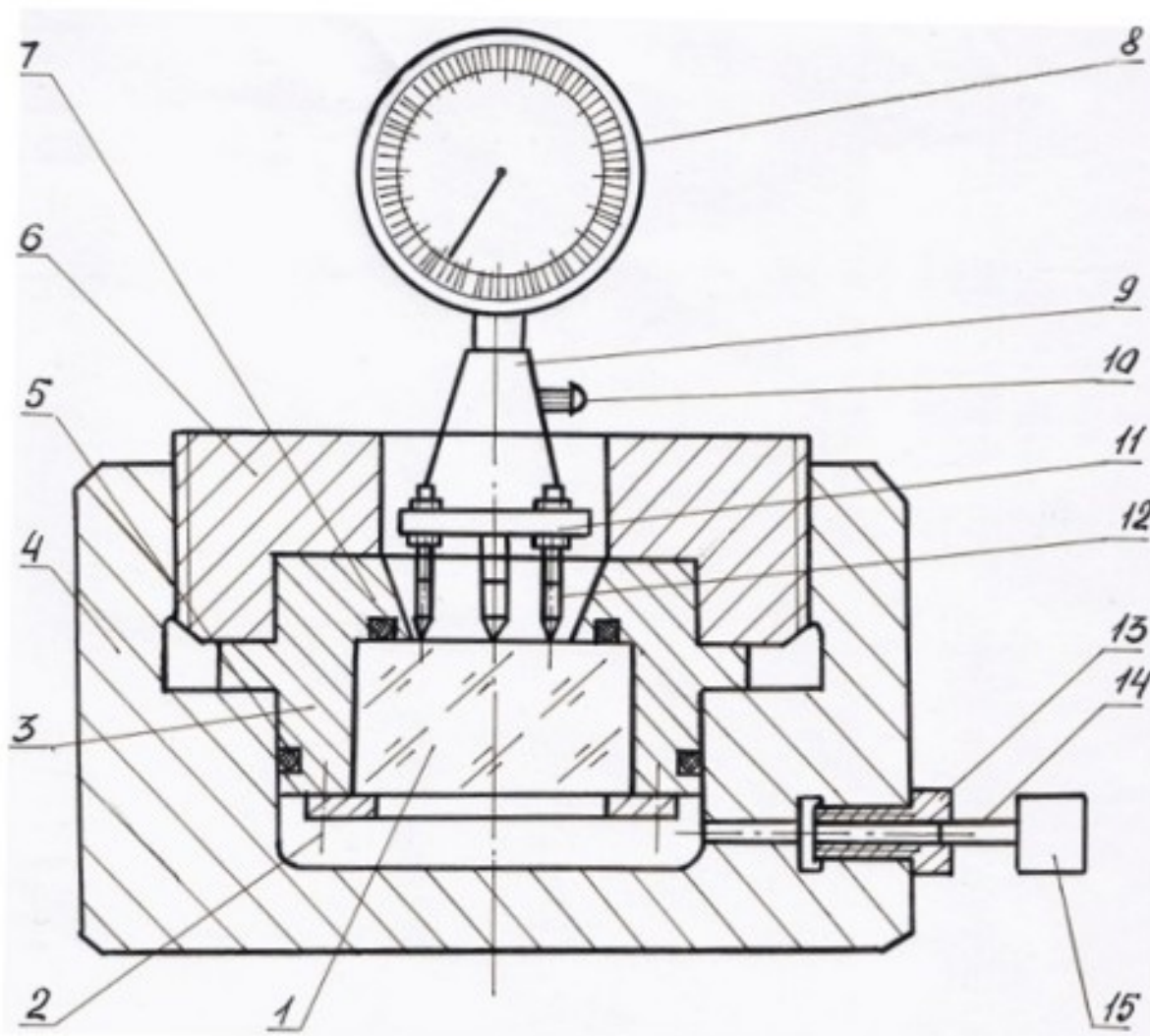


Рисунок 3.8. Камера для экспериментальных исследований деформирования и разрушения именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов из неорганического и органического стекла: 1 – стеклоэлемент; 2 – крепёжные элементы; 3 – оправка; 4 – корпус; 5 – уплотнение оправы; 6 – крепление оправы; 7 – уплотнение стеклоэлемента; 8 – микрометр; 9 – корпус измерителя; 10 – крепление микрометра; 11 – измерительный элемент; 12 – опорная ножка; 13 – штуцер; 14 – трубопровод; 15 – насосная станция с манометром.

Камера ориентировалась так, что ненагруженный участок расположенной горизонтально внутренней в иллиминаторе и внешней в камере оптической поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, был обращён вверх (см. рис. 3.8), и на этот участок соосно устанавливался микрометр на опоре.

Наблюдение за манометром, микрометром и ходом эксперимента в целом осуществлялось из соседнего помещения благодаря телевизионным установкам.

При этом показания микрометра соответствовали перемещению конца измерительного стержня относительно концов ножек опоры, которое в точности равняется величине осевого перемещения  $u_z(r, 0)$ .

Непринципиально, что при лабораторной имитации условий подводного погружения гидростатическое давление действует изнутри, а не извне, поскольку в обоих случаях речь идёт о перемещениях поверхности, свободной от давления, а перемена направления оси Oz сопровождается переменной ролью уменьшаемого и вычитаемого в стреле прогиба как разности перемещений, так что нет расхождений не только в величине, но и в знаке.

Что касается некоторого несоответствия в распределении контактного давления оправы на сплошное трёхмерное цилиндрическое тело, в частности светопрозрачный элемент (в отличие от гидростатического давления, равномерного по закону Паскаля, контактное давление не обязано быть таковым), то как раз эксперимент и даёт возможность оценить влияние погрешностей выбора схемы нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодействием на деформирование сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, в случае отличных от рассматриваемой конструкций иллюминаторов для высоких давлений.

Для анализа результатов сопоставления экспериментальных и теоретических данных о стреле прогиба  $u_z(r, 0)$  участка ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нужно оценить погрешности сопоставления результатов прямого измерения стрелы прогиба  $u_z(r, 0)$  и косвенного её определения по соответствующей формуле (2.80) с учётом измеряемых величин давлений.

Можно считать, что предельная абсолютная погрешность прямого измерения складывается из погрешности микрометра и погрешности отсчёта, равной половине цены деления микрометра  $\Delta_{\text{мкм}}$ , и составляет примерно цену деления микрометра  $\Delta_{\text{мкм}}$ , то есть 2 мкм и 10 мкм в опытах с неорганическим и органическим стеклом соответственно независимо от давления  $p$ .

Сложнее обстоит дело с погрешностью косвенного определения.

Применив метод [287] полного дифференцирования стрелы прогиба  $u_z(r, 0)$  как функции многих переменных  $p, E, \mu, h, a, a_1, r$  с заменой их дифференциалов предельными абсолютными погрешностями  $\Delta p, \Delta E, \Delta \mu, \Delta h, \Delta a, \Delta a_1, \Delta r$ , с заменой производных абсолютными величинами этих производных и обозначив

$$u = u_z(r, 0) = (p/E)h \left\{ [(1/2)(1 + \mu)(1 - \mu^2) + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] r^2/h^2 - (3/16)(1 - \mu^2) r^4/h^4 + (1/2)(1 + \mu) a^2/(a^2 - a_1^2) \delta r^2/a_1^2 \right\},$$

с учётом положительности величины  $u$  получаем формулу для предельных относительных погрешностей (ограничимся методом среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения):

$$(3.61)$$

$$\begin{aligned} \delta_u = & |p/u \partial u/\partial p| \delta_p + |E/u \partial u/\partial E| \delta_E + |\mu/u \partial u/\partial \mu| \delta_\mu + |h/u \partial u/\partial h| \delta_h + |a/u \partial u/\partial a| \delta_a + |a_1/u \partial u/\partial a_1| \delta_{a_1} + \\ & |r/u \partial u/\partial r| \delta_r = \delta_p + \delta_E + \mu^2 (p/E) [r^2/(uh)] (7/20) h^2 a^2 / [a_1^2 (a^2 - a_1^2)] + 6/5 + (3/4) [(1 - \mu)/\mu] a_1^2/h^2 + \\ & 3 a_1^2 a^2 / [h^2 (a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1) - (3/8) r^2/h^2 |\delta_\mu| + |1 + (1 - \mu^2)(p/E) [r^2/(uh)] [- (7/20) h^2 a^2 / [a_1^2 (a^2 - a_1^2)] + (3/4) \\ & [(1 - \mu)/(1 + \mu)] a_1^2/h^2 + 3 a_1^2 a^2 / [h^2 (a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1) - (3/8) r^2/h^2] \delta_h + (1 - \mu^2)(p/E) [r^2/(uh)] [a^2/(a^2 - a_1^2)] - \\ & (7/20) a^2/(a^2 - a_1^2) + 3 a_1^4 / [h^2 (a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1) - (3/2) a_1^2/h^2 \delta_a + (1 - \mu^2)(p/E) [r^2/(uh)] [a_1^2/(a^2 - a_1^2)] - \\ & (7/20) (a^2/a_1^2 - 2) h^2 a^2 / [a_1^2 (a^2 - a_1^2)] + (3/4) [(1 - \mu)/(1 + \mu)] (a^2 - a_1^2)/h^2 + 3 a^4 / [h^2 (a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1) - \\ & (3/2) a^2/h^2 \delta_{a_1} + |2 - (3/8)(1 - \mu^2)(p/E) [r^4/(uh^3)]| \delta_r. \end{aligned}$$

Аналогична формула для среднеквадратичных относительных погрешностей:

$$(3.62)$$

$$v_u^2 = (p/u \partial u/\partial p)^2 v_p^2 + (E/u \partial u/\partial E)^2 v_E^2 + (\mu/u \partial u/\partial \mu)^2 v_\mu^2 + (h/u \partial u/\partial h)^2 v_h^2 + (a/u \partial u/\partial a)^2 v_a^2 + (a_1/u \partial u/\partial a_1)^2 v_{a_1}^2 + (r/u \partial u/\partial r)^2 v_r^2.$$

Если именно трёхмерный сплошной цилиндрический элемент, в частности светопрозрачный, выполнен из стекла К8 и имеет размеры

$$h = 60 \text{ мм}, a = 55 \text{ мм}, a_1 = 30 \text{ мм},$$

причём

$$r = 26 \text{ мм},$$

то

(3.63)

$$\delta_u = \delta_p + \delta_E + 0.10\delta_\mu + 0.38\delta_h + 0.28\delta_a + 1.11\delta_{a1} + 1.97\delta_r;$$
$$v_u^2 = v_p^2 + v_E^2 + 0.01v_\mu^2 + 0.14v_h^2 + 0.08v_a^2 + 1.23v_{a1}^2 + 3.88v_r^2.$$

В случае органического стекла коэффициенты близки к приведённым и с инженерной точностью можно пользоваться этими же формулами (3.63).

Поскольку значения давления  $p$  принимаются согласно показаниям манометра, то предельная абсолютная погрешность значения давления  $p$  складывается из погрешности прибора и погрешности отсчёта:

$$\Delta_p = K'/100 p_{\text{пред}} + (1/2)\Delta_{\text{ршк}},$$

где

$K'$  – класс манометра;

$\Delta_{\text{ршк}}$  – цена деления шкалы манометра;

$p_{\text{пред}}$  – верхний предел шкалы манометра.

В случае элемента из стекла К8 применялся манометр СВ 2500, для которого

$$K' = 1;$$

$$p_{\text{пред}} = 245 \text{ МПа};$$

$$\Delta_{\text{ршк}} = 4.9 \text{ МПа},$$

так что

$$\Delta_p = 4.9 \text{ МПа}.$$

При опытах со светопрозрачным элементом из органического стекла

$$K' = 1.5;$$

$$p_{\text{пред}} = 157 \text{ МПа};$$

$$\Delta_{\text{ршк}} = 1.96 \text{ МПа},$$

а значит,

$$\Delta_p = 3.3 \text{ МПа}.$$

Среднеквадратичная абсолютная погрешность  $S_p$  значения давления  $p$  складывается из таких же компонентов, но в соответствии с [287] считаем их уменьшенными в  $2^{1/2}$  раза:

$$S_p^2 = (2^{-1/2} K'/100 p_{\text{пред}})^2 + [2^{-1/2} (1/2) \Delta_{\text{ршк}}]^2,$$

что даёт

$$S_p = 2.5 \text{ МПа}$$

для стекла К8 и

$$S_p = 1.8 \text{ МПа}$$

для органического стекла.

Эти абсолютные погрешности  $\Delta_p$  и  $S_p$  не зависят от давления  $p$ , соответственно относительные погрешности  $\delta_p$  и  $v_p$  обратно пропорциональны давлению  $p$ .

Напротив, остальные относительные погрешности не зависят от давления  $p$ .

Данные о точности модуля продольной упругости Юнга  $E$  и коэффициента поперечной деформации Пуассона  $\mu$  в [116, 118] отсутствуют, поэтому в соответствии с [169] принимаются

$$v_E = 0.05;$$

$$v_\mu = 0.06.$$

Тогда, полагая

$$\delta_E = 2^{1/2} v_E;$$

$$\delta_\mu = 2^{1/2} v_\mu,$$

получаем

$$\delta_E = 0.07;$$

$$\delta_\mu = 0.085.$$

В связи с измерениями штангенциркулем принимаем абсолютные погрешности измерений толщины  $h$ , радиуса  $a$  боковой поверхности и радиуса  $a_1$  ненагруженной центральной части частично нагруженного основания сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$\Delta_h = 0.1 \text{ мм};$$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 345/556

$$\Delta_a = 0.1 \text{ мм};$$

$$\Delta_{a1} = 0.1 \text{ мм}.$$

Ввиду возможности эксцентричной установки ножек приспособления для микрометра принимаем абсолютную погрешность измерения радиуса  $r$  окружности, проходящей через острия концов ножек приспособления для микрометра,

$$\Delta_r = 0.5 \text{ мм}.$$

Считаем также соответствующие среднеквадратичные относительные погрешности

$$v_h = 2^{-1/2}\delta_h = 2^{-1/2}\Delta_h/h;$$

$$v_a = 2^{-1/2}\delta_a = 2^{-1/2}\Delta_a/a;$$

$$v_{a1} = 2^{-1/2}\delta_{a1} = 2^{-1/2}\Delta_{a1}/a_1;$$

$$v_r = 2^{-1/2}\delta_r = 2^{-1/2}\Delta_r/r.$$

Тогда при давлении

$$p = 98 \text{ МПа}$$

получаем предельную относительную погрешность  $\delta_u$  стрелы прогиба

$$u = u_z(r, 0)$$

от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$\delta_u = 0.17.$$

Парциальные вклады указанных ниже отдельных слагаемых в эту предельную относительную погрешность  $\delta_u$  стрелы прогиба

$$u = u_z(r, 0)$$

составляют соответственно:

$$\delta_p = 0.29\delta_u;$$

$$\delta_E = 0.41\delta_u;$$

$$0.10\delta_\mu = 0.05\delta_u;$$

$$0.38\delta_h = 0.004\delta_u;$$

$$0.28\delta_a = 0.003\delta_u;$$

$$1.11\delta_{a1} = 0.02\delta_u;$$

$$1.97\delta_r = 0.22\delta_u.$$

Также при давлении

$$p = 98 \text{ МПа}$$

получаем среднеквадратичную относительную погрешность  $v_u$  стрелы прогиба

$$u = u_z(r, 0)$$

от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$v_u = 0.061.$$

Парциальные вклады указанных ниже отдельных слагаемых в квадрат  $v_u^2$  этой среднеквадратичной относительной погрешности  $v_u$  стрелы прогиба

$$u = u_z(r, 0)$$

составляют:

$$v_p^2 = 0.17v_u^2;$$

$$v_E^2 = 0.68v_u^2;$$

$$0.01v_\mu^2 = 0.01v_u^2;$$

$$0.14v_h^2 = 0.00005v_u^2;$$

$$0.08v_a^2 = 0.00003v_u^2;$$

$$1.23v_{a1}^2 = 0.002v_u^2;$$

$$3.88v_r^2 = 0.14v_u^2.$$

Теперь очевидны влияния погрешностей в определении аргументов  $p$ ,  $E$ ,  $\mu$ ,  $h$ ,  $a$ ,  $a_1$ ,  $r$  стрелы прогиба

$$u = u_z(r, 0)$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 346/556

от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, как функции этих аргументов на погрешности её значений

$$u = u_z(r, 0).$$

Важными оказываются погрешности в определении давления  $p$ , модуля продольной упругости Юнга  $E$  и радиуса  $r$  окружности, проходящей через острия концов ножек приспособления для микрометра.

Напротив, погрешности в определении коэффициента поперечной деформации Пуассона  $\mu$ , толщины  $h$ , радиуса  $a$  боковой поверхности и радиуса  $a_1$  ненагруженной центральной части частично нагруженного основания сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, дают несущественные вклады в погрешности стрелы прогиба

$$u = u_z(r, 0)$$

от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Аналитические зависимости (3.61) – (3.63) чрезвычайно полезны, поскольку позволяют предвидеть погрешности и их значимости и намечать эффективные пути целенаправленного их уменьшения.

Кстати, вывод о слабом влиянии погрешности в определении толщины  $h$  лишней раз подчёркивает специфику деформирования именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента для высоких давлений.

Ведь при

$$h \ll a_1$$

влияние погрешности в определении толщины  $h$  было бы существенным.

Отметим формулы взаимосвязей (предельных и среднеквадратичных) абсолютных и относительных погрешностей в определении стрелы прогиба

$$u = u_z(r, 0)$$

от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

$$\begin{aligned} \delta_u &= \Delta_u/u; \\ \Delta_u &= u\delta_u; \\ v_u &= S_u/u; \\ S_u &= uv_u. \end{aligned}$$

Аналогично предыдущему определяются предельная абсолютная погрешность  $\Delta_u'$  сопоставления вычисленных и измеренных значений стрелы прогиба

$$u = u_z(r, 0)$$

от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$\Delta_u' = u\delta_u + \Delta_{\text{шнк}}/2$$

и квадрат  $(S_u')^2$  среднеквадратичной абсолютной погрешности  $S_u'$  сопоставления вычисленных и измеренных значений стрелы прогиба

$$u = u_z(r, 0)$$

от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

$$(S_u')^2 = (uv_u)^2 + \Delta_{\text{шнк}}^2/4.$$

Разумеется, эти предельная абсолютная погрешность  $\Delta_u'$  и среднеквадратичная абсолютная погрешность  $S_u'$  зависят от давления  $p$ , что отражено и на рис. 3.9, на котором показаны итоги сопоставлений результатов расчёта стрелы прогиба

$$u = u_z(r, 0)$$

от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела (светопрозрачного элемента из неорганического (а) и органического (б) стекла) по созданному общему (полу)степенному методу и методу конечных элементов с экспериментальными данными.

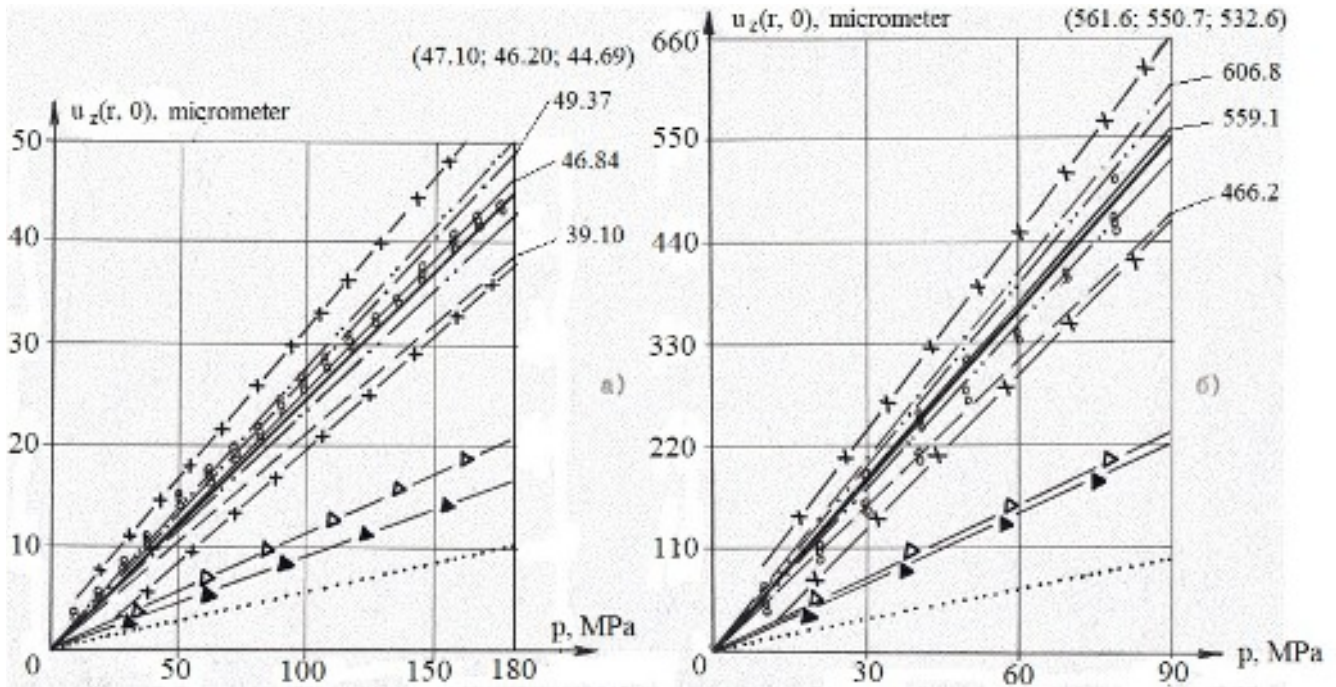


Рисунок 3.9. Сопоставление экспериментальных (кружочки) и расчётных значений (лучи из начала координат) стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$  центральной круга радиусом  $r$  ненагруженной центральной части частично нагруженного основания изгибаемого равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического (а) и органического (б) стекла, по методу конечных элементов (толстый луч), по теории изгибаемой равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания круглой пластины (пунктирный луч), по теории изгибаемой равномерным давлением на одно основание свободно опёртой по краю круглой плиты (штриховой луч с белыми треугольниками), по теории изгибаемой равномерным давлением на одно основание жёстко закреплённой по краю круглой плиты (штриховой луч с зачернёнными треугольниками), по созданному общему (полу)степенному методу (каждый соответствующий луч однозначно определяется показанной ординатой его точки с наибольшей показанной абсциссой 180 МПа для неорганического стекла и 90 МПа для органического стекла) при использовании двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения (сплошной луч) с верхними и нижними границами предельной (штриховые прямые с крестиками) и среднеквадратичной (штриховые прямые с парами точек) погрешностей, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей (штриховой луч) и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения (штрихпунктирный луч), а также при использовании однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения по методам 1, 2, 3 (в круглых скобках в этом порядке даны ординаты названных точек лучей, тем самым однозначно определённых, но не проведённых ввиду их крайней близости к лучам по методу конечных элементов и по методу 1 при использовании двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения).

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 348/556

Для теоретического обоснования сравнения с экспериментальными данными необходимо и полезно привести вычисления всех указанных ординат названных точек лучей по созданному общему (полу)степенному методу.

Для численных расчётов используются:

радиус того круга на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания, на котором измеряется текущая стрела прогиба,

$$r = 26 \text{ мм},$$

размеры

$$a_1 = 30 \text{ мм}, a = 55 \text{ мм}, h = 60 \text{ мм}$$

и соответствующие соотношения размеров

$$\begin{aligned} h &= 2a_1, a = (11/6)a_1, \\ r^2/h^2 &= 26^2/60^2 = 13^2/30^2 = 169/900, \\ r^4/h^4 &= 26^4/60^4 = 13^4/30^4 = 169^2/900^2 = 28561/810000, \\ r^2/a_1^2 &= 26^2/30^2 = 13^2/15^2 = 169/225 \end{aligned}$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

при наибольшем внешнем давлении

$$p = 180 \text{ МПа}$$

или из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

при наибольшем внешнем давлении

$$p = 90 \text{ МПа},$$

значение  $m$  согласно (2.64) и значение  $\delta$  согласно (2.78).

Двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения использует формулу (2.80) для определения осевого перемещения и ввиду  $u_z(0, 0) = 0$  текущей стрелы прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_z(r, 0) = (p/E)h \left\{ \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} \right] r^2/h^2 - \frac{(3/8)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)}{(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2)} \delta r^2/a_1^2 \right\};$$

$$u_z(r, 0) = (p/E)h \left[ \frac{(169/1800)(1+m)(1-\mu^2) + (121/170)(169/225)(1+\mu)\delta + (3/32)(169/900)(1-\mu)^2}{(363/680)(169/900)(1-\mu^2)\ln(11/6) - (3/16)(28561/810000)(1-\mu^2)} \right].$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

текущая стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $r = 26 \text{ мм}$ ,  $0 \leq r \leq a_1$  при  $p = 180 \text{ МПа}$  составляет

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277$$

$$u_z(r, 0) = (180/80600) * \left[ \frac{(169/1800) * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (121/170) * (169/225) * (1 + 0.209) * 0.277 + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.209)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)}{1} \right] * 60 \text{ мм} = 0.04684 \text{ мм};$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 349/556

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198$$

$$u_z(r, 0) = (180/80600) * [(169/1800) * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + (121/170) * (169/225) * (1 + 0.209) * 0.198 + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.209)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.03910 \text{ мм};$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.209) = 0.334$$

$$u_z(r, 0) = (180/80600) * [(169/1800) * (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + (121/170) * (169/225) * (1 + 0.209) * 0.334 + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.209)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.04937 \text{ мм}.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

текущая стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $r = 26 \text{ мм}$ ,  $0 \leq r \leq a_1$

при  $p = 90 \text{ МПа}$  составляет

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222$$

$$u_z(r, 0) = (90/3030) * [(169/1800) * (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + (121/170) * (169/225) * (1 + 0.365) * 0.222 + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.365)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.365^2)] * 60 \text{ мм} = 0.5591 \text{ мм};$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159$$

$$u_z(r, 0) = (90/3030) * [(169/1800) * (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + (121/170) * (169/225) * (1 + 0.365) * 0.159 + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.365)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.365^2)] * 60 \text{ мм} = 0.4662 \text{ мм};$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.365) = 0.281$$

$$u_z(r, 0) = (90/3030) * [(169/1800) * (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + (121/170) * (169/225) * (1 + 0.365) * 0.281 + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.365)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.365^2)] * 60 \text{ мм} = 0.6068 \text{ мм}.$$

Однопараметрический метод устранения минимизированных невязок сопряжения использует формулу (2.80') для определения осевого перемещения и ввиду  $u_z(0, 0) = 0$  текущей стрелы прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, 0) = (p/E)h[(1/2)(1 + m)(1 - \mu^2)r^2/h^2 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) * (1/4)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) * r^2/a_1^2 + (3/8)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 * r^2/h^2 + (3/2)(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 * r^2/h^2 * a^2/(a^2 - a_1^2) * \ln(a/a_1) - (3/16)(1 - \mu^2)r^4/h^4];$$

$$u_{z1}(r, 0) = (p/E)h[(169/1800)(1 + m)(1 - \mu^2) + (206/291)(121/340)(169/225)(1 - \mu^2) + (3/32)(169/900)(1 - \mu)^2 + (363/680)(169/900)(1 - \mu^2)\ln(11/6) - (3/16)(28561/810000)(1 - \mu^2)].$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

текущая стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $r = 26 \text{ мм}$ ,  $0 \leq r \leq a_1$

при  $p = 180 \text{ МПа}$  составляет

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 350/556

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5$$

$$u_{z1}(r, 0) = (180/80600) * [(169/1800) * (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (206/291) * (121/340) * (169/225) * (1 - 0.209^2) + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.209)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.04710 \text{ мм};$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8$$

$$u_{z1}(r, 0) = (180/80600) * [(169/1800) * (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + (206/291) * (121/340) * (169/225) * (1 - 0.209^2) + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.209)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.04620 \text{ мм};$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0$$

$$u_{z1}(r, 0) = (180/80600) * [(169/1800) * (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + (206/291) * (121/340) * (169/225) * (1 - 0.209^2) + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.209)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.209^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.04469 \text{ мм}.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

текущая стрела прогиба частично нагруженного основания  $z = 0$ ,  $r = 26 \text{ мм}$ ,  $0 \leq r \leq a_1$

при  $p = 90 \text{ МПа}$  составляет

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 1/5$$

$$u_{z1}(r, 0) = (90/3030) * [(169/1800) * (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + (206/291) * (121/340) * (169/225) * (1 - 0.365^2) + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.365)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.5616 \text{ мм};$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей с

$$m = 1/8$$

$$u_{z1}(r, 0) = (90/3030) * [(169/1800) * (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + (206/291) * (121/340) * (169/225) * (1 - 0.365^2) + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.365)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.5507 \text{ мм};$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения с

$$m = 0$$

$$u_{z1}(r, 0) = (90/3030) * [(169/1800) * (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + (206/291) * (121/340) * (169/225) * (1 - 0.365^2) + (3/32) * (169/900) * (1 - 0.365)^2 + (363/680) * (169/900) * (1 - 0.365^2) * \ln(11/6) - (3/16) * (28561/810000) * (1 - 0.209^2)] * 60 \text{ мм} = 0.5326 \text{ мм}.$$

Вполне подтверждаются экспериментально в пределах инженерной точности и хорошо согласуются между собой все те итоги расчётов стрелы прогиба  $u = u_z(r, 0)$ , которые дают метод конечных элементов и созданный общий (полу)степенной метод в созданной теории деформирования изгибаемого равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при использовании однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения по всем методам минимизации невязок сопряжения и при использовании двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения.

Ближними границами для этих наилучших итогов являются нижняя и верхняя границы среднеквадратичной погрешности по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 351/556

Дальними границами для этих наилучших итогов являются нижняя и верхняя границы предельной погрешности по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения.

Двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей даёт для этих наилучших итогов промежуточную, причём скорее удалённую, нижнюю границу.

Двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения даёт для этих наилучших итогов промежуточную, причём скорее приближённую, верхнюю границу.

Кроме того, экспериментально показано, что кратно заниженные значения стрелы прогиба

$$u = u_z(r, 0)$$

от центра до радиуса  $r$  на ненагруженной центральной части частично нагруженного основания изгибаемого равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического и органического стекла, дают все известные аналитические методы, поэтому явно неприемлемые:

теория изгибаемой равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания круглой пластины, сколько-нибудь приемлемая для толщин не более четверти радиуса;

теория изгибаемой равномерным давлением на одно основание свободно опёртой по краю круглой плиты, вообще неприемлемая для изгиба равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания и сколько-нибудь приемлемая для толщин не более четверти радиуса только для изгиба равномерным давлением на одно основание свободно опёртого по краю именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента;

теория изгибаемой равномерным давлением на одно основание жёстко защемлённой по краю круглой плиты, вообще неприемлемая для изгиба равномерными давлениями на одно основание и на кольцевую периферическую часть другого основания и сколько-нибудь приемлемая для толщин не более четверти радиуса только для изгиба равномерным давлением на одно основание жёстко защемлённого по краю именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

Экспериментально подтверждены результатами испытаний, проведённых в лаборатории прочности Сумского филиала Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина, созданные теории не только деформирования, но и прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием.

При отсутствии бокового давления ( $p_1 = 0$ ,  $\Pi = 0$ ) испытывался сплошной трёхмерный цилиндрический светопрозрачный элемент из неорганического стекла К8 размерами

$$h = 45 \text{ мм}, a_1 = 30 \text{ мм}, a = 50 \text{ мм}.$$

Он разрушился при

$$p_u = 30 \text{ МПа}$$

(расчётное давление разрушения  $p_u$  составляет

$$p_u = 29.0 \text{ МПа}; p_u = 30.4 \text{ МПа}; p_u = 33.0 \text{ МПа}$$

соответственно по созданному общему (полу)степенному методу при использовании однопараметрического метода устранения минимизированных невязок сопряжения по методам минимизации среднеквадратично, минимаксами модулей и коллокационно) с образованием системы трещин, близких к радиальным, и с зарождением их вблизи центра свободной от давления центральной части частично нагруженного основания.

Аналогично разрушились при подобном нагружении светопрозрачные элементы из стекла К8 и других типоразмеров (см. табл. 3.2).

Эксперименты со светопрозрачными элементами из неорганического стекла К8 размерами

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 352/556

$$h = 60 \text{ мм}, a_1 = 30 \text{ мм}, a = 55 \text{ мм}$$

при равном внешнему боковом давлении

$$p_1 = p \quad (\Pi = 1)$$

при любых конструкциях иллюминаторов и программах нагружения неизменно приводили к скалыванию и последующему растрескиванию сегмента, меньшего полусферы, основанием которого является ненагруженная центральная часть частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

При этом угол откола ненагруженного светового участка составлял примерно

$$25...30^\circ$$

с изменением в окружном направлении.

Расчётное значение этого угла откола светового участка составляет  $23^\circ$  по формуле (3.48).

Давления разрушения  $p_u$  при одном или нескольких циклах нагружения находились в промежутке

$$150...200 \text{ МПа.}$$

Теоретические значения давления разрушения  $p_u$  по критерию Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева, критерию Кулона–Мора, приведённым третьей и четвёртой теориям прочности

$$p_u = 166 \text{ МПа}$$

при методе среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения и несколько выше при методе минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и при методе коллокационной минимизации невязок сопряжения и

$$p_u = 182 \text{ МПа}$$

по первой теории прочности и по приведённому критерию Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева с различиями примерно 1 % внутри каждой из этих обеих групп критериев предельных состояний (см. рис. 3.1).

Таким образом, эксперименты подтверждают правильность представлений о прочности и разрушении, полученных с помощью критерия Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева, критерия Кулона–Мора и приведённых первой, третьей и четвёртой теорий прочности по созданным общей теории предельных состояний и общей теории прочности с их общими методологиями и методами и на основе созданной аналитической методологии макроэлементов, а также их применимость, приемлемость и полезность для расчётов несущей способности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением.

Для сопоставления существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, как реального объекта с его расчётной схемой со скачком противодействия от нуля на круглую центральную часть до повышенного равномерного противодействия на кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания тела именно при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением представляются существенными следующие дополнительные соображения.

Во-первых, всегда бывают некоторые местные несоответствия расчётных схем любым реальным объектам, что поэтому не является признаком неприемлемости расчётных схем.

Во-вторых, инженерная точность и поэтому приемлемость решения по аналитической методологии макроэлементов именно в месте скачка противодействия на частично нагруженное основание существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением проверена и подтверждена аналитически посредством дополнительного уточнённого расчёта для реального распределения этого скачка по ширине сечения уплотнительного кольца в реальной конструкции иллюминатора, осуществляющей эту схему нагружения.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 353/556

В-третьих, инженерная точность и поэтому приемлемость решения по аналитической методологии макроэлементов именно в месте скачка противодействия на частично нагруженное основание существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием проверена и подтверждена в настоящей диссертации численно по методу конечных элементов. В пределах инженерной точности установлено именно повсеместное согласование друг с другом аналитических и численных результатов для радиального и осевого перемещений, радиального, окружного (тангенциального) и осевого напряжений. Что касается сдвигового напряжения, то его максимум, аналитически и численно правильно определённый по величине и месту на соответствующей указанному скачку противодействия цилиндрической поверхности сопряжения круглой центральной и кольцевой периферической частей тела, по аналитической методологии макроэлементов (как и в теории круглых плит) располагается на пересечении этой поверхности со срединной по высоте (толщине) тела плоскостью, а по результатам метода конечных элементов смещён к окружности скачка противодействия на частично нагруженном основании тела. При этом в малой окрестности этой окружности сдвиговое напряжение очень близко к своему максимуму. Поэтому в решении соответствующей задачи прочности принято, что на этой окружности действует сдвиговое напряжение, равное его максимуму.

В-четвёртых, инженерная точность и поэтому приемлемость решения по аналитической методологии макроэлементов именно в месте скачка противодействия на частично нагруженное основание существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием проверена и подтверждена в настоящей диссертации данными многочисленных экспериментов посредством специальной установки с камерой для испытаний иллюминаторов различных конструкций. При этом с инженерной точностью согласуются друг с другом аналитические, численные и экспериментальные данные не только для стрелы прогиба круглой центральной части частично нагруженного основания тела, но и для давления и характера разрушения тела. При отсутствии давления на боковую поверхность тела максимум равносильного (эквивалентного) напряжения в теле достигается именно в центре частично нагруженного основания, чему соответствует многократно наблюдавшееся радиальное растрескивание тела из неорганического стекла. Если же на его боковую поверхность распространено внешнее давление, то максимум равносильного (эквивалентного) напряжения достигается именно в месте скачка противодействия, чему соответствует многократно наблюдавшееся скалывание и последующее растрескивание сферического сегмента с ненагруженной круглой центральной частью частично нагруженного основания тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического стекла.

В-пятых, кроме методов и результатов аналитических, численных и экспериментальных исследований влияния концентрации напряжений в месте скачка противодействия на прочность и характер разрушения существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в настоящей диссертации представлен целый ряд таких конструкций иллюминаторов, в том числе защищённых авторскими свидетельствами на изобретения, что конструктивно-технологическими способами значительно снижается указанная концентрация напряжений, соответственно повышается прочность и предотвращается разрушение существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического стекла.

Следовательно, созданные аналитическая методология макроэлементов и теории деформирования, прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нагруженного по схеме основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием, выдерживают не только аналитическую и численную, но и экспериментальную проверку.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 354/556

### **3.5. Создание теории влияния на оптические свойства иллюминатора напряжённно-деформированного состояния существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, открытие, обоснование и обобщение шести основных явлений и законов такого напряжённно-деформированного состояния**

Созданная по аналитической методологии макроэлементов теория деформирования именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нагруженного по схеме основного типа в технике высоких давлений, позволяет наряду с теорией прочности создать и основы теории жёсткости именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, с выполнением совокупности условий:

$$(3.64)$$

$$u_z(a_1, 0) \leq [\Delta_{\text{раб}}];$$

$$(3.65)$$

$$u_r(a, z) \leq \Delta_r' + u_r(a + \Delta_r', z),$$

где

$[\Delta_{\text{раб}}]$  – допускаемая стрела прогиба светового участка внутренней оптической поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента;

$\Delta_r'$  – радиальный зазор между именно существенно трёхмерным сплошным цилиндрическим телом, в частности светопрозрачным элементом, и оправой;

$u_r(a + \Delta_r', z)$  – радиальные перемещения точек оправы в выбранной системе координат.

Другие, нетривиальные и специфические для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений, ограничения, накладываемые на перемещения, вытекают из расчётов влияния напряжённно-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, на оптические свойства иллюминатора для высоких давлений.

Созданная по аналитической методологии макроэлементов теория деформирования именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, нагруженного по схеме основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, позволяет исследовать и влияние напряжённно-деформированного состояния сплошного трёхмерного цилиндрического светопрозрачного элемента на габаритные и абберрационные характеристики иллюминатора и оптической системы в целом.

Для определённости рассмотрим подводный иллюминатор.

При недеформированном состоянии именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента габаритный расчёт можно выполнить методом [245] рассмотрения хода крайнего рабочего луча (рис. 3.10), однако с уточнением смысла расстояния  $\Delta'_0$  между светопрозрачным элементом и гидрообъективом и с учётом толщины  $h_f$  и выноса  $\Delta_f$  фланца внутренним радиусом  $(a - \Delta_f)$ .

Чтобы иллюминатор искусственно не сужал поле зрения гидрообъектива (естественное сужение поля зрения в воде связано с различием показателей преломления воды  $n_w = 1.33$  и воздуха  $n_a = 1$  и является неизбежным [245]), должны выполняться условия:

$$(3.66)$$

$$a_1 \geq [a_1]_{\text{раб}} = a_{\text{об}} + \Delta'_0 \text{tg} \beta_a;$$

$$a \geq [a]_{\text{раб}} = a_{\text{об}} + \Delta'_0 \text{tg} \beta_a + h \text{tg} \beta_g + h_f \text{tg} \beta_w + \Delta_f,$$

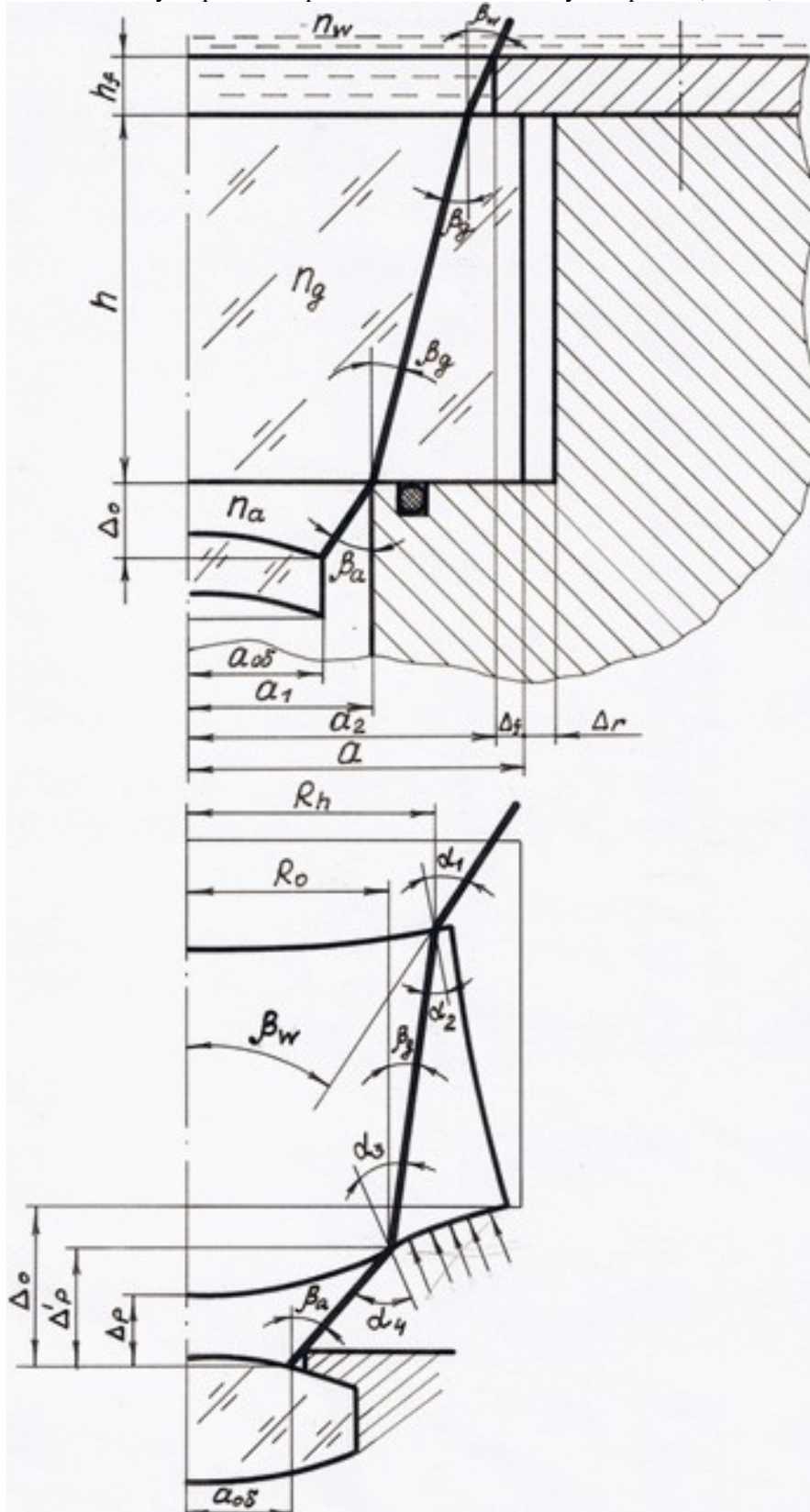


Рисунок 3.10. Ход крайнего рабочего луча в иллюминаторе без учёта (вверху) и с учётом (внизу) деформирования его именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента.

где

$[a_1]_{\text{габ}}$  – допускаемое по габаритным соображениям значение  $a_1$ ;

$a_{o6}$  – световой радиус первой линзы гидрообъектива;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 356/556

$\Delta'_0$  – расстояние между именно существенно трёхмерным сплошным цилиндрическим светопрозрачным элементом и краем светопрозрачного участка первой линзы гидрообъектива;

$\beta_a$  – угол между осью и крайним рабочим лучом в воздухе, равный половине угла поля зрения гидрообъектива в воздухе;

$[a]_{\text{габ}}$  – допускаемое по габаритным соображениям значение  $a$ ;

$\beta_g$  – угол между осью и крайним рабочим лучом в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом светопрозрачном элементе;

$\beta_w$  – угол между осью и крайним рабочим лучом в воде, равный половине угла поля зрения гидрообъектива в воде.

Ход крайнего рабочего луча через именно существенно трёхмерный сплошной цилиндрический светопрозрачный элемент, деформированный высоким гидростатическим давлением, оказывается зависящим от искривлений первоначально плоских оптических поверхностей светопрозрачного элемента.

Предположено сохранение осевой симметрии иллюминатора для высоких давлений при деформировании.

Расстояние  $\Delta'_0$  по мере увеличения давления изменяется (в практически важных случаях уменьшается) и при давлении  $p$  становится равным  $\Delta'_p$ .

Поскольку существенно именно взаимное положение сплошного трёхмерного цилиндрического светопрозрачного элемента и гидрообъектива, то одну точку подводного аппарата можно фиксировать.

Выберем, как и прежде, в качестве такой точки центр частично нагруженной внутренней оптической поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента, чтобы упростить использование формул (2.80) – (2.83), (2.80'), (2.82').

Отметим, что  $\Delta'_p$  зависит от  $\Delta'_0$  и от осевых перемещений не только именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента, но и всех других деталей корпуса, влияющих на взаимное положение светопрозрачного элемента и гидрообъектива.

Учтём изменение  $\Delta'_0$  и перемещения оптических поверхностей (см. рис. 3.10).

Условно принята неизменность расстояния края частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента от гидрообъектива, при этом  $\Delta'_p = \Delta'_0 - u_z(a, 0) + u_z(R_0, 0)$ ,

$R_0$  – расстояние от оси именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента до точки пересечения крайнего рабочего луча с внутренним основанием светопрозрачного элемента, деформированного давлением  $p$ .

В общем случае расстояние  $R_0$  удовлетворяет условию  $R_0 = a_{o6} + [\Delta'_p + u_z(R_0, 0)] \text{tg} \beta_a$ .

Это уравнение четвёртой степени относительно  $R_0$  имеет вид, удобный для применения метода итераций. Примем в качестве нулевого приближения для расстояния  $R_0$  величину

$$R_{00} = a_{o6} + \Delta'_0 \text{tg} \beta_a.$$

Ограничимся первым приближением:

$$R_0 = R_{01} = a_{o6} + [\Delta'_p + u_z(R_{00}, 0)] \text{tg} \beta_a = a_{o6} + [\Delta'_p + u_z(a_{o6} + \Delta'_0 \text{tg} \beta_a, 0)] \text{tg} \beta_a.$$

Угол между осью и нормалью к деформированной внутренней оптической поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента в точке  $r = R_0$  в связи с малостью приближённо можно считать равным своему тангенсу

$$\partial u_z(R_0, 0) / \partial r.$$

Поэтому угол падения крайнего рабочего луча на эту поверхность  $\alpha_4 = \beta_a + \partial u_z(R_0, 0) / \partial r$ .

Тогда угол преломления по известному закону синусов [279, 317] составляет

$$\alpha_3 = \arcsin[(n_a/n_g) \sin \alpha_4],$$

где  $n_a$  – показатель преломления воздуха;

$n_g$  – показатель преломления материала именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 357/556

Преломлённый луч пересекает деформированную внешнюю оптическую поверхность светопрозрачного элемента в точке, удалённой от оси светопрозрачного элемента на расстояние

$$R_h = R_0 + [h - u_z(R_0, 0) + u_z(R_h, h)] \operatorname{tg}[\alpha_3 - \partial u_z(R_0, 0)/\partial r],$$

причём подстановка нулевого приближения к  $R_h$

$$R_{h0} = R_0 + h \operatorname{tg} \alpha_3$$

даёт первое приближение к  $R_h$ , которым и ограничимся:

$$R_h = R_{h1} = R_0 + [h - u_z(R_0, 0) + u_z(R_0 + h \operatorname{tg} \alpha_3, h)] \operatorname{tg}[\alpha_3 - \partial u_z(R_0, 0)/\partial r].$$

Угол падения крайнего рабочего луча в этой точке

$$\alpha_2 = \alpha_3 - \partial u_z(R_0, 0)/\partial r + \partial u_z(R_h, h)/\partial r,$$

угол преломления

$$\alpha_1 = \arcsin[(n_g/n_w) \sin \alpha_2],$$

где

$n_w$  – показатель преломления воды.

Используем радианную меру угла, при его малости примерно равную его синусу и тангенсу.

Крайний рабочий луч в воде образует с осью именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора угол

$$\beta_w = \alpha_1 - \partial u_z(R_h, h)/\partial r,$$

равный половине угла поля зрения гидрообъектива в воде при давлении  $p$ .

Анализ полученных зависимостей и сравнение их со случаем  $p = 0$  показывает, что деформирование именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента ведёт к приближению крайнего рабочего луча к оси.

В результате неравенства (3.66) усиливаются с ростом давления  $p$  и нет нужды в увеличении  $[a_1]_{\text{габ}}$  и  $[a]_{\text{габ}}$ .

Кроме того, деформирование именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента ведёт к дополнительному уменьшению угла поля зрения в воде.

Величина этого уменьшения мала для светопрозрачного элемента из органического стекла и совсем ничтожна для светопрозрачного элемента из неорганического стекла, но представляет интерес с принципиальной точки зрения.

Влияние деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента и на другие габаритные характеристики оптической системы [245, 278, 317], то есть на размеры и масштаб изображения, его освещённость и т. д., также невелико в случае светопрозрачного элемента из органического стекла и ничтожно при светопрозрачном элементе из неорганического стекла.

Другую группу оптических характеристик иллюминаторов для высоких давлений составляют абберационные [245, 278, 279, 317], определяющие искажение формы и ухудшение качества изображения.

Аналитическим расчётом хода рабочего луча через оптическую систему с именно существенно трёхмерным сплошным цилиндрическим светопрозрачным элементом иллюминатора в качестве первой линзы показано и численным методом по программе ОПАЛ Ленинградского института точной механики и оптики подтверждено, что влияние деформирования светопрозрачного элемента на габаритные (поле зрения, масштаб и освещённость изображения и др.) и абберационные (неизопланатизм; волновые, продольные и поперечные абберации; хроматизм увеличения; абсолютную и относительную дисторсии; абберации широких наклонных пучков) характеристики оптической системы [245, 278, 279, 317] незначительно при выполнении светопрозрачного элемента из органического стекла и ничтожно при выполнении светопрозрачного элемента из неорганического стекла. Единственно существенна продольная расфокусировка оптической системы – приближение изображения к задней поверхности объектива.

То есть для оптической системы для высоких давлений, имеющей в качестве первой линзы деформированный именно существенно трёхмерный сплошной цилиндрический

светопрозрачный элемент, оптические поверхности которого задавались полученными уравнениями

$$z_h(r) = h + u_z(r, h);$$

$$z_0(r) = u_z(r, 0)$$

с учётом (2.80) и (2.82), и гидрообъектив «Гидроруссар-8» [245], при давлении  $p = 98$  МПа Ленинградским институтом точной механики и оптики были вычислены aberrации осевого, внеосевого и широких наклонных пучков и сопоставлены с таковыми для случая недеформированного светопрозрачного элемента.

Установлено, что его деформирование приводит к дополнительным aberrациям, которые по сравнению с aberrациями, соответствующими недеформированному состоянию именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента, имеют тот же самый порядок в случае его выполнения из органического стекла и малы в случае светопрозрачного элемента из неорганического стекла.

Кроме того, деформирование именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора приводит к существенной в случае его выполнения из неорганического стекла и неприемлемой в случае светопрозрачного элемента из органического стекла продольной расфокусировке изображения, на величину которой оно приближается к задней поверхности гидрообъектива, снижая разрешающую способность оптической системы.

Поэтому представляется рациональным ограничиться аналитическим методом расчёта продольной расфокусировки изображения подводного объекта, связанной с искривлениями первоначально плоских оптических поверхностей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента под действием высоких гидростатических давлений на океанских глубинах.

Сущность аналитического метода расчёта продольной расфокусировки изображения подводного объекта заключается в следующем.

На рис. 3.11 показан ход параксиального (близкого к оптической оси) луча из точки  $S$  в точку  $S'_p$ , положение которой зависит от внешнего давления  $p$  и которая смещается от соответствующего  $p = 0$  положения  $S'_0$  на величину продольной расфокусировки  $\Delta x_p$  в сторону второй (задней) главной плоскости [245] гидрообъектива.

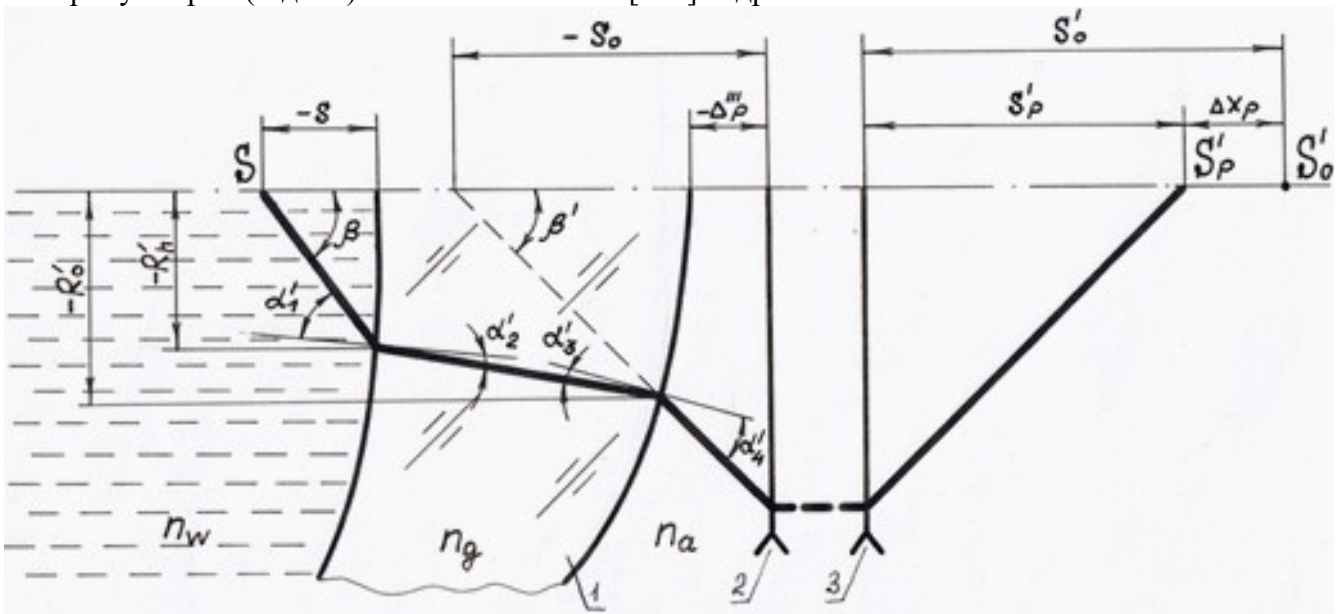


Рисунок 3.11. Приближение изображения  $S'_p$  объекта  $S$  к гидрообъективу на величину продольной расфокусировки  $\Delta x_p$ , обусловленное деформированием именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента при внешнем давлении  $p$ : 1 – светопрозрачный элемент; 2, 3 – передняя и задняя главные плоскости гидрообъектива соответственно.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 359/556

На этом же рисунке показана и первая (передняя) главная плоскость гидрообъектива, а знаки расставлены по правилам оптических расчётов.

По соображениям наглядности масштаб не соблюдается, расстояние  $s$  показано сравнительно малым, малые углы и искривления оптических поверхностей показаны многократно увеличенными по сравнению с действительностью.

На самом деле расстояние  $s$  на порядок-два превосходит величины  $h$ ,  $\Delta''_p$ ,  $s'_p$ , не говоря уже о перемещениях оптических поверхностей.

В связи с этим все обозначенные на рисунке углы малы, их синусы и тангенсы могут считаться равными их радианному меру.

Рассматривать влияние перемещений оптических поверхностей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента на величину  $s$  не имеет смысла.

Луч выходит из точки на оси под углом  $\beta$  к ней и пересекается с внешней оптической поверхностью именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента в точке, удалённой от оси на расстояние

$$R'_h = \beta s.$$

Угол падения

$$\alpha'_1 = \beta - \partial u_z(\beta s, h)/\partial r.$$

Угол преломления

$$\alpha'_2 = (n_w/n_g)\alpha'_1.$$

Луч пересекается с внутренней оптической поверхностью именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента в точке, удалённой от оси на расстояние

$$R'_0 = \beta s + [\alpha'_2 + \partial u_z(\beta s, h)/\partial r]h.$$

Угол падения

$$\alpha'_3 = \alpha'_2 + \partial u_z(\beta s, h)/\partial r - \partial u_z(R'_0, 0)/\partial r.$$

Угол преломления

$$\alpha'_4 = (n_g/n_a)\alpha'_3.$$

Угол отклонения преломлённого луча от оси

$$\beta' = \alpha'_4 + \partial u_z(R'_0, 0)/\partial r.$$

Удаление мнимой точки пересечения преломлённого луча с осью от первой (передней) главной плоскости гидрообъектива

$$s_0 = R'_0/\beta' + \Delta'''_p.$$

Тогда по формуле отрезков Гаусса [279]

$$1/s_0 + 1/s'_p = 1/f'_0,$$

где  $f'_0$  – фокусное расстояние гидрообъектива в воздухе, определяются положение изображения

$$s'_p = f'_0 + f_0'^2/(s_0 - f'_0)$$

при давлении  $p$  и, в частности, при  $p = 0$ , а затем продольная расфокусировка

$$\Delta x_p = s'_0 - s'_p.$$

Если учесть, что для гидрообъективов обычно задаётся (для «Гидроруссара-8» равное 28.8 мм) фотограмметрическое фокусное расстояние в воде [245]

$$f_{\phi w}' = (n_w/n_a)f'_0,$$

и перейти к пределу при  $\beta \rightarrow 0$ , то с учётом действительных порядков линейных величин получается формула для продольной расфокусировки, в частности по общему (полу)степенному методу.

Сущность аналитического метода расчёта продольной расфокусировки изображения подводного объекта при использовании **двухпараметрического** ( $m$ ,  $\delta$ ) метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения

аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине – заключается в следующем.

По формуле (2.80) для осевого перемещения в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение частично нагруженного основания  $z = 0$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, 0) = (p/E)h \left\{ \frac{[(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + \delta(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2)} r^2/a_1^2 \right\};$$

осевое перемещение полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, h) = (p/E)h \left\{ 2\mu r_1/p - \frac{[(1/2)(1+m)(1-\mu^2) + (3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + \delta(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2)} r^2/a_1^2 - \frac{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) r^2/a_1^2}{r^2/h^2 - (3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + \delta(1/2)(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2)} \right\}.$$

Поскольку в обоих случаях единственной переменной является радиус  $r$ , присутствующий именно и только во второй и четвёртой степенях, то каждое из деформированных оснований именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, является частью обобщённого смешанного квадратно-биквадратного параболоида вращения с перпендикулярной оси касательной плоскостью и с соприкасающимся в вершине на касательной плоскости обычным квадратным параболоидом вращения. Так как образующие обоих параболоидов вращения имеют нулевые первые производные в их общей вершине, то кривизны образующих в этой вершине равны вторым производным осевых перемещений как функций для своих образующих в этой вершине.

Луч выходит из точки на оси под углом  $\beta$  к ней и пересекается с внешней оптической поверхностью  $z = h$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента в точке, удалённой от оси на расстояние

$$R'_h = \beta s.$$

Угол падения

$$\alpha'_1 = \beta - \partial u_z(\beta s, h)/\partial r;$$

$$\partial u_{z1}(r, h)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(3/4)(1-\mu^2)r^3/h^3 + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) rh/a_1^2} r/h - \right.$$

при бесконечно малых  $\beta \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow 0$  можно пренебречь кубом  $r^3/h^3$  бесконечно малой  $r/h$ ;

$$\partial u_{z1}(r, h)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{r/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) rh/a_1^2} r/h + \right.$$

$$\partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{[\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2} \beta s/h \pm \right.$$

$$\alpha'_1 = \beta - \partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r =$$

$$\beta - (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{[\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2} \beta s/h + \right.$$

Угол преломления

$$\alpha'_2 = (n_w/n_g)\alpha'_1;$$

$$\alpha'_2 = (n_w/n_g)\beta - (n_w/n_g)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{[\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2} \beta s/h + \right.$$

Луч пересекается с внутренней оптической поверхностью  $z = 0$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента в точке, удалённой от оси на расстояние

$$R'_0 = \beta s + h\alpha'_2 + h\partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r;$$

$$R'_0 = \beta s + (n_w/n_g)\beta h - (n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{[\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2} \beta s/h + \right. \\ \left. + (p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{[\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2} \beta s/h + \right. \right. \\ \left. \left. s \gg h; \right. \right.$$

$$R'_0 = \beta s + (1 - n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{[\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2} \beta s/h + \right.$$



Угол падения

$$\alpha'_3 = \alpha'_2 + \partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r - \partial u_{z1}(R'_0, 0)/\partial r;$$

$$\partial u_{z1}(r, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] r/h - (3/4)(1-\mu^2)r^3/h^3 + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) rh/a_1^2}{\delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2} \right\};$$

при бесконечно малых  $\beta \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow 0$  можно пренебречь кубом  $r^3/h^3$  бесконечно малой  $r/h$ ;

$$\partial u_{z1}(r, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{\delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{h} \right\} r;$$

$$\partial u_{z1}(R'_0, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} \pm \frac{\delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{h} \right\} \left\{ \beta s + (n_w/n_g)\beta h + (1 - n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{\delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{h} \right\} \beta s/h + \frac{[\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta s/a_1^2}{h} \right\};$$

$$p/E \ll 1;$$

$$\partial u_{z1}(R'_0, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} \pm \frac{\delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{h} \right\} [\beta s + (n_w/n_g)\beta h];$$

$$s \gg h;$$

$$\partial u_{z1}(R'_0, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} \pm \frac{\delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{h} \right\} \beta s;$$

$$\alpha'_3 = (n_w/n_g)\beta + (1 - n_w/n_g)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{[\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{h} \right\} - (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{\delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{h} \right\} [\beta s + (n_w/n_g)\beta h];$$

$$h \ll s;$$

$$\alpha'_3 = (n_w/n_g)\beta + (1 - n_w/n_g)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{[\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{h} \right\} - (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{\delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{h} \right\} \beta s.$$

Угол преломления

$$\alpha'_4 = (n_g/n_a)\alpha'_3;$$

$$\alpha'_4 = (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{[\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{h} \right\} - (n_g/n_a)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{\delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{h} \right\} \beta s.$$

Угол отклонения преломлённого луча от оси

$$\beta' = \alpha'_4 + \partial u_z(R'_0, 0)/\partial r;$$

$$\beta' = (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{[\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{h} \right\} - (n_g/n_a)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{\delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{h} \right\} [\beta s + (n_w/n_g)\beta h] + (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{\delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{h} \right\} [\beta s + (n_w/n_g)\beta h];$$

$$s \gg h;$$

$$\beta' = (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{[\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{h} \right\} - (n_g/n_a - 1)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{\delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{h} \right\} \beta s.$$

Удаление мнимой точки пересечения преломлённого луча с осью от первой (передней) главной плоскости гидрообъектива

$$s_0 = R'_0/\beta' + \Delta'''_p;$$

$$s_0 \gg \Delta'''_p;$$

$$s_0 = R'_0/\beta';$$

$$1/s_0 = \beta'/R'_0;$$

$$1/s_0 = \left\langle \frac{(n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{[\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{h} \right\} - (n_g/n_a - 1)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{\delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2}{h} \right\} \beta s}{(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{h} + \frac{[\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) \beta sh/a_1^2}{h} \right\}} \right\rangle;$$

$$p \ll E;$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 362/556

$$1/s_0 = (n_w/n_a)/s + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \} - (n_g/n_a - 1)(p/E) \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \};$$

$$s_0 = s_0(p) = s_{0p};$$

$$1/s_{0p} = (n_w/n_a)/s + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \} - (n_g/n_a - 1)(p/E) \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \};$$

$$1/s_{00} = (n_w/n_a)/s.$$

Тогда по формуле отрезков Гаусса [279]

$$\begin{aligned} 1/s_{0p} + 1/s'_p &= 1/f'_0; \\ 1/s'_p &= 1/f'_0 - 1/s_{0p} = (s_{0p} - f'_0)/(f'_0 s_{0p}); \\ s'_p &= (f'_0 s_{0p})/(s_{0p} - f'_0); \\ s'_p &= f'_0 + f'_0^2/(s_{0p} - f'_0); \\ s'_0 &= f'_0 + f'_0^2/(s_{00} - f'_0); \\ s'_0 - s'_p &= f'_0^2/(s_{00} - f'_0) - f'_0^2/(s_{0p} - f'_0); \\ (s'_0 - s'_p)/f'_0^2 &= 1/(s_{00} - f'_0) - 1/(s_{0p} - f'_0); \\ s_{0p} &\gg f'_0. \end{aligned}$$

Продольная расфокусировка изображения подводного объекта

$$\Delta x_p = s'_0 - s'_p = f_0'^2(1/s_{00} - 1/s_{0p});$$

$$\Delta x_p = - (n_g - n_w)/n_a f_0'^2(p/E) \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \} + (n_g/n_a - 1)f_0'^2(p/E) \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \};$$

для гидрообъектива обычно вместо фокусного расстояния  $f'_0$  в воздухе задаётся фотограмметрическое фокусное расстояние  $f_{\phi w}'$  в воде

$$\begin{aligned} f_{\phi w}' &= (n_w/n_a)f'_0; \\ f'_0 &= (n_a/n_w)f_{\phi w}'; \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\Delta x_p = p/E f_{\phi w}'^2/h n_a/n_w^2 \{ - (n_g - n_w)[\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - 1/2 (1-\mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] + (n_g - n_a)[\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \}.$$

А при отсутствии надобности сохранять связанные с происхождением этой формулы (3.67) именно обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$

$$[\ ]_0 = [\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$[\ ]_h = [\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - 1/2 (1-\mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)],$$

позволяющие отдельно определить и учесть вклады искривлений сначала полностью нагруженного основания и затем частично нагруженного основания, можно с учётом сходства выражений в обеих квадратных скобках равносильно (эквивалентно) привести эту формулу (3.67) к более краткой итоговой формуле для продольной расфокусировки изображения подводного объекта

$$(3.68)$$

$$\Delta x_p = p/E f_{\phi w}'^2/h n_a/n_w^2 \{ (n_g - n_w)(1/2)(1-\mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (n_w - n_a)[\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \}.$$

В формуле (3.67) в фигурных скобках произведение  $-(n_g - n_w)$  на первую квадратную скобку обусловлено искривлением внешней оптической поверхности (полностью нагруженного основания) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора, а произведение  $(n_g - n_a)$  на вторую квадратную скобку обусловлено искривлением внутренней оптической поверхности (частично нагруженного основания) светопрозрачного элемента. Это показано выводом (происхождением, этиологией) этой формулы (3.67). Действительно, выше определены указанные частные производные осевых

перемещений частично нагруженного основания  $z = 0$  и полностью нагруженного основания  $z = h$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора по радиусу:

$$\partial u_{z1}(r, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]r/h - (3/4)(1-\mu^2)r^3/h^3 + \delta(1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) rh/a_1^2}{(3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right\};$$

$$\partial u_{z1}(r, h)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]r/h - (3/4)(1-\mu^2)r^3/h^3 + [\delta - (1/2)(1-\mu)](1+\mu)a^2/(a^2 - a_1^2) rh/a_1^2}{(3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right\}.$$

Для параксиального (близкого к оптической оси) луча являются бесконечно малыми угол  $\beta$  и соответствующий текущий радиус  $r$ :  $\beta \rightarrow 0$ ,  $r \rightarrow 0$ .

При бесконечно малом отношении  $r/h$  можно пренебречь его кубом  $r^3/h^3$  в последних двух формулах:

$$\partial u_{z1}(r, 0)/\partial r|_{r \rightarrow 0} = (p/E)r/h \left[ \frac{\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right];$$

$$\partial u_{z1}(r, h)/\partial r|_{r \rightarrow 0} = (p/E)r/h \left[ \frac{\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1-\mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right].$$

Последние две формулы как раз и содержат в обратном порядке обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$  формулы (3.67) и показывают их происхождение и смысл.

Теперь устанавливаются указанные вершинные кривизны образующих для обоих параболоидов вращения, ввиду аннулирования первых производных равные вторым производным осевых перемещений как функций для этих образующих по радиусу для частично нагруженного основания  $z = 0$  и для полностью нагруженного основания  $z = h$  соответственно, и отношение этих кривизн в обратном порядке:

(3.69)

$$k_0 = \partial^2 u_z(0, 0)/\partial r^2 = (p/E)/h [\ ]_0 = (p/E)/h \left[ \frac{\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right];$$

$$k_h = \partial^2 u_z(0, h)/\partial r^2 = (p/E)/h [\ ]_h = (p/E)/h \left[ \frac{\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1-\mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right];$$

$$k_h/k_0 = [\ ]_h/[\ ]_0 = \frac{\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1-\mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}.$$

И предпоследние две формулы как раз и содержат в обратном порядке обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$  формулы (3.67) и показывают их происхождение и смысл.

Кроме того, обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$  формулы (3.67) выражаются через соответствующие кривизны в центрах оснований:

$$[\ ]_0 = Eh/p k_0;$$

$$[\ ]_h = Eh/p k_h.$$

Легко доказать, что кривизна  $k_0$  в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  строго больше кривизны  $k_h$  в центре полностью нагруженного основания  $z = h$ . Действительно,

$$k_0 - k_h = \partial^2 u_z(0, 0)/\partial r^2 - \partial^2 u_z(0, h)/\partial r^2 = (1/2)(p/E)(1-\mu^2)h/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) > 0.$$

Если раскрыть фигурные скобки в формуле (3.67)

$$\Delta x_p = -p/E f_{\phi w}^2/h n_a/n_w^2 (n_g - n_w) \left[ \frac{\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - 1/2 (1-\mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right] + p/E f_{\phi w}^2/h n_a/n_w^2 (n_g - n_a) \left[ \frac{\delta(1+\mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right],$$

что и будет использовано в дальнейшем, то в алгебраической сумме двух слагаемых первое слагаемое с первой квадратной скобкой есть вклад искривления внешней оптической поверхности (полностью нагруженного основания) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора, а второе слагаемое со второй квадратной скобкой есть вклад искривления внутренней оптической поверхности

(частично нагруженного основания) светопрозрачного элемента в продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

Сущность аналитического метода расчёта продольной расфокусировки изображения подводного объекта при использовании **однопараметрического** ( $m$ ) метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине – заключается в следующем.

По формуле (2.80') для осевого перемещения в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, осевое перемещение частично нагруженного основания  $z = 0$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, 0) = (p/E)h \left\{ \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + \frac{(3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)}{r^2/h^2} - \frac{(3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)}{(1/4)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)} \frac{r^2/a_1^2}{r^2/a_1^2} \right] \right\};$$

осевое перемещение полностью нагруженного основания  $z = h$  в круглой центральной части  $0 \leq r \leq a_1$

$$u_{z1}(r, h) = (p/E)h \left\{ 2\mu p_1/p - \frac{(1/2)(1+\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + \left[ \frac{(1/2)(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + \frac{(3/8)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + (3/2)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)}{r^2/h^2} - \frac{(3/16)(1-\mu^2)r^4/h^4 - (1/4)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)}{r^2/a_1^2} \right] \right\}.$$

Поскольку в обоих случаях единственной переменной является радиус  $r$ , присутствующий именно и только во второй и четвёртой степенях, то каждое из деформированных оснований именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, является частью обобщённого смешанного квадратно-биквадратного параболоида вращения с перпендикулярной оси касательной плоскостью и с соприкасающимся в вершине на касательной плоскости обычным квадратным параболоидом вращения. Так как образующие обоих параболоидов вращения имеют нулевые первые производные в их общей вершине, то кривизны образующих в этой вершине равны вторым производным осевых перемещений как функций для своих образующих в этой вершине.

Луч выходит из точки на оси под углом  $\beta$  к ней и пересекается с внешней оптической поверхностью  $z = h$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента в точке, удалённой от оси на расстояние

$$R'_h = \beta s.$$

Угол падения

$$\alpha'_1 = \beta - \partial u_z(\beta s, h)/\partial r;$$

$$\partial u_{z1}(r, h)/\partial r = (p/E) \left\{ \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + \frac{(3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)}{r/h} - \frac{(3/4)(1-\mu^2)r^3/h^3 - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)}{rh/a_1^2} \right] \right\};$$

при бесконечно малых  $\beta \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow 0$  можно пренебречь кубом  $r^3/h^3$  бесконечно малой  $r/h$ ;

$$\partial u_{z1}(r, h)/\partial r = (p/E) \left\{ \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + \frac{(3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)}{r/h} - \frac{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)}{rh/a_1^2} \right] \right\};$$

$$\partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r = (p/E) \left\{ \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + \frac{(3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)}{\beta s/h} - \frac{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)}{\beta sh/a_1^2} \right] \right\};$$

$$\alpha'_1 = \beta - \partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r =$$

$$\beta - (p/E) \left\{ \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + \frac{(3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)}{\beta s/h} - \frac{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)}{\beta sh/a_1^2} \right] \right\}.$$

Угол преломления

$$\alpha'_2 = (n_w/n_g)\alpha'_1;$$

$$\alpha'_2 = (n_w/n_g)\beta - (n_w/n_g)(p/E) \left\{ \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)}{\ln(a/a_1)} + \frac{(3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)}{\beta s/h} - \frac{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)}{\beta sh/a_1^2} \right] \right\}.$$

Луч пересекается с внутренней оптической поверхностью  $z = 0$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента в точке, удалённой от оси на расстояние

$$R'_0 = \beta s + h\alpha'_2 + h\partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r;$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 365/556

$$R'_0 = \beta s + (n_w/n_g)\beta h - (n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} + (p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\};$$

$$s \gg h;$$

$$R'_0 = \beta s + (1 - n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\}.$$

Угол падения

$$\alpha'_3 = \alpha'_2 + \partial u_{z1}(\beta s, h)/\partial r - \partial u_{z1}(R'_0, 0)/\partial r;$$

$$\partial u_{z1}(r, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(3/4)(1-\mu^2)r^3/h^3 + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)} (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) rh/a_1^2 \right\};$$

при бесконечно малых  $\beta \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow 0$  можно пренебречь кубом  $r^3/h^3$  бесконечно малой  $r/h$ ;

$$\partial u_{z1}(r, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)} (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \right\} r;$$

$$\partial u_{z1}(R'_0, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)} (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \right\} \left\{ \beta s + (n_w/n_g)\beta h + (1 - n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta s/a_1^2 \right\} \right\};$$

$$p/E \ll 1;$$

$$\partial u_{z1}(R'_0, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)} (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \right\} [\beta s + (n_w/n_g)\beta h];$$

$$s \gg h;$$

$$\partial u_{z1}(R'_0, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)} (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \right\} \beta s;$$

$$\alpha'_3 = (n_w/n_g)\beta + (1 - n_w/n_g)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} - (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} + (1 - n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} [\beta s + (n_w/n_g)\beta h];$$

$$h \ll s;$$

$$\alpha'_3 = (n_w/n_g)\beta + (1 - n_w/n_g)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} - (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} + (1 - n_w/n_g)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} \beta s.$$

Угол преломления

$$\alpha'_4 = (n_g/n_a)\alpha'_3;$$

$$\alpha'_4 = (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} - (n_g/n_a)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} + (n_g/n_a)(p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} \beta s.$$

Угол отклонения преломлённого луча от оси

$$\beta' = \alpha'_4 + \partial u_z(R'_0, 0)/\partial r;$$

$$\beta' = (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} - (n_g/n_a)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} + (n_w/n_g)\beta h + (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} [\beta s + (n_w/n_g)\beta h];$$

$$s \gg h;$$

$$\beta' = (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} - (n_g/n_a - 1)(p/E) \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} + (n_w/n_g)\beta h + (p/E)h \left\{ \frac{[(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2)] \ln(a/a_1)}{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)} \beta sh/a_1^2 \right\} \beta s.$$

Удаление мнимой точки пересечения преломлённого луча с осью от первой (передней) главной плоскости гидрообъектива

$$s_0 = R'_0/\beta' + \Delta'''_p;$$

$$s_0 \gg \Delta'''_p;$$

$$s_0 = R'_0/\beta';$$

$$1/s_0 = \langle (n_w/n_a)\beta + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta sh/a_1^2 \} - (n_g/n_a - 1)(p/E) \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \} \beta s \rangle / \langle \beta s + (1 - n_w/n_g)(p/E)h \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \beta s/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) \beta sh/a_1^2 \} \rangle ;$$

$$p \ll E;$$

$$1/s_0 = (n_w/n_a)/s + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h/a_1^2 \} - (n_g/n_a - 1)(p/E) \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \};$$

$$s_0 = s_0(p) = s_{0p};$$

$$1/s_{0p} = (n_w/n_a)/s + (n_g - n_w)/n_a (p/E) \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h/a_1^2 \} - (n_g/n_a - 1)(p/E) \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \};$$

$$1/s_{00} = (n_w/n_a)/s.$$

Тогда по формуле отрезков Гаусса [279]

$$1/s_{0p} + 1/s'_p = 1/f'_0;$$

$$1/s'_p = 1/f'_0 - 1/s_{0p} = (s_{0p} - f'_0)/(f'_0 s_{0p});$$

$$s'_p = (f'_0 s_{0p})/(s_{0p} - f'_0);$$

$$s'_p = f'_0 + f_0'^2/(s_{0p} - f'_0);$$

$$s'_0 = f'_0 + f_0'^2/(s_{00} - f'_0);$$

$$s'_0 - s'_p = f_0'^2/(s_{00} - f'_0) - f_0'^2/(s_{0p} - f'_0);$$

$$(s'_0 - s'_p)/f_0'^2 = 1/(s_{00} - f'_0) - 1/(s_{0p} - f'_0);$$

$$s_{0p} \gg f'_0.$$

Продольная расфокусировка изображения подводного объекта

$$\Delta x_p = s'_0 - s'_p = f_0'^2(1/s_{00} - 1/s_{0p});$$

$$\Delta x_p = - (n_g - n_w)/n_a f_0'^2(p/E) \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h/a_1^2 \} + (n_g/n_a - 1)f_0'^2(p/E) \{ [(1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/h + (2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h/a_1^2 \};$$

для гидрообъектива обычно вместо фокусного расстояния  $f'_0$  в воздухе задаётся фотограмметрическое фокусное расстояние  $f_{\phi w}'$  в воде

$$f_{\phi w}' = (n_w/n_a)f'_0;$$

$$f'_0 = (n_a/n_w)f_{\phi w}';$$

$$(3.67')$$

$$\Delta x_p = p/E f_{\phi w}'^2/h n_a/n_w^2 \{ - (n_g - n_w)[ - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] + (n_g - n_a)[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \};$$

А при отсутствии надобности сохранять связанные с происхождением этой заменяющей формулу (3.67) формулы (3.67') именно обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$

$$[\ ]_0 = [(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$[\ ]_h = [ - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)],$$

позволяющие отдельно определить и учесть вклады искривлений сначала полностью нагруженного основания и затем частично нагруженного основания, можно с учётом сходства выражений в обеих квадратных скобках равносильно (эквивалентно) привести эту формулу (3.67') к более краткой итоговой формуле для продольной расфокусировки изображения подводного объекта

$$(3.68')$$

$$\Delta x_p = p/E f_{\phi w}'^2/h n_a/n_w^2 \{ (n_g - n_w)(1/2)(1-\mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (n_w - n_a)[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1+m)(1-\mu^2) + (3/4)(1-\mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \}.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 367/556

В этой формуле (3.67') в фигурных скобках произведение  $(- (n_g - n_w))$  на первую квадратную скобку обусловлено искривлением внешней оптической поверхности (полностью нагруженного основания) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора, а произведение  $(n_g - n_a)$  на вторую квадратную скобку обусловлено искривлением внутренней оптической поверхности (частично нагруженного основания) светопрозрачного элемента. Это показано выводом (происхождением, этиологией) этой формулы (3.67'). Действительно, выше определены указанные частные производные осевых перемещений частично нагруженного основания  $z = 0$  и полностью нагруженного основания  $z = h$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора по радиусу:

$$\partial u_{z1}(r, 0)/\partial r = (p/E) \left\{ \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)}{3a^2-2a_1^2} + \frac{(3/4)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)}{(3/4)(1-\mu^2)r^3/h^3 + (2a^2-a_1^2)/(3a^2-2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2-a_1^2) rh/a_1^2} \right] r/h - \right.$$

$$\left. \partial u_{z1}(r, h)/\partial r = (p/E) \left\{ \left[ \frac{(1+m)(1-\mu^2)}{3a^2-2a_1^2} + \frac{(3/4)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)}{(3/4)(1-\mu^2)r^3/h^3 - (1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2-2a_1^2) rh/a_1^2} \right] r/h - \right.$$

Для паракиального (близкого к оптической оси) луча являются бесконечно малыми угол  $\beta$  и соответствующий текущий радиус  $r$ :  $\beta \rightarrow 0, r \rightarrow 0$ .

При бесконечно малом отношении  $r/h$  можно пренебречь его кубом  $r^3/h^3$  в последних двух формулах:

$$\partial u_{z1}(r, 0)/\partial r|_{r \rightarrow 0} = (p/E)r/h \left[ \frac{(2a^2-a_1^2)/(3a^2-2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2-a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1-\mu^2)}{(3/4)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)} + \right.$$

$$\left. \partial u_{z1}(r, h)/\partial r|_{r \rightarrow 0} = (p/E)r/h \left[ - \frac{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2-2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1-\mu^2)}{3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)} + \frac{(3/4)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)}{3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)} \right]. \right.$$

Последние две формулы как раз и содержат в обратном порядке обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$  формулы (3.67') и показывают их происхождение и смысл.

Теперь устанавливаются указанные вершинные кривизны образующих для обоих параболоидов вращения, ввиду аннулирования первых производных равные вторым производным осевых перемещений как функций для этих образующих по радиусу для частично нагруженного основания  $z = 0$  и для полностью нагруженного основания  $z = h$  соответственно, и отношение этих кривизн в обратном порядке:

(3.69'):

$$k_0 = \partial^2 u_z(0, 0)/\partial r^2 = (p/E)/h \left[ \frac{(2a^2-a_1^2)/(3a^2-2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2-a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1-\mu^2)}{(3/4)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)} + \right.$$

$$k_h = \partial^2 u_z(0, h)/\partial r^2 = (p/E)/h \left[ - \frac{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2-2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1-\mu^2)}{3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)} + \frac{(3/4)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)}{3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)} \right];$$

$$k_h/k_0 = \left[ - \frac{(1/2)(1-\mu^2)a^2/(3a^2-2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1-\mu^2)}{(2a^2-a_1^2)/(3a^2-2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2-a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1-\mu^2)} + \frac{(3/4)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)}{(3/4)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)} \right] / \left[ \frac{(2a^2-a_1^2)/(3a^2-2a_1^2) (1/2)(1-\mu^2)a^2/(a^2-a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1-\mu^2)}{(3/4)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)} + \frac{(3/4)(1-\mu^2)a_1^2/h^2 + 3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)}{3(1-\mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2-a_1^2) \ln(a/a_1)} \right].$$

И предпоследние две формулы как раз и содержат в обратном порядке обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$  формулы (3.67') и показывают их происхождение и смысл.

Кроме того, обе квадратные скобки  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$  формулы (3.67') выражаются через соответствующие кривизны в центрах оснований:

$$[\ ]_0 = Eh/p k_0;$$

$$[\ ]_h = Eh/p k_h.$$

Легко доказать, что кривизна  $k_0$  в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  строго больше кривизны  $k_h$  в центре полностью нагруженного основания  $z = h$ . Действительно,

$$k_0 - k_h = \partial^2 u_z(0, 0)/\partial r^2 - \partial^2 u_z(0, h)/\partial r^2 = (1/2)(p/E)(1-\mu^2)h/a_1^2 a^2/(a^2-a_1^2) > 0.$$

Если раскрыть фигурные скобки в формуле (3.67')

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 368/556

$$\Delta x_p = -p/E f_{\phi w}^2/h n_a/n_w^2 (n_g - n_w) [- (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] + p/E f_{\phi w}^2/h n_a/n_w^2 (n_g - n_a) [(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1+m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)],$$

что и будет использовано в дальнейшем, то в алгебраической сумме двух слагаемых первое слагаемое с первой квадратной скобкой есть вклад искривления внешней оптической поверхности (полностью нагруженного основания) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора, а второе слагаемое со второй квадратной скобкой есть вклад искривления внутренней оптической поверхности (частично нагруженного основания) светопрозрачного элемента в продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

Согласно формулам (2.80) – (2.83), (2.80') и (2.82') обжатие именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, давлением  $p_1$  на боковую поверхность очень сильно влияет на напряжённое состояние и поэтому на прочность этого тела, вообще не влияет на искривления его оснований и совершенно незначительно утолщает тело, чем можно пренебречь по принципу начальных размеров.

Поэтому естественно отсутствие влияния бокового давления  $p_1$  на продольную расфокусировку  $\Delta x_p$  согласно формулам (3.67), (3.67'), (3.68), (3.68').

Если использовать для определения искривлений оптических поверхностей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием теорию круглой пластины при такой же схеме нагружения, то все подчёркнутые выражения аннулируются, считается, что оба основания искривляются одинаково, различие вкладов искривлений оснований в продольную расфокусировку изображения подводного объекта обусловлено именно и только различием разностей показателей преломления на соответствующих оптических поверхностях, так что две пары формул (3.67) и (3.67'), (3.68) и (3.68') дают в качестве своих частных предельных случаев при малой относительной толщине ( $h \ll a_1$ ) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, следующие две формулы для продольной расфокусировки соответственно:

$$(3.67'')$$

$$\Delta x_p = p/E f_{\phi w}^2/h n_a/n_w^2 \{ - (n_g - n_w) [(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] + (n_g - n_a) [(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \};$$

$$(3.68'')$$

$$\Delta x_p = p/E f_{\phi w}^2/h n_a/n_w^2 (n_w - n_a) [(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)].$$

А две тройки формул (3.69) и (3.69') при аннулировании всех подчёркнутых выражений дают по теории круглой пластины при такой же схеме нагружения в качестве своих частных предельных случаев при малой относительной толщине ( $h \ll a_1$ ) именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, указанные вершинные кривизны образующих для обоих параболоидов вращения, ввиду аннулирования первых производных равные вторым производным осевых перемещений как функций для этих образующих по радиусу для частично нагруженного основания  $z = 0$  и полностью нагруженного основания  $z = h$  соответственно, и отношение этих кривизн в обратном порядке:

$$(3.69'')$$

$$k_0 = \partial^2 u_z(0, 0)/\partial r^2 = (p/E)/h [(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$k_h = \partial^2 u_z(0, h)/\partial r^2 = (p/E)/h [(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$k_h/k_0 = 1.$$

То есть по теории круглой пластины в частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) одинаковое по всем шести вариантам (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) отношение кривизн в центрах полностью нагруженного



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 369/556

основания и частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением непременно равно единице ввиду тождественности искривлений обоих оснований.

Тем самым при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением выдержана аналитическая проверка созданной теории влияния напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента на оптические свойства иллюминатора.

Чтобы показать весьма значительно превышающую единицу и обычно составляющую примерно три-четыре кратность превышения кривизны в центре полностью нагруженного основания кривизной в центре частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, используются численные расчёты по однопараметрическому методу устранения невязки осевого перемещения с формулой (3.69') и итогом и параллельно вслед для удобства сопоставления по двухпараметрическому методу устранения минимизированной невязки осевого перемещения с взятыми в двойные кавычки «» формулой (3.69) и итогом.

В численных расчётах приняты размеры

$$a_1 = 30 \text{ мм}, a = 55 \text{ мм}, h = 60 \text{ мм}$$

и соответствующие соотношения размеров

$$h = 2a_1, a = (11/6)a_1$$

именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,

из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

или из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

при внешнем давлении

$$p = 98 \text{ МПа},$$

значение параметра  $m$  согласно (2.64) и значение параметра  $\delta$  согласно (2.78).

Ввиду принципиальной новизны системы открытых явлений и законов напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением и вследствие необходимости непременно доказательной силы предстоящих расчётов созданным общим (полу)степенным методом ключевые избранные из расчётов приводятся полностью как показ ясных, простых и мощных общности, применимости, воспроизводимости и проверяемости. Такие взаимосвязанные необходимые для именно глубокого понимания ясность, прозрачность, простота и убедительность немислимы для численных и экспериментальных методов, у которых есть свои важные преимущества и которые необходимо использовать для независимой проверки итогов приложения любых аналитических методов, в том числе созданного общего (полу)степенного метода.

Для оценки именно кратности превышения искривления полностью нагруженного основания  $z = h$  искривлением частично нагруженного основания  $z = 0$  избраны обе квадратные скобки

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 370/556

$[\sigma]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$  и  $[\sigma]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$ , а также обратное отношение

$$[\sigma]_h/[\sigma]_0 = k_h/k_0$$

этих квадратных скобок, равное отношению соответствующих кривизн  $k_h$  и  $k_0$  в центрах полностью нагруженного основания  $z = h$  и частично нагруженного основания  $z = 0$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением. В случаях сокращений размерностей используются в данном случае простые и удобные отношения размеров именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента.

В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) одинаковое по всем шести вариантам (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) обратное отношение

$$[\sigma]_h/[\sigma]_0 = k_h/k_0$$

этих квадратных скобок, равное отношению соответствующих кривизн  $k_h$  и  $k_0$  в центрах полностью нагруженного основания  $z = h$  и частично нагруженного основания  $z = 0$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, всегда равно единице согласно формулам (3.69'') по причине тождественности искривлений частично нагруженного основания  $z = 0$  и полностью нагруженного основания  $z = h$  в теории круглой пластины.

Квадратная скобка

$$[\sigma]_0 = Eh/p k_0$$

для кривизны  $k_0$  в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением составляет по однопараметрическому методу устранения минимизированных невязок сопряжения согласно первой формуле (3.69') и по двухпараметрическому методу устранения минимизированной невязки осевого перемещения согласно первой формуле (3.69) соответственно

$$[\sigma]_0 = \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2) (1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{\ln(a/a_1)};$$

$$\ll [\sigma]_0 = \frac{[\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]}{\ln(a/a_1)} \gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277;$$

$$[\sigma]_0 = \frac{(206/291)*(1 - 0.209^2)*(1/2)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)}{\ln(11/6)} = 3.8112;$$

$$\ll [\sigma]_0 = \frac{[0.277*(1 + 0.209)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]}{\ln(11/6)} = 3.7907 \gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198;$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 371/556

$$[\sigma]_0 = \left[ \frac{(206/291) \cdot (1 - 0.209^2) \cdot (1/2) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 1/8) \cdot (1 - 0.209^2)}{(3/4) \cdot (1 - 0.209^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)} + (3/16) \cdot (1 - 0.209)^2 \right] = 3.7395;$$

$$\ll [\sigma]_0 = \left[ \frac{0.198 \cdot (1 + 0.209) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 1/8) \cdot (1 - 0.209^2)}{0.209^2 \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)} + (3/16) \cdot (1 - 0.209)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.209^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6) \right] = 3.1751 \gg;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 \cdot 0.209) = 0.334;$$

$$[\sigma]_0 = \left[ \frac{(206/291) \cdot (1 - 0.209^2) \cdot (1/2) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 0) \cdot (1 - 0.209^2)}{(3/4) \cdot (1 - 0.209^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)} + (3/16) \cdot (1 - 0.209)^2 \right] = 3.6199;$$

$$\ll [\sigma]_0 = \left[ \frac{0.334 \cdot (1 + 0.209) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 0) \cdot (1 - 0.209^2)}{0.209^2 \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)} + (3/16) \cdot (1 - 0.209)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.209^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6) \right] = 3.9918 \gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222;$$

$$[\sigma]_0 = \left[ \frac{(206/291) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot (1/2) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 1/5) \cdot (1 - 0.365^2)}{(3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)} + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 \right] = 3.4236;$$

$$\ll [\sigma]_0 = \left[ \frac{0.222 \cdot (1 + 0.365) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 1/5) \cdot (1 - 0.365^2)}{0.365^2 \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)} + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6) \right] = 3.4021 \gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159;$$

$$[\sigma]_0 = \left[ \frac{(206/291) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot (1/2) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 1/8) \cdot (1 - 0.365^2)}{(3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)} + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 \right] = 3.3586;$$

$$\ll [\sigma]_0 = \left[ \frac{0.159 \cdot (1 + 0.365) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 1/8) \cdot (1 - 0.365^2)}{0.365^2 \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)} + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6) \right] = 2.8475 \gg;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 \cdot 0.365) = 0.281;$$

$$[\sigma]_0 = \left[ \frac{(206/291) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot (1/2) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 0) \cdot (1 - 0.365^2)}{(3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)} + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 \right] = 3.2502;$$

$$\ll [\sigma]_0 = \left[ \frac{0.281 \cdot (1 + 0.365) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 0) \cdot (1 - 0.365^2)}{0.365^2 \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)} + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6) \right] = 3.6874 \gg.$$

В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) одинаковая по всем шести вариантам (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) квадратная скобка  $[\sigma]_0$  для кривизны в центре частично нагруженного основания сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением составляет согласно первой формуле (3.69'')

$$[\sigma]_0 = \left[ \frac{(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 + 3(1 - \mu^2) a_1^2 / h^2 \cdot a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{0.365^2 \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)} + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6) \right] = 0.7362;$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

$$[\sigma]_0 = \left[ \frac{(3/16) \cdot (1 - 0.209)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.209^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)}{0.209^2 \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)} \right] = 0.7362;$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 372/556

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

$$[\ ]_0 = [(3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)] = 0.6365.$$

Квадратная скобка

$$[\ ]_h = Eh/p k_h$$

для кривизны  $k_h$  в центре полностью нагруженного основания  $z = h$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием составляет по однопараметрическому методу устранения минимизированных невязок сопряжения согласно второй формуле (3.69') и по двухпараметрическому методу устранения минимизированной невязки осевого перемещения согласно второй формуле (3.69) соответственно

$$[\ ]_h = [-(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

$$\ll [\ ]_h = [\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1 - \mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277;$$

$$[\ ]_h = [-(1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/291 + (1 + 1/5)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)] = 1.0885;$$

$$\ll [\ ]_h = [0.277*(1 + 0.209)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)] = 1.0678 \gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198;$$

$$[\ ]_h = [-(1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/291 + (1 + 1/8)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)] = 1.0168;$$

$$\ll [\ ]_h = [0.198*(1 + 0.209)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)] = 0.4524 \gg;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11*0.209) = 0.334;$$

$$[\ ]_h = [-(1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/291 + (1 + 0)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)] = 0.8972;$$

$$\ll [\ ]_h = [0.334*(1 + 0.209)*4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.209^2)*4*121/85 + (1 + 0)*(1 - 0.209^2) + (3/16)*(1 - 0.209)^2 + (3/4)*(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)] = 1.2691 \gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$m = 1/5;$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 373/556

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222;$$

$$[\ ]_h = \left[ -\frac{(1/2) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 4 \cdot 121/291 + (1 + 1/5) \cdot (1 - 0.365^2) + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)}{0.365^2} \right] = 0.9558;$$

$$\ll [\ ]_h = \left[ \frac{0.222 \cdot (1 + 0.365) \cdot 4 \cdot 121/85 - (1/2) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 1/5) \cdot (1 - 0.365^2) + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)}{0.365^2} \right] = 0.9344 \gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159;$$

$$[\ ]_h = \left[ -\frac{(1/2) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 4 \cdot 121/291 + (1 + 1/8) \cdot (1 - 0.365^2) + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)}{0.365^2} \right] = 0.8908;$$

$$\ll [\ ]_h = \left[ \frac{0.159 \cdot (1 + 0.365) \cdot 4 \cdot 121/85 - (1/2) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 1/8) \cdot (1 - 0.365^2) + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)}{0.365^2} \right] = 0.3797 \gg;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 \cdot 0.365) = 0.281;$$

$$[\ ]_h = \left[ -\frac{(1/2) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 4 \cdot 121/291 + (1 + 0) \cdot (1 - 0.365^2) + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)}{0.365^2} \right] = 0.7825;$$

$$\ll [\ ]_h = \left[ \frac{0.281 \cdot (1 + 0.365) \cdot 4 \cdot 121/85 - (1/2) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 4 \cdot 121/85 + (1 + 0) \cdot (1 - 0.365^2) + (3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)}{0.365^2} \right] = 1.2196 \gg.$$

В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) одинаковая по всем шести вариантам (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) квадратная скобка  $[\ ]_h$  для кривизны в центре полностью нагруженного основания сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием составляет согласно второй формуле (3.69')

$$[\ ]_h = \left[ \frac{(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2 / h^2 + 3(1 - \mu^2) a_1^2 / h^2 \cdot a^2 / (a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{0.365^2} \right];$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

$$[\ ]_h = \left[ \frac{(3/16) \cdot (1 - 0.209)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.209^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)}{0.365^2} \right] = 0.7362;$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

$$[\ ]_h = \left[ \frac{(3/16) \cdot (1 - 0.365)^2 + (3/4) \cdot (1 - 0.365^2) \cdot 121/85 \cdot \ln(11/6)}{0.365^2} \right] = 0.6365.$$

Отношение

$$[\ ]_h / [\ ]_0 = k_h / k_0$$

квадратных скобок  $[\ ]_h$  для полностью нагруженного основания  $z = h$  и  $[\ ]_0$  для частично нагруженного основания  $z = 0$ , равное отношению соответствующих кривизн  $k_h$  и  $k_0$  в центрах полностью нагруженного основания  $z = h$  и частично нагруженного основания  $z = 0$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием, составляет по однопараметрическому методу устранения минимизированных невязок сопряжения согласно последней формуле (3.69') и по двухпараметрическому методу устранения минимизированной невязки осевого перемещения согласно последней формуле (3.69) соответственно

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 374/556

$$k_h/k_0 = [\eta]/[\eta]_0 = \frac{[-(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2)h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/[(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2)h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]}{\langle k_h/k_0 = [\eta]/[\eta]_0 = \frac{[\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1 - \mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]/[\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] \rangle}$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277;$$

$$k_h/k_0 = [\eta]/[\eta]_0 = \frac{[-(1/2)(1 - 0.209^2)*4*121/291 + (1 + 1/5)(1 - 0.209^2) + (3/16)(1 - 0.209)^2 + (3/4)(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]/[(206/291)(1 - 0.209^2)(1/2)*4*121/85 + (1 + 1/5)(1 - 0.209^2) + (3/16)(1 - 0.209)^2 + (3/4)(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)] = 0.2856;$$

$$\langle k_h/k_0 = [\eta]/[\eta]_0 = \frac{[0.277*(1 + 0.209)*4*121/85 - (1/2)(1 - 0.209^2)*4*121/85 + (1 + 1/5)(1 - 0.209^2) + (3/16)(1 - 0.209)^2 + (3/4)(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]/[0.277*(1 + 0.209)*4*121/85 + (1 + 1/5)(1 - 0.209^2) + (3/16)(1 - 0.209)^2 + (3/4)(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)] = 0.2817 \rangle;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198;$$

$$k_h/k_0 = [\eta]/[\eta]_0 = \frac{[-(1/2)(1 - 0.209^2)*4*121/291 + (1 + 1/8)(1 - 0.209^2) + (3/16)(1 - 0.209)^2 + (3/4)(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]/[(206/291)(1 - 0.209^2)(1/2)*4*121/85 + (1 + 1/8)(1 - 0.209^2) + (3/16)(1 - 0.209)^2 + (3/4)(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)] = 0.2719;$$

$$\langle k_h/k_0 = [\eta]/[\eta]_0 = \frac{[0.198*(1 + 0.209)*4*121/85 - (1/2)(1 - 0.209^2)*4*121/85 + (1 + 1/8)(1 - 0.209^2) + (3/16)(1 - 0.209)^2 + (3/4)(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]/[0.198*(1 + 0.209)*4*121/85 + (1 + 1/8)(1 - 0.209^2) + (3/16)(1 - 0.209)^2 + (3/4)(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)] = 0.1425 \rangle;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11*0.209) = 0.334;$$

$$k_h/k_0 = [\eta]/[\eta]_0 = \frac{[-(1/2)(1 - 0.209^2)*4*121/291 + (1 + 0)(1 - 0.209^2) + (3/16)(1 - 0.209)^2 + (3/4)(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]/[(206/291)(1 - 0.209^2)(1/2)*4*121/85 + (1 + 0)(1 - 0.209^2) + (3/16)(1 - 0.209)^2 + (3/4)(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)] = 0.2479;$$

$$\langle k_h/k_0 = [\eta]/[\eta]_0 = \frac{[0.334*(1 + 0.209)*4*121/85 - (1/2)(1 - 0.209^2)*4*121/85 + (1 + 0)(1 - 0.209^2) + (3/16)(1 - 0.209)^2 + (3/4)(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)]/[0.334*(1 + 0.209)*4*121/85 + (1 + 0)(1 - 0.209^2) + (3/16)(1 - 0.209)^2 + (3/4)(1 - 0.209^2)*121/85*\ln(11/6)] = 0.3179 \rangle.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222;$$

$$k_h/k_0 = [\eta]/[\eta]_0 = \frac{[-(1/2)(1 - 0.365^2)*4*121/291 + (1 + 1/5)(1 - 0.365^2) + (3/16)(1 - 0.365)^2 + (3/4)(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]/[(206/291)(1 - 0.365^2)(1/2)*4*121/85 + (1 + 1/5)(1 - 0.365^2) + (3/16)(1 - 0.365)^2 + (3/4)(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)] = 0.2792;$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 375/556

$$\llcorner k_h/k_0 = [\eta]_h/[\eta]_0 = \frac{[0.222*(1 + 0.365)^4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.365^2)^4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[0.222*(1 + 0.365)^4*121/85 + (1 + 1/5)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.2746\gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159;$$

$$k_h/k_0 = [\eta]_h/[\eta]_0 = \frac{[-(1/2)*(1 - 0.365^2)^4*121/291 + (1 + 1/8)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[(206/291)*(1 - 0.365^2)*(1/2)^4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.2653;$$

$$\llcorner k_h/k_0 = [\eta]_h/[\eta]_0 = \frac{[0.159*(1 + 0.365)^4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.365^2)^4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[0.159*(1 + 0.365)^4*121/85 + (1 + 1/8)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.1334\gg;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11*0.365) = 0.281;$$

$$k_h/k_0 = [\eta]_h/[\eta]_0 = \frac{[-(1/2)*(1 - 0.365^2)^4*121/291 + (1 + 0)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[(206/291)*(1 - 0.365^2)*(1/2)^4*121/85 + (1 + 0)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.2407;$$

$$\llcorner k_h/k_0 = [\eta]_h/[\eta]_0 = \frac{[0.281*(1 + 0.365)^4*121/85 - (1/2)*(1 - 0.365^2)^4*121/85 + (1 + 0)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]}{[0.281*(1 + 0.365)^4*121/85 + (1 + 0)*(1 - 0.365^2) + (3/16)*(1 - 0.365)^2 + (3/4)*(1 - 0.365^2)*121/85*\ln(11/6)]} = 0.3308\gg.$$

В частном предельном случае малой относительной толщины

$$(h \ll a_1)$$

одинаковое по всем шести вариантам (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) отношение

$$[\eta]_h/[\eta]_0 = k_h/k_0$$

квадратной скобки  $[\eta]_h$  для кривизны  $k_h$  в центре полностью нагруженного основания  $z = h$  и квадратной скобки  $[\eta]_0$  для кривизны  $k_0$  в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением составляет согласно формулам (3.69')

$$k_h/k_0 = [\eta]_h/[\eta]_0 = \frac{[(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]}{[(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2) a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)]} = 1$$

для сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из любого материала, в том числе из стекла К8 и из органического стекла.

Совокупность итогов вычислений значений квадратных скобок  $[\eta]_0$ ,  $[\eta]_h$  и их обратного отношения

$$[\eta]_h/[\eta]_0 = k_h/k_0$$

для кривизн  $k_h$  и  $k_0$  в центрах полностью нагруженного основания

$$z = h$$

и частично нагруженного основания

$$z = 0$$

соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из стекла К8 или из органического стекла, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением сведена для наглядности в таблицу 3.4.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 376/556

Таблица 3.4. Значения квадратных скобок  $[\ ]_0$ ,  $[\ ]_h$  и их обратного отношения  $[\ ]_h/[\ ]_0 = k_h/k_0$  для кривизн  $k_h$  и  $k_0$  в центрах полностью нагруженного основания  $z = h$  и частично нагруженного основания  $z = 0$  соответственно именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического стекла или из органического стекла, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением по теории круглой пластины ( $h \ll a_1$ ) и по общему (полу)степенному методу (ОСМ) при использовании двухпараметрического  $(m, \delta)$  метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения и однопараметрического  $(m)$  метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине.

Метод расчёта	Значения $[\ ]_0$ , $[\ ]_h$ , $k_h/k_0$ для кривизн в центрах торцов					
	для тела (элемента) из неорганического стекла			для тела (элемента) из органического стекла		
	$[\ ]_0$	$[\ ]_h$	$[\ ]_h/[\ ]_0 = k_h/k_0$	$[\ ]_0$	$[\ ]_h$	$[\ ]_h/[\ ]_0 = k_h/k_0$
Теория круглой пластины ( $h \ll a_1$ )	0.7362	0.7362	1	0.6365	0.6365	1
ОСМ, $(m, \delta)$ , среднеквадратичный метод	3.7907	1.0678	0.2817	3.4021	0.9344	0.2746
ОСМ, $(m, \delta)$ , метод минимаксов модулей	3.1751	0.4524	0.1425	2.8475	0.3797	0.1334
ОСМ, $(m, \delta)$ , коллокационный метод	3.9918	1.2691	0.3179	3.6874	1.2196	0.3308
ОСМ, $(m)$ , среднеквадратичный метод	3.8112	1.0885	0.2856	3.4236	0.9558	0.2792
ОСМ, $(m)$ , метод минимаксов модулей	3.7395	1.0168	0.2719	3.3586	0.8908	0.2653
ОСМ, $(m)$ , коллокационный метод	3.6199	0.8972	0.2479	3.2502	0.7825	0.2407

Тем самым открыты и обоснованы пятые и шестые явления и законы напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением.

Пятое явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением В-пятых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона кратного превышения кривизны в центре полностью нагруженного основания кривизной в центре частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, так как центральная часть частично нагруженного основания не нагружена, а противодавление прикладывается лишь по периферической его части, причём при типичных для высокого давления соотношениях размеров светопрозрачного элемента со столь различно искривляющимися первоначально плоскопараллельными оптическими поверхностями эта кратность составляет примерно три-четыре.

Следует заметить, что теория круглой пластины при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением даёт строго одинаковые кривизны в центрах полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 377/556

Шестые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением В-шестых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона необходимости и чрезвычайной существенности дополнения стрелы прогиба как общей (интегральной, суммарной, рассредоточенной) характеристики искривления при изгибе ещё и кривизной как местной (локальной, сосредоточенной, концентрированной) характеристикой искривления при изгибе частично нагруженного основания и особенно полностью нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением. Ведь полностью нагруженное основание искривляетсякратно слабее частично нагруженного основания. Да и существенное положительное влияние выражения с высшей наличной степенью радиуса на стрелы прогиба оснований и их центральных частей полностью отсутствует применительно к кривизнам центров оснований. А это именно принципиально усиливает жёсткость испытания теоретического моделирования действительного объекта. К тому же общая стрела прогиба является общей характеристикой жёсткости. А местная кривизна обуславливает местные напряжения и искривление и поэтому является характеристикой прочности и оптики.

Следует заметить, что теория круглой пластины при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением даёт строго одинаковые искривления полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания, то есть, в частности, и строго одинаковые местные кривизны, и строго одинаковые промежуточные (текущие, то есть для центрального круга произвольного радиуса) и краевые общие стрелы прогиба обоих оснований и их центральных частей.

Кроме того, выявлено и подтверждено следующее:

1. Однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения используют каждый все три метода минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичный, минимаксами их модулей и коллокационный, и благодаря такой многовариантности обеспечивают самопроверяемость и взаимную проверяемость.

2. Очень хорошо согласующиеся друг с другом и поэтому наиболее надёжные наилучшие итоги достигаются однопараметрическим и двухпараметрическим методами устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, а также достаточно близким к ним по итогам с приемлемыми их занижениями однопараметрическим методом устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения. Двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей значительно занижает кривизну в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  и в два-три раза занижает кривизну в центре полностью нагруженного основания  $z = h$ . Двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения приемлемо завышает кривизну в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  и значительно завышает кривизну в центре полностью нагруженного основания  $z = h$ .

3. Однопараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения даёт близкие между собой итоги при всех трёх методах минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной, и благодаря такой многовариантности обеспечивает инженерную точность и надёжность.

4. Кратность превышения кривизны в центре полностью нагруженного основания  $z = h$  кривизной в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  именно существенно

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 378/556

трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением при типичных для высокого давления соотношениях размеров светопрозрачного элемента со столь различно искривляющимися первоначально плоскопараллельными оптическими поверхностями составляет примерно три-четыре и является примерно такой же, как и кратность превышения стрел прогиба центральной части и всего полностью нагруженного основания стрелами прогиба центральной части и всего частично нагруженного основания соответственно.

5. Теория круглой пластины для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением при типичных для высокого давления соотношениях размеров светопрозрачного элемента занижает кривизну в центре полностью нагруженного основания  $z = h$  примерно в полтора раза и кривизну в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  примерно в пять-шесть раз.

Для определения и сравнимости отдельных вкладов искривлений полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением в продольную расфокусировку изображения подводного объекта используются её расчёты непременно с раскрытием фигурных скобок по формуле (3.67') однопараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения и со взятием в двойные кавычки «» по формуле (3.67) двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения, причём для каждого из этих методов при методе среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, при методе минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и при методе коллокационной минимизации невязок сопряжения.

Приняты следующие значения параметров:

$$h = 60 \text{ мм};$$

$$a_1 = 30 \text{ мм};$$

$$a = 55 \text{ мм};$$

$$p = 98 \text{ МПа};$$

$$n_a = 1;$$

$$n_w = 1.33;$$

$$n_g = 1.52 \text{ для неорганического стекла};$$

$$n_g = 1.49 \text{ для органического стекла};$$

$$f_{\phi w}' = 28.8 \text{ мм}.$$

Продольная расфокусировка изображения подводного объекта составляет по формуле (3.67') однопараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения

$$\Delta x_p = - (p/E)(f_{\phi w}'^2/h)(n_a/n_w^2)(n_g - n_w) \left[ \frac{(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(3a^2 - 2a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right] + (p/E)(f_{\phi w}'^2/h)(n_a/n_w^2)(n_g - n_a) \left[ \frac{(2a^2 - a_1^2)/(3a^2 - 2a_1^2)}{(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right]$$

и по формуле (3.67) двухпараметрического метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения

$$\langle \langle \Delta x_p = - (p/E)(f_{\phi w}'^2/h)(n_a/n_w^2)(n_g - n_w) \left[ \frac{\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) - (1/2)(1 - \mu^2)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right] + (p/E)(f_{\phi w}'^2/h)(n_a/n_w^2)(n_g - n_a) \left[ \frac{\delta(1 + \mu)h^2/a_1^2 a^2/(a^2 - a_1^2) + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)}{(1/2)(1 - \mu^2)a^2/(a^2 - a_1^2) h^2/a_1^2 + (1 + m)(1 - \mu^2) + (3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)} \right] \rangle \rangle.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.209) = 0.277;$$

$$\Delta x_p = -98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1.33) * [- (1/2) * (1 - 0.209^2)^4 * 121/291 + (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1) * [(206/291) * (1 - 0.209^2) * (1/2)^4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = -0.001966 + 0.01883 = 0.01687 \text{ (мм)};$$

$$\ll \Delta x_p = -98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1.33) * [0.277 * (1 + 0.209)^4 * 121/85 - (1/2) * (1 - 0.209^2)^4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1) * [0.277 * (1 + 0.209)^4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = -0.001928 + 0.01873 = 0.01680 \text{ (мм)} \gg;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.209) = 0.198;$$

$$\Delta x_p = -98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1.33) * [- (1/2) * (1 - 0.209^2)^4 * 121/291 + (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1) * [(206/291) * (1 - 0.209^2) * (1/2)^4 * 121/85 + (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = -0.001836 + 0.01848 = 0.01664 \text{ (мм)};$$

$$\ll \Delta x_p = -98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1.33) * [0.198 * (1 + 0.209)^4 * 121/85 - (1/2) * (1 - 0.209^2)^4 * 121/85 + (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1) * [0.198 * (1 + 0.209)^4 * 121/85 + (1 + 1/8) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = -0.0008168 + 0.01569 = 0.01487 \text{ (мм)} \gg;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.209) = 0.334;$$

$$\Delta x_p = -98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1.33) * [- (1/2) * (1 - 0.209^2)^4 * 121/291 + (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1) * [(206/291) * (1 - 0.209^2) * (1/2)^4 * 121/85 + (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = -0.001620 + 0.01789 = 0.01627 \text{ (мм)};$$

$$\ll \Delta x_p = -98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1.33) * [0.334 * (1 + 0.209)^4 * 121/85 - (1/2) * (1 - 0.209^2)^4 * 121/85 + (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1) * [0.334 * (1 + 0.209)^4 * 121/85 + (1 + 0) * (1 - 0.209^2) + (3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = -0.002291 + 0.01972 = 0.01743 \text{ (мм)} \gg.$$

Для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

по методу среднеквадратичной минимизации невязок

$$m = 1/5;$$

$$\delta = (7/20)(1 - \mu) = (7/20)(1 - 0.365) = 0.222;$$

$$\Delta x_p = -98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1.33) * [- (1/2) * (1 - 0.365^2)^4 * 121/291 + (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1) * [(206/291) * (1 - 0.365^2) * (1/2)^4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = -0.03866 + 0.4240 = 0.3854 \text{ (мм)};$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 380/556

$$\langle \Delta x_p = -98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1.33) * [0.222 * (1 + 0.365)^4 * 121/85 - (1/2) * (1 - 0.365^2)^4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1) * [0.222 * (1 + 0.365)^4 * 121/85 + (1 + 1/5) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = -0.03779 + 0.4214 = 0.3836 \text{ (мм)} \rangle;$$

по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей

$$m = 1/8;$$

$$\delta = (1/4)(1 - \mu) = (1/4)(1 - 0.365) = 0.159;$$

$$\Delta x_p = -98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1.33) * [- (1/2) * (1 - 0.365^2)^4 * 121/291 + (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1) * [(206/291) * (1 - 0.365^2) * (1/2)^4 * 121/85 + (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = -0.03603 + 0.4160 = 0.3799 \text{ (мм)};$$

$$\langle \Delta x_p = -98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1.33) * [0.159 * (1 + 0.365)^4 * 121/85 - (1/2) * (1 - 0.365^2)^4 * 121/85 + (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1) * [0.159 * (1 + 0.365)^4 * 121/85 + (1 + 1/8) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = -0.01536 + 0.3527 = 0.3373 \text{ (мм)} \rangle;$$

по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения

$$m = 0;$$

$$\delta = (1/32)(13 - 11\mu) = (1/32)(13 - 11 * 0.365) = 0.281;$$

$$\Delta x_p = -98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1.33) * [- (1/2) * (1 - 0.365^2)^4 * 121/291 + (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1) * [(206/291) * (1 - 0.365^2) * (1/2)^4 * 121/85 + (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = -0.03165 + 0.4026 = 0.3709 \text{ (мм)};$$

$$\langle \Delta x_p = -98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1.33) * [0.281 * (1 + 0.365)^4 * 121/85 - (1/2) * (1 - 0.365^2)^4 * 121/85 + (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/3030 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1) * [0.281 * (1 + 0.365)^4 * 121/85 + (1 + 0) * (1 - 0.365^2) + (3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = -0.04932 + 0.4567 = 0.4074 \text{ (мм)} \rangle.$$

В частном предельном случае малой относительной толщины ( $h \ll a_1$ ) одинаковая по всем шести вариантам (однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения каждый при методах минимизации невязок сопряжения среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной) продольная расфокусировка  $\Delta x_p$  изображения подводного объекта для сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением составляет согласно формуле (3.67'') непременно с раскрытием фигурных скобок

$$\Delta x_p = -p/E f_{\phi w}^2/h n_a/n_w^2 (n_g - n_w)[(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)] + p/E f_{\phi w}^2/h n_a/n_w^2 (n_g - n_a)[(3/4)(1 - \mu)^2 a_1^2/h^2 + 3(1 - \mu^2)a_1^2/h^2 a^2/(a^2 - a_1^2) \ln(a/a_1)];$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из стекла К8 с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 80600 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.209$$

$$\Delta x_p = -98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1.33) * [(3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/80600 * 28.8^2/60 * 1/1.33^2 * (1.52 - 1) * [(3/16) * (1 - 0.209)^2 + (3/4) * (1 - 0.209^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = -0.001329 + 0.003638 = 0.002308 \text{ (мм)};$$

для именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, из органического стекла с модулем продольной упругости Юнга

$$E = 3030 \text{ МПа}$$

и коэффициентом поперечной деформации Пуассона

$$\mu = 0.365$$

$$\Delta x_p = - 98/3030 * 28.8^2 / 60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1.33) * [(3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] + 98/3030 * 28.8^2 / 60 * 1/1.33^2 * (1.49 - 1) * [(3/16) * (1 - 0.365)^2 + (3/4) * (1 - 0.365^2) * 121/85 * \ln(11/6)] = - 0.02574 + 0.07884 = 0.05309 \text{ (мм)}.$$

Совокупность итогов вычислений (с разделением вкладов искривлений обоих оснований) продольной расфокусировки  $\Delta x_p$  изображения подводного объекта, обусловливаемой деформированием именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического стекла или из органического стекла, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, сведена для наглядности в таблицу 3.5.

Таблица 3.5. Продольная расфокусировка  $\Delta x_p$  изображения подводного объекта, обусловливаемая деформированием именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента из неорганического стекла или из органического стекла, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением при давлении  $p = 98 \text{ МПа}$  по теории круглой пластины ( $h \ll a_1$ ) и по общему (полу)степенному методу (ОСМ) при использовании двухпараметрического  $(m, \delta)$  метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения и однопараметрического  $(m)$  метода устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу 1 среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, по методу 2 минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу 3 коллокационной минимизации невязок сопряжения аннулированием четырёх значений – среднего, на торцах и посередине (в каждой алгебраической сумме как итоговой продольной расфокусировке первое слагаемое есть вклад искривления полностью нагруженного основания  $z = h$ , а второе слагаемое есть вклад искривления частично нагруженного основания  $z = 0$ ).

Метод расчёта	Продольная расфокусировка $\Delta x_p$ , мкм	
	для тела (элемента) из неорганического стекла	для тела (элемента) из органического стекла
Теория круглой пластины ( $h \ll a_1$ )	$- 1.329 + 3.637 = 2.308$	$- 25.74 + 78.84 = 53.09$
ОСМ, $(m, \delta)$ , среднеквадратичный метод	$- 1.928 + 18.73 = 16.80$	$- 37.79 + 421.4 = 383.6$
ОСМ, $(m, \delta)$ , метод минимаксов модулей	$- 0.8168 + 15.69 = 14.87$	$- 15.36 + 352.7 = 337.3$
ОСМ, $(m, \delta)$ , коллокационный метод	$- 2.291 + 19.72 = 17.43$	$- 49.32 + 456.7 = 407.4$
ОСМ, $(m)$ , среднеквадратичный метод	$- 1.966 + 18.83 = 16.87$	$- 38.66 + 424.0 = 385.4$
ОСМ, $(m)$ , метод минимаксов модулей	$- 1.836 + 18.48 = 16.64$	$- 36.03 + 416.0 = 379.9$
ОСМ, $(m)$ , коллокационный метод	$- 1.620 + 17.89 = 16.27$	$- 31.65 + 402.6 = 370.9$

Тем самым открыты и обоснованы седьмые, восьмые, девятые и десятые явления и законы напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением.

Седьмое явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением В-седьмых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона кратного превышения модуля отрицательного вклада

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 382/556

кривизны в центре полностью нагруженного основания положительным вкладом кривизны в центре частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением в продольную расфокусировку изображения подводного объекта, причём при типичных для высокого давления соотношениях размеров тела (светопрозрачного элемента) со столь различно искривляющимися первоначально плоскопараллельными оптическими поверхностями эта кратность составляет примерно порядок, то есть 10. При этом умножаются друг на друга два эффекта для сомножителей произведения. Во-первых, и это имеет место даже для сколь угодно тонкого стеклоэлемента, разность показателей преломления стекла и воздуха, разделяемых частично нагруженным основанием, примерно втрое больше разности показателей преломления стекла и воды, разделяемых полностью нагруженным основанием. Во-вторых, кривизна в центре частично нагруженного основания примерно в три-четыре раза больше кривизны в центре полностью нагруженного основания. Кроме того, отрицательный вклад кривизны в центре полностью нагруженного основания и положительный вклад кривизны в центре частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением в продольную расфокусировку изображения подводного объекта вскрывают её природу, сущность, состав и слагаемость по диалектическому закону единства и борьбы противоположностей.

Следует заметить, что теория круглой пластины при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением даёт строго одинаковые кривизны в центрах полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания. Так что из двух названных эффектов присутствует только первый, причём полностью. Поэтому имеет место примерно трёхкратное превышение модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания положительным вкладом кривизны в центре частично нагруженного основания именно тонкой круглой пластины в продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

Восьмое явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением  
В-восьмых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона необходимости, полезности и чрезвычайной существенности выделения и непременно достаточно точного учёта знака и относительно малого модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением в продольную расфокусировку изображения подводного объекта взамен, казалось бы, допустимого полного пренебрежения этим малым вкладом, по модулю на порядок меньшим положительного вклада кривизны в центре частично нагруженного основания. Как раз относительная малость модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания позволяет наиболее жёстко испытывать методы моделирования напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением.

Следует заметить, что теория круглой пластины при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением даёт строго одинаковые искривления полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания, то есть, в частности, и строго одинаковые местные кривизны, и строго одинаковые промежуточные (текущие, то есть для центрального круга произвольного радиуса) и краевые общие стрелы прогиба обоих оснований и их центральных частей соответственно, тем самым не только не вскрывая относительной малости кривизны в центре

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 383/556

полностью нагруженного основания по сравнению с кривизной в центре частично нагруженного основания, но и вообще не различая эти две кривизны между собой.

Всеобщие явление и закон целесообразности относительной малости модуля количественного величиной и качественного знаком оценивающего различителя методов моделирования между собой

Эти восьмые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением привели к открытию и обоснованию всеобщих явления и закона целесообразности относительной малости модуля количественного величиной и качественного знаком оценивающего различителя методов моделирования между собой.

Причина такой целесообразности заключается в следующем. Если модуль количественного величиной и качественного знаком оценивающего различителя методов моделирования между собой относительно мал, то даже сравнительно небольшая абсолютная погрешность метода моделирования влечёт большую относительную погрешность и может привести не только к чисто количественному отклонению модуля модельного значения от модуля объектного значения при именно качественном совпадении знаков этих значений, но и к качественному извращению объекта моделью при различии знаков этих значений по диалектическому закону перехода количественных изменений в качественные изменения.

Девятые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением  
В-девятых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона необходимости и полезности (для углубления исследования напряжённо-деформированного состояния) промежуточного выхода исследования за собственные пределы напряжённо-деформированного состояния с последующим возвращением исследования к напряжённо-деформированному состоянию по диалектическому закону отрицания отрицания. В данном случае имеет место временный переход от исследования самого напряжённо-деформированного состояния к исследованию влияния напряжённо-деформированного состояния на свойство за непосредственными пределами напряжённо-деформированного состояния, а именно выход за пределы механики в оптику посредством учёта влияния напряжённо-деформированного состояния на оптические свойства, в частности на продольную расфокусировку изображения подводного объекта, затем возврат к исследованию напряжённо-деформированного состояния, теперь ещё и кривизн в центрах оснований именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением.

Во-первых, в данном случае такой выход за пределы механики в оптику именно привёл к принципиальному расширению предмета исследования посредством добавления кривизны в центре частично нагруженного основания и кривизны в центре полностью нагруженного основания к обычным в механике изгиба стрелам прогиба центральных частей и взятых целиком частично нагруженного основания и полностью нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением. Ведь это добавление оказалось вынужденным, поскольку именно исследование показало, что продольная расфокусировка изображения подводного объекта определяется не стрелами прогиба центральных частей и взятых целиком частично нагруженного основания и полностью нагруженного основания, а кривизной в центре частично нагруженного основания и кривизной в центре полностью нагруженного основания, как выведено из рассмотрения хода параксиального (близкого к оптической оси) луча.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 384/556

Во-вторых, в данном случае такой выход за пределы механики в оптику именно привёл к принципиальному углублению предмета исследования. Существенное положительное влияние выражения с высшей наличной степенью радиуса на стрелы прогиба оснований и их центральных частей полностью отсутствует применительно к кривизнам в центрах оснований. А это именно принципиально усиливает жёсткость испытания теоретического моделирования действительного объекта.

В-третьих, в данном случае такой выход за пределы механики в оптику именно привёл к принципиальному изменению сущности исследования. Общая стрела прогиба является общей характеристикой жёсткости. А местная кривизна обуславливает местные напряжения и искривление и поэтому является характеристикой прочности и оптики.

В-четвёртых, в данном случае такой выход за пределы механики в оптику именно привёл к принципиальному повышению чувствительности различения методов моделирования. Местная кривизна играет роль именно качественного исследовательского микроскопа, преобразующего количественные отклонения теоретических моделей от действительных объектов в принципиальные качественные изменения с возможностью превращения положительности в отрицательность, то есть осуществляющего диалектический закон перехода количественных изменений в качественные изменения. Кроме того, и это имеет место даже для сколь угодно тонкого стеклоэлемента, разность показателей преломления стекла и воздуха, разделяемых частично нагруженным основанием, примерно втрое больше разности показателей преломления стекла и воды, разделяемых полностью нагруженным основанием. Это дополнительно снижает вклад и без того относительно малого искривления полностью нагруженного основания по сравнению с вкладом искривления частично нагруженного основания и тем самым влечёт повышение относительной погрешности определения вклада искривления полностью нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением в продольную расфокусировку изображения подводного объекта даже при малой абсолютной погрешности. Именно относительная малость модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания позволяет наиболее жёстко испытывать методы моделирования напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, причём не только количественно, то есть по абсолютной величине, но и качественно, то есть по знаку.

Следует заметить, что теория круглой пластины при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением даёт строго одинаковые искривления полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания, то есть, в частности, и строго одинаковые местные кривизны, и строго одинаковые промежуточные (текущие, то есть для центрального круга произвольного радиуса) и краевые общие стрелы прогиба обоих оснований и их центральных частей. Даже для сколь угодно тонкого стеклоэлемента разность показателей преломления стекла и воздуха, разделяемых частично нагруженным основанием, примерно втрое больше разности показателей преломления стекла и воды, разделяемых полностью нагруженным основанием. Поэтому в данном случае такой выход за пределы механики в оптику приводит к занижению примерно в три-четыре раза десятикратного отношения положительного вклада искривления частично нагруженного основания к модулю отрицательного вклада искривления полностью нагруженного основания в продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

Всеобщие явление и закон целесообразности промежуточного выхода исследования за пределы предмета первоначального рассмотрения с последующим возвращением исследования к этому предмету по диалектическому закону отрицания отрицания

Эти девятые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 385/556

технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением привели к открытию и обоснованию всеобщих явления и закона целесообразности промежуточного выхода исследования за пределы предмета первоначального рассмотрения с последующим возвращением исследования к этому предмету по диалектическому закону отрицания отрицания.

Причина такой целесообразности заключается в следующем. Временный выход исследования за непосредственные пределы предмета первоначального рассмотрения ведёт к расширению предмета исследования и как следствие может привести к углублению исследования расширенного предмета. Предмет исследования может иметь даже бесконечное множество свойств. Каждое конкретное исследование имеет начало и конец и тем самым является конечным, так что вынуждено изначально избрать весьма ограниченное подмножество исследуемых свойств, априорно представляющихся наиболее существенными. Расширение предмета исследования может привести к апостериорному вовлечению дополнительных свойств первоначального предмета, существенных для расширения предмета, и тем самым не только к расширению исследования расширением предмета исследования, но и к углублению исследования самого предмета первоначального рассмотрения.

Десятые явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением В-десятых, общий (полу)степенной метод привёл к открытию и обоснованию принципиально новых явления и закона необходимости и полезности неперемного выделения и отдельного исследования влияний отдельных существенных следствий (свойств, частей, элементов) напряжённо-деформированного состояния наряду с исследованием итогового (суммарного) влияния напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением, в данном случае влияний кривизн оснований в их центрах на продольную расфокусировку изображения подводного объекта. Ведь анализ (разделение) входит наряду с последующим синтезом (соединением), сравнением и моделированием, вычислением и измерением в число основополагающих научных методов. В данном случае выделение и отдельное исследование влияний кривизн оснований в их центрах на продольную расфокусировку изображения подводного объекта по формулам (3.67) и (3.67') позволяет более обоснованно количественно ввиду возможности дополнительных сравнений и качественно ввиду относительной малости модуля вклада искривления полностью нагруженного основания проверить и оценить однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения при всех трёх методах минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной. Благодаря такой многовариантности обеспечиваются самопроверяемость и взаимная проверяемость и устанавливаются по принципу достаточного основания как четвёртому закону формальной логики наибольшие точность и надёжность однопараметрического и двухпараметрического методов устранения минимизированной невязки осевого перемещения при методе среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения и соответствующих значений и составляющих суммарной продольной расфокусировки изображения подводного объекта для светопрозрачного элемента из неорганического стекла

$$\Delta x_p = - 1.966 \text{ мкм} + 18.83 \text{ мкм} = 16.87 \text{ мкм},$$
$$\langle \Delta x_p = - 1.928 \text{ мкм} + 18.73 \text{ мкм} = 16.80 \text{ мкм} \rangle$$

и для светопрозрачного элемента из органического стекла

$$\Delta x_p = - 38.66 \text{ мкм} + 424.0 \text{ мкм} = 385.4 \text{ мкм},$$
$$\langle \Delta x_p = - 37.79 \text{ мкм} + 421.4 \text{ мкм} = 383.6 \text{ мкм} \rangle.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 386/556

А по формулам (3.68) и (3.68') без выделения и отдельного исследования влияний кривизн оснований в их центрах на продольную расфокусировку изображения подводного объекта такая многовариантность методов не позволила бы более обоснованно количественно посредством возможности дополнительных сравнений и качественно посредством относительной малости модуля вклада искривления полностью нагруженного основания проверить и оценить однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения при всех трёх методах минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной.

Следует заметить, что теория круглой пластины при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением по явлению и закону необходимости и полезности неперменного выделения и отдельного исследования влияний отдельных существенных следствий напряжённо-деформированного состояния наряду с исследованием итогового (суммарного) влияния напряжённо-деформированного состояния, в данном случае влияний кривизн оснований в их центрах на продольную расфокусировку изображения подводного объекта, даёт строго одинаковые искривления полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания, то есть, в частности, и строго одинаковые местные кривизны, и строго одинаковые промежуточные (текущие, то есть для центрального круга произвольного радиуса) и краевые общие стрелы прогиба обоих оснований и их центральных частей. Даже для сколь угодно тонкого стеклоэлемента разность показателей преломления стекла и воздуха, разделяемых частично нагруженным основанием, примерно втрое больше разности показателей преломления стекла и воды, разделяемых полностью нагруженным основанием. Поэтому в данном случае такие явление и закон приводят к занижению примерно в три-четыре раза десятикратного отношения вклада искривления частично нагруженного основания к модулю вклада искривления полностью нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением в продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

Всеобщие явление и закон необходимости и полезности неперменного выделения и отдельного исследования составляющих влияний отдельных частей и существенных свойств целого на предмет исследования наряду с исследованием итогового (суммарного) влияния целого на предмет исследования

Эти десятичные явление и закон напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением привели к открытию и обоснованию всеобщих явления и закона необходимости и полезности неперменного выделения и отдельного исследования составляющих влияний отдельных частей и существенных свойств целого на предмет исследования наряду с исследованием итогового (суммарного) влияния целого на предмет исследования.

Причина такой необходимости и полезности заключается в следующем. Именно дополнительное неперменное выделение и отдельное исследование составляющих влияний отдельных частей и существенных свойств целого на предмет исследования наряду с исследованием итогового (суммарного) влияния целого на предмет исследования позволяет более обоснованно количественно ввиду возможности дополнительных сравнений и качественно ввиду возможности относительной малости модулей составляющих влияний некоторых отдельных частей и существенных свойств целого на предмет исследования проверить и оценить создаваемые методы моделирования. Анализ отдельных частей и свойств целого и их отдельных влияний на предмет исследования углубляет представление о целом, его отдельных частях и свойствах и позволяет изучить сходства и различия их отдельных влияний на предмет исследования. При этом синтез отдельных частей и свойств как первого отрицания целого даёт целое вторым отрицанием отдельных частей и свойств по

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 387/556

закону отрицания отрицания. А синтез отдельных влияний отдельных частей и свойств как первого отрицания влияния целого на предмет исследования даёт влияние целого на предмет исследования вторым отрицанием влияний отдельных частей и свойств на предмет исследования по закону отрицания отрицания. Эти анализ и синтез открывают возможности новых сопоставлений, сравнений и углублений и обобщают известный закон отрицания отрицания общим законом кратного отрицания.

Кроме того, выявлено и подтверждено следующее:

1. Однопараметрический и двухпараметрический методы устранения минимизированной невязки осевого перемещения используют каждый все три метода минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичный, минимаксами их модулей и коллокационный, и благодаря такой многовариантности обеспечивают самопроверяемость и взаимную проверяемость.

2. Очень хорошо согласующиеся друг с другом и поэтому наиболее точные и надёжные значения продольной расфокусировки  $\Delta x_p$  изображения подводного объекта и непременно раздельных вкладов в неё кривизн в центрах полностью нагруженного основания и частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным периферическим противодавлением достигаются однопараметрическим и двухпараметрическим методами устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения, а также достаточно близким к ним по итогам с приемлемыми их занижениями однопараметрическим методом устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения. Двухпараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей значительно занижает, а по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения существенно завышает продольную расфокусировку изображения подводного объекта, положительный вклад в неё кривизны в центре частично нагруженного основания и особенно значительно относительно малый модуль отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания в продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

3. Однопараметрический метод устранения минимизированной невязки осевого перемещения даёт близкие между собой итоги при всех трёх методах минимизации невязок сопряжения, а именно среднеквадратичной, минимаксами их модулей и коллокационной, и благодаря такой многовариантности обеспечивает инженерную точность и надёжность. При этом особенно близкие между собой итоги при методе среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения и при методе минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей представляются наиболее точными и надёжными.

4. Положительный вклад кривизны в центре частично нагруженного основания  $z = 0$  больше модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания  $z = h$  именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента при типичных для высокого давления соотношениях размеров и при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением в продольную расфокусировку изображения подводного объекта примерно в 10 раз для неорганического стекла с меньшим коэффициентом поперечной деформации Пуассона и примерно в 12 раз для органического стекла с большим коэффициентом поперечной деформации Пуассона.

5. Теория круглой пластины занижает примерно в полтора раза модуль отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания, примерно в пять-шесть раз положительный вклад кривизны в центре частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, под равномерными давлениями на полностью нагруженное основание и на

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 388/556

кольцевую периферическую часть частично нагруженного основания при типичных для высокого давления соотношениях размеров в продольную расфокусировку изображения подводного объекта и примерно в семь-восемь раз суммарную продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

б. Продольная расфокусировка  $\Delta x_p$  изображения подводного объекта в случае выполнения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента из органического стекла неприемлема, а при светопрозрачном элементе из неорганического стекла существенна и превосходит вдвое допускаемую величину [349]

$$[\Delta x] = 5 \text{ мкм.}$$

Для улучшения качества изображения наряду со способами [182] предлагается устанавливаемая в процессе самой юстировки при  $p = 0$  такая предварительная продольная расфокусировка  $\Delta x_0'$  оптической системы, которая минимизирует как целевую функцию рабочей расфокусировку

$$\Delta x_p' = \Delta x_p + \Delta x_0'.$$

При этом минимизация должна осуществляться для рабочего диапазона давлений  $[p_{\min}, p_{\max}]$ . Среднеквадратичная минимизация рабочей расфокусировки выполняется стандартным методом и даёт

$$(3.70) \\ \Delta x_0' = - \Delta x_{pm},$$

где среднее рабочее давление

$$p_m = (p_{\min} + p_{\max})/2.$$

При этом учтена пропорциональность  $\Delta x_p$  и  $p$ .

Обеспечим теперь минимизацию рабочей расфокусировки минимаксом модуля  $\Delta x_p'$ , причём максимум берётся по рабочему диапазону давлений  $[p_{\min}, p_{\max}]$ , а минимум – по искомому значению  $\Delta x_0'$ .

Справедлива цепочка соотношений:

$$\max |\Delta x_p'| = \max \{ |\Delta x_{p_{\min}}'|; |\Delta x_{p_{\max}}'| \} \geq (|-\Delta x_{p_{\min}}'| + |\Delta x_{p_{\max}}'|)/2 \geq |-\Delta x_{p_{\min}}' + \Delta x_{p_{\max}}'|/2 = |\Delta x_{p_{\max}}' - \Delta x_{p_{\min}}'|/2.$$

Необходимыми и в совокупности достаточными условиями равенства крайних выражений являются

$$\text{sign}(-\Delta x_{p_{\min}}') = \text{sign}(\Delta x_{p_{\max}}')$$

и

$$|-\Delta x_{p_{\min}}'| = |\Delta x_{p_{\max}}'|.$$

Они в совокупности равносильны (эквивалентны) одному условию

$$-\Delta x_{p_{\min}}' = \Delta x_{p_{\max}}',$$

которое вновь даёт (3.70).

Коллокационная минимизация рабочей расфокусировки сводится к равносильным (эквивалентным) аннулированиям

$$\int_{p_{\min}}^{p_{\max}} \Delta x_p' dp = 0$$

и

$$\Delta x_{pm}' = 0$$

и вновь даёт (3.70).

Рабочая расфокусировка

$$(3.71)$$

$$\Delta x_p' = \Delta x_p - \Delta x_{pm} = \Delta x_p - p_m$$

оказывается уже знакопеременной, причём

$$(3.72)$$

$$\max |\Delta x_p'| = (1/2)(1 - p_{\min}/p_{\max}) \max \Delta x_p = (1/2)(1 - p_{\min}/p_{\max}) \Delta x_{p_{\max}}.$$

Из (3.72) видно, что абсолютная величина расфокусировки (3.60) уменьшается по сравнению с (3.68) в

$$2/(1 - p_{\min}/p_{\max})$$

раз, то есть не менее чем вдвое, а на практике в гораздо большей степени.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 389/556

Например, при исследовании участков океанского дна в диапазоне глубин 4000...6000 м начальная расфокусировка противоположного знака в расчёте на глубину 5000 м снижает максимальную рабочую расфокусировку оптической системы по абсолютной величине в 6 раз, то есть для сплошного трёхмерного цилиндрического светопрозрачного элемента из неорганического стекла до 1.7 мкм, что уже вполне допустимо.

Предыдущие рассуждения относятся к изучению влияния деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента на оптические свойства иллюминатора для высоких давлений.

Что касается изучаемого методами фотоупругости влияния напряжённого состояния стекла на его оптическую анизотропию путём его поляризации [350], то направление соответствующего анализа принципиально ясно ввиду совпадения главных осей и линейных зависимостей показателей преломлений от напряжений.

Достаточно при исследовании прохождения светового луча разбить именно существенно трёхмерный сплошной цилиндрический светопрозрачный элемент на бесконечно тонкие слои, в пределах каждого из которых показатель преломления в направлении луча можно считать постоянным, и заменить интегральную сумму интегралом.

Однако нет необходимости в этих громоздких выкладках, поскольку известно [203], что можно ожидать изменений показателя преломления лишь в третьем-четвёртом знаке после запятой, то есть за пределами инженерной точности расчётов.

Проведём более детальную оценку влияния напряжений на продольную расфокусировку.

Изучение хода параксиального луча требует знания изменения вдоль оси показателя преломления  $n_z$  в осевом направлении с учётом оптической анизотропии напряжённого стекла путём его поляризации.

Обозначив через  $n_0$  показатель преломления для ненапряжённого (а значит, изотропного) состояния стекла, по известной [350] линейной зависимости от главных напряжений

$$\Delta n_z = n_z - n_0 = C_1 \sigma_z + C_2 (\sigma_r + \sigma_t)$$

с учётом значений [203] для стекла К8

$$C_1 = 0.0000005 \text{ МПа}^{-1},$$

$$C_2 = 0.0000032 \text{ МПа}^{-1},$$

при

$$h = 60 \text{ мм};$$

$$a_1 = 30 \text{ мм};$$

$$a = 55 \text{ мм};$$

$$p = p_1 = 98 \text{ МПа}$$

получаем, что  $n_z(z)$  – монотонно убывающая функция  $z$ , причём

$$n_z(h) = n_z(0) - 0.00085 = n_0 - 0.00104,$$

что даже усиливает оценку степени влияния напряжений на показатель преломления, данную в [203].

Влияние действующих в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом светопрозрачном элементе напряжений на продольную расфокусировку оптической системы сводится к уменьшению продольной расфокусировки менее чем на 0.03 мкм, что находится в пределах инженерной точности её определения и не имеет практического значения.

Влияние действующих в именно существенно трёхмерном сплошном цилиндрическом светопрозрачном элементе напряжений на остальные габаритные и абберационные характеристики столь же мало.

Следовательно, влияние напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением на оптические свойства иллюминатора по существу сводится к влиянию искривлений оптических поверхностей светопрозрачного элемента на продольную расфокусировку изображения подводного объекта оптической системой в целом, включающей светопрозрачный элемент, и в основном обусловлено кривизной в центре

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 390/556

свободной от нагрузки центральной части внутренней оптической поверхности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента. Независимость искривлений оптических поверхностей именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением от величины равномерного давления на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента значительно упрощает комплексный расчёт иллюминатора как составной части оптической системы для высоких давлений.

### **3.6. Метод и алгоритм комплексной оптимизации прочности, жёсткости и оптических свойств сплошного трёхмерного цилиндрического светопрозрачного элемента при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением**

Созданные теории деформирования, прочности и разрушения, жёсткости и оптики именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением непременно совместно являются основой для метода и алгоритма комплексной оптимизации характеристик прочности, жёсткости и оптики светопрозрачного элемента.

Исходными данными для этих метода и алгоритма являются:

давление  $p$ , соответствующее максимальной рабочей глубине подводного аппарата;  
упругие постоянные – модуль продольной упругости Юнга  $E$  и коэффициент поперечной деформации Пуассона  $\mu$  материала именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента;  
характеристики прочности материала именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при одноосных напряжённых состояниях при числе циклов и длительности нагружения, соответствующих рабочим, или, по меньшей мере, примерно вдвое большие характеристик длительной прочности характеристики кратковременной прочности при однократных испытаниях при растяжении  $\sigma_t$  и при сжатии  $\sigma_c$ ;

допускаемая стрела прогиба  $[\Delta_{\text{раб}}]$  светового участка частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента;

допускаемая величина продольной расфокусировки  $[\Delta x]$ ;

показатели преломления воздуха  $n_a$ , воды  $n_w$  и материала именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента,  $n_g$ ;

характеристики гидрообъектива:

угол поля зрения в воздухе  $2\beta_a$  (или в воде  $2\beta_w$ ),

световой радиус первой линзы  $a_{об}$ ,

фотограмметрическое фокусное расстояние в воде  $f_{фw}'$  (или фокусное расстояние в воздухе  $f_0'$ ).

В процессе проектирования иллюминатора для высоких давлений должны быть определены следующие величины:

давление  $p_1$  на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента;

габариты именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента:

толщина  $h$ ,

радиус  $a$ ,

радиус центральной части  $a_1$ ;

характеристики фланца:

толщина  $h_f$ ,

вынос  $\Delta_f$ ;

радиальный зазор между светопрозрачным элементом и оправой  $\Delta'_r$ ;

осевой зазор между светопрозрачным элементом и краем светового участка первой поверхности объектива  $\Delta'_0$ .

Комплексная оптимизация именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента для высоких давлений, осуществляется следующим алгоритмом:

1) выбирается минимально допустимая величина  $\Delta'_0$ , которая на основании прикидочного расчёта обеспечивала бы осевой зазор между светопрозрачным элементом и гидрообъективом при деформировании в процессе пребывания подводного аппарата на рабочей глубине, с учётом  $[\Delta_{раб}]$ , кривизны первой оптической поверхности объектива и толщины его корпуса у её края.

Во многих случаях можно исходить из промежутка

$$\Delta'_0 = 1...5 \text{ мм}$$

с исправлением по конструктивным соображениям;

2) определяется по (3.66)  $[a_1]_{раб}$  и выбирается  $a_1$ ;

3) выбираются минимально допустимые толщина  $h_f$  и вынос  $\Delta_f$  фланца;

4) выбирается  $a$  в пределах  $(1.5...2)a_1$  с учётом опыта проектирования и испытаний иллюминаторов;

5) определяется допустимая толщина светопрозрачного элемента  $h([\Delta x])$  по допускаемой продольной расфокусировке  $[\Delta x]$  и выбирается

$$h \geq h([\Delta x]);$$

6) определяется допускаемое значение толщины светопрозрачного элемента  $h([\Delta_{раб}])$  по условию жёсткости (3.64) и проверяется выполнение условия

$$h \geq h([\Delta_{раб}])$$

(или  $h$  подставляется в условие жёсткости (3.64)) и, если оно нарушено,  $h$  увеличивается согласно последнему неравенству;

7) проверяется выполнение условия

$$a \geq [a]_{раб}$$

по (3.66), при нарушении принимается

$$a = [a]_{раб}$$

с возвратом к 5);

8) определяется зависимость разрушающего давления  $p_n$  от отношения  $\Pi$  давления  $p_1$  на боковую поверхность и внешнего давления  $p$  из условия прочности и выбирается рациональное значение

$$p_1 = (1... \Pi_{max})p;$$

9) определяется допустимое значение толщины светопрозрачного элемента  $h(\sigma_t, \sigma_c)$  из условия прочности, проверяется выполнение условия

$$h \geq h(\sigma_t, \sigma_c)$$

и, если оно нарушено, принимается  $h$  в соответствии с ним с возвратом к 7);

10) выбирается радиальный зазор  $\Delta'_r$  между светопрозрачным элементом и оправой из условия жёсткости (3.65);

11) проверяется выполнение условия 1) по уточнённому расчёту, при необходимости исправляется  $\Delta'_0$  с последующим пересчётом.

Блок-схема приведённого алгоритма комплексной оптимизации именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений, показана на рис. 3.12.

Результаты использования приведённого алгоритма комплексной оптимизации именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 392/556

элемента иллюминатора для высоких давлений, могут быть использованы при разработке конструкций иллюминаторов для высоких давлений.

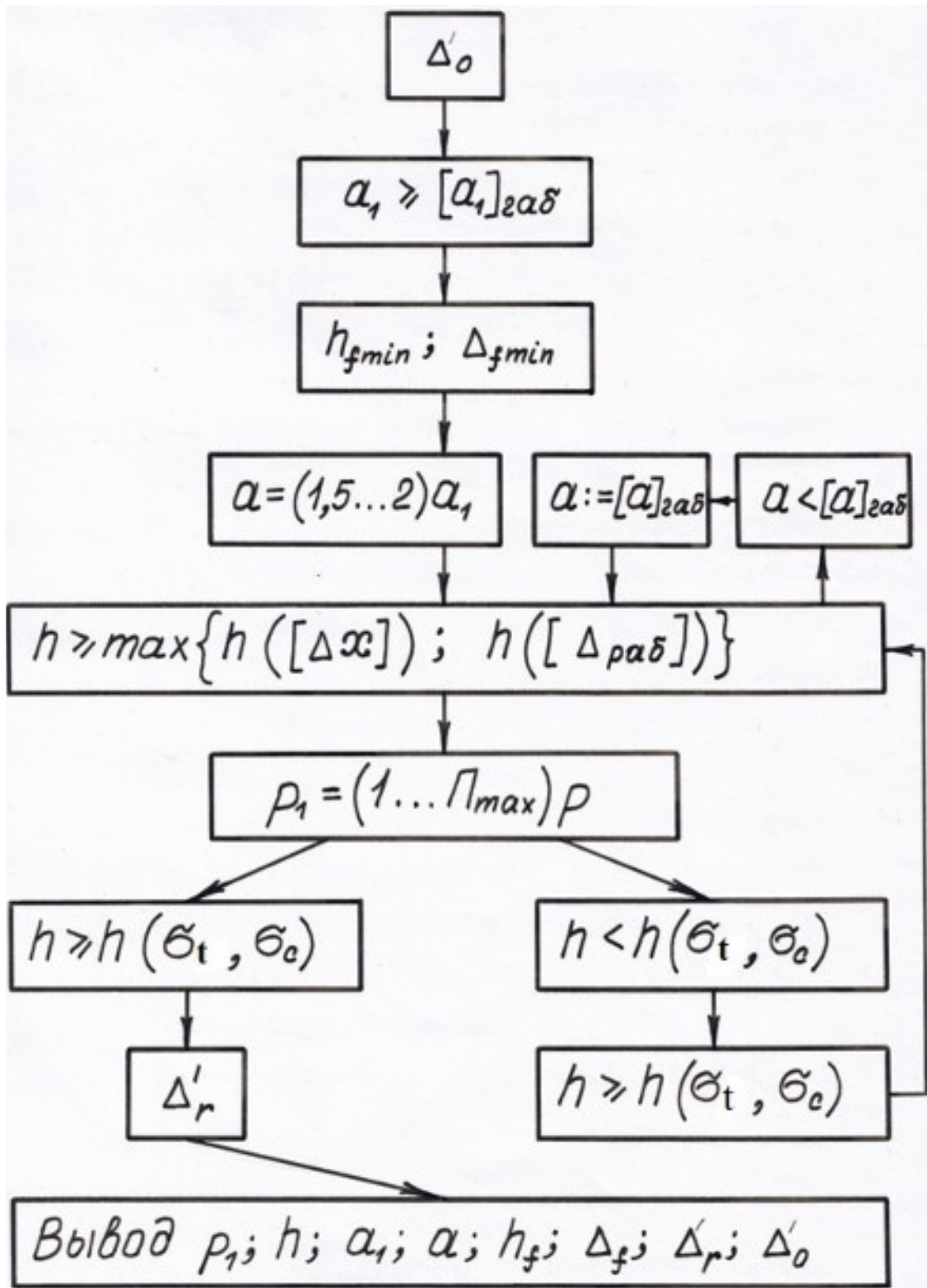


Рисунок 3.12. Блок-схема алгоритма комплексной оптимизации именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента иллюминатора для высоких давлений.



### 3.7. Методы деформационной и прочностной оптимизации промежуточного кольца между стеклоэлементом и оправой и обоснование защищённых авторскими свидетельствами на изобретения новых конструкций иллюминаторов для высоких давлений по созданным теориям деформирования, жёсткости, оптики, прочности и разрушения сплошных трёхмерных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных элементов

В упрощённых по сравнению с рассмотренной рациональной конструкциях иллюминаторов, не предотвращающих силовые контакты сплошных трёхмерных цилиндрических светопрозрачных элементов с оправками, целесообразно применение между ними выполненных из стали, меди или других пластичных материалов промежуточных колец, технологически допускающих тщательную притирку сопрягаемых со стеклоэлементами первоначально плоских поверхностей. В связи с прогибом сплошного трёхмерного цилиндрического светопрозрачного элемента имеет место резкая концентрация контактных давлений у внутреннего края зоны их действия. Поэтому рационально уменьшение жёсткости промежуточного кольца к его внутреннему краю, осуществляемое в нависающем участке (рис. 3.13). Локализация пластических деформаций у внутреннего края последнего ( $b_1, -h'$ ) свидетельствует о повороте сечения промежуточного кольца вслед за прогибом сплошного трёхмерного цилиндрического светопрозрачного элемента, а в некоторых случаях и об отставании промежуточного кольца от оправы вблизи точек ( $b_1, -h'$ ). Поэтому в первом приближении по принципу допустимой простоты полагаем контактное давление стеклоэлемента на промежуточное кольцо равномерным и равным

$$pa^2/(a^2 - a_1^2)$$

на участке

$$a_1 \leq r \leq a,$$

а давление уплотнительного кольца на промежуточное кольцо равным  $p$  на участке

$$a \leq r \leq b.$$

Распределение давления оправы  $p_c(r)$  в неопределённых пределах номинального контакта примем в первом приближении линейным (равномерное априори нереально ввиду  $a_1 < b_1$ ) с максимумом

$$p_c(b_1) = p_i$$

при раздельном учёте наличия или отсутствия отставания промежуточного кольца от оправы в математических моделях плоского и секторного аналогов.

Применительно к плоскому аналогу в случае отсутствия отставания, полагая

$$p_c(b) = p_e \geq 0,$$

получаем

$$p_i = p[b(b + 2b_1)(b - b_1)^{-2} - 2a_1a(2b + b_1)(a + a_1)^{-1}(b - b_1)^{-2}];$$

$$p_e = p[b(b - 4b_1)(b - b_1)^{-2} + 2a_1a(b + 2b_1)(a + a_1)^{-1}(b - b_1)^{-2}].$$

Необходимое и достаточное условие правильности –

$$p_e \geq 0,$$

или

$$b_1 \leq 4^{-1}b[(a + a_1)b + 2a_1a]/[(a + a_1)b - a_1a].$$

Для плоского аналога при отставании на участке  $b_2 \leq r \leq b$

$$p_c(b_2) = 0;$$

$$b_2 = (3/2)b^2/[b - a_1a/(a + a_1)] - 2b_1;$$

$$p_i = (4/3)p[(a + a_1)b - a_1a]^2b^{-1}(a + a_1)^{-1}[(a + a_1)b - 2ab_1]^{-1}.$$

Необходимо и достаточно для правильности условие

$$b_1 < b_2 \leq b,$$

или

$$4^{-1}b[(a + a_1)b + 2a_1a]/[(a + a_1)b - a_1a] \leq b_1 < (1/2)(a + a_1)b^2/[(a + a_1)b - a_1a].$$

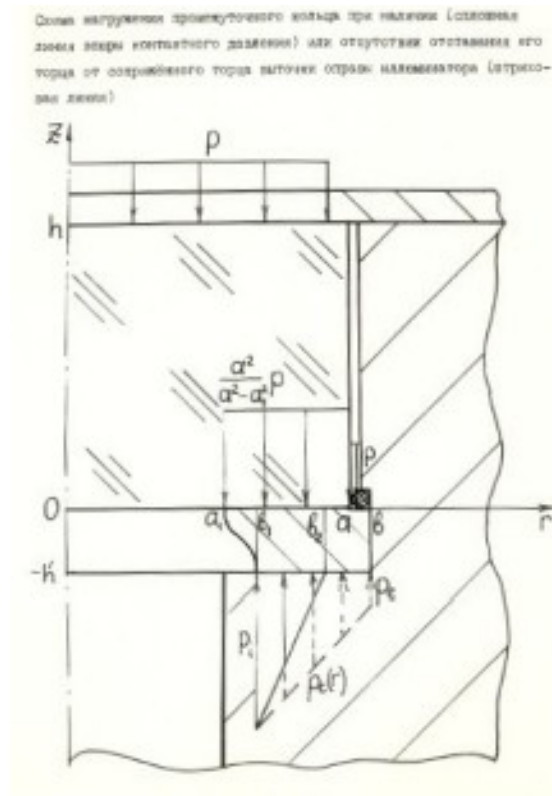


Рисунок 3.13. Схема нагружения промежуточного кольца при наличии (сплошная линия эпюры контактного давления) или отсутствии отставания его торца от сопряжённого торца выточки оправы иллюминатора (штриховая линия).

Для секторного аналога при отсутствии отставания получаем

$$p_i = p[(a + a_1)b^2(b^2 + 2b_1b + 3b_1^2) - 4a_1^2a^2(2b + b_1)](a + a_1)^{-1}(b - b_1)^{-2}(b^2 + 4b_1b + b_1^2)^{-1};$$

$$p_e = p[(a + a_1)b^2(b^2 + 2b_1b - 9b_1^2) + 4a_1^2a^2(b + 2b_1)](a + a_1)^{-1}(b - b_1)^{-2}(b^2 + 4b_1b + b_1^2)^{-1}$$

при необходимом и достаточном условии правильности

$$b_1 \leq (1/9)\{b + 4a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2} + [b + 4a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2}]^{1/2}[10b + 4a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2}]^{1/2}\}.$$

Для секторного аналога, на участке

$$b_2 \leq r \leq b$$

отстающего, получаем

$$b_2 = (2/3)[b + a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2} - (3/2)b_1] + (2/3)\{[b + a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2}]^2 + 3b_1[b + a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2}] - (9/2)b_1^2\}^{1/2};$$

$$p_i = (27/4)pb^2\{b + a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2} - 3b_1 + [(b + a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2})^2 + 3b_1(b + a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2}) - (9/2)b_1^2]^{1/2}\}^{-1}\{b + a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2} + (3/2)b_1 + [(b + a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2})^2 + 3b_1(b + a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2}) - (9/2)b_1^2]^{1/2}\}^{-1}$$

с необходимым и достаточным условием правильности

$$(1/9)\{b + 4a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2} + [b + 4a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2}]^{1/2}[10b + 4a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2}]^{1/2}\} \leq b_1 < (2/3)[b + a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2}].$$

Обе математические модели равновесия промежуточного кольца показывают существование двух критических значений внутреннего радиуса его контакта с оправой. Превышение первого критического значения влечёт взаимное отставание промежуточного кольца от оправы со стороны внешнего края их контакта, а превышение второго критического значения приводит к невозможности уравновесить плоский или секторный аналог. Правда, это не относится к действительному кольцу с действием окружного напряжения, не учитываемого обеими моделями. Однако ясна практическая неэффективность превышения не только второго, но и первого критического значения, поскольку при росте ширины участка отставания промежуточного кольца от оправы  $p_i$  растёт ещё быстрее.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 395/556

Поэтому не рекомендуется превышать радиусом  $b_1$  его первого критического значения  $(1/4)b[(a + a_1)b + 2a_1a]/[(a + a_1)b - a_1a]$

по модели плоского аналога и

$$(1/9)\{b + 4a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2} + [b + 4a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2}]^{1/2}[10b + 4a_1^2a^2(a + a_1)^{-1}b^{-2}]^{1/2}\}$$

по модели секторного аналога.

В задаче прочности для промежуточного кольца ввиду неизбежности трения по обоим основаниям принципу допустимой простоты соответствует априорное равномерное распределение сдвигового напряжения в каждом сечении соосной цилиндрической поверхностью. В точках  $(b_1, 0)$  по модели плоского аналога

$$\sigma_r(b_1, 0) = 3pa^2(a^2 - a_1^2)^{-1}(b_1 - a_1)^2h'^{-2};$$

$$\sigma_z(b_1, 0) = -pa^2(a^2 - a_1^2)^{-1};$$

$$\tau_{rz}(b_1, 0) = pa^2(a^2 - a_1^2)^{-1}(b_1 - a_1)h'^{-1}$$

и по резко упрощающей результаты четвёртой теории прочности

$$\sigma_e(b_1, 0) = pa^2(a^2 - a_1^2)^{-1}[3(b_1 - a_1)^2h'^{-2} + 1].$$

А модель секторного аналога даёт

$$\sigma_e(b_1, 0) = pa^2(a^2 - a_1^2)^{-1}[(1 + 2a_1/b_1)^2(b_1 - a_1)^4h'^{-4} + (1/4)(7 + 14a_1/b_1 + 3a_1^2/b_1^2)(b_1 - a_1)^2h'^{-2} + 1]^{1/2}.$$

В точках  $(b_1, -h')$  обе модели приводят к одинаковым формулам

$$\sigma_r(b_1, -h') = 0;$$

$$\sigma_z(b_1, -h') = -p_i;$$

$$\tau_{rz}(b_1, -h') = pa^2(a^2 - a_1^2)^{-1}(b_1 - a_1)h'^{-1};$$

$$\sigma_e(b_1, -h') = [p_i^2 + 3p^2a^4(a^2 - a_1^2)^{-2}(b_1 - a_1)^2h'^{-2}]$$

с зависимостью  $p_i$  от выбора модели. Более того, при вертикальности в точках  $(b_1, -h')$  образующей внутренней поверхности промежуточного кольца следует принять

$$\tau_{rz}(b_1, -h') = 0,$$

и тогда

$$\sigma_e(b_1, -h') = p_i.$$

Специфика напряжённых состояний в названных точках такова, что в  $(b_1, 0)$  возможен разрыв вследствие изгиба нависающего участка промежуточного кольца, и предел упругого сопротивления

$$p_s = (1 - a_1^2/a^2)[3(b_1 - a_1)^2h'^{-2} + 1]^{-1}\sigma_s$$

по модели плоского аналога.

В точках  $(b_1, -h')$  возможно зарождение местных пластических деформаций при условии

$$p_i = \sigma_s.$$

В частности, при

$$a = 55 \text{ мм}, a_1 = 30 \text{ мм}, b = 59 \text{ мм}, b_1 = 40 \text{ мм}, h' = 8 \text{ мм}, p = 66 \text{ МПа}$$

модель плоского (секторного соответственно далее в скобках) аналога даёт

$$p_i = 378 (322) \text{ МПа};$$

$$\sigma_e(b_1, 0) = 535 (458) \text{ МПа}.$$

Первое критическое значение  $b_1$ , соответствующее условию  $p_e(b) = 0$ , составляет 36.4 (36.9) мм, а второе критическое значение равно 45.6 (45.4) мм. Поскольку данное  $b_1$  лежит между ними, то имеется участок отставания промежуточного кольца от оправы

$$56.2 (55.8) \text{ мм} \leq r_1 \leq b = 59 \text{ мм}.$$

Ясен смысл уменьшить  $b_1$ , например до 35 мм, тогда

$$p_i = 192 (185) \text{ МПа}$$

и

$$\sigma_e(b_1, 0) = 204 (187) \text{ МПа},$$

так что напряжения снижаются примерно вдвое.

Итак, на стадии проектного расчёта промежуточного кольца целесообразно принять

$$b_1 = (1/4)b[(a + a_1)b + 2a_1a]/[(a + a_1)b - a_1a].$$

На основании созданных теорий деформирования, жёсткости, оптики, прочности и разрушения именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных и несущих элементов иллюминаторов для высоких давлений, предложен и

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 396/556

обоснован ряд конструкций иллюминаторов (рис. 3.14), защищённых авторскими свидетельствами на изобретения. Во многих из них конструктивными мерами снижается резкая концентрация контактных давлений, что существенно повышает прочность конструкций и попутно способствует увеличению точности расчётов созданными общими (полу)степенным и интегральным методами аналитической методологии макроэлементов.

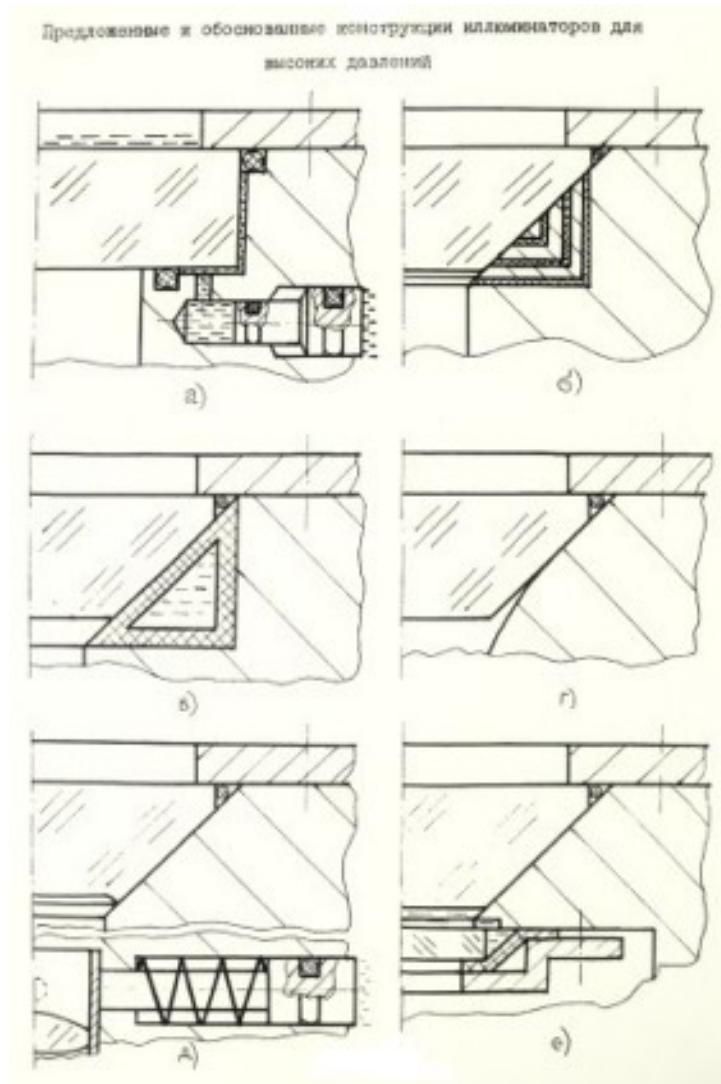


Рисунок 3.14. Предложенные и обоснованные конструкции иллюминаторов для высоких давлений, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.

Развивающий идею комплексного улучшения прочностных и оптических характеристик иллюминатор высокого давления [47] содержит (рис. 3.14, а) смотровое плоскопараллельное цилиндрическое стекло, закреплённое посредством прижимного кольца в цилиндрической кольцевой выточке корпуса с зазором, герметизированном уплотнительными элементами, заполненным жидкостью и соединённым каналом с полостью радиального двухступенчатого углубления, в котором установлен двухступенчатый поршень, поджатый давлением окружающей среды. Давление на всю поверхность внешнего основания (попытки снизить площадь приложения давления сужают поле зрения, и полезность их проблематична) уравнивается увеличенным давлением на кольцевую периферическую часть частично нагруженного внутреннего основания сплошного трёхмерного цилиндрического светопрозрачного элемента, создаваемым с помощью дифференциального поршня. Увеличение соответствует отношению площадей поперечных сечений ступеней поршня, а это отношение может быть равно отношению площади внешнего основания к площади

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 397/556

кольцевой периферической части частично нагруженного внутреннего основания. Это позволяет уменьшить, а при должном соотношении площадей ступеней поршня и исключить силовое взаимодействие светопрозрачного элемента с оправой. Таким образом, светопрозрачный элемент может удерживаться в равновесии одними гидростатическими давлениями, приложенными с противоположных сторон, и контакты светопрозрачного элемента с оправой и фланцем могут быть лишь ограничительными, но не силовыми, что повышает прочность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического светопрозрачного элемента иллюминатора высокого давления. Ведь вследствие шероховатости соприкасающихся поверхностей действительная площадь контакта всегда гораздо меньше номинальной [175], высокие контактные давления на микровыступы, нависающие участки резко снижают контактную прочность неорганического стекла [153, 169, 261]. Кроме того, повышенное давление той же величины действует и на боковую поверхность светопрозрачного элемента и компенсирует растягивающие напряжения от его изгиба. Этим достигается дополнительное повышение прочности, так как при характерных для иллюминаторов высокого давления размерах сплошного трёхмерного цилиндрического светопрозрачного элемента указанное отношение площадей (и давлений) меньше  $P_{max}$ . Увеличение давления на боковую поверхность светопрозрачного элемента в указанном отношении приводит к повышению несущей способности светопрозрачного элемента примерно на две трети по сравнению с тем случаем, когда на боковую поверхность действует давление той же величины, что и внешнее давление. А поле зрения практически не сужается фланцем, вынос которого минимален. В результате комплексно улучшаются оптико-механические свойства иллюминатора, его качество и надёжность.

Иллюминатор [41] содержит (рис. 3.14, б) стеклоэлемент в виде именно существенно трёхмерного усечённого конуса, а между ним и опорой установлены сопряжённые с его конической поверхностью кольца уголкового поперечного сечения. Они расположены симметрично одно в другом и снабжены установленными между ними и сопряжёнными с ними эластичными прокладками также уголкового сечения. В результате при деформировании стеклоэлемента под действием внешнего давления происходят взаимные перемещения колец, обеспечивая более равномерное распределение контактного давления на стеклоэлемент, и повышается несущая способность иллюминатора для высоких давлений.

Та же цель в конструкции [44] достигается (рис. 3.14, в) установкой кольца треугольного сечения, сопряжённого со стеклоэлементом в виде именно существенно трёхмерного усечённого конуса и с цилиндрической выточкой в корпусе. Это кольцо выполнено из металлизированной резины и имеет заполненную жидкостью кольцевую полость. Под действием деформированного давлением стеклоэлемента соответственно деформируется и кольцо, обеспечивая более равномерное распределение контактного давления на стеклоэлемент. Тем самым повышаются надёжность и долговечность иллюминатора.

Конструкция [42] отличается тем, что сопряжённая с именно существенно трёхмерным коническим стеклоэлементом поверхность оправы (рис. 3.14, г) имеет выпуклую в его сторону образующую, а между ними со стороны меньшего основания стеклоэлемента есть зазор. В результате при деформировании стеклоэлемента внешним давлением сглаживается концентрация напряжений у меньшего основания стеклоэлемента, что повышает прочность, надёжность и долговечность такого иллюминатора.

Другой способ [48] (рис. 3.14, д) уменьшения концентрации напряжений у меньшего основания именно существенно трёхмерного конического стеклоэлемента заключается в выполнении на его внутреннем основании выемки с перпендикулярным боковой поверхности краем и плоской центральной частью. В результате снижается жёсткость стеклоэлемента у края этого основания, сглаживается максимум контактного давления и повышаются прочность и долговечность иллюминатора.

Конструкция [43] позволяет повысить качество изображения способом, отличным от создания начальной расфокусировки. Не обязательно то, что согласно изобретению (рис. 3.14, е) иллюминатор снабжён стеклоэлементом в виде именно существенно трёхмерного

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 398/556

усечённого конуса. Перенос той же идеи на другие конфигурации светопрозрачного элемента, прежде всего на именно существенно трёхмерную сплошную цилиндрическую, не требует никакого изменения идеи. Выше установлено, что вклад искривления частично нагруженного внутреннего основания в продольную расфокусировку на порядок больше, чем модуль вклада искривления внешнего основания именно существенно трёхмерного светопрозрачного элемента. Это связано с различиями как в величинах искривлений, так и в разностях показателей преломлений на оптических поверхностях. Поэтому в данной конструкции устраняется влияние искривления частично нагруженного внутреннего основания именно существенно трёхмерного светопрозрачного элемента на продольную расфокусировку. С этой целью между ним и гидрообъективом устанавливается плоскопараллельная стеклянная пластина, а полость между ней и светопрозрачным элементом заполняется иммерсионной жидкостью (например кремнийорганической) с показателем преломления, близким к показателю преломления стекла. Пластина поджимается к оправе ступенчатым фланцем через эластичную прокладку, образующую полость с боковой поверхностью пластины и смежной поверхностью оправы. Эта полость изолирована от внутренней полости подводного аппарата, однако сообщается с промежутком между стеклоэлементом и пластиной через отверстия в оправе и заполнена той же иммерсионной жидкостью. В процессе работы внутренняя поверхность стеклоэлемента прогибается вовнутрь и продвигается в ту же сторону, слегка давит на иммерсионную жидкость, перетекающую в полость, ограниченную эластичной прокладкой. Поскольку её жёсткость по порядку величины меньше жёсткости стеклянной пластины, а давление на них одинаково по закону Паскаля и невелико, то можно считать стеклянную пластину недеформируемой. Ввиду близости показателей преломления стеклоэлемента, иммерсионной жидкости и стеклянной пластины их объединение преломляет свет по существу как единое целое с недеформируемым внутренним основанием, обращённым к гидрообъективу. Поэтому влияние искривления частично нагруженного внутреннего основания стеклоэлемента исключается и продольная расфокусировка оптической системы снижается на порядок. При этом в идеальном случае меняется её знак (вклады искривлений оснований в продольную расфокусировку по формуле (3.67) имеют противоположные знаки), но ввиду некоторых различий в показателях преломления стекла и иммерсионной жидкости и небольших деформаций стеклянной пластины этого утверждать нельзя. А положительный эффект ясен. Поскольку продольная расфокусировка изображения пропорциональна рабочему давлению, то предложен механизм автоматического её исправления, осуществлённый в устройстве для подводного фотографирования [65], включающем корпус с иллюминатором и съёмочную камеру с объективом и исправляющим механизмом его фокусировки (см. рис. 3.14, д). Исправляющий механизм выполнен в виде подпружиненного плунжера, установленного с возможностью перемещения в герметизированном отверстии в корпусе и кинематически связанного с механизмом фокусировки объектива съёмочной камеры. При этом ось отверстия в корпусе, оставаясь нормальной к его оси, смещена от радиального положения за пределы её касания с внешней поверхностью корпуса объектива с механизмом фокусировки с целью аннулирования радиальной составляющей приложенного к этому механизму усилия со стороны плунжера, заклинивающей этот механизм. Таким образом, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения новые конструкции иллюминаторов высокого давления обладают повышенной прочностью и улучшенными оптическими свойствами и разработаны на основе принципиально новых представлений о напряжённо-деформированном состоянии, жёсткости, оптике, прочности и разрушении светопрозрачных элементов как именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел с плоскопараллельными основаниями. Эти принципиально новые представления получены благодаря созданным теориям деформирования, жёсткости, оптики, прочности и разрушения именно существенно трёхмерных сплошных цилиндрических тел, в частности светопрозрачных и несущих элементов иллюминаторов для высоких давлений, по общим методам аналитической методологии макроэлементов.

### 3.8. Выводы по главе 3

1. В общей теории обработки данных создан итерационный общий метод наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов, с опорой на самые лучшие данные и полным учётом именно всех данных без изъятия выбросов и приложен к исследованиям прочности и разрушения неорганического стекла при повторно-статическом нагружении.
2. В общей теории прочности созданы общая теория и общие методы обобщения критериев предельных состояний и прочности линейно-функциональным преобразованием главных напряжений с деформированием и/или движением (смещением, вращением) предельной поверхности на случай анизотропии и/или различных сопротивлений материала растяжению и сжатию и приложен к обобщению третьей и четвёртой теорий прочности и к исследованиям прочности и разрушения органического стекла при сложном напряжённом состоянии.
3. В общей теории прочности общий метод развития критериев предельных состояний учётом упрочнения при трёхмерном равноосном сжатии с линейным влиянием промежуточного главного напряжения продвинул, проверен известными экспериментальными данными для различных материалов при сложном напряжённом состоянии и применён для математического моделирования прочности органического стекла.
4. Приложением общих методов аналитической методологии макроэлементов созданы, экспериментально подтверждены и применены теории прочности и разрушения именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением. Открыты, теоретически и экспериментально обоснованы и практически использованы явления существования критического и наилучшего значений отношения давления на боковую поверхность именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела из неорганического стекла к внешнему давлению. Превышение (примерно равного  $1/3$  при толщине порядка радиуса) критического значения этого отношения приводит к скачкообразному перемещению места наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения в стеклоэлементе из центра на край свободной от давления центральной части его внутренней поверхности; соответственно изменяется характер его разрушения, так что взамен радиального растрескивания стеклоэлемента происходит скалывание и последующее растрескивание сегмента, меньшего полусферы, основанием которого является ненагруженная центральная часть внутренней поверхности стеклоэлемента. При наилучшем (примерно равном трём при толщине порядка радиуса) значении этого отношения разрушающее давление повышается примерно на порядок по сравнению со случаем отсутствия бокового давления взамен примерно четырёхкратного повышения при распространении внешнего давления на боковую поверхность стеклоэлемента.
5. Экспериментальными исследованиями стрелы прогиба несколько меньшего ненагруженной круглой центральной части круглого центрального участка частично нагруженного основания именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением с учётом анализа погрешностей исходных данных, измерений и вычислений очень хорошо подтверждаются расчёты по методу конечных элементов и по общему (полу)степенному методу при однопараметрическом и двухпараметрическом методах устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу среднеквадратичной минимизации невязок сопряжения. Слегка занижены результаты при однопараметрическом методе устранения минимизированной невязки осевого перемещения по методу минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей и по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения. При двухпараметрическом методе устранения минимизированной невязки осевого перемещения результат по методу

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 400/556

минимизации невязок сопряжения минимаксами их модулей сильно занижен, а по методу коллокационной минимизации невязок сопряжения существенно завышен.

6. Приложением общих методов аналитической методологии макроэлементов созданы, экспериментально подтверждены и применены теории деформирования, жёсткости и оптики (теории влияния напряжённо-деформированного состояния на оптические свойства) сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением. Предложена и обоснована концепция светопреломления иллюминатора как неотъемлемой составной части подводной оптической системы, заключающаяся в зависимости её характеристик от деформирования иллюминатора и в первую очередь его светопрозрачного элемента. Влияние его напряжённо-деформированного состояния в целом на оптические свойства системы существенно сказывается только на её продольной расфокусировке и примерно на 90 % определяется одной лишь кривизной в центре внутренней оптической поверхности стеклоэлемента. Открыто, обосновано и использовано явление существования такой наилучшей начальной расфокусировки оптической системы, которая противоположна среднему значению рабочей расфокусировки и снижает итоговую рабочую расфокусировку примерно на порядок.

7. Открыты и обоснованы ещё шесть принципиально новых явлений и законов напряжённо-деформированного состояния именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением. Открыты и обоснованы явление и закон кратного (примерно в три-четыре раза) превышения кривизны в центре полностью нагруженного основания кривизной в центре частично нагруженного основания. Открыты и обоснованы явление и закон необходимости и чрезвычайной существенности дополнения стрелы прогиба как общей характеристики искривления при изгибе ещё и кривизной как местной характеристикой искривления при изгибе частично нагруженного основания и особенно полностью нагруженного основания. Открыты и обоснованы явление и закон кратного (примерно на порядок) превышения модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания положительным вкладом кривизны в центре частично нагруженного основания в продольную расфокусировку изображения подводного объекта. Открыты и обоснованы явление и закон необходимости, полезности и чрезвычайной существенности выделения и именно достаточно точного учёта знака и относительно малого модуля отрицательного вклада кривизны в центре полностью нагруженного основания в продольную расфокусировку изображения подводного объекта. Открыты и обоснованы явление и закон необходимости и полезности (для углубления исследования напряжённо-деформированного состояния) промежуточного выхода исследования за собственные пределы напряжённо-деформированного состояния с последующим возвращением исследования к напряжённо-деформированному состоянию по диалектическому закону отрицания отрицания. Открыты и обоснованы явление и закон необходимости и полезности неперменного выделения и отдельного исследования влияний отдельных существенных следствий (свойств, частей, элементов) напряжённо-деформированного состояния наряду с исследованием итогового (суммарного) влияния напряжённо-деформированного состояния, в данном случае влияний кривизн оснований в их центрах на продольную расфокусировку изображения подводного объекта.

8. Открыты и обоснованы всеобщие явления и законы целесообразности относительной малости модуля количественного величиной и качественного знаком оценивающего различителя методов моделирования между собой, целесообразности промежуточного выхода исследования за пределы предмета первоначального рассмотрения с последующим возвращением исследования к этому предмету (по диалектическому закону отрицания отрицания и открытому общему закону кратного отрицания), а также необходимости и полезности неперменного выделения и отдельного исследования составляющих влияний



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 401/556

отдельных частей и существенных свойств целого на предмет исследования наряду с исследованием итогового (суммарного) влияния целого на предмет исследования.

9. Приложением созданных теорий деформирования, жёсткости, оптики, прочности и разрушения сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением поставлена и решена связанная задача прочности, жёсткости и оптики и созданы метод и алгоритм комплексной оптимизации всех соответствующих характеристик иллюминатора для высоких давлений.

10. Приложением общих методов аналитической методологии макроэлементов на основе математических моделей плоского и секторного аналогов поставлена и решена связанная задача жёсткости и прочности промежуточного кольца иллюминатора с учётом возможности отставания периферической части основания кольца от торца выточки в оправе. Установлено существование двух критических значений внутреннего радиуса этого основания. Превышение первого критического значения приводит к инициированию названного отставания. Превышение второго критического значения приводит к невозможности самоуравновесить сечение промежуточного кольца. Его рациональному проектированию соответствует выбор названного радиуса меньшим первого критического его значения. Созданы соответствующие методы оптимизации промежуточного кольца между стеклоэлементом и оправой.

11. На основе совокупности открытых явлений и принципиально новых представлений созданных теорий деформирования, жёсткости, оптики, прочности и разрушения сплошного трёхмерного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодавлением по общим методам аналитической методологии макроэлементов предложены и обоснованы новые рациональные конструкции иллюминаторов с повышенными характеристиками прочности, жёсткости и оптики, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.

## **4. ПРИЛОЖЕНИЕ СОЗДАННОЙ СИСТЕМЫ ОБЩИХ ТЕОРИЙ, МЕТОДОЛОГИЙ И МЕТОДОВ К ВЫДВИЖЕНИЮ ПРИНЦИПОВ И СОЗДАНИЮ МЕТОДОВ РАЦИОНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЧНОСТЬЮ СВЕТОПРОЗРАЧНЫХ И НЕСУЩИХ ЭЛЕМЕНТОВ И ИХ СОЕДИНЕНИЙ СРЕДСТВАМИ УПЛОТНИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ ПРИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЯХ**

### **4.1. Методы рациональных изменений участков приложения высоких давлений и их ступенчатых распределений**

Прочность типового элемента техники высоких давлений при прочих равных условиях вполне определяется ступенчатой нагрузкой.

Обычно на практике часть поверхности элемента нагружена заданными давлениями, по функциональным причинам не подлежащими изменению, а к оставшейся части это не относится.

Технологически осуществимое изменение ступенчатой нагрузки на эту часть приводит к соответствующему изменению прочности, в частности минимакса равносильного (эквивалентного) напряжения по приемлемому критерию прочности.

Нельзя априорно утверждать существование наилучшего ступенчатого распределения в отличие от наилучшего непрерывного распределения: если наилучшее непрерывное распределение неравномерно, то наилучшего ступенчатого его приближения не существует.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 402/556

Однако необходимость технологической осуществимости накладывает дополнительные ограничения на минимальную ширину ступени, зависящую от размеров как мультипликатора давлений, так и сечений уплотнительных колец, и в конечном счёте определяется существующей технологией.

Независимо от делимости ширины допускающего изменение давлений участка произвольной поверхности элемента на минимальную ширину ступени её принятие делает наилучшее ступенчатое распределение нагрузки существующим.

Ясно, что оно и может быть рекомендовано к осуществлению.

Однако полезно взвесить, насколько снижается прочность при увеличении минимального размера ступени, чтобы достичь рационального компромисса прочности и технологичности. Дальнейшее повышение технологичности достигается исключением мультипликаторов давления; тогда единственной возможностью изменения нагрузки остаётся распространение или ограничение зоны высокого давления.

Ограничение изменения лишь участками приложения внешнего давления взамен изменения ступенчатых нагружений может только снизить возможности повышения прочности.

Решённая задача прочности именно существенно трёхмерного сплошного цилиндрического тела, в частности светопрозрачного элемента, при схеме нагружения основного типа в технике высоких давлений с повышенным равномерным периферическим противодействием иллюстрирует изложенное выше.

Действительно, по функциональным соображениям внешнее давление  $p$  действует на внешнее основание светопрозрачного элемента целиком, иначе сужается поле зрения.

Центральная часть частично нагруженного внутреннего основания светопрозрачного элемента со стороны объектива или исследователя должна быть свободна от нагрузки.

Уменьшение этой части сузит поле зрения, увеличение не влияет на последнее и повышает напряжения в светопрозрачном элементе.

Уравновешивающее давление на периферическую часть частично нагруженного внутреннего основания светопрозрачного элемента теоретически может быть распределено и по ступенчатому закону, однако в связи с относительной малостью ширины этой периферической части технологически целесообразно равномерное давление, тогда его величина однозначно определяется условиями равновесия.

Остаётся возможность изменения равномерного давления на боковую поверхность. Наилучшая его величина примерно втрое превосходит внешнее давление и приводит к повышению прочности светопрозрачного элемента примерно на порядок по сравнению со случаем отсутствия бокового давления.

Если же просто распространить внешнее давление на боковую поверхность, то повышение прочности оказывается только примерно четырёхкратным.

Таким образом, рациональное изменение ступенчатых нагружений, являющееся функционально допустимым и технологически осуществимым, в принципе может дать значительный эффект повышения прочности светопрозрачного или несущего элемента сверх достигаемого простым распространением или ограничением зоны действия высокого давления.

#### **4.2. Метод линеаризации для выделения задачи прочности паяного сотового уплотнения в связанной задаче аэроупругости**

Герметизирующая вал центробежного компрессора высокого давления сотовая обойма (рис. 4.1) состоит из несущей втулки и наполнителя типа пчелиных сот, собранного из гофрированных фольговых полос, соединённых между собой и с втулкой по сопряжённым поверхностям пайкой или сваркой [342].

Решение соответствующей связанной задачи аэроупругости крайне затруднительно. Однако эксперименты Г. А. Бондаренко в лаборатории центробежных компрессоров ВИИИкомпрессормаш показали, что при действительных уплотнительных зазорах

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 403/556

параболическое распределение давлений вдоль оси приближается к линейному, предполагаемому для простоты.

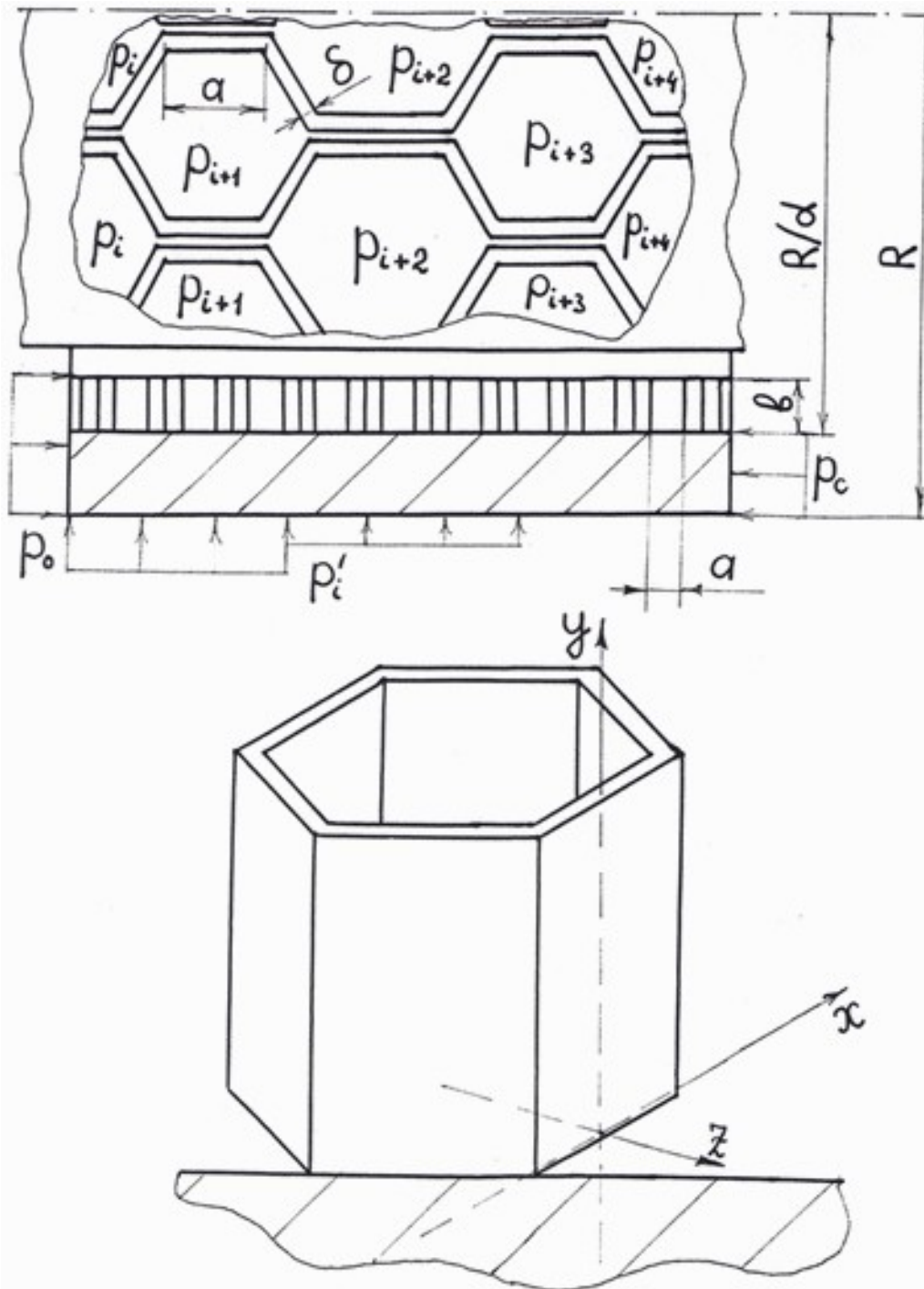


Рисунок 4.1. Конфигурация и схема нагружения паяного сотового уплотнения.

Примем и другие упрощающие допущения, позволяющие получить инженерное решение задачи:

при установившемся течении рабочей среды её действие на сотовое уплотнение сводится к давлению, равномерному в окружающих рядах ячеек;

характерный размер ячейки и жёсткость ячеистой структуры малы по сравнению с таковыми у несущей втулки;

условия упругой поддержки каждого пластинчатого элемента прямоугольной формы смежными пластинчатыми элементами и несущей втулкой близки к закреплению.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 404/556

Конфигурация сотового уплотнения показывает, что максимальны изгибные напряжения в серединах свободных краёв пластинчатых элементов, образующих угол  $\pi/3$  с осью уплотнения, определяемые по классическому решению теории пластин [320] с учётом влияния деформирования несущей втулки. В пределах упругости равносильное (эквивалентное) напряжение [94]

$$\sigma_e = [0.54k_p n^{-1} a^2 \delta^{-2} + (0.14\alpha^2 + 0.40)/(\alpha^2 - 1)] p_0,$$

где

$$k_p = n p_0^{-1} \Delta p_{i\max}$$

– коэффициент концентрации перепада давлений, причём часто можно принять

$$k_p = 1.5;$$

$n$  – число гребней;

$\Delta p_{i\max}$  – наибольший перепад давлений – через гребень номер  $i$ ;

$p_0$  – уплотняемое давление;

$a, \delta$  – сторона шестигранной ячейки и толщина пластинчатого элемента;

$\alpha$  – относительная толстостенность несущей втулки, равная отношению её внешнего радиуса  $R$  к внутреннему радиусу  $r$ .

Давление начала пластического течения

$$p_s = \sigma_s / [0.81k_p n^{-1} a^2 \delta^{-2} + (0.14\alpha^2 + 0.40)/(\alpha^2 - 1)]$$

и большее ведёт к росту пластических деформаций, падение давления вдоль оси стремится к линейному и

$$k_p \rightarrow 1.$$

Ввиду отсутствия решения приемлемой задачи теории пластичности примем увеличение пластического предельного изгибающего момента по сравнению с упругим в пластине таким же, как в балке [298], а именно в 1.5 раза.

Давление начала разрушения при идеальной пластичности

$$p_{su} = \sigma_u / [0.36k_p n^{-1} a^2 \delta^{-2} + (0.14\alpha^2 + 0.40)/(\alpha^2 - 1)].$$

Математическое ожидание  $p_u$  давления разрушения получается заменой  $\sigma_s$  на  $\sigma_u$ , а его верхний предел  $p_{u\max}$  – заменой  $\sigma_s$  на действительный предел прочности материала ячеистой структуры

$$\sigma_{ut} = \sigma_u / (1 - \psi),$$

где  $\psi$  – относительное удлинение при разрыве.

В лаборатории прочностных исследований конструкций, работающих под давлением, ВНИИкомпрессормаш выполнена программа экспериментальных исследований деформирования и разрушения сотового уплотнения, которой руководил Б. И. Огурцов и которую осуществил Е. А. Шерстнок продувкой ячеистой структуры на специальном стенде.

Автор выполнил руководство обработкой данных этой программы экспериментальных исследований сотового уплотнения, а также анализ и синтез этих данных и сопоставление их с итогами теоретических исследований прочности сотового уплотнения.

Сотовое уплотнение из стали 12Х18Н9Т

$$(\sigma_s = 160...220 \text{ МПа};$$

$$\sigma_u = 450...580 \text{ МПа};$$

$$\psi = 0.40...0.55)$$

характеризовалось параметрами

$$a = 1.8 \text{ мм},$$

$$b = 3.7 \text{ мм},$$

$$\delta = 0.15 \text{ мм},$$

$$n = 16,$$

$$r = 39 \text{ мм},$$

$$R = 45 \text{ мм},$$

$$\alpha = 1.15.$$

При этом

$$\sigma_{ut} = 970...1000 \text{ МПа}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 405/556

(верхнему значению  $\sigma_u$  соответствует нижнее значение  $\psi$  и наоборот в силу действительной их зависимости от режима термообработки).

Тогда теоретически

$$\begin{aligned} p_s &= 18...25 \text{ МПа,} \\ p_u &= 32...44 \text{ МПа,} \\ p_{\text{umax}} &= 90...128 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

В пяти сериях экспериментов кратковременные давления перед уплотнением

$$p_0 = 15; 23; 40; 55; 64 \text{ МПа}$$

записывали на осциллограмму.

В первых трёх сериях экспериментов падение давления после достижения  $p_{0\text{max}}$  происходило плавно, остаточные деформации и разрушения не обнаружены.

В четвёртой и пятой сериях зафиксировано кратковременное резкое (в дальнейшем более плавное) падение давления (было менее резким в пятой серии экспериментов).

После четвёртой серии экспериментов замечены и после пятой серии экспериментов добавились пластинчатые элементы с остаточными деформациями и разрушениями.

Пластические деформации больше выросли в промежутке 40...55 МПа, чем в меньшем на 40 % промежутке 55...64 МПа, а значит, они интенсивно, без стеснения упругими, растут со значения

$$p_0 \leq 40 \text{ МПа,}$$

что подтверждает интервал для  $p_u$ .

Во всех случаях пластически деформировались и разрушались пластинчатые элементы, ориентированные под углом  $\pi/3$  к оси уплотнения, с иницированием в серединах свободных сторон.

В большинстве эти элементы разрушались в области низкого абсолютного давления, где в связи с минимальным расширением радиального зазора перепады выше, что подтверждает правомерность принятых допущений и приемлемость построенного решения.

### **4.3. Методы иерархизации систем неопределённостей участков сцепления и проскальзывания и критических значений в осесимметричной контактной задаче с трением для упругих уплотнений с заниженными разгрузочными поясками**

Для герметизации комплекта цилиндрических деталей типа сальниковых камер (рис. 4.2) требуется предварительная осевая затяжка, с повышением внутреннего давления уменьшающаяся вследствие податливости крепёжных элементов, причём контактное давление на уплотнительных поясках для устойчивой герметичности должно превышать внутреннее давление именно при его максимуме.

Поэтому рационально ступенчатое изменение жёсткости контакта путём выполнения заниженных разгрузочных поясков.

В этой задаче наряду с усилием затяжки и давлением рабочей среды подлежат учёту температурные и сдвиговые напряжения от трения по контактирующим пояскам.

Полагаем малыми превышения поясков над торцами деталей, а деформации каждой детали симметричными относительно срединной плоскости и осесимметричными.

Влияние рабочего давления  $p_r$  (и радиальных контактных давлений на поверхностях сопряжений между слоями при составной конструкции в задаче А. В. Гадолина [87]) учитывается формулами Ламе [358].

Значительно сложнее учёт неравномерных осевых напряжений.

Полагаем осевое нормальное давление  $p_z(r)$  на торцы детали осесимметричным кусочно-гладким (достаточное условие существования и почти всюду дифференцируемости первообразных для произведения  $gr_z(r)$ ), а температурное поле логарифмическим, соответствующим установившемуся тепловому потоку [260]

$$T(r) = T \ln(r_o/r) / \ln(r_o/r_i),$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 406/556 где  $T(r)$ ,  $T$  – превышение температур на текущем  $r$  и внутреннем  $r_i$  радиусах соответственно над внешней температурой на радиусе  $r_e$ .

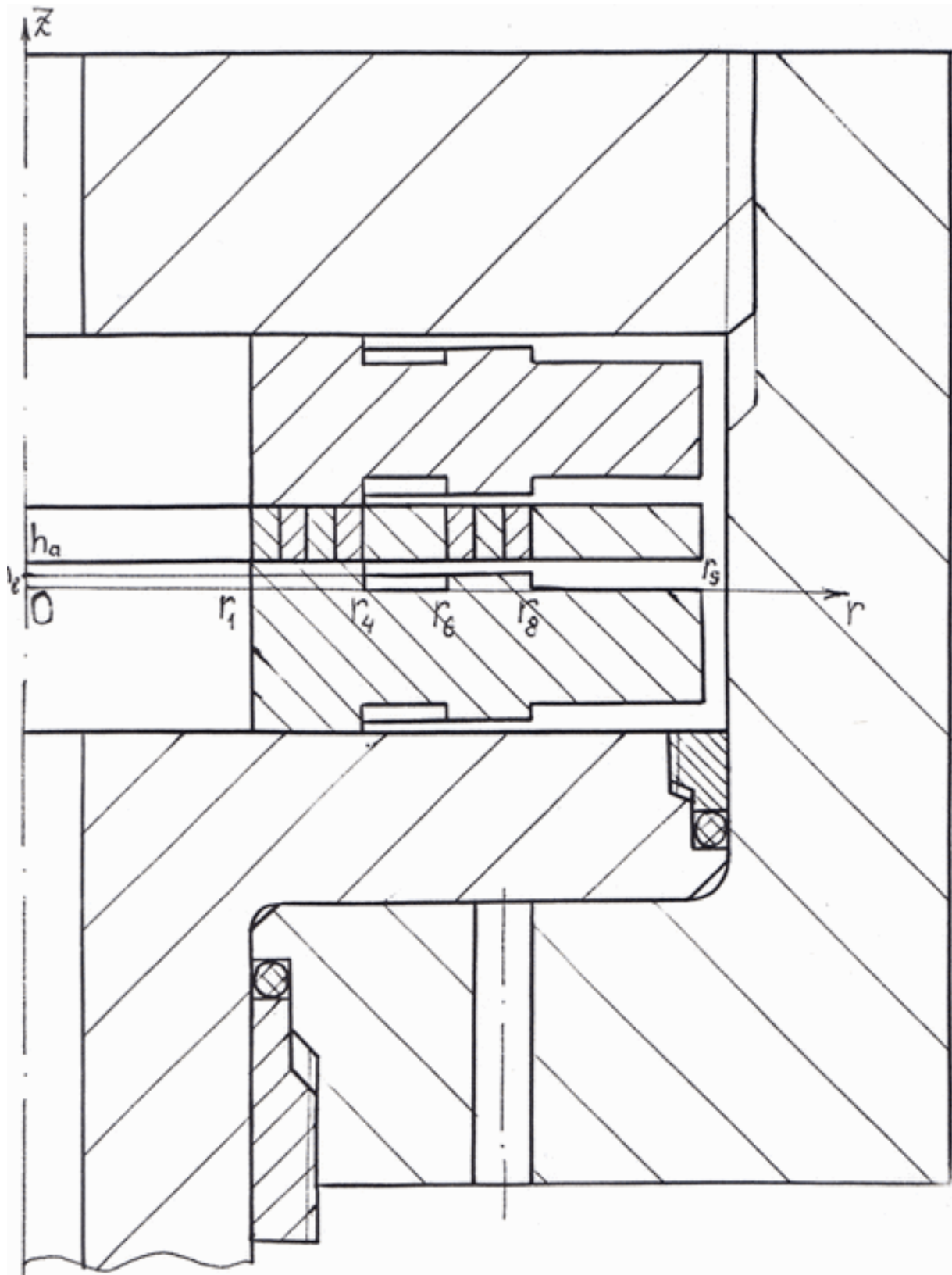


Рисунок 4.2. Комплект цилиндрических деталей с уплотнительными и заниженными разгрузочными поясками в полости испытательной камеры.

Кроме того, поверхностное сдвиговое напряжение  $\tau_{rz}(r)$  отсчитываем от оси.  
Последовательное приложение формул Ламе [358] к элементарному участку

$$r \leq r' \leq r + dr$$

и замена интегральных сумм интегралами и общий интегральный метод аналитической методологии макроэлементов одинаково учитывают влияние  $p_z(r)$ .

Эта же задача позволяет в термоупругой задаче перейти от известного [321] плоского деформированного состояния к плоскому напряжённому состоянию.

Аналогично учитывается влияние поверхностного сдвигового напряжения  $\tau_{rz}(r)$

$$(4.1)$$

$$\tau_{rz}(r) = \tau_{rz}(r, h/2) - \tau_{rz}(r, -h/2)$$

на кольцевой элемент

$$r_i \leq r \leq r_e, \\ -h/2 \leq r \leq h/2.$$

По принципу наложения (суперпозиции) определены суммарные радиальное  $u_r(r)$  и осевое  $u_z(r)$  перемещения

$$(4.2)$$

$$u_r(r) = p_i E^{-1} (r_e^2 - r_i^2)^{-1} [(1 - \mu) r_i^2 r + (1 + \mu) r_i^2 r_e^2 / r] + (1/2) \alpha T r \{ [1 - (1 - \mu) \ln(r_e/r)] / \ln(r_e/r_i) - r_i^2 (r_e^2 - r_i^2)^{-1} [1 - \mu + (1 + \mu) r_e^2 / r^2] \} + \mu E^{-1} r^{-1} \{ (r_e^2 - r_i^2)^{-1} [(1 - \mu) r^2 + (1 + \mu) r_i^2] \int_{r(i)}^{r(e)} p_z(x) x dx + (1 + \mu) \int_{r(i)}^{r(e)} p_z(x) x dx \} + (1/2) (1 - \mu^2) E^{-1} h^{-1} \{ (r_e^2 - r_i^2)^{-1} [(1 - \mu) r / (1 + \mu) + r_i^2 / r] \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) x^2 dx + (1 + \mu) (1 - \mu)^{-1} r_e^2 \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) dx - r \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) dx + r^{-1} \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) x^2 dx \};$$

$$u_z(r) = -2\mu p_i E^{-1} r_i^2 z (r_e^2 - r_i^2)^{-1} + (1/2) \mu \alpha T z \ln^{-1}(r_e/r_i) [-1 + 2(1 + \mu) \mu^{-1} \ln(r_e/r) + 2r_i^2 (r_e^2 - r_i^2)^{-1} \ln(r_e/r_i)] - E^{-1} [(1 - \mu^2) p_z(r) + 2\mu^2 (r_e^2 - r_i^2)^{-1} \int_{r(i)}^{r(e)} p_z(x) x dx] z - \mu E^{-1} h^{-1} \{ (r_e^2 - r_i^2)^{-1} [(1 - \mu) \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) x^2 dx + (1 + \mu) r_e^2 \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) dx] - (1 + \mu) \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) dx \};$$

радиальная  $\varepsilon_r(r)$ , окружная  $\varepsilon_t(r)$  и осевая  $\varepsilon_z(r)$  деформации

$$(4.3)$$

$$\varepsilon_r(r) = p_i E^{-1} (r_e^2 - r_i^2)^{-1} [(1 - \mu) r_i^2 - (1 + \mu) r_i^2 r_e^2 / r^2] - (1/2) \alpha T \{ [\mu + (1 - \mu) \ln(r_e/r)] / \ln(r_e/r_i) + r_i^2 (r_e^2 - r_i^2)^{-1} [1 - \mu - (1 + \mu) r_e^2 / r^2] \} + \mu E^{-1} r^{-2} \{ (r_e^2 - r_i^2)^{-1} [(1 - \mu) r^2 - (1 + \mu) r_i^2] \int_{r(i)}^{r(e)} p_z(x) x dx - (1 + \mu) \int_{r(i)}^{r(e)} p_z(x) x dx + (1 + \mu) p_z(r) r^2 \} + (1/2) (1 - \mu^2) E^{-1} h^{-1} \{ (r_e^2 - r_i^2)^{-1} [(1 - \mu) / (1 + \mu) - r_i^2 / r^2] \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) x^2 dx + (1 + \mu) (1 - \mu)^{-1} r_e^2 \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) dx - \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) dx - r^{-2} \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) x^2 dx \};$$

$$\varepsilon_t(r) = p_i E^{-1} (r_e^2 - r_i^2)^{-1} [(1 - \mu) r_i^2 + (1 + \mu) r_i^2 r_e^2 / r^2] + (1/2) \alpha T \{ [1 - (1 - \mu) \ln(r_e/r)] / \ln(r_e/r_i) - r_i^2 (r_e^2 - r_i^2)^{-1} [1 - \mu + (1 + \mu) r_e^2 / r^2] \} + \mu E^{-1} r^{-2} \{ (r_e^2 - r_i^2)^{-1} [(1 - \mu) r^2 + (1 + \mu) r_i^2] \int_{r(i)}^{r(e)} p_z(x) x dx + (1 + \mu) \int_{r(i)}^{r(e)} p_z(x) x dx \} + (1/2) (1 - \mu^2) E^{-1} h^{-1} \{ (r_e^2 - r_i^2)^{-1} [(1 - \mu) / (1 + \mu) + r_i^2 / r^2] \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) x^2 dx + (1 + \mu) (1 - \mu)^{-1} r_e^2 \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) dx - \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) dx + r^{-2} \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) x^2 dx \};$$

$$\varepsilon_z(r) = -2\mu p_i E^{-1} r_i^2 (r_e^2 - r_i^2)^{-1} + (1/2) \mu \alpha T \ln^{-1}(r_e/r_i) [-1 + 2 \ln(r_e/r) + 2r_i^2 (r_e^2 - r_i^2)^{-1} \ln(r_e/r_i)] - E^{-1} [(1 - \mu^2) p_z(r) + 2\mu^2 (r_e^2 - r_i^2)^{-1} \int_{r(i)}^{r(e)} p_z(x) x dx] - \mu E^{-1} h^{-1} \{ (r_e^2 - r_i^2)^{-1} [(1 - \mu) \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) x^2 dx + (1 + \mu) r_e^2 \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) dx] - (1 + \mu) \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) dx \};$$

радиальное  $\sigma_r(r)$ , окружное  $\sigma_t(r)$  и осевое  $\sigma_z(r)$  напряжения

$$\sigma_r(r) = -p_i r_i^2 r^{-2} (r_e^2 - r^2) (r_e^2 - r_i^2)^{-1} - (1/2) E \alpha T \ln^{-1}(r_e/r_i) [\ln(r_e/r) - r_i^2 r^{-2} (r_e^2 - r^2) (r_e^2 - r_i^2)^{-1} \ln(r_e/r_i)] + \mu r^{-2} [(r^2 - r_i^2) (r_e^2 - r_i^2)^{-1} \int_{r(i)}^{r(e)} p_z(x) x dx - \int_{r(i)}^{r(e)} p_z(x) x dx] + (1/2) (1 - \mu) h^{-1} \{ (r_e^2 - r_i^2)^{-1} (1 - r_i^2 / r^2) \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) x^2 dx + (1 + \mu) (1 - \mu)^{-1} r_e^2 \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) dx - (1 + \mu) (1 - \mu)^{-1} \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) dx - r^{-2} \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) x^2 dx \};$$

$$\sigma_t(r) = p_i r_i^2 r^{-2} (r_e^2 + r^2) (r_e^2 - r_i^2)^{-1} + (1/2) E \alpha T \ln^{-1}(r_e/r_i) [1 - \ln(r_e/r) - r_i^2 r^{-2} (r_e^2 + r^2) (r_e^2 - r_i^2)^{-1} \ln(r_e/r_i)] + \mu r^{-2} [(r^2 + r_i^2) (r_e^2 - r_i^2)^{-1} \int_{r(i)}^{r(e)} p_z(x) x dx + \int_{r(i)}^{r(e)} p_z(x) x dx - p_z(r) r^2] + (1/2) (1 - \mu) h^{-1} \{ (r_e^2 - r_i^2)^{-1} (1 + r_i^2 / r^2) \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) x^2 dx + (1 + \mu) (1 - \mu)^{-1} r_e^2 \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) dx - (1 + \mu) (1 - \mu)^{-1} \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) dx + r^{-2} \int_{r(i)}^{r(e)} \tau_{rz}(x) x^2 dx \};$$

$$\sigma_z(r) = -p_z(r),$$

где  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения.

Это решение устанавливает распределение осевого контактного давления  $p_z(r)$  по уплотнительным поясам при весьма произвольной начальной форме контактирующих поверхностей даже с учётом их волнистости.

Номинальные профили торцов контактирующих деталей полагаем плоскими (и сами уплотнительные и разгрузочные пояски считаются неровностями).

Допустим, что существует поперечное сечение детали, остающееся плоским после контактирования (обычно плоскость симметрии).

Обозначим изменяющуюся вдоль радиуса высоту торцевой поверхности над этим сечением через  $H(r)$  с однозначным определением профилограммы поверхности в пределах  $F$  контакта. В соответствии с действительностью полагаем

$$H_{\max} - H_{\min} \ll F^{-1} \int_{(F)} H(r) dF.$$

Тогда относительная высота неровностей в пределах  $F$  контакта

$$(4.4)$$

$$\varepsilon_0(r) = [H(r) - F^{-1} \int_{(F)} H(r) dF] / [F^{-1} \int_{(F)} H(r) dF] = H(r)F / \int_{(F)} H(r) dF - 1,$$

как и деформации, мала сравнительно с 1. В пределах поверхности контакта сумма

$$\varepsilon_z(r) + \varepsilon_0(r)$$

не зависит от  $r$ .

В (4.3) необходимо удерживать слагаемые, зависящие от  $r$ .

При одинаковых модуле продольной упругости Юнга  $E$  и коэффициенте поперечной деформации Пуассона  $\mu$  у смежных деталей не подлежит учёту слагаемое

$$\mu(1 + \mu)E^{-1}h^{-1} \int_{r(i)}^r \tau_{rz}(x) dx,$$

дающее согласованное (не влияющее на контактное давление) осевое перемещение сопряжённых торцов.

По существу требуется выполнение условия

$$(1 + \mu)\alpha T \ln^{-1}(r_e/r_i) \ln(r_e/r) - (1 - \mu^2)E^{-1}p_z(r) + \varepsilon_0(r) = -C = \text{constant},$$

откуда

$$p_z(r) = E(1 - \mu^2)^{-1} [(1 + \mu)\alpha T \ln^{-1}(r_e/r_i) \ln(r_e/r) + \varepsilon_0(r) + C],$$

и ввиду

$$\int_{(F)} \varepsilon_0(r) dF = 0$$

как следствия (4.4), при различных, вообще говоря,  $\varepsilon_0'(r)$  и  $\varepsilon_0''(r)$  для одной и другой деталей принимая

$$\varepsilon_0(r) = [\varepsilon_0'(r) + \varepsilon_0''(r)]/2,$$

получаем закон распределения контактного давления

$$(4.5)$$

$$p_z(r) = Q/F + E\alpha T(1 - \mu)^{-1} \ln^{-1}(r_e/r_i) [\ln(r_e/r) - F^{-1} \int_{(F)} \ln(r_e/r) dF] + (1/2)E(1 - \mu^2)^{-1} [H'(r)F / \int_{(F)} H'(r) dF + H''(r)F / \int_{(F)} H''(r) dF - 2]$$

в пределах контакта, причём первое слагаемое  $Q/F$  соответствует равномерному распределению  $Q$ , второе слагаемое обеспечивает неравномерность в температурном поле, при  $T > 0$  снижая  $p_z(r)$  с увеличением  $r$ , а третье слагаемое – в связи с начальными неровностями поверхностей контакта, включающими занижение разгрузочного пояса.

Вне контакта

$$p_z(r) = 0,$$

а внутри уплотнительного пояса

$$p_z(r) = p,$$

где  $p$  – рабочее давление.

Поверхностные сдвиговые напряжения  $\tau_{rz}(r)$ , обусловленные трением при контакте, могут быть определены следующим алгоритмом.

Составляется уравнение (4.2) для каждой из контактирующих деталей с  $\tau_{rz}(r)$  в виде (4.1) при учёте противоположных знаков на контактирующих поверхностях смежных деталей.

Получается система  $m + 1$  уравнений по числу деталей с  $m$  поверхностями контакта и неизвестными функциями на каждой из них с априорной неопределённостью участков сцепления и проскальзывания.

Предположим вначале сцепление при контакте повсеместным.

Тогда радиальные перемещения смежных деталей в пределах зон контакта попарно совпадают.

Дифференцированиями по  $r$  каждого из  $m$  интегральных уравнений относительно  $m$  неизвестных функций вида  $\tau_{rz}(r)$  получается без труда решаемая система уже алгебраических, причём линейных, уравнений.



Если принять закон трения Кулона-Амонтона [175], то для правильности решения необходимо и достаточно повсеместное на контактирующих поверхностях выполнение условий вида

(4.6)

$$|\tau_{rz}(r)| \leq k_0 p_z(r),$$

где  $k_0$  – коэффициент трения покоя материалов соответствующей пары деталей, но можно принять и усложнённые законы трения.

При нарушениях (4.6) или усложнённых их аналогов примем противоположное допущение о повсеместном проскальзывании.

Вначале определяются «гладкие» радиальные перемещения каждой из деталей при

$$\tau_{rz}(r) = 0,$$

и при их попарных тождествах на сопряжённых поверхностях решение правильно.

Если, что вероятнее, это не так, то предположим инвариантность знака каждой из разностей «гладких» перемещений в пределах контакта.

Тогда считаем, что на поверхность с меньшим «гладким» перемещением действует сдвиговое напряжение

$$\tau_{rz}(r) = k_0 p_z(r),$$

а на поверхность смежной детали действует сдвиговое напряжение

$$\tau_{rz}(r) = -k_0 p_z(r),$$

(трение в пределах контакта снижает различия «гладких» перемещений).

Решение правильно при сохранении в каждой из разностей с учётом  $\tau_{rz}(r)$  прежнего знака (его не может изменить трение).

В общем случае проскальзывание не повсеместно, как и сцепление, и задача решается методом неопределённых их участков.

Вводятся неизвестные радиусы границ выполнения соотношений

(4.7)

$$\tau_{rz}(r) = k_0 p_z(r);$$

(4.8)

$$\tau_{rz}(r) = -k_0 p_z(r);$$

(4.9)

$$|\tau_{rz}(r)| < k_0 p_z(r).$$

Подставляя соответствующие распределения  $\tau_{rz}(r)$ , неопределённые на участках типа (4.9), получаем систему уравнений именно для них (вне таких участков перемещения в радиальном направлении контактирующих поверхностей не обязаны совпадать) с прежней линеаризацией дифференцированием по  $r$ .

Решение правильно, если на соответствующих участках выполнены соотношения (4.7) – (4.9), а на участках с условиями (4.7) и (4.8) в каждой из разностей радиальных перемещений контактирующих поверхностей сохраняется знак, соответствующий отсутствию трения.

Блок-схема алгоритма решения задачи с учётом сцепления и проскальзывания приведена на рис. 4.3.

В задаче существуют зависящие от конфигурации стягиваемых деталей, упругих свойств их материалов, а также температурного поля и рабочих (и радиальных контактных при сборке с натягом) давлений два главных критических значения суммарного осевого усилия затяжки  $Q$ . Превышение первого из них меняет повсеместное проскальзывание на сочетающееся со сцеплением, а второго – сочетающееся на повсеместное сцепление.

В промежутке между главными критическими значениями находятся другие критические значения, превышение каждого из которых приводит к появлению участка сцепления и/или исчезновению участка проскальзывания.

В любом случае при одинаковых относительно модуля продольной упругости Юнга  $E$  и коэффициента поперечной деформации Пуассона  $\mu$  материалах деталей распределение осевых контактных давлений  $p_z(r)$  определяется независимо от сдвиговых напряжений при

единственном условии статической определимости суммарной осевой силы  $Q$ . Это относится, например, к гидрозатяжке

$$Q = Q_2 - \pi r_1^2 p_1$$

усилием  $Q_2$ , причём  $Q$ ,  $p_1$  и  $r_1$  берутся в одном поперечном сечении.

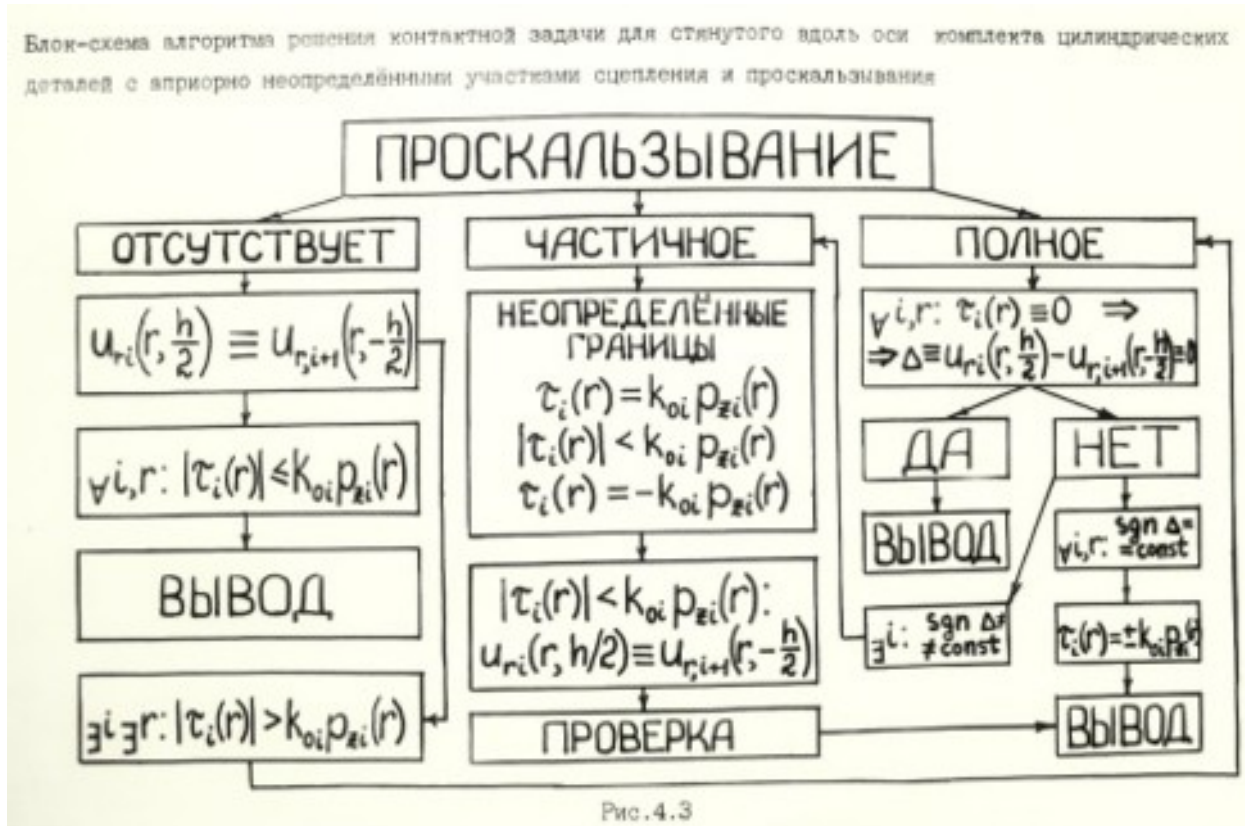


Рисунок 4.3. Блок-схема алгоритма решения контактной задачи для стянутого вдоль оси комплекта цилиндрических деталей с априорно неопределёнными участками сцепления и проскальзывания.

При статической неопределимости суммарной осевой силы  $Q$  она устанавливается из равенства суммарных осевых перемещений стягиваемых деталей и крепёжных элементов, например шпилек, и в формуле (4.5) лишь первое слагаемое зависит от сдвиговых напряжений, так что распределение контактных давлений может быть с точностью до постоянной определено независимо от трения.

Неопределённая постоянная устанавливается при учёте трения.

Если упругие свойства материалов деталей существенно различны, то задача нахождения нормальных и сдвиговых контактных напряжений является связанной и в изложенном алгоритме нормальные контактные напряжения тоже рассматриваются как неопределённые.

То же относится к случаю сборки деталей из материалов с подобным различием и к общему случаю их неоднородности с зависимостями упругих характеристик от координат, а также существенно переменной толщины  $h(r)$ , которые останутся под знаками интегралов.

В итоге определяются все компоненты напряжённо-деформированных состояний всех деталей и с использованием приемлемого критерия предельных состояний обычным путём завершается решение задач статической и усталостной прочности, которая в данном случае оказывается связанной с герметичностью.

Для её устойчивости необходимо и достаточно, чтобы контактное давление на внутренний край каждого уплотнительного пояса превышало рабочее давление с определённым запасом герметичности.

Применительно к сальниковой камере

$$r_1 \leq r \leq r_9, \\ |z| \leq H$$

с выступающим на  $h_a$  над торцом уплотнительным пояском

$$r_1' \leq r \leq r_4$$

и на  $h_b$  разгрузочным пояском

$$r_6 \leq r \leq r_8$$

(см. рис. 4.2) функция

$$H(r) = H + h_a, r_1' \leq r \leq r_4; \\ H(r) = H + h_b, r_6 \leq r \leq r_8; \\ H(r) = H, r_4 < r < r_6, r_8 < r \leq r_9.$$

Пусть  $F$  – общая площадь контакта.

При контакте лишь по уплотнительным поясам

$$F = \pi(r_4^2 - r_1'^2); \\ \int_{(F)} H(r) dF = \pi(H + h_a)(r_4^2 - r_1'^2).$$

При контакте по уплотнительным и разгрузочным поясам

$$F = \pi(r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2); \\ \int_{(F)} H(r) dF = \pi H(r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2) + \pi[h_a(r_4^2 - r_1'^2) + h_b(r_8^2 - r_6^2)].$$

При работе лишь уплотнительных поясков в их пределах

$$H(r)F / \int_{(F)} H(r) dF - 1 = [\pi(H + h_a)(r_4^2 - r_1'^2)] / [\pi(H + h_a)(r_4^2 - r_1'^2)] - 1 = 0,$$

и при малости температурного перепада контактное давление равномерно:

$$(4.10)$$

$$p_z(r) = [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - pr_1'^2] / (r_4^2 - r_1'^2),$$

где  $p_{hp}$  – давление гидроприжима, действующее на кольцевой участок

$$r_0 \leq r \leq r_9$$

вместе с давлением  $p$  на полости деталей;

$$(4.11)$$

$$\varepsilon_z(r) = -2\mu r_1^2 p / [E(r_9^2 - r_1^2)] - \{1 - \mu^2 [1 - (r_4^2 - r_1'^2) / (r_9^2 - r_1^2)]\} [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - pr_1'^2] / [E(r_4^2 - r_1'^2)].$$

Вне пределов уплотнительного пояса

$$p_z(r) = 0$$

и

$$(4.12)$$

$$\varepsilon_z(r) = -2\mu r_1^2 p / [E(r_9^2 - r_1^2)] - \mu^2 [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - pr_1'^2] / [E(r_9^2 - r_1^2)].$$

При контакте по уплотнительным и разгрузочным поясам

$$H(r)F / \int_{(F)} H(r) dF - 1 = (h_a - h_b)(r_8^2 - r_6^2) / [(H + h_a)(r_4^2 - r_1'^2) + (H + h_b)(r_8^2 - r_6^2)], r_1' \leq r \leq r_4;$$

$$H(r)F / \int_{(F)} H(r) dF - 1 = -(h_a - h_b)(r_4^2 - r_1'^2) / [(H + h_a)(r_4^2 - r_1'^2) + (H + h_b)(r_8^2 - r_6^2)], r_6 \leq r \leq r_8$$

и при малости температурного перепада равномерны контактное давление на уплотнительном пояске

$$(4.13)$$

$$p_z(r) = [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - pr_1'^2] / (r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2) + (1/2)E(1 - \mu^2)^{-1}(h_a - h_b)(r_8^2 - r_6^2) / [(H + h_a)(r_4^2 - r_1'^2) + (H + h_b)(r_8^2 - r_6^2)]$$

и контактное давление на разгрузочном пояске

$$(4.14)$$

$$p_z(r) = [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - pr_1'^2] / (r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2) - (1/2)E(1 - \mu^2)^{-1}(h_a - h_b)(r_4^2 - r_1'^2) / [(H + h_a)(r_4^2 - r_1'^2) + (H + h_b)(r_8^2 - r_6^2)],$$

а осевая деформация на уплотнительном пояске

$$(4.15)$$

$$\varepsilon_z(r) = -2\mu r_1^2 p / [E(r_9^2 - r_1^2)] - \{1 - \mu^2 [1 - (r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2) / (r_9^2 - r_1^2)]\} [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - pr_1'^2] / [E(r_4^2 - r_1'^2) + r_8^2 - r_6^2] - (1/2)(h_a - h_b)(r_8^2 - r_6^2) / [(H + h_a)(r_4^2 - r_1'^2) + (H + h_b)(r_8^2 - r_6^2)]$$

и осевая деформация на разгрузочном пояске

$$(4.16)$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 412/556

$$\varepsilon_z(r) = -2\mu r_1^2 p / [E(r_9^2 - r_1^2)] - \{1 - \mu^2 [1 - (r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2) / (r_9^2 - r_1^2)]\} [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - pr_1'^2] / [E(r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2)] + (1/2)(h_a - h_b)(r_4^2 - r_1'^2) / [(H + h_a)(r_4^2 - r_1'^2) + (H + h_b)(r_8^2 - r_6^2)],$$

вне пределов уплотнительного и разгрузочного поясков

$$p_z(r) = 0$$

и

$$(4.17)$$

$$\varepsilon_z(r) = -2\mu r_1^2 p / [E(r_9^2 - r_1^2)].$$

Если согласно формуле (4.14) давление  $p_z(r)$  по разгрузочному пояску положительно, то разгрузочные пояски контактируют между собой и расчёт ведётся по формулам (4.13) – (4.17), а если отрицательно, то разгрузочные пояски не контактируют между собой и применяются формулы (4.10) – (4.12).

При существенном перепаде температуры по толщине стенки (не менее 100 градусов) учитывается и температурная составляющая  $p_z(r)$

$$(4.18)$$

$$E\alpha T(1 - \mu)^{-1} \ln^{-1}(r_9/r_1) [\ln(r_9/r) - F^{-1} \int_{(F)} \ln(r_9/r) dF],$$

где  $\alpha$  – температурный коэффициент линейного расширения материала камеры.

Если контактируют между собой также разгрузочные пояски, то температурная составляющая  $p_z(r)$  есть

$$(4.19)$$

$$E\alpha T(1 - \mu)^{-1} \ln^{-1}(r_9/r_1) \ln(r_9/r) - (1/2)E\alpha T(1 - \mu)^{-1} \ln^{-1}(r_9/r_1) [r_4^2 \ln(er_9^2/r_4^2) - r_1'^2 \ln(er_9^2/r_1'^2) + r_8^2 \ln(er_9^2/r_8^2) - r_6^2 \ln(er_9^2/r_6^2)] / (r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2).$$

Если контактируют между собой только уплотнительные пояски, то температурная составляющая  $p_z(r)$  равна

$$(4.20)$$

$$E\alpha T(1 - \mu)^{-1} \ln^{-1}(r_9/r_1) \ln(r_9/r) - (1/2)E\alpha T(1 - \mu)^{-1} \ln^{-1}(r_9/r_1) [r_4^2 \ln(er_9^2/r_4^2) - r_1'^2 \ln(er_9^2/r_1'^2)] / (r_4^2 - r_1'^2).$$

При контакте и уплотнительных, и разгрузочных поясков ввиду формул (4.13) – (4.19)

на уплотнительном пояске

$$(4.21)$$

$$p_z(r) = [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - pr_1'^2] / (r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2) + (1/2)E(1 - \mu^2)^{-1} (h_a - h_b)(r_8^2 - r_6^2) / [(H + h_a)(r_4^2 - r_1'^2) + (H + h_b)(r_8^2 - r_6^2)] + E\alpha T(1 - \mu)^{-1} \ln^{-1}(r_9/r_1) \ln(r_9/r) - (1/2)E\alpha T(1 - \mu)^{-1} \ln^{-1}(r_9/r_1) [r_4^2 \ln(er_9^2/r_4^2) - r_1'^2 \ln(er_9^2/r_1'^2) + r_8^2 \ln(er_9^2/r_8^2) - r_6^2 \ln(er_9^2/r_6^2)] / (r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2);$$

$$(4.22)$$

$$\varepsilon_z(r) = -2\mu r_1^2 p / [E(r_9^2 - r_1^2)] - \{1 - \mu^2 [1 - (r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2) / (r_9^2 - r_1^2)]\} [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - pr_1'^2] / [E(r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2)] - (1/2)(h_a - h_b)(r_8^2 - r_6^2) / [(H + h_a)(r_4^2 - r_1'^2) + (H + h_b)(r_8^2 - r_6^2)] + \mu\alpha T [r_1^2 / (r_9^2 - r_1^2) - (1/2) \ln^{-1}(r_9/r_1)] + (1/2)(1 + \mu)\alpha T \ln^{-1}(r_9/r_1) [r_4^2 \ln(er_9^2/r_4^2) - r_1'^2 \ln(er_9^2/r_1'^2) + r_8^2 \ln(er_9^2/r_8^2) - r_6^2 \ln(er_9^2/r_6^2)] / (r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2);$$

на разгрузочном пояске

$$(4.23)$$

$$p_z(r) = [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - pr_1'^2] / (r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2) - (1/2)E(1 - \mu^2)^{-1} (h_a - h_b)(r_4^2 - r_1'^2) / [(H + h_a)(r_4^2 - r_1'^2) + (H + h_b)(r_8^2 - r_6^2)] + E\alpha T(1 - \mu)^{-1} \ln^{-1}(r_9/r_1) \ln(r_9/r) - (1/2)E\alpha T(1 - \mu)^{-1} \ln^{-1}(r_9/r_1) [r_4^2 \ln(er_9^2/r_4^2) - r_1'^2 \ln(er_9^2/r_1'^2) + r_8^2 \ln(er_9^2/r_8^2) - r_6^2 \ln(er_9^2/r_6^2)] / (r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2);$$

$$(4.24)$$

$$\varepsilon_z(r) = -2\mu r_1^2 p / [E(r_9^2 - r_1^2)] - \{1 - \mu^2 [1 - (r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2) / (r_9^2 - r_1^2)]\} [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - pr_1'^2] / [E(r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2)] + (1/2)(h_a - h_b)(r_4^2 - r_1'^2) / [(H + h_a)(r_4^2 - r_1'^2) + (H + h_b)(r_8^2 - r_6^2)] + \mu\alpha T [r_1^2 / (r_9^2 - r_1^2) - (1/2) \ln^{-1}(r_9/r_1)] + (1/2)(1 + \mu)\alpha T \ln^{-1}(r_9/r_1) [r_4^2 \ln(er_9^2/r_4^2) - r_1'^2 \ln(er_9^2/r_1'^2) + r_8^2 \ln(er_9^2/r_8^2) - r_6^2 \ln(er_9^2/r_6^2)] / (r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2);$$

вне пределов уплотнительного и разгрузочного поясков

$$p_z(r) = 0$$

и

$$(4.25)$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 413/556

$$\varepsilon_z(r) = -2\mu r_1^2 p / [E(r_9^2 - r_1^2)] + \mu \alpha T [r_1^2 / (r_9^2 - r_1^2) - (1/2) \ln^{-1}(r_9/r_1)] + (1 + \mu) \alpha T \ln(r_9/r) \ln^{-1}(r_9/r_1) - \mu^2 [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - p r_1'^2] / [E(r_9^2 - r_1^2)] + (1/2) \mu^2 (1 - \mu)^{-1} \alpha T \ln^{-1}(r_9/r_1) [r_4^2 \ln(er_9^2/r_4^2) - r_1'^2 \ln(er_9^2/r_1'^2) + r_8^2 \ln(er_9^2/r_8^2) - r_6^2 \ln(er_9^2/r_6^2)] / (r_4^2 - r_1'^2 + r_8^2 - r_6^2).$$

Если контактируют между собой только уплотнительные пояски, то ввиду формул (4.10) – (4.12), (4.18), (4.20)

на уплотнительном пояске

$$p_z(r) = [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - p r_1'^2] / (r_4^2 - r_1'^2) + E \alpha T (1 - \mu)^{-1} \ln^{-1}(r_9/r_1) \ln(r_9/r) - (1/2) E \alpha T (1 - \mu)^{-1} \ln^{-1}(r_9/r_1) [r_4^2 \ln(er_9^2/r_4^2) - r_1'^2 \ln(er_9^2/r_1'^2)] / (r_4^2 - r_1'^2); \quad (4.26)$$

(4.27)

$\varepsilon_z(r) = -2\mu r_1^2 p / [E(r_9^2 - r_1^2)] - \{1 - \mu^2 [1 - (r_4^2 - r_1'^2) / (r_9^2 - r_1^2)]\} [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - p r_1'^2] / [E(r_4^2 - r_1'^2)] + \mu \alpha T [r_1^2 / (r_9^2 - r_1^2) - (1/2) \ln^{-1}(r_9/r_1)] + (1/2) (1 + \mu) \alpha T \ln^{-1}(r_9/r_1) [r_4^2 \ln(er_9^2/r_4^2) - r_1'^2 \ln(er_9^2/r_1'^2)] / (r_4^2 - r_1'^2);$   
вне пределов уплотнительного пояска

$$p_z(r) = 0$$

и

(4.28)

$$\varepsilon_z(r) = -2\mu r_1^2 p / [E(r_9^2 - r_1^2)] + \mu \alpha T [r_1^2 / (r_9^2 - r_1^2) - (1/2) \ln^{-1}(r_9/r_1)] + (1 + \mu) \alpha T \ln(r_9/r) \ln^{-1}(r_9/r_1) - \mu^2 [p_{hp}(r_9^2 - r_0^2) - p r_1'^2] / [E(r_9^2 - r_1^2)] + (1/2) \mu^2 (1 - \mu)^{-1} \alpha T \ln^{-1}(r_9/r_1) [r_4^2 \ln(er_9^2/r_4^2) - r_1'^2 \ln(er_9^2/r_1'^2)] / (r_4^2 - r_1'^2).$$

Проблема контактирования разгрузочных поясков решается аналогично предыдущему случаю.

Если согласно формуле (4.23)  $p_z(r)$  по разгрузочному пояску положительно, то разгрузочные пояски контактируют между собой и расчёт ведётся по формулам (4.21) – (4.25).

Если же согласно формуле (4.23)  $p_z(r)$  по разгрузочному пояску отрицательно, то разгрузочные пояски не контактируют между собой и приемлема формулы (4.26) – (4.28). Теоретически возможный случай

$$p_z(r) = 0$$

соответствует смыканию разгрузочных поясков без усилия и является критическим с приемлемостью всех этих формул.

Но ввиду неравномерности  $p_z(r)$  теперь возможен и случай его знакопеременности по ширине разгрузочного пояска согласно (4.23).

Тогда используется метод неопределённой области контакта, характеризуемой критическим радиусом (или совокупностью таковых при усложнённых профилях поясков).

При решении задачи прочности с учётом пластичности материалов равносильные (эквивалентные) напряжения определяются приемлемым критерием предельных состояний, например третьей или четвёртой теориями прочности либо предложенным линейным критерием (3.55), учитывающим и промежуточное главное напряжение  $\sigma_2$ .

Используются и общая методология всеобщего запаса, мультипликативная и аддитивная методологии общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных при наложении (суперпозиции) нагрузок – осевых усилий и рабочих давлений с дополнительным при необходимости учётом сборочных и термонапряжений.

В задаче статической прочности максимум равносильных (эквивалентных) напряжений минимизируется функционально допустимым (обеспечивающим и запас герметичности) и технологически осуществимым изменением конструкции и условий её нагружения и приравнивается допускаемому напряжению.

В задаче усталостной прочности можно обычным образом использовать приближения Гудмена или Гербера диаграммы Хэя.

В лаборатории прочностных исследований конструкций, работающих под давлением, ВНИИкомпрессормаш при  $T = 0$  выполнена электротензометрия пакета стянутых сальниковых камер с уплотнительными и разгрузочными поясками, нагруженных давлением гидроприжима и внутренним давлением в испытательной камере (см. рис. 4.2).

Давления создавались насосной станцией НСВД-2500 и гидрокомпрессором ГКМ7-6000.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 414/556

Использованы цифровой тензометрический мост ЦТМ-3, переключатель ПД-100М, цифрорпечатающая машинка СД-107М, многопроводный тензоввод высокого давления. Тензорезисторы ТФЦП-2-100 конструкции Московского инженерно-строительного института наклеивались на внутреннюю поверхность и лыски поверхностей сопряжения многослойного измерительного элемента

$$66 \text{ мм} \leq r \leq 200 \text{ мм},$$

$$0 \leq z \leq 4...5 \text{ мм},$$

собранного из восьми колец с радиусами сопряжений, включающими характерные радиусы уплотнительных и разгрузочных поясков, и с натягами, обеспечивающими близость сборочных напряжений в многослойном измерительном элементе и в исследуемых деталях.

После сборки многослойного измерительного элемента и распайки монтажных проводов его торцевые поверхности были шлифованы и притёрты.

Осевая деформация  $\varepsilon_z(r)$  определялась по исправленной осевой деформации  $\varepsilon_{zc}(r)$  с учётом сползания нуля, влияния давления, масляной среды, а также несоответствия тензочувствительности тензорезисторов принятой в тензоаппаратуре тензочувствительности.

По методу наименьших квадратов выполнена обработка результатов тарировки на специальном стенде лаборатории, включающем балку с участком чистого изгиба, и привела к формуле

$$\varepsilon_z(r) = [\varepsilon_{zc}(r) - 1.48 \cdot 10^{-6} \text{ МПа}^{-1} \cdot p] / (0.766 - 2.6 \cdot 10^{-4} \text{ МПа}^{-1} \cdot p).$$

Контактное давление

$$p_z(r) = -E\varepsilon_{zc}(r) - 2\mu p r_1^2 / (r_2^2 - r_1^2) = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot [-\varepsilon_{zc}(r)] - 0.069p.$$

Установлено, что при

$$h_a - h_b = 0.01...0.02 \text{ мм};$$

$$p = 260 \text{ МПа};$$

$$p_{hp} = 75.5 \text{ МПа}$$

разработанный метод дал на уплотнительном пояске

$$p_z(r) = 370...410 \text{ МПа}$$

и на разгрузочном пояске

$$p_z(r) = 260...280 \text{ МПа},$$

эксперимент дал на уплотнительном пояске

$$p_z(r) = 440 \text{ МПа}$$

и на разгрузочном пояске

$$p_z(r) = 270 \text{ МПа},$$

а обычно применяемый метод деления суммарной осевой силы на номинальную площадь контакта дал на уплотнительном пояске

$$p_z(r) = 340 \text{ МПа}$$

и на разгрузочном пояске

$$p_z(r) = 340 \text{ МПа},$$

то есть одинаковые величины.

При

$$h_a - h_b = 0.02...0.03 \text{ мм}$$

на уплотнительном пояске разработанный метод, эксперимент и известный метод при

$$p = 200 \text{ МПа};$$

$$p_{hp} = 75 \text{ МПа}$$

дали соответственно

$$p_z(r) = 340...380 \text{ МПа};$$

$$p_z(r) = 430 \text{ МПа};$$

$$p_z(r) = 240 \text{ МПа};$$

при

$$p = 0;$$

$$p_{hp} = 70 \text{ МПа}$$

дали соответственно

$$p_z(r) = 420...470 \text{ МПа};$$

$$p_z(r) = 440 \text{ МПа};$$

$$p_z(r) = 320 \text{ МПа};$$

при

$$p = 160 \text{ МПа};$$

$$p_{hp} = 53 \text{ МПа}$$

дали соответственно

$$p_z(r) = 240...280 \text{ МПа};$$

$$p_z(r) = 230 \text{ МПа};$$

$$p_z(r) = 160 \text{ МПа};$$

при

$$p = 0;$$

$$p_{hp} = 50 \text{ МПа}$$

дали соответственно

$$p_z(r) = 340...380 \text{ МПа};$$

$$p_z(r) = 320 \text{ МПа};$$

$$p_z(r) = 240 \text{ МПа}.$$

Теоретически установленное расположение наибольших равносильных (эквивалентных) напряжений на внутренних краях уплотнительных поясков согласуется с инициированием пластических деформаций в этих местах при использовании сальниковых камер в поршневых компрессорах высокого давления.

Таким образом, в отличие от известного метода, разработанный метод обеспечивает инженерное решение задачи прочности для стянутого вдоль оси пакета цилиндрических деталей с уплотнительными и заниженными разгрузочными поясками и позволяет выполнить комплексную оптимизацию характеристик прочности и герметичности с рациональным выбором занижения разгрузочных поясков.

#### 4.4. Методы герметизации крупногабаритных сосудов высокого давления

Проблема герметизации сосудов высокого давления имеет определённую специфику, связанную с возможностью выдавливания эластичного уплотнительного элемента в зазор.

Поэтому для надёжной работы уплотнения требуется перекрытие этого зазора по известному принципу некомпенсированной площади [340].

Возможно размещение эластичного кольца в пазу у края внешней поверхности тонкостенного кольцевого выступа заглушки, входящего в полость корпуса (см. рис. 1.1).

При достаточной длине и тонкостенности выступа он прижимается при повышении давления к внутренней поверхности корпуса, надёжно перекрывая радиальный зазор и предотвращая выдавливание эластичного кольца.

Для рационального проектирования такого выступа достаточно приемлема известная расчётная схема короткой цилиндрической оболочки с одним закреплённым краем [320], следует лишь учесть ограничение радиального перемещения на величину наименьшего сборочного радиального зазора между выступом и корпусом, сложенную с увеличением внутреннего радиуса последнего при рабочем давлении.

Однако изготовление и сборка такой конструкции весьма затруднительны.

Поэтому удобнее применять комбинированные уплотнения.

В лаборатории прочностных исследований конструкций, работающих под давлением, ВНИИкомпрессорамаш успешно применяется последовательное размещение эластичного, цельного или разрезного фторопластового и металлического колец круглого, прямоугольного и треугольного сечений соответственно в выточке заглушки со стороны полости корпуса.

При этом металлическое кольцо надёжно перекрывает зазор, а эластичное кольцо обеспечивает первоначальное уплотнение и работает в замкнутом объёме.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 416/556

Верхний предел работоспособности такой конструкции не был достигнут при испытаниях в несколько сотен мегапаскалей.

В лаборатории прочности Сумского физико-технологического института столь же успешно применяется аксиально-подвижное комбинированное уплотнительное устройство, включающее размещённое в выточке у торца корпуса несущее металлическое кольцо с пазами для двух эластичных колец на внешней поверхности, сопряжённой с корпусом, и на торцевой поверхности, сопряжённой с заглушкой.

Эластичные кольца выступают над соответствующими поверхностями несущего кольца в степени, достаточной для первоначального уплотнения, при вертикальной ориентации оси достигаемого с использованием веса заглушки.

При увеличении рабочего давления в полости сосуда несущее кольцо малой жёсткости перекрывает радиальный зазор путём своего расширения и осевой зазор благодаря своему перемещению, в обоих случаях по принципу некомпенсированной площади.

Для более эффективного его использования пазы для эластичных колец следует максимально удалить от заглушки по боковой поверхности и приблизить к оси на поверхности торца.

В результате обеспечивается работа эластичных колец в замкнутых объёмах.

Расчёт прочности и жёсткости несущего кольца комбинированного уплотнения без труда осуществляется общими методами аналитической методологии макроэлементов с учётом трения по обеим поверхностям сопряжения.

Такое уплотнение безупречно работает в крупногабаритных сосудах диаметром полости до 1200 мм на рабочее давление 60 МПа, и ясно, что это не предел.

#### **4.5. Рациональные конструкции уплотнений разъёмных соединений, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения**

На основании анализа опыта создания неподвижных уплотнений и с учётом результатов теоретических и экспериментальных исследований их напряжённо-деформированных состояний и прочности предложены новые рациональные конструкции уплотнений разъёмных соединений, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.

Уплотнение разъёмного соединения [51] включает составной корпус, на одной части которого выполнен кольцевой паз, на другой части входящий в этот паз кольцевой выступ с вогнутой проточкой на торце для эластичного кольца (рис. 4.4, а).

При этом на стыке двух частей составного корпуса есть зазор, между боковыми поверхностями выступа и паза имеются радиальные зазоры, обе части составного корпуса соединены крепёжными элементами, а вогнутая проточка выполнена у фаски внешнего края торца выступа.

Смещение уплотнительного элемента в сторону центров поворота образующих сопрягаемых участков торцевых поверхностей выступа и паза при деформировании составного корпуса внутренним давлением уменьшает расширение осевого зазора у паза для уплотнительного элемента и предотвращает его выдавливание в этот зазор, что повышает несущую способность и надёжность уплотнения разъёмного соединения.

Уплотнение разъёмного соединения [62] включает корпус, заглушку, уплотнительные и крепёжные элементы (рис. 4.4, б).

Поперечное сечение кольцевого паза в зоне размещения уплотнительного элемента выполнено сужающимся в сторону внешней поверхности заглушки, а уплотнительный элемент установлен в пазу с возможностью осевого перемещения.

При этом поперечное сечение уплотнительного элемента может быть круглым или сужающимся в сторону внешней поверхности заглушки либо составным из трёх и более частей различных сечений.

Это улучшает условия сборки соединения, расширяет диапазон допускаемых давлений и повышает надёжность уплотнения.



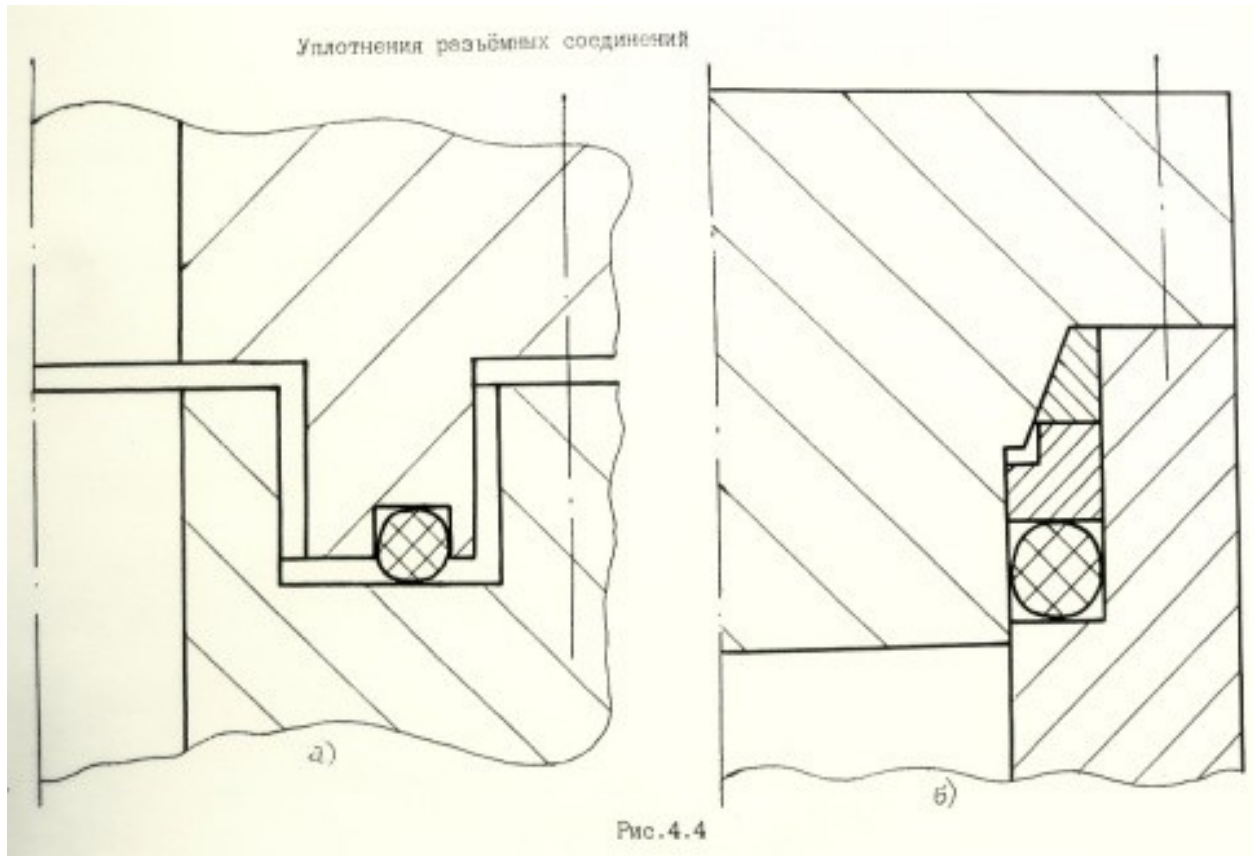


Рисунок 4.4. Уплотнения резьбных соединений.

#### 4.6. Выводы по главе 4

1. В конструкциях с пластичными уплотнениями рациональное распространение или ограничение области действия высокого давления на соответствующие участки поверхностей несущих и светопрозрачных элементов, осуществляемое перемещениями уплотнительных элементов и введением дополнительных уплотнений, приводит к существенному повышению прочности конструкций. Значительный дополнительный эффект даёт наилучшее изменение ступенчатых распределений гидростатических давлений на поверхности несущих и светопрозрачных элементов, осуществляемое изменениями системы уплотнительных элементов и мультипликаторов давления, включающих дифференциальные поршни.
2. Для предотвращения выдавливания уплотнительных элементов в расширяющиеся при высоких давлениях зазоры между несущими и светопрозрачными элементами конструкций целесообразно приближение каждого уплотнительного элемента к осям вращений, которым подвергаются при деформировании сопрягаемых элементов образующие соответствующих участков их поверхностей.
3. Повышение прочности и герметичности упругих уплотнений цилиндрических деталей, стянутых осевым усилием, достигается выполнением разгрузочных поясков, заниженных по сравнению с уплотнительными поясками. Взаимно проверены дающие одинаковые результаты общий интегральный метод аналитической методологии макроэлементов и метод последовательного применения формул Ламе к каждой ступени приближения осевой нагрузки на основания цилиндрического элемента с последующей заменой интегральных сумм соответствующими интегралами. Поставлена и решена групповая термоупругая осесимметричная контактная задача с трением. Разработан алгоритм осуществления метода неопределённых границ участков сцепления и проскальзывания контактирующих

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 418/556

поверхностей в связанной задаче определения нормальных и сдвиговых контактных напряжений. Установлено существование двух главных критических значений стягивающего осевого усилия, соответствующих при их превышениях качественным изменениям характера контактной задачи от повсеместного проскальзывания через сочетание участков проскальзывания и сцепления к повсеместному сцеплению. Каждое из остальных критических значений в промежутке между главными критическими значениями соответствует появлению нового участка сцепления и/или исчезновению участка проскальзывания. В задачах статической и усталостной прочности установлена наибольшая опасность напряжённых состояний внутренних краёв уплотнительных поясков по предложенному критерию предельных состояний с линейным учётом промежуточного главного напряжения и по общей методологии всеобщего запаса, мультипликативной и аддитивной методологиям общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных при наложениях (суперпозициях) нагрузок.

4. На основе представлений о деформировании осесимметричными нагружениями трёхмерного цилиндрического тела, полученных общими методами аналитической методологии макроэлементов, предложены новые рациональные конструкции уплотнений разъёмных соединений, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.

## **5. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗМЕРЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПРИНЦИПИАЛЬНО ТРЁХМЕРНЫХ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННЫХ СОСТОЯНИЙ И ПРОЦЕССОВ, ПРОЧНОСТИ И ТЕХНОЛОГИЧНОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ ТЕХНИКИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ С УЧЁТОМ ТРЕНИЯ, ВЗАИМНЫХ СЦЕПЛЕНИЯ И ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ И КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ**

Теория плоского напряжённого состояния составного цилиндра бесконечно малой длины и теория плоского деформированного состояния составного цилиндра бесконечно большой длины математически строго проанализированы и обобщены теориями принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных процессов составного цилиндра конечной длины при его тепловой сборке и запрессовке.

В трёхмерной осесимметричной упругой задаче без объёмных сил и кручения в цилиндрической системе координат  $r, z$  с началом на оси и срединной плоскости  $z = 0$  составного цилиндра (достаточно считать его двухслойным и наподобие индукционного шага в математической индукции сводить к последовательности задач для двухслойного цилиндра задачу при большем числе слоёв составного цилиндра отделением внешнего слоя и рассмотрением соединения остальных слоёв как единого внутреннего слоя с наложением (суперпозицией) соответствующих решений) произвольной конечной длины  $2H$  раздельному исследованию подлежат обе применяемые технологии сборки (тепловая сборка и запрессовка [228]) в общем случае различия упругих постоянных (модуля продольной упругости Юнга  $E$  и коэффициента поперечной деформации Пуассона  $\mu$ )  $E_1$  и  $\mu_1$  внутреннего слоя  $r_1 \leq r \leq r_c + \delta_c$  и  $E_2$  и  $\mu_2$  внешнего слоя  $r_c \leq r \leq r_2$  составного цилиндра конечной длины  $2H$  ( $-H \leq z \leq H$ ).

### **5.1. Теория принципиально трёхмерного напряжённо-деформированного процесса составного цилиндра конечной длины при его тепловой сборке**

При допущении повсеместного взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра после соприкосновения при тепловой сборке (для определённости предположим предварительный нагрев внешнего слоя) разность осевых деформаций внешнего  $\varepsilon_{z2}$  и внутреннего  $\varepsilon_{z1}$  слоёв равна относительному радиальному натягу  $\delta_c$ , как и в начальный момент соприкосновения (рис. 5.1, а):

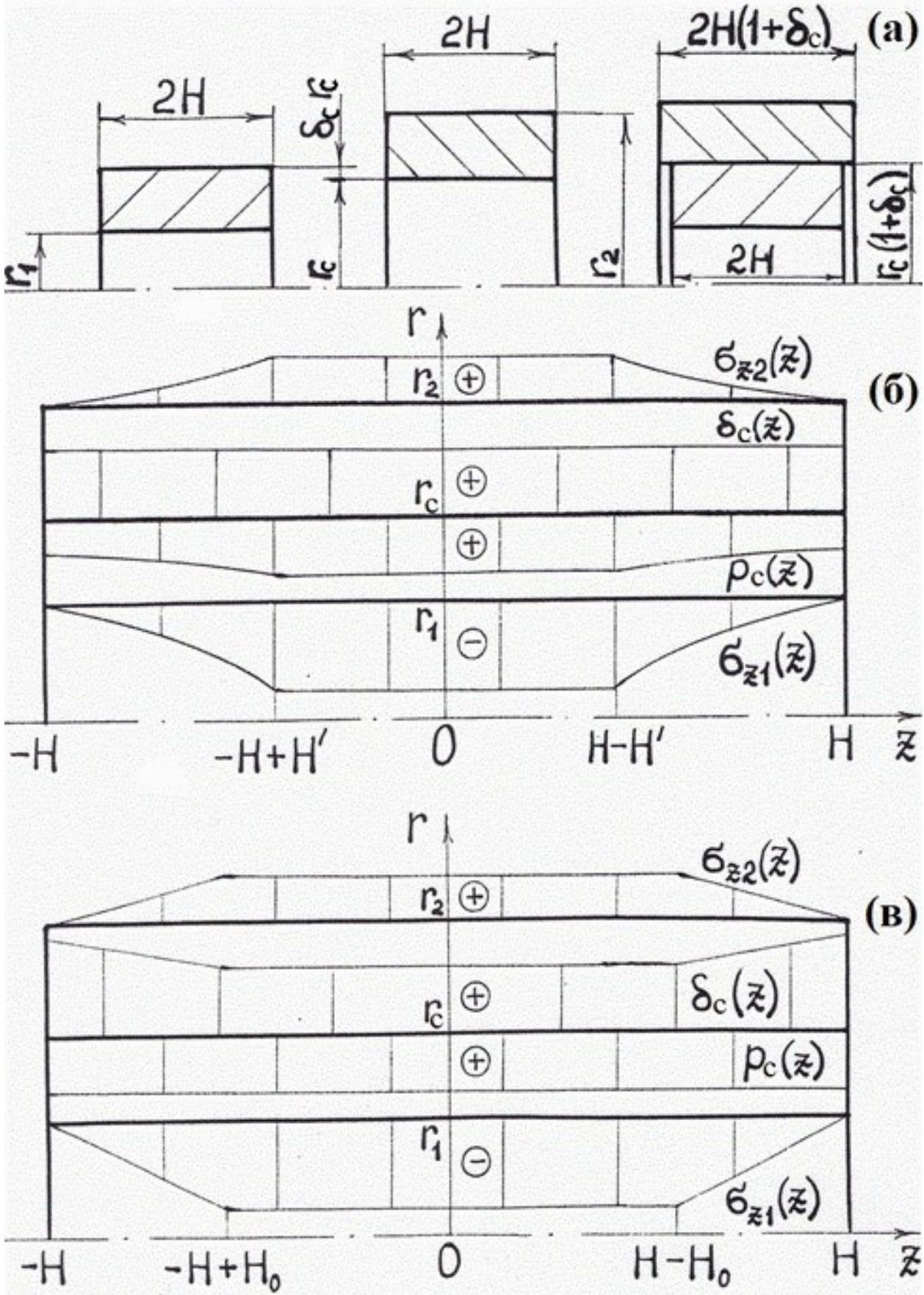


Рисунок 5.1. Схема к задаче о тепловой сборке составного цилиндра (а) и эпюры относительного натяга  $\delta_c(z)$  и сборочного контактного давления  $p_c(z)$  и осевых напряжений  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  в собранном тепловым способом составном цилиндре конечной длины при равномерном вдоль оси (б) и наилучшем (в) натягах в установившихся состояниях.

$$(5.1)$$

$$\varepsilon_{z2} - \varepsilon_{z1} = \delta_c.$$

После принятия температуры окружающей среды цилиндром сборочные контактное давление  $p_c$  и осевые напряжения во внутреннем  $\sigma_{z1}$  и внешнем  $\sigma_{z2}$  слоях определяются условием радиального сопряжения слоёв составного цилиндра

$$(5.2)$$

$$[(1 - \mu_1)E_1^{-1}r_c^2/(r_c^2 - r_1^2) + (1 + \mu_1)E_1^{-1}r_1^2/(r_c^2 - r_1^2) + (1 - \mu_2)E_2^{-1}r_c^2/(r_2^2 - r_c^2) + (1 + \mu_2)E_2^{-1}r_2^2/(r_2^2 - r_c^2)]p_c + \mu_1E_1^{-1}\sigma_{z1} - \mu_2E_2^{-1}\sigma_{z2} = \delta_c$$

и условием аннулирования суммарной осевой силы

$$(5.3)$$

$$(r_c^2 - r_1^2)\sigma_{z1} + (r_2^2 - r_c^2)\sigma_{z2} = 0.$$

Формулы Ламе (1.6) – (1.8) дают взамен известного решения А. В. Гадолина [87] с обобщением Х. Л. Пью [205], предназначенного для составного кольца длиной порядком меньше диаметра сопряжения, формулы для сборочных контактного давления

$$(5.4)$$

$$p_c = \delta_c \{1 + [\mu_2 E_1 (r_c^2 - r_1^2) + \mu_1 E_2 (r_2^2 - r_c^2)] / [E_1 (r_c^2 - r_1^2) + E_2 (r_2^2 - r_c^2)]\} \{ (1 - \mu_1) E_1^{-1} r_c^2 / (r_c^2 - r_1^2) + (1 + \mu_1) E_1^{-1} r_1^2 / (r_c^2 - r_1^2) + (1 - \mu_2) E_2^{-1} r_c^2 / (r_2^2 - r_c^2) + (1 + \mu_2) E_2^{-1} r_2^2 / (r_2^2 - r_c^2) - 2 r_c^2 [\mu_1 E_1^{-1} / (r_c^2 - r_1^2) + \mu_2 E_2^{-1} / (r_2^2 - r_c^2)] [\mu_2 E_1 (r_c^2 - r_1^2) + \mu_1 E_2 (r_2^2 - r_c^2)] / [E_1 (r_c^2 - r_1^2) + E_2 (r_2^2 - r_c^2)] \}^{-1}$$

и осевых напряжений во внутреннем и внешнем слоях

$$(5.5)$$

$$\sigma_{z1} = - \{ \delta_c + 2 p_c r_c^2 [\mu_1 E_1^{-1} / (r_c^2 - r_1^2) + \mu_2 E_2^{-1} / (r_2^2 - r_c^2)] \} / [E_1^{-1} + E_2^{-1} (r_c^2 - r_1^2) (r_2^2 - r_c^2)^{-1}],$$

$$\sigma_{z2} = \{ \delta_c + 2 p_c r_c^2 [\mu_1 E_1^{-1} / (r_c^2 - r_1^2) + \mu_2 E_2^{-1} / (r_2^2 - r_c^2)] \} / [E_1^{-1} (r_c^2 - r_1^2)^{-1} (r_2^2 - r_c^2) + E_2^{-1}].$$

При равенствах модулей продольной упругости Юнга

$$E_1 = E_2 = E$$

и коэффициентов поперечной деформации Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

материалов слоёв формулы (5.4) и (5.5) дают

$$(5.6)$$

$$p_c = (1 - \mu)^{-1} E \delta_c (r_2^2 - r_c^2) (r_c^2 - r_1^2) / [2 r_c^2 (r_2^2 - r_1^2)];$$

$$\sigma_{z1} = - 2 p_c r_c^2 / (r_c^2 - r_1^2);$$

$$\sigma_{z2} = 2 p_c r_c^2 / (r_2^2 - r_c^2)$$

взамен классической формулы (1.12) для плоского напряжённого состояния в составном кольце весьма малой длины и взамен известной формулы (1.16) для плоской деформации бесконечного цилиндра при условии

$$\varepsilon_{z1} = \varepsilon_{z2}$$

вместо (5.1). Применительно к стали ( $\mu = 0.3$ ) сборочные контактное давление  $p_c$  и модули осевых напряжений  $\sigma_{z1}$  и  $\sigma_{z2}$  занижаются формулами (1.12) и (1.16) в

$$1/(1 - \mu) \approx 1.43$$

и

$$1 + \mu = 1.3$$

раза соответственно.

Аналогично решается задача для рабочих давлений  $p_1$  изнутри и  $p_2$  извне и температурного поля, при этом в (5.1) взамен  $\delta_c$  принимается 0, а в (5.3)  $N/\pi$  вместо 0, где  $N$  – суммарное осевое усилие (громоздких формул не приводим).

Суммарные перемещения и напряжения определяются по принципу наложения (суперпозиции).

Это завершает решение задачи для составного цилиндра условно бесконечной длины с повсеместным взаимным осевым сцеплением слоёв – другого предельного случая по отношению к классическому предельному случаю составного кольца весьма малой длины, в котором при любом способе сборки повсеместно взаимное осевое проскальзывание слоёв и повсеместно, как и на торцах, тождественно обнуляются осевые напряжения в слоях составного цилиндра:  $\sigma_{z1}(z) = \sigma_{z2}(z) = 0$ .

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 421/556

Однако действительный составной цилиндр имеет конечную длину  $2H$  одного порядка с диаметром сопряжения  $2r_c$ , а практика использования однозначно указывает на инициирование пластических деформаций и разрушения вблизи торцов составного цилиндра.

Поэтому необходимо поставить и решить задачу о сборочных напряжениях в составном цилиндре именно конечной длины с аннулированием  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  лишь на торцах.

По принципу допустимой простоты с учётом известных и полученных решений для составных цилиндров примем  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  произвольными чётными функциями одной лишь переменной  $z$ , аннулирующимися на торцах.

После завершения взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль поверхности их сопряжения суммарная осевая сила в произвольном сечении  $z$  (см. рис. 5.1, а) внешнего слоя не превышает максимально возможной силы трения на участке поверхности сопряжения

$$z \leq z' \leq H \text{ (при } 0 \leq z \leq H)$$

или

$$-H \leq z' \leq z \text{ (при } -H \leq z \leq 0).$$

Отсюда следует торцевое ограничение величины осевого напряжения внешнего слоя

$$(5.7) \quad \sigma_{z2}(z) \leq 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} \int_{|z|}^H p_c(z') dz'.$$

Для выяснения возможности наличия срединного участка взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения и осуществимости формул (5.5) в средних сечениях составного цилиндра (рис. 5.1, б)

$$|z| \leq H - H'$$

учтём совпадение при

$$|z| = H - H'$$

правых частей формул (5.5) и (5.7):

$$(5.8) \quad 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} \int_{H-H'}^H p_c(z') dz' = \{ \delta_c + 2p_c r_c^2 [\mu_1 E_1^{-1} / (r_c^2 - r_1^2) + \mu_2 E_2^{-1} / (r_2^2 - r_c^2)] \} / [E_1^{-1} (r_c^2 - r_1^2)^{-1} (r_2^2 - r_c^2) + E_2^{-1}].$$

Если  $H \leq H'$ , то при любом  $z$  осевое напряжение  $\sigma_{z2}(z)$  не только не больше, но и не меньше правой части формулы (5.7), так как при отсутствии взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения осевое напряжение  $\sigma_{z2}(z)$  было бы не меньше правой части формулы (5.7). Поэтому взаимное осевое проскальзывание слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения повсеместно, всюду имеет место именно равенство

$$(5.9) \quad \sigma_{z2}(z) = 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} \int_{|z|}^H p_c(z') dz',$$

и по условию аннулирования суммарной осевой силы (5.3)

$$(5.10) \quad \sigma_{z1}(z) = -2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} \int_{|z|}^H p_c(z') dz',$$

причём формула (5.10) аналогично формуле (5.9) приводит к тому же условию (5.8) и так же вытекает из формулы для предельного усилия по условиям трения.

Если же

$$H > H',$$

то осевые напряжения  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  определяются формулами (5.5) на срединном участке

$$|z| \leq H - H' \text{ (} H - H' > 0)$$

взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения и формулами (5.10) и (5.9) на торцевых участках

$$H - H' \leq |z| \leq H$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения.

Для определения чётной функции  $p_c(z)$ , равной  $p_c$  по формуле (5.4) на срединном участке

$$|z| \leq H - H'$$

взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения, на торцевых участках

$$H - H' \leq |z| \leq H$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения достаточно ввиду симметрии торцевых участков относительно равноудалённой от торцевых плоскостей срединной плоскости

$$z = 0$$

составного цилиндра ограничиться правым торцевым участком

$$H - H' \leq z \leq H.$$

Подстановка формул (5.9) и (5.10) в формулу (5.2) даёт для контактного давления  $p_c(z)$  интегральное уравнение

$$(5.11)$$

$$A_c p_c(z) - B_c \int_{|z|}^H p_c(z') dz' = \delta_c,$$

где

$$(5.12)$$

$$A_c = [(1 - \mu_1)r_c^2 + (1 + \mu_1)r_1^2]/[E_1(r_c^2 - r_1^2)] + [(1 - \mu_2)r_c^2 + (1 + \mu_2)r_2^2]/[E_2(r_2^2 - r_c^2)],$$

$$(5.13)$$

$$B_c = 2k_0 r_c \{ \mu_1/[E_1(r_c^2 - r_1^2)] + \mu_2/[E_2(r_2^2 - r_c^2)] \}.$$

Его дифференцирование по  $z$  и подстановка решения дифференциального уравнения в формулу (5.11) окончательно даёт

$$(5.14)$$

$$p_c(z) = (\delta_c/A_c) \exp[(B_c/A_c)(H - |z|)]$$

на торцевых участках

$$H - H' \leq |z| \leq H$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения.

Подстановкой формулы (5.14) в формулу (5.8) находим

$$(5.15)$$

$$H' = \{ E_1(r_c^2 - r_1^2)[(1 - \mu_2)r_c^2 + (1 + \mu_2)r_2^2] + E_2(r_2^2 - r_c^2)[(1 - \mu_1)r_c^2 + (1 + \mu_1)r_1^2] \} / \{ 2k_0 r_c [\mu_2 E_1(r_c^2 - r_1^2) + \mu_1 E_2(r_2^2 - r_c^2)] \} \ln \{ [(1 + \mu_2)E_1(r_c^2 - r_1^2) + (1 + \mu_1)E_2(r_2^2 - r_c^2)] / [E_1(r_c^2 - r_1^2) + E_2(r_2^2 - r_c^2)] + 2r_c^2 [\mu_2 E_1(r_c^2 - r_1^2) + \mu_1 E_2(r_2^2 - r_c^2)]^2 / [E_1(r_c^2 - r_1^2) + E_2(r_2^2 - r_c^2)]^2 \} \{ [(1 + \mu_2)E_1(r_c^2 - r_1^2) + (1 + \mu_1)E_2(r_2^2 - r_c^2)] / [E_1(r_c^2 - r_1^2) + E_2(r_2^2 - r_c^2)] [E_1(r_c^2 - r_1^2)(r_c^2 + r_2^2) + E_2(r_2^2 - r_c^2)(r_c^2 + r_1^2) + (\mu_2 E_1 - \mu_1 E_2)(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)] - 2r_c^2 [\mu_2 E_1(r_c^2 - r_1^2) + \mu_1 E_2(r_2^2 - r_c^2)]^2 \} \}.$$

В простейшем и важнейшем частном случае равенств модулей продольной упругости Юнга

$$E_1 = E_2 = E$$

и коэффициентов поперечной деформации Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

материалов слоёв составного цилиндра формула (5.15) даёт

$$(5.16)$$

$$H' = [r_c/(k_0 \mu)] \ln(1 - \mu)^{-1}.$$

Это половина критической длины составного цилиндра, при превышении которой у срединной плоскости

$$z = 0$$

появляется имеющий именно строго положительную длину  $2(H - H')$  участок

$$|z| \leq H - H'$$

взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения с напряжениями, равными таковым в составном цилиндре бесконечной длины.

В любом случае на торцевых участках

$$H - H' \leq |z| \leq H$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения осевые напряжения

$$(5.17)$$

$$\sigma_{z1}(z) = -2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} (\delta_c / B_c) \{ \exp[(B_c / A_c)(H - |z|)] - 1 \};$$

$$(5.18)$$

$$\sigma_{z2}(z) = 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} (\delta_c / B_c) \{ \exp[(B_c / A_c)(H - |z|)] - 1 \}.$$

Если

$$H \leq H',$$

то срединный участок взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения имеет именно нулевую длину как толщину окружности пересечения равноудалённой от торцевых плоскостей цилиндра срединной плоскости

$$z = 0$$

и цилиндрической поверхности сопряжения слоёв составного цилиндра ввиду симметрии относительно срединной плоскости, взаимное осевое проскальзывание слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения повсеместно и приемлемы формулы (5.12) – (5.18), а при дальнейшем уменьшении длины  $2H$  эпюры  $p_c(z)$ ,  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  сохраняются у торцов и теряют части у срединной плоскости

$$z = 0.$$

Если составной цилиндр нагружен внутренним давлением  $p$ , которое только увеличивает контактное давление и новых проскальзываний не происходит, то расчёты показывают, что при действительных соотношениях между  $p$  и  $p_c(z)$  осевые напряжения  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  являются промежуточными главными напряжениями  $\sigma_2$  и не влияют на равносильные (эквивалентные) напряжения слоёв составного цилиндра по третьей теории прочности, открывающей поэтому путь к получению универсальных результатов в этой задаче.

Однако лишь на торцах

$$|z| = H$$

составного цилиндра конечной длины осуществляется такое же напряжённое состояние, как плоское в классическом составном кольце относительно малой длины, для которого Х. Л. Пью [205] обобщил (1.13') условия наилучшей сборки (1.13) по А. В. Гадолину [87].

Для равнопрочности составного цилиндра по длине необходимо и достаточно условие

$$(5.19)$$

$$p_c(z) = p_c = \text{constant}.$$

Подстановка формулы (5.19) в формулу (5.11) даёт (рис. 5.1, в)

$$(5.20)$$

$$\delta_c(z) = (A_c - B_c H + B_c |z|) p_c$$

при

$$H - H_0 \leq |z| \leq H,$$

где  $H_0$ , не обязанное совпадать с  $H'$  ввиду замены  $p_c(z)$  на

$$p_c = \text{constant},$$

определяется приравнованием правой части формулы (5.20) и  $\delta_c$ , откуда

$$(5.21)$$

$$H_0 = A_c / B_c - \delta_c / (B_c p_c).$$

Таким образом, наилучший натяг является равномерным на срединном участке

$$|z| \leq H - H_0$$

взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения и линейно увеличивается к торцам на торцевых участках

$$H - H_0 \leq |z| \leq H$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 424/556

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения.

Величина  $H_0$  – половина другой критической длины составного цилиндра, превышение которой приводит к появлению срединного участка взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения с равномерным наилучшим натягом.

При этом на торцевых участках

$$H - H_0 \leq |z| \leq H$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения согласно формулам (5.9) и (5.10) с учётом формулы (5.19)

(5.22)

$$\sigma_{z1}(z) = -2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} p_c (H - |z|);$$

(5.23)

$$\sigma_{z2}(z) = 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} p_c (H - |z|).$$

И вновь уменьшение длины

$$2H \leq 2H_0$$

собранный тепловым способом составного цилиндра приводит к выпадению срединного участка взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения и далее к сокращению торцевых участков взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения именно от срединной плоскости  $z = 0$  составного цилиндра, так что все значения на его торцах сохраняются и соответствуют классическому плоскому напряжённому состоянию составного кольца относительно малой длины.

В простейшем и важнейшем частном случае равенств модулей продольной упругости Юнга

$$E_1 = E_2 = E$$

и коэффициентов поперечной деформации Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

материалов слоёв составного цилиндра

и при равномерном натяге

$$\delta_c(z) = \delta_c = \text{constant}$$

по всей длине

на срединном участке взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения

$$|z| \leq H - [r_c / (k_0 \mu)] \ln(1 - \mu)^{-1}$$

радиальные  $\sigma_r(r, z)$  и окружные  $\sigma_\theta(r, z)$  напряжения определяются через формулу (5.6) формулами Ламе [358], а осевые напряжения составляют

$$\sigma_{z1}(z) = -2r_c^2 (r_c^2 - r_1^2)^{-1} p_c$$

и (при выполнении уравнений равновесия и совместности (2.101–104) и граничных условий)

$$\sigma_{z2}(z) = 2r_c^2 (r_2^2 - r_c^2)^{-1} p_c.$$

На торцевых участках

$$H - [r_c / (k_0 \mu)] \ln(1 - \mu)^{-1} \leq |z| \leq H$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения экспоненциальны контактное давление (рис. 5.1, б)

$$p_c(z) = (1 - \mu) p_c \exp[k_0 \mu r_c^{-1} (H - |z|)],$$

определяемые в первом (и достаточном ввиду небольшой нелинейности контактного давления  $p_c(z)$ ) приближении радиальные  $\sigma_r(r, z)$  и окружные  $\sigma_\theta(r, z)$  напряжения с возможностью уточнения общим интегральным методом аналитической методологии макроэлементов, а также осевые напряжения

$$\sigma_{z1}(z) = -2(1/\mu - 1)r_c^2 (r_c^2 - r_1^2)^{-1} p_c \{ \exp[k_0 \mu r_c^{-1} (H - |z|)] - 1 \}$$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 425/556

и (при нарушениях лишь (2.102) и (2.104), пропорциональных  $k_0$  и  $k_0^2 \mu^2$  соответственно)

$$\sigma_{z2}(z) = 2(1/\mu - 1)r_c^2(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_c \{ \exp[k_0 \mu r_c^{-1}(H - |z|)] - 1 \}.$$

Наилучшее по длине распределение относительного натяга (см. рис. 5.1, в)

$$(5.24)$$

$$\delta_c(z) = \delta_c, 0 \leq |z| \leq H - r_c/k_0;$$

$$\delta_c(z) = (1 - \mu)^{-1} \delta_c [1 - k_0 \mu r_c^{-1}(H - |z|)], H - r_c/k_0 \leq |z| \leq H,$$

где учтено

$$H_0 = r_c/k_0,$$

причём

$$H_0 < H' = r_c k_0^{-1} \mu^{-1} \ln(1 - \mu)^{-1}.$$

Радиальные  $\sigma_r(r, z)$  и окружные  $\sigma_\theta(r, z)$  напряжения определяются формулами Ламе [358], осевые напряжения  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  на торцевых участках

$$H - r_c/k_0 \leq |z| \leq H$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения определяются формулами (5.22) и (5.23), а на срединном участке взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения

$$|z| \leq H - r_c/k_0$$

равномерны:

$$\sigma_{z1}(z) = -2r_c^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}p_c$$

и (с нарушением лишь уравнения (2.102) при проскальзывании, пропорциональным  $k_0$ )

$$\sigma_{z2}(z) = 2r_c^2(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_c.$$

Формулы Ламе [358] показывают, что при наличии внутреннего давления  $p$  условие

$$\sigma_z(z) = \sigma_2$$

промежуточности осевого напряжения как второго главного напряжения, поэтому не учитываемого третьей теорией прочности, может нарушиться только при неравенстве

$$\sigma_{z1}(z) < -p.$$

Последнее неравенство при наилучших радиусе сопряжения

$$r_c = (r_1 r_2)^{1/2}$$

и сборочном контактом давлением (1.13)

$$p_c = (1/2)p(r_2 - r_1)/(r_1 + r_2)$$

приводится к невозможному неравенству

$$r_1 + r_2 < r_2.$$

Поэтому при условии такой оптимизации натяга составной цилиндр при внутреннем давлении  $p$  равнопрочен по длине и задача его оптимизации сводится к определению наилучших радиуса сопряжения и сборочного контактного давления по задаче А. В. Гадолина [87] для плоского напряжённого состояния составного кольца (1.13) с последующим нахождением наилучшего по длине распределения радиального натяга согласно формулам (5.24) решаемой задачи для трёхмерного составного цилиндра конечной длины:

$$\delta_c(z) = (1 - \mu)p/E, 0 \leq |z| \leq H - r_c/k_0;$$

$$\delta_c(z) = [1 - k_0 \mu r_c^{-1}(H - |z|)]p/E, H - r_c/k_0 \leq |z| \leq H.$$

## 5.2. Теория принципиально трёхмерного напряжённо-деформированного процесса составного цилиндра конечной длины при его запрессовке

Если взамен тепловой сборки составного цилиндра используется технология запрессовки [228] (рис. 5.2, 5.3), в момент окончания которой можно принять

$$\sigma_{z1}(-H) = -p_z,$$

$$\sigma_{z2}(H) = -p_z(r_c^2 - r_1^2)/(r_2^2 - r_c^2),$$

то приходится решать уже не одну, а две задачи, – вторую задачу для момента завершения взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения (после сброса усилий запрессовки).

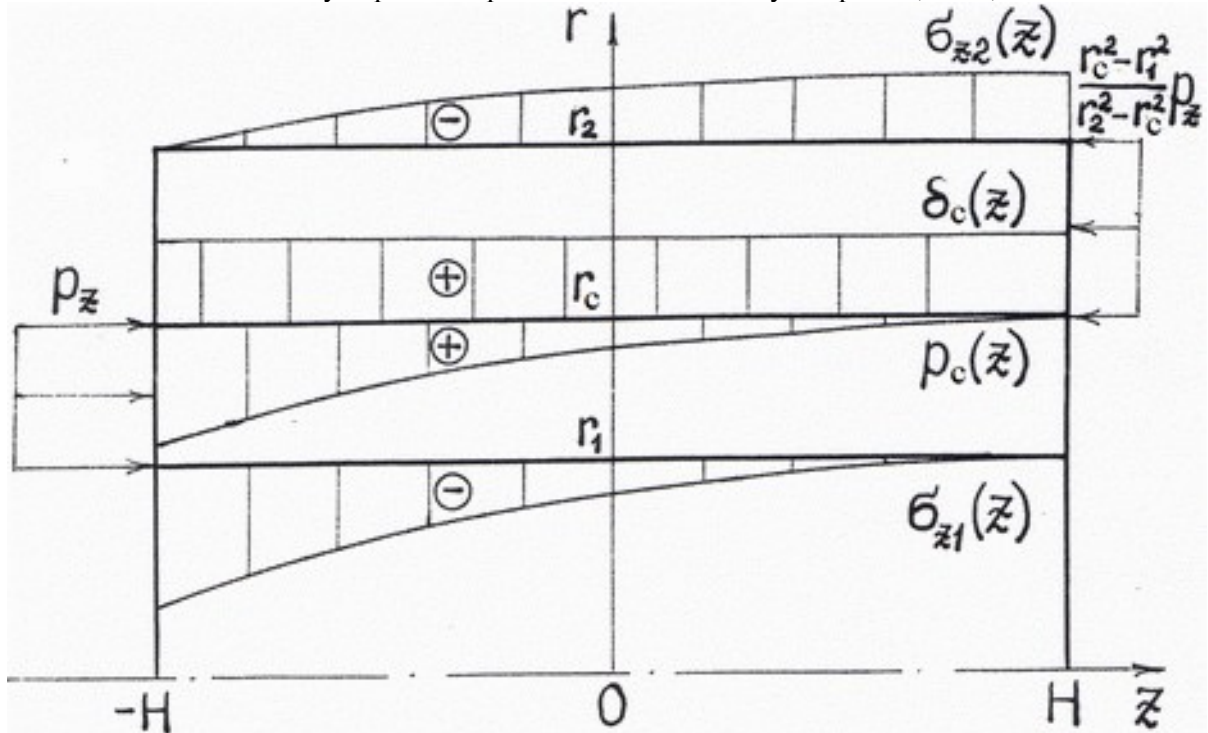


Рисунок 5.2. Эпюры относительного натяга  $\delta_c(z)$  и сборочных контактного давления  $p_c(z)$  и осевых напряжений  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  в слоях собранного запрессовкой составного цилиндра конечной длины с равномерным вдоль оси натягом при наибольшем усилии запрессовки в установившемся состоянии.

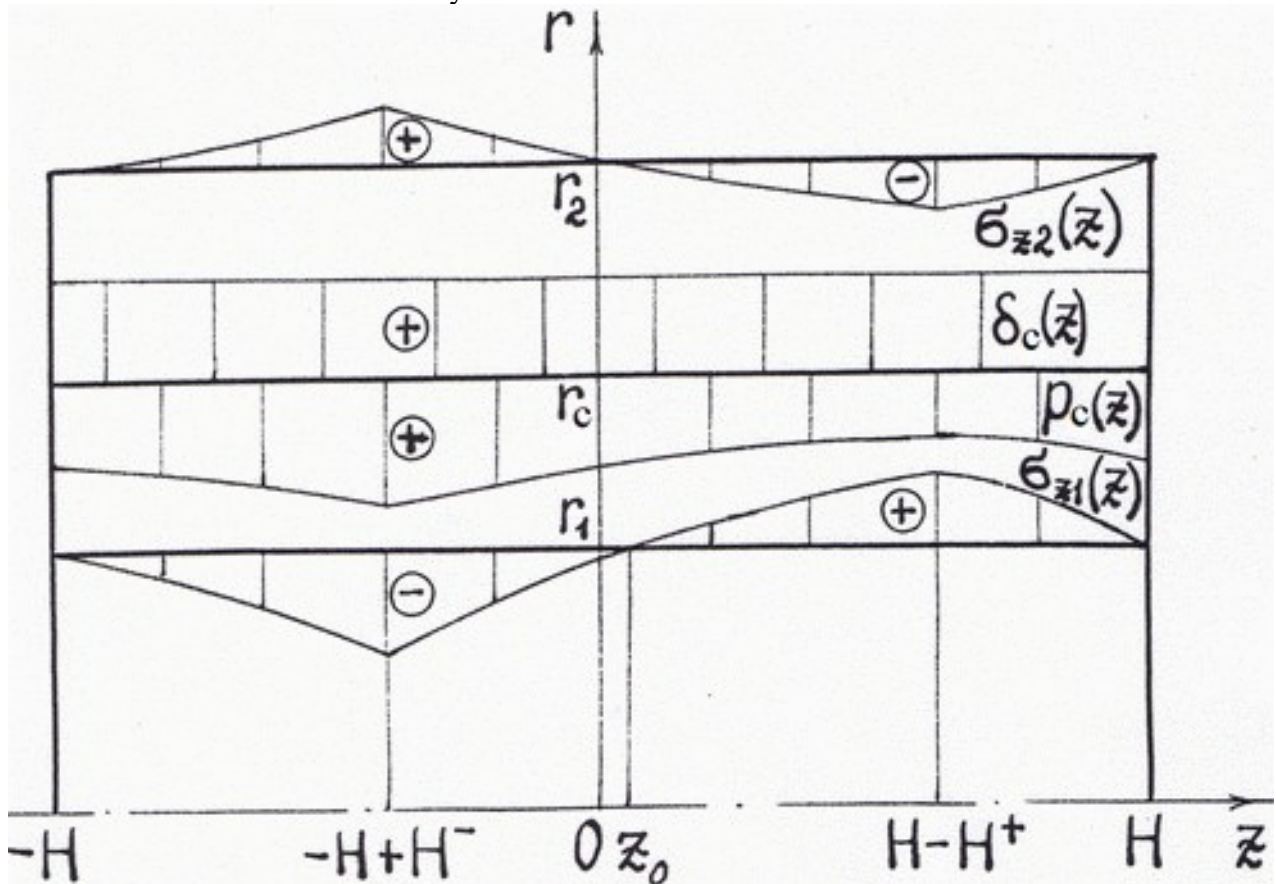


Рисунок 5.3. Эпюры относительного натяга  $\delta_c(z)$  и сборочных контактного давления  $p_c(z)$  и осевых напряжений  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  в слоях собранного запрессовкой составного цилиндра конечной длины с равномерным вдоль оси натягом после сброса усилия запрессовки в установившемся состоянии.

Первая задача о запрессовке составного цилиндра

Первая задача о запрессовке составного цилиндра посвящена исследованию напряжённо-деформированного состояния его слоёв при наибольших усилиях запрессовки в момент её окончания (см. рис. 5.2).

Считаем контактное давление  $p_c(z)$  произвольной интегрируемой функцией, а сдвиговое напряжение на поверхности сопряжения слоёв полагаем равным  $k_0 p_c(z)$  по закону Кулона-Амонтона.

Тогда методом сечения цилиндра произвольной плоскостью

$$z = \text{constant}$$

устанавливаем соотношения

$$(5.25)$$

$$\sigma_{z1}(z) = -p_z + 2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} \int_{-H}^z p_c(z') dz';$$

$$(5.26)$$

$$\sigma_{z2}(z) = -p_z (r_c^2 - r_1^2) / (r_2^2 - r_c^2) + 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} \int_z^H p_c(z') dz'$$

с нормирующим условием

$$(5.27)$$

$$\int_{-H}^H p_c(z) dz = (2k_0 r_c)^{-1} (r_c^2 - r_1^2) p_z.$$

Подстановка (5.25) и (5.26) в (5.2) даёт взамен (5.11) интегральное уравнение

$$(5.28)$$

$$A_c p_c(z) + B_c \int_{-H}^z p_c(z') dz' = \delta_c + \mu_1 p_z / E_1.$$

Решение этого интегрального уравнения

$$(5.29)$$

$$p_c(z) = A_c^{-1} (\delta_c + \mu_1 p_z / E_1) \exp[-(B_c / A_c)(H + z)].$$

Подстановка формулы (5.29) в формулу (5.27) даёт

$$(5.30)$$

$$p_z = \delta_c [\exp(2B_c H / A_c) - 1] / [\mu_1 / E_1 + \mu_2 E_2^{-1} (r_c^2 - r_1^2) (r_2^2 - r_c^2)^{-1} \exp(2B_c H / A_c)]$$

и усилие запрессовки

$$Q = \pi (r_c^2 - r_1^2) p_z,$$

при

$$\delta_c(z) = \delta_c = \text{constant}$$

имеющее вопреки типичным представлениям [228] конечный предел при  $H \rightarrow \infty$ .

Это обусловлено пуассоновым поперечным эффектом осевых напряжений в слоях, но имеет лишь теоретическое значение, так как на деле показатель  $2B_c H / A_c$  составляет доли единицы.

Однако пропорциональность  $Q$  и  $H$  имеет место лишь для кольца с

$$H \ll r_c.$$

Формула (5.28) с учётом формулы (5.29) и обозначения

$$(5.31)$$

$$C_c = [1 + \mu_1^{-1} E_1 \mu_2 E_2^{-1} (r_c^2 - r_1^2) (r_2^2 - r_c^2)^{-1} \exp(2B_c H / A_c)] / [1 + \mu_1^{-1} E_1 \mu_2 E_2^{-1} (r_c^2 - r_1^2) (r_2^2 - r_c^2)^{-1}]$$

принимает вид

$$(5.32)$$

$$p_c(z) = \delta_c A_c^{-1} C_c^{-1} \exp[(B_c / A_c)(H - z)].$$

Формулы (5.25) и (5.26) дают

$$(5.33)$$

$$\sigma_{z1}(z) = 2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} \delta_c B_c^{-1} C_c^{-1} \{1 - \exp[(B_c / A_c)(H - z)]\};$$

$$(5.34)$$

$$\sigma_{z2}(z) = 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} \delta_c B_c^{-1} C_c^{-1} \{\exp[(B_c / A_c)(H - z)] - \exp(2B_c H / A_c)\}.$$

Формула (5.30) с учётом формулы (5.31) даёт

$$(5.35)$$

$$p_z = 2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} \delta_c B_c^{-1} C_c^{-1} [\exp(2B_c H / A_c) - 1].$$

Радиальные  $\sigma_r(r, z)$  и окружные  $\sigma_\theta(r, z)$  напряжения определяются формулами Ламе [358].

Анализ большого числа известных и полученных общими (полу)степенным и интегральным аналитическими методами макроэлементов решений трёхмерных задач для цилиндрических

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 428/556

тел при осесимметричных нагружениях без объёмных сил и кручения показал, что для инженерной точности этих формул необходимы и в совокупности достаточны два условия: отсутствие существенной неплоскостности первоначально плоских поперечных сечений и плавность радиальных нагрузок, допускающих линейные приближения на участках длины порядка радиуса соответствующей поверхности.

Эти условия выполнены в решаемой задаче.

В простейшем и важнейшем частном случае равенств модулей продольной упругости Юнга

$$E_1 = E_2 = E$$

и коэффициентов поперечной деформации Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

материалов слоёв составного цилиндра

при наибольших усилиях запрессовки полученные формулы принимают вид:

$$\begin{aligned} p_z &= \mu^{-1} E \delta_c (r_2^2 - r_c^2) [\exp(2k_0 \mu H / r_c) - 1] / [(r_c^2 - r_1^2) \exp(2k_0 \mu H / r_c) + r_2^2 - r_c^2]; \\ Q &= \pi \mu^{-1} E \delta_c (r_2^2 - r_c^2) (r_c^2 - r_1^2) [\exp(2k_0 \mu H / r_c) - 1] / [(r_c^2 - r_1^2) \exp(2k_0 \mu H / r_c) + r_2^2 - r_c^2]; \\ p_c(z) &= (1/2) E \delta_c r_c^{-2} (r_2^2 - r_c^2) (r_c^2 - r_1^2) [\exp(2k_0 \mu H / r_c) - 1] / [(r_c^2 - r_1^2) \exp(2k_0 \mu H / r_c) + r_2^2 - r_c^2]; \\ \sigma_{z1}(z) &= \mu^{-1} E \delta_c (r_2^2 - r_c^2) \{1 - \exp[k_0 \mu (H - z) / r_c]\} / [(r_c^2 - r_1^2) \exp(2k_0 \mu H / r_c) + r_2^2 - r_c^2]; \\ \sigma_{z2}(z) &= \mu^{-1} E \delta_c (r_c^2 - r_1^2) \{\exp[k_0 \mu (H - z) / r_c] - \exp(2k_0 \mu H / r_c)\} / [(r_c^2 - r_1^2) \exp(2k_0 \mu H / r_c) + r_2^2 - r_c^2]. \end{aligned}$$

Характерные эпюры (см. рис. 5.2) показывают, что при

$$\delta_c(z) = \delta_c = \text{constant}$$

экспонента  $p_c(z)$  допускает кусочно-линейное приближение, что подтверждает применимость формул Ламе [358] для определения радиальных  $\sigma_r(r, z)$  и окружных  $\sigma_\theta(r, z)$  напряжений.

#### Вторая задача о запрессовке составного цилиндра

Вторая задача о запрессовке составного цилиндра относится к его напряжённно-деформированному состоянию после квазистатического сброса (см. рис. 5.3) усилий запрессовки, то есть давления  $p_z$  и давления, уравновешивающего давление  $p_z$ , с соответствующим деформированием и взаимным осевым проскальзыванием слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения.

Деформирование и взаимное осевое проскальзывание слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения неминуемы на обоих торцевых участках у первоначально сжатых торцов каждого из слоёв составного цилиндра, что посредством трения приводит к растяжению сопряжённой части другого слоя.

На правом торцевом участке

$$H - H^+ \leq z \leq H$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения (см. рис. 5.3) аналогично формулам (5.9) и (5.10) с учётом знаков осевых напряжений

(5.36)

$$\begin{aligned} \sigma_{z1}(z) &= 2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} \int_z^H p_c(z') dz'; \\ \sigma_{z2}(z) &= -2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} \int_z^H p_c(z') dz'; \\ A_c p_c(z) + B_c \int_z^H p_c(z') dz' &= \delta_c; \\ p_c(z) &= \delta_c A_c^{-1} \exp[(B_c/A_c)(z - H)]; \\ \sigma_{z1}(z) &= 2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} (\delta_c/B_c) \{1 - \exp[(B_c/A_c)(z - H)]\}; \\ \sigma_{z2}(z) &= -2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} (\delta_c/B_c) \{1 - \exp[(B_c/A_c)(z - H)]\}. \end{aligned}$$

На левом торцевом участке

$$-H \leq z \leq -H + H^-$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения (нет оснований для априорного отождествления  $H^+$  и  $H^-$ ) аналогично

(5.37)

$$\begin{aligned} \sigma_{z1}(z) &= -2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} \int_{-H}^z p_c(z') dz'; \\ \sigma_{z2}(z) &= 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} \int_{-H}^z p_c(z') dz'; \\ A_c p_c(z) - B_c \int_{-H}^z p_c(z') dz' &= \delta_c; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_c(z) &= \delta_c A_c^{-1} \exp[(B_c/A_c)(z + H)]; \\ \sigma_{z1}(z) &= -2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} (\delta_c/B_c) \{ \exp[(B_c/A_c)(z + H)] - 1 \}; \\ \sigma_{z2}(z) &= 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} (\delta_c/B_c) \{ \exp[(B_c/A_c)(z + H)] - 1 \}. \end{aligned}$$

Экспоненциальный характер возрастания модулей осевых напряжений от торцов в направлениях к срединной плоскости  $z = 0$  составного цилиндра показывает, что между этими обоими торцевыми участками взаимного осевого проскальзывания слоёв есть ещё и промежуточный участок

$$-H + H^- \leq z \leq H - H^+$$

взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения, на котором слои составного цилиндра после сброса усилий запрессовки деформируются согласованно, – приращения соответствующих компонентов по сравнению с таковыми, определёнными решением первой задачи о запрессовке составного цилиндра, связаны условиями

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{z1}(z) &= \Delta \varepsilon_{z2}(z); \\ \Delta \delta_c &= 0; \\ [\sigma_{z1}(z) + \Delta \sigma_{z1}(z)](r_c^2 - r_1^2) + [\sigma_{z2}(z) + \Delta \sigma_{z2}(z)](r_2^2 - r_c^2) &= 0. \end{aligned}$$

При обозначениях

$$(5.38)$$

$$\begin{aligned} D_c &= 2k_0 r_c \delta_c B_c^{-1} C_c^{-1} [\exp(2B_c H/A_c) - 1]; \\ E_c &= [E_1(r_c^2 - r_1^2) + E_2(r_2^2 - r_c^2)] A_c - [\mu_2 E_1(r_c^2 - r_1^2) + \mu_1 E_2(r_2^2 - r_c^2)] B_c r_c / k_0 \end{aligned}$$

получаем

$$(5.39)$$

$$\begin{aligned} p_c(z) &= (\mu_2 - \mu_1) D_c / E_c + \delta_c A_c^{-1} C_c^{-1} \exp[(B_c/A_c)(H - z)]; \\ \sigma_{z1}(z) &= (A_c - \mu_2 B_c r_c / k_0) E_1 D_c / E_c + 2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} \delta_c B_c^{-1} C_c^{-1} \{ 1 - \exp[(B_c/A_c)(H - z)] \}; \\ \sigma_{z2}(z) &= (A_c - \mu_1 B_c r_c / k_0) E_2 D_c / E_c + 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} \delta_c B_c^{-1} C_c^{-1} \{ \exp[(B_c/A_c)(H - z)] - \exp(2B_c H/A_c) \}. \end{aligned}$$

Приравнивание правых частей формул (5.39) поочерёдно правым частям формул (5.36) и (5.37) при совпадении левых частей формул и при обозначении

$$(5.40)$$

$$M = (\mu_2 - \mu_1) A_c C_c D_c E_c^{-1} \delta_c^{-1}$$

приводит к квадратным уравнениям относительно  $\exp(B_c H^+ / A_c)$  и  $\exp(B_c H^- / A_c)$  соответственно с единственными положительными корнями, откуда

$$\begin{aligned} H^+ &= A_c B_c^{-1} \ln[-M/2 + (M^2/4 + C_c)^{1/2}]; \\ H^- &= A_c B_c^{-1} \ln\{ (1/2) M C_c^{-1} + [(1/4) M^2 C_c^{-2} + C_c^{-1} \exp(2B_c H/A_c)]^{1/2} \}. \end{aligned}$$

При необходимом и достаточном условии равенства коэффициентов поперечной деформации Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

безотносительно соотношения между модулями продольной упругости Юнга  $E_1$  и  $E_2$  материалов слоёв составного цилиндра

$$\begin{aligned} M &= 0; \\ H^+ &= (1/2) A_c B_c^{-1} \ln C_c; \\ H^- &= H - (1/2) A_c B_c^{-1} \ln C_c = H - H^+, \end{aligned}$$

то есть критической длины запрессованного составного цилиндра не существует и при любой его длине промежуточный участок взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения составляет ровно половину длины составного цилиндра, вообще говоря, смещённую относительно срединной плоскости  $z = 0$  составного цилиндра.

При равенствах модулей продольной упругости Юнга

$$E_1 = E_2 = E$$

и коэффициентов поперечной деформации Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

материалов слоёв составного цилиндра получаем

$$H^- = H - (1/2) r_c k_0^{-1} \mu^{-1} \ln \{ [ (r_c^2 - r_1^2) \exp(2k_0 \mu H / r_c) + r_2^2 - r_c^2 ] / (r_2^2 - r_1^2) \};$$

$$H^+ = (1/2)r_c k_0^{-1} \mu^{-1} \ln \{ [(r_c^2 - r_1^2) \exp(2k_0 \mu H / r_c) + r_2^2 - r_c^2] / (r_2^2 - r_1^2) \},$$

причём

$$\begin{aligned} H^- + H^+ &= H; \\ 0 < H^- < H; \\ 0 < H^+ < H; \\ \lim H^- &= H \quad (r_c \rightarrow r_1); \\ \lim H^- &= 0 \quad (r_c \rightarrow r_2); \\ \lim H^+ &= 0 \quad (r_c \rightarrow r_1); \\ \lim H^+ &= H \quad (r_c \rightarrow r_2); \end{aligned}$$

на левом участке

$$-H \leq z \leq -H + H^-$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв получаем

$$\begin{aligned} p_c(z) &= (1/2) E \delta_c r_c^{-2} (r_2^2 - r_c^2) (r_c^2 - r_1^2) (r_2^2 - r_1^2)^{-1} \exp[k_0 \mu r_c^{-1} (H + z)]; \\ \sigma_{z1}(z) &= -\mu^{-1} E \delta_c (r_2^2 - r_c^2) (r_2^2 - r_1^2)^{-1} \{ \exp[k_0 \mu r_c^{-1} (H + z)] - 1 \}; \\ \sigma_{z2}(z) &= \mu^{-1} E \delta_c (r_c^2 - r_1^2) (r_2^2 - r_1^2)^{-1} \{ \exp[k_0 \mu r_c^{-1} (H + z)] - 1 \}; \end{aligned}$$

на промежуточном участке

$$-H + H^- \leq z \leq H - H^+$$

взаимного осевого сцепления слоёв получаем

$$\begin{aligned} p_c(z) &= (1/2) E \delta_c r_c^{-2} (r_2^2 - r_c^2) (r_c^2 - r_1^2) [(r_c^2 - r_1^2) \exp(2k_0 \mu H / r_c) + r_2^2 - r_c^2]^{-1} \exp[k_0 \mu r_c^{-1} (H - z)]; \\ \sigma_{z1}(z) &= \mu^{-1} E \delta_c (r_2^2 - r_c^2) [(r_c^2 - r_1^2) \exp(2k_0 \mu H / r_c) + r_2^2 - r_c^2]^{-1} \{ (r_c^2 - r_1^2) (r_2^2 - r_1^2)^{-1} [\exp(2k_0 \mu H / r_c) - 1] + 1 - \\ &\quad \exp[k_0 \mu r_c^{-1} (H - z)] \}; \\ \sigma_{z2}(z) &= \mu^{-1} E \delta_c (r_c^2 - r_1^2) [(r_c^2 - r_1^2) \exp(2k_0 \mu H / r_c) + r_2^2 - r_c^2]^{-1} \{ (r_2^2 - r_c^2) (r_2^2 - r_1^2)^{-1} [\exp(2k_0 \mu H / r_c) - 1] + \\ &\quad \exp[k_0 \mu r_c^{-1} (H - z)] - \exp(2k_0 \mu H / r_c) \}; \end{aligned}$$

на правом участке

$$H - H^+ \leq z \leq H$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв получаем

$$\begin{aligned} p_c(z) &= (1/2) E \delta_c r_c^{-2} (r_2^2 - r_c^2) (r_c^2 - r_1^2) (r_2^2 - r_1^2)^{-1} \exp[k_0 \mu r_c^{-1} (z - H)]; \\ \sigma_{z1}(z) &= \mu^{-1} E \delta_c (r_2^2 - r_c^2) (r_2^2 - r_1^2)^{-1} \{ 1 - \exp[k_0 \mu r_c^{-1} (z - H)] \} \end{aligned}$$

и (при нарушениях лишь (2.22'') и (2.24), пропорциональных  $k_0$  и  $k_0^2 \mu^2$  соответственно)

$$\sigma_{z2}(z) = -\mu^{-1} E \delta_c (r_c^2 - r_1^2) (r_2^2 - r_1^2)^{-1} \{ 1 - \exp[k_0 \mu r_c^{-1} (z - H)] \}.$$

Показаны и соответствующие эпюры с угловыми точками на границах промежуточного участка взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения с торцевыми участками взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения (см. рис. 5.3).

Плоское напряжённое состояние торцов составного цилиндра описывается классическими соотношениями, в частности

$$p_c(-H) = p_c(H).$$

Знакопеременные эпюры осевых напряжений обратно пропорциональны продольным жёсткостям слоёв и отличаются знаками ввиду аннулирования суммарной осевой силы.

Эпюра контактного давления допускает непрерывное кусочно-линейное приближение на участках одного порядка длины с радиусом сопряжения, что обеспечивает инженерную точность определения радиальных и окружных напряжений по формулам Ламе [358].

При рабочем внутреннем давлении  $p$  в случае действительных соотношений  $p$  и  $p_c$ ;  $r_1$ ,  $r_c$ ,  $r_2$  и  $H$ , как покажет последующая оценка, осевые напряжения повсеместно являются промежуточными главными напряжениями  $\sigma_2$ , поэтому не учитываемыми третьей теорией прочности.

Для прочностной оптимизации составного цилиндра необходимы его равнопрочность по длине и равномерность

$$p_c(z) = p_c = \text{constant},$$

вновь достигаемая изменением натяга  $\delta_c(z)$  (рис. 5.4), но, в отличие от случая тепловой сборки, уже теперь повсеместно, в том числе и на промежуточном участке взаимного осевого

сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения, поскольку при

$$\delta_c(z) = \delta_c = \text{constant}$$

и на промежуточном участке взаимного осевого сцепления

$$p_c(z) \neq \text{constant}.$$

Границы этого участка сцепления определяются длинами  $H_0^-$  и  $H_0^+$  левого и правого соответственно торцевых участков взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения, в связи с непропорциональным изменением  $p_c(z)$  не совпадающими с  $H^-$  и  $H^+$ .

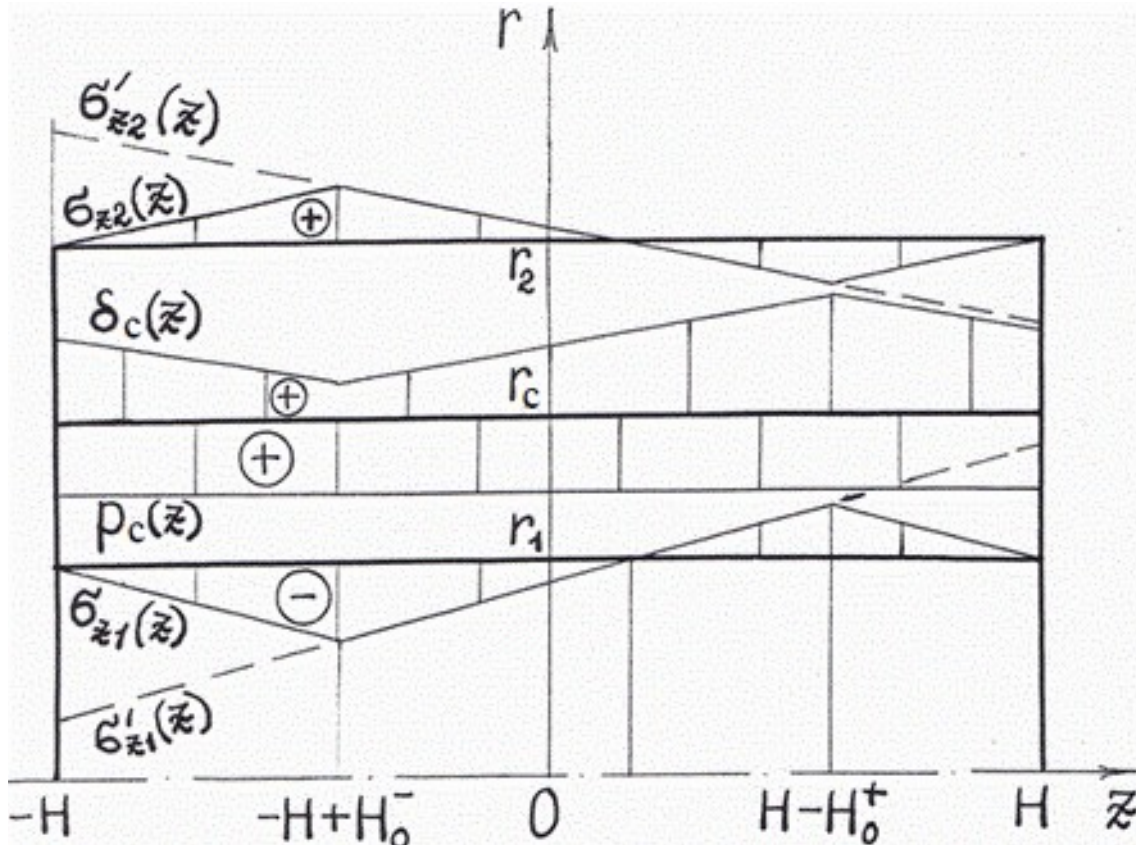


Рисунок 5.4. Эпюры относительного натяга  $\delta_c(z)$  и сборочных контактного давления  $p_c(z)$  и осевых напряжений  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  в слоях собранного запрессовкой составного цилиндра конечной длины с неравномерным вдоль оси наилучшим натягом в установившемся состоянии.

Решим обе задачи о запрессовке составного цилиндра для равномерных по длине уже не натягов, как выше, а контактных давлений.

Поскольку на левом и правом торцевых участках взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения, как и в случае тепловой сборки, выбор натяга повсеместно уравнивает контактное давление  $p_c(z)$  с таковым на границах левого и правого торцевых участков с промежуточным участком взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения, то вначале стабилизируем контактное давление  $p_c(z)$  на промежуточном участке взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения до итоговой величины  $p_c$ . Процесс получения формул (5.39) показывает, что квазистатический сброс усилий запрессовки приводит к равномерному изменению контактного давления  $p_c(z)$ , нулевому

лишь при необходимом и достаточном условии равенства коэффициентов поперечной деформации Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

безотносительно соотношения между модулями продольной упругости Юнга  $E_1$  и  $E_2$  материалов слоёв составного цилиндра.

Поэтому в конце запрессовки (первая задача запрессовки) следует достичь условия

$$p_c(z) = p_c' = \text{constant},$$

подстановка которого в формулу (5.28) повсеместно даёт

$$\delta_c(z) = -\mu_1 p_z / E_1 + [A_c + B_c(H + z)] p_c'.$$

После сброса усилий запрессовки и завершения взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения (вторая задача запрессовки) аналогично формуле (5.39)

$$(5.41)$$

$$p_c(z) = p_c = p_c' + (\mu_2 - \mu_1) D_c' / E_c,$$

где постоянная  $D_c'$  взамен  $D_c$  (в связи с изменениями  $p_c(z)$ ,  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  по сравнению со случаем

$$\delta_c(z) = \delta_c = \text{constant})$$

определяется следующим образом.

Из формул (5.25) и (5.26) устанавливаем повсеместно

$$\begin{aligned} \sigma_{z1}(z) &= -p_z' + 2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} p_c' (H + z); \\ \sigma_{z2}(z) &= -p_z' (r_c^2 - r_1^2) / (r_2^2 - r_c^2) + 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} p_c' (H - z). \end{aligned}$$

Теперь вместо формулы (5.38) получается

$$(5.42)$$

$$D_c' = 2(r_c^2 - r_1^2) p_z' - 4k_0 r_c p_c' H,$$

а взамен формулы (5.35) –

$$(5.43)$$

$$p_z' = 4k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} H p_c'.$$

Подстановка формулы (5.43) с учётом формулы (5.41) в формулу (5.42) даёт искомое

$$D_c' = 4k_0 r_c H p_c' E_c / [E_c + 4(\mu_2 - \mu_1) k_0 r_c H].$$

Заметим, что из формулы (5.43) вытекает обычная [228] формула для максимального усилия запрессовки

$$Q = 4\pi k_0 r_c H p_c',$$

справедливая лишь при условии

$$p_c(z) = p_c' = \text{constant}.$$

После сброса усилий запрессовки на левом торцевом участке

$$-H \leq z \leq -H + H_0^-$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения получаем

$$\delta_c(z) = [A_c + B_c(H - z)] p_c,$$

а на правом торцевом участке

$$H - H_0^+ \leq z \leq H$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения имеем

$$\delta_c(z) = [A_c - B_c(H + z)] p_c.$$

Из условий сопряжения натягов  $\delta_c(z)$  на границах левого и правого торцевых участков взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения с промежуточным участком взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения устанавливаем

$$\begin{aligned} H_0^- &= [\mu_1 p_z / E_1 + (\mu_2 - \mu_1) A_c D_c' / E_c] / [2B_c p_c + (\mu_1 - \mu_2) B_c D_c' / E_c]; \\ H_0^+ &= H - [\mu_1 p_z / E_1 + (\mu_2 - \mu_1) (A_c + B_c H) D_c' / E_c] / [2B_c p_c + (\mu_1 - \mu_2) B_c D_c' / E_c]. \end{aligned}$$

И вновь (ввиду



$$V_c H \neq 0)$$

для равенства суммы длин левого и правого торцевых участков взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения половине длины составного цилиндра необходимо и достаточно условие равенства коэффициентов поперечной деформации Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

безотносительно соотношения между модулями продольной упругости Юнга  $E_1$  и  $E_2$  материалов слоёв составного цилиндра.

Аналогично предыдущему на левом торцевом участке

$$-H \leq z \leq -H + H_0^-$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{z1}(z) &= -2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} p_c (H + z); \\ \sigma_{z2}(z) &= 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} p_c (H + z);\end{aligned}$$

на промежуточном участке

$$-H + H_0^- \leq z \leq H - H_0^+$$

взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения имеем

$$\begin{aligned}\sigma_{z1}(z) &= (A_c - \mu_2 B_c r_c / k_0) E_1 D_c' / E_c - p_z' + 2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} p_c' (H + z); \\ \sigma_{z2}(z) &= (A_c - \mu_1 B_c r_c / k_0) E_2 D_c' / E_c - (r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1} p_z' + 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} p_c' (H - z);\end{aligned}$$

на правом торцевом участке

$$H - H_0^+ \leq z \leq H$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{z1}(z) &= 2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} p_c (H - z); \\ \sigma_{z2}(z) &= -2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} p_c (H - z).\end{aligned}$$

В частном случае при равенствах модулей продольной упругости Юнга

$$E_1 = E_2 = E$$

и коэффициентов поперечной деформации Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

материалов слоёв составного цилиндра

и при равномерном контактном давлении

$$p_c(z) = p_c = \text{constant}$$

получаем:

$$H_0^- = H(r_2^2 - r_c^2)/(r_2^2 - r_1^2)$$

и

$$H_0^+ = H(r_c^2 - r_1^2)/(r_2^2 - r_1^2)$$

делят  $H$  обратно пропорционально осевым жёсткостям соответствующих слоёв с первоначально сжатыми торцами, а

$$p_c' = p_c;$$

на левом торцевом участке

$$-H \leq z \leq -H + H_0^-$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения получаем

$$\begin{aligned}\delta_c(z) &= 2p_c E^{-1} r_c^2 (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1} (r_c^2 - r_1^2)^{-1} [1 - k_0 \mu (H + z)/r_c]; \\ \sigma_{z1}(z) &= -2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} p_c (H + z); \\ \sigma_{z2}(z) &= 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} p_c (H + z);\end{aligned}$$

на промежуточном участке

$$-H + H_0^- \leq z \leq H - H_0^+$$

взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения имеем

$$\delta_c(z) = 2p_c E^{-1} r_c^2 (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1} (r_c^2 - r_1^2)^{-1} [1 - k_0 \mu r_c^{-1} H (r_2^2 - 2r_c^2 + r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1} + k_0 \mu r_c^{-1} z];$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 434/556

$$\sigma_{z1}(z) = 2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} p_c [-H(r_2^2 - 2r_c^2 + r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1} + z];$$

$$\sigma_{z2}(z) = 2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} p_c [H(r_2^2 - 2r_c^2 + r_1^2)(r_2^2 - r_1^2)^{-1} - z];$$

на правом торцевом участке

$$H - H_0^+ \leq z \leq H$$

взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения получаем

$$\delta_c(z) = 2p_c E^{-1} r_c^2 (r_2^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1} (r_c^2 - r_1^2)^{-1} [1 + k_0 \mu (H - z)/r_c];$$

$$\sigma_{z1}(z) = 2k_0 r_c (r_c^2 - r_1^2)^{-1} p_c (H - z);$$

$$\sigma_{z2}(z) = -2k_0 r_c (r_2^2 - r_c^2)^{-1} p_c (H - z)$$

(с нарушением лишь (2.22''), пропорциональным малому  $k_0$ ).

Соответствующие эпюры (см. рис. 5.4) иллюстрируют непрерывные кусочно-линейные относительный натяг  $\delta_c(z)$  и осевые напряжения  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$ .

Осевые напряжения  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  аннулируются на торцах составного цилиндра с осуществлением классического плоского напряжённого состояния, знакопеременны и обратно пропорциональны осевым жёсткостям соответствующих слоёв при взаимном отличии в знаке ввиду аннулирования суммарной осевой силы.

Теория принципиально трёхмерного напряжённо-деформированного процесса составного цилиндра конечной длины при его запрессовке открыла и обосновала следующие явления и закономерности равнопрочности цилиндра по длине:

1) положительные алгебраические максимумы осевых напряжений в слоях  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$ , достигаемые на границах промежуточного участка взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения со стороны первоначально свободных торцов соответствующих слоёв, равны между собой и среднему геометрическому отрицательных их алгебраических минимумов, достигаемых на границах промежуточного участка со стороны первоначально сжатых торцов соответствующих слоёв:

$$\sigma_{z1}(H - H_0^+) = \sigma_{z2}(-H + H_0^-) = 2k_0 r_c H (r_c^2 - r_1^2)^{-1} p_c;$$

$$\sigma_{z1}(-H + H_0^-) = -2k_0 r_c H (r_2^2 - r_1^2)^{-1} p_c (r_2^2 - r_c^2)(r_c^2 - r_1^2)^{-1};$$

$$\sigma_{z2}(H - H_0^+) = -2k_0 r_c H (r_2^2 - r_1^2)^{-1} p_c (r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1};$$

2) наклоны различных участков каждой из эпюр относительного натяга  $\delta_c(z)$  и осевых напряжений  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  в слоях составного цилиндра по модулю постоянны и меняют лишь знак, так что границы промежуточного участка взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения делят пополам участки между общим нулём этих эпюр относительного натяга  $\delta_c(z)$  и осевых напряжений  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  в слоях составного цилиндра и соответствующим торцом;

3) для расположения этого общего нуля этих эпюр относительного натяга  $\delta_c(z)$  и осевых напряжений  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  в слоях составного цилиндра именно на срединной плоскости  $z = 0$  составного цилиндра и вообще для обратносимметричности эпюр осевых напряжений  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  в слоях составного цилиндра необходимо и достаточно равенство продольных жёсткостей слоёв составного цилиндра, осуществляемое при среднеквадратичности  $r_c$  между  $r_1$  и  $r_2$ :

$$r_c = [(r_1^2 + r_2^2)/2]^{1/2};$$

при этом и только в этом случае

$$H_0^- = H_0^+ = H/2;$$

4) положительные ординаты пересечений с первоначально свободными торцами продолжений  $\sigma_{z1}'(z)$  и  $\sigma_{z2}'(z)$  эпюр осевых напряжений  $\sigma_{z1}(z)$  и  $\sigma_{z2}(z)$  в слоях составного цилиндра на промежуточном участке взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения равны между собой и среднему геометрическому отрицательных ординат пересечений продолжений с первоначально сжатыми торцами, при этом названные ординаты являются удвоениями действительных алгебраических максимумов и минимумов:

$$\sigma_{z1}'(H) = \sigma_{z2}'(-H) = 4k_0 r_c H (r_2^2 - r_1^2)^{-1} p_c;$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 435/556

$$\begin{aligned}\sigma_{z1}'(-H) &= -4k_0r_cH(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_c(r_2^2 - r_c^2)(r_c^2 - r_1^2)^{-1}; \\ \sigma_{z2}'(H) &= -4k_0r_cH(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_c(r_c^2 - r_1^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1}.\end{aligned}$$

И в этом случае радиальные  $\sigma_r(r, z)$  и тангенциальные (окружные)  $\sigma_t(r, z)$  напряжения в слоях составного цилиндра определяются через равномерное контактное давление по формулам Ламе [358] и также равномерны вдоль оси.

Однако запрессованный составной цилиндр при внутреннем давлении  $p$  равнопрочен вдоль оси по третьей теории прочности (использование других критериев предельных состояний, например четвёртой теории прочности или простейшим образом учитывающего влияние промежуточных главных напряжений  $\sigma_2$  предложенного линейного критерия (3.55), приводит к неравномерности наилучшего контактного давления и препятствует получению простых универсальных результатов, не отвечая принципу допустимой простоты) тогда и только тогда, когда повсеместно на внутренних поверхностях слоёв составного цилиндра осевые напряжения являются промежуточными главными напряжениями  $\sigma_2$ .

Возможность ограничиться внутренними поверхностями слоёв составного цилиндра обусловлена монотонным убыванием равносильного (эквивалентного) напряжения как функции радиуса в пределах каждого слоя составного цилиндра.

Максимумы модулей осевых напряжений обеспечиваются алгебраическими минимумами, а при действительных соотношениях  $p$  и  $p_c$ ;  $r_1$ ,  $r_c$  и  $r_2$  наподобие наилучших (1.13) и (1.14)

$$\sigma_i(r, z) \geq |\sigma_i(r, z)|.$$

Поэтому необходимо и достаточно условие

$$\sigma_{z1}(-H + H_0^-) = -2k_0r_cH(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_c(r_2^2 - r_c^2)(r_c^2 - r_1^2)^{-1} \geq -p,$$

которому при ориентировочном действительном соотношении

$$r_1 = r_2/3$$

равносильно (эквивалентно) условие

$$(5.44)$$

$$H \leq r_c/k_0.$$

Известно, что при запрессовке

$$(5.45)$$

$$k_0 = 0.10...0.15,$$

а при тепловой сборке коэффициент трения в 1.3...2.5 раза выше:

$$(5.46)$$

$$k_0 = 0.13...0.38,$$

и это различие обусловлено срезанием микровыступов при запрессовке [228].

### **5.3. Теория оптимизации технологичности и статической и циклической прочности составного цилиндра конечной длины при его тепловой сборке, запрессовке, гидропрессовой сборке и предложенной и обоснованной именно вполне обратимой технологии сжатия-растяжения для сборки-разборки соединений с натягом, основанной на явлении поперечной деформации**

При технологии запрессовки составного цилиндра из формул (5.44) и (5.45) следует, что осевые напряжения в слоях составного цилиндра влияют на равносильные (эквивалентные) напряжения по третьей теории прочности в слоях составного цилиндра лишь при длине составного цилиндра на порядок больше его диаметра.

При технологии тепловой сборки составного цилиндра влияние осевых напряжений в слоях составного цилиндра на равносильные (эквивалентные) напряжения по третьей теории прочности в слоях составного цилиндра практически исключено при любой относительной длине независимо от (5.46), поскольку при тепловой сборке составного цилиндра роль осевых напряжений побочна и пассивна и остаточные их значения гораздо меньше таковых при запрессовке составного цилиндра.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 436/556

Следовательно, в практически важных случаях при технологиях тепловой сборки и запрессовки составного цилиндра равномерность контактного давления по длине равносильна (эквивалентна) равнопрочности составного цилиндра в осевом направлении.

Выбор наилучших радиуса сопряжения и сборочного контактного давления определяется классическим решением задачи А. В. Гадолина [87] для плоского напряжённого состояния составного кольца, а выбор осуществляющего это давление наилучшего распределения радиального натяга по длине определяется полученными решениями трёхмерных задач для составного цилиндра конечной длины при используемой технологии сборки.

Исполнительный же натяг должен превышать расчётный натяг на 50...60 % суммарной относительной высоты микронеровностей сопрягаемых поверхностей [228].

Если применяется гидропрессовый способ сборки [63], то в полученные решения задач о запрессовке составного цилиндра вносятся очевидные исправления:

по формулам Ламе [358] учитывается уменьшение натяга;

взамен сухого трения рассматривается жидкостное трение.

Однако осуществление гидропрессового способа сборки для достаточно длинных деталей (в отличие от посадки ступицы на вал) затруднительно и требует для подвода и уплотнения масляной рабочей среды под высоким давлением определённых нарушений канонической формы слоёв, в том числе концентраторами напряжений.

Поэтому эффективность гидропрессового способа сборки составных цилиндров проблематична.

Безусловно полезна предварительная смазка сопрягаемых поверхностей.

Анализ решённых задач показывает, что тепловой способ сборки составного цилиндра даёт наилучшие результаты, к тому же симметричные относительно срединной плоскости составного цилиндра.

Однако достаточные для обеспечения требуемого натяга нагрев внешнего и/или охлаждение внутреннего слоёв ограничены сверху допускаемой температурой материала и снизу абсолютным нулём по Кельвину, а к тому же затруднительны при крупногабаритности составного цилиндра, что повышает значение ранее, видимо, не ставившихся задач о запрессовке.

Кроме того, иногда необходима разборка составного цилиндра, например для замены изношенного слоя, а тепловой способ разборки возможен лишь при условии значительной разности температурных коэффициентов линейного расширения материалов слоёв составного цилиндра.

В иных случаях тепловой способ сборки составного цилиндра лишён обратимости.

Тот же анализ позволяет предложить и обосновать обратимую технологию сжатия-растяжения для сборки-разборки соединений с натягом, основанную на явлении поперечной деформации.

Именно, осуществляется осевое сжатие охватываемой внешней детали и/или осевое растяжение охватываемой внутренней детали, что снижает или даже аннулирует усилие собственно запрессовки или raspрессовки.

Правда, растяжение внутренней детали уместно при посадке ступицы на вал способом волочения, но затруднительно при сборке-разборке составного цилиндра.

Однако можно ограничиться осевым сжатием внешнего слоя с использованием того же прессового оборудования, что и при запрессовке, но с дополнительным упором ранее свободного торца внешнего слоя

$$r_c \leq r \leq r_2/k_0, z = -H,$$

(см. рис. 5.2), на который будет действовать контактное давление, до начала ввода внутреннего слоя на поверхность сопряжения равное таковому на противоположный торец

$$z = H.$$

Аннулирование собственно запрессовывающего усилия с появлением возможности беспрепятственного ввода внутреннего слоя достигается сжатием торцов внешнего слоя контактным давлением

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 437/556

$$p_{z2} = E_2 \delta_c / \mu_2.$$

Обеспечивающее его суммарное осевое усилие  $Q_2$  меньше соответствующего условию  $Q_2 = 0$  усилия обычной запрессовки  $Q$  при условии

$$2H > 2r_c [2 / (k_0 \mu)]$$

в простейшем и важнейшем частном случае равенств модулей продольной упругости Юнга

$$E_1 = E_2 = E$$

и коэффициентов поперечной деформации Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

материалов слоёв составного цилиндра

и наилучшего радиуса их сопряжения, а при меньших  $H$  пропорционально уменьшает усилие обычной запрессовки.

Разумеется, по условиям прочности

$$p_{z2} \leq \sigma_L \in \{\sigma_u, \sigma_s, [\sigma]\}.$$

При условии

$$Q(Q_2) = 0$$

ввод внутреннего слоя свободен, как и при тепловой сборке, с аналогичными результатами, симметричными относительно срединной плоскости  $z = 0$  составного цилиндра.

При

$$Q(Q_2) > 0$$

осуществляется комбинированная технология – запрессовка со сжатием по технологии сжатия-растяжения.

В любом случае соответствующие ей задачи решаются аналогично предыдущим задачам с очевидными изменениями напряжённо-деформированных состояний слоёв составного цилиндра.

В зависимости от действительной последовательности квазистатического сброса усилий  $Q$  и  $Q_2$  решаются уже три нетривиальные задачи

$$\begin{aligned} Q &= Q_{\max}, Q_2 = Q_{2\max}; \\ Q &= Q_{\max}, Q_2 = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} Q &= 0, Q_2 = Q_{2\max}; \\ Q &= 0, Q_2 = 0 \end{aligned}$$

(при наличии проскальзывания принцип наложения (суперпозиции) не действует даже в пределах упругости).

Разумеется, при наличии зависимости между  $Q$  и  $Q_2$  (в том числе синхронизации) она подлежит учёту и приводит к различным эффектам с возможностью оптимизации.

Многовариантный выбор связан со спецификой действительного нагружения.

Применительно к решению задачи циклической прочности для составного цилиндра конечной длины под внутренним давлением примем внутреннее давление  $p$  циклически изменяющимся в пределах  $p_{\min} \dots p_{\max}$ , так что среднее давление цикла

$$p_m = (p_{\max} + p_{\min}) / 2$$

и амплитудное давление цикла

$$p_a = (p_{\max} - p_{\min}) / 2.$$

С помощью формул Ламе [358] устанавливаем равносильные (эквивалентные) по третьей теории прочности напряжения во внутреннем

$$(5.47)$$

$$\sigma_{e1}(r) = 2pr_1^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}r_2^2/r^2 - 2p_c r_c^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}r_1^2/r^2$$

и внешнем слоях составного цилиндра

$$(5.48)$$

$$\sigma_{e2}(r) = 2pr_1^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}r_2^2/r^2 + 2p_c r_c^2(r_2^2 - r_c^2)^{-1}r_2^2/r^2.$$

Наиболее опасны напряжённые состояния внутренних поверхностей обоих слоёв составного цилиндра со средними и амплитудными равносильными (эквивалентными) напряжениями циклов соответственно

$$\begin{aligned}\sigma_{e1m}(r_1) &= 2p_m r_2^2 / (r_2^2 - r_1^2) - 2p_c r_c^2 / (r_c^2 - r_1^2); \\ \sigma_{e1a}(r_1) &= 2p_a r_2^2 / (r_2^2 - r_1^2); \\ \sigma_{e2m}(r_c) &= 2p_m r_2^2 (r_2^2 - r_1^2)^{-1} r_1^2 / r_c^2 + 2p_c r_2^2 / (r_2^2 - r_c^2); \\ \sigma_{e2a}(r_c) &= 2p_a r_2^2 (r_2^2 - r_1^2)^{-1} r_1^2 / r_c^2.\end{aligned}$$

После определения запасов усталостной прочности слоёв  $n_1$  и  $n_2$  по линейному приближению Гудмена диаграммы усталостной прочности Хэя (1.5) [231], получив формулу для обеспечивающего циклическую равнопрочность слоёв из одного и того же материала сборочного контактного давления

$$p_c = (p_m + p_a \sigma_u / \sigma_{-1}) r_2^2 r_c^2 (r_c^2 - r_1^2) (r_2^2 - r_1^2)^{-1} / [r_c^2 / (r_c^2 - r_1^2) + r_2^2 / (r_2^2 - r_c^2)]$$

с обращёнными запасами прочности

$$1/n_1 = 1/n_2 = 1/n = 2(p_m / \sigma_u + p_a / \sigma_{-1}) r_2^2 (r_2^2 - r_1^2)^{-1} \{1 - 1/[r_c^2 / (r_c^2 - r_1^2) + r_2^2 / (r_2^2 - r_c^2)]\},$$

устанавливаем условия наилучшего проектирования составного цилиндра для циклического нагружения

(5.49)

$$\begin{aligned}r_c &= (r_1 r_2)^{1/2}; \\ p_c &= (1/2)(p_m + p_a \sigma_u / \sigma_{-1})(r_2 - r_1) / (r_2 + r_1); \\ n &= (1 - r_1 / r_2) \sigma_u / (p_m + p_a \sigma_u / \sigma_{-1}).\end{aligned}$$

Осуществляющий наилучшее значение сборочного контактного давления  $p_c$  неравномерный наилучший натяг  $\delta_c(z)$  в составном цилиндре конечной длины определяется полученным решением трёхмерной задачи для соответствующей технологии сборки.

Сопоставлением формул (5.49) и названных решений с классическими формулами (1.13) и (1.14) для плоского напряжённого состояния при статическом нагружении устанавливаем:

в частном случае статически нагруженного составного кольца

$$p_m = p, p_a = 0$$

из полученных результатов следуют все формулы А. В. Гадолина [87], то есть получено обобщение найденных им условий наилучшего проектирования при статическом плоском напряжённом состоянии на трёхмерный случай при циклическом нагружении;

наилучший радиус сопряжения слоёв при одинаковых упругих постоянных их материалов является инвариантом характера нагружения и равен среднему геометрическому внутреннего и внешнего радиусов составного цилиндра;

существует статический эквивалент циклического внутреннего давления в составном цилиндре

$$\begin{aligned}p_c &= p_m + p_a \sigma_u / \sigma_{-1} \geq p_m + p_a = p_{\max} (p_a \geq 0), \\ p_c &= p_m + p_a \sigma_u / \sigma_{-1} > p_m + p_a = p_{\max} (p_a > 0)\end{aligned}$$

в критериях наилучшего его проектирования, обеспечивающий универсальность формулы для определения соответствующего сборочного контактного давления при произвольных конечной длине и циклическом нагружении.

Линейное приближение Гудмена диаграммы усталостной прочности Хэя в данной задаче приемлемо, так как используется сравнительно небольшой участок диаграммы в положительной области.

Становятся ясными следующие обобщения.

**Определение.** Линейно прочным называется материал (и тело), множество предельных напряжённо-деформированных процессов которого моделируется линейным приближением Гудмена диаграммы усталостной прочности Хэя для равносильного (эквивалентного) напряжения по определённому критерию предельных состояний.

**Определение.** Остаточно-рабочее простое нагружение линейно упругого и линейно прочного тела есть его напрягающе-деформирующее нагружение, для которого существует такое значение одного параметра нагружения, что в каждой из множества всех точек минимакса равноопасных напряжённо-деформированных процессов, пропорционального этому значению, остаточное равносильное (эквивалентное) напряжение также пропорционально этому значению.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 439/556

Следствие. Равносильным (эквивалентным) значением параметра действительного напряжённо-деформированного процесса линейно упругого и линейно прочного тела из однородного материала является соответствующая равноопасному для этого процесса циклическому напряжённо-деформированному процессу с наименее уклоняющимся от действительного процессуальным средним напряжением цикла сумма, во-первых, значения этого параметра для среднего значения этого равноопасного циклического напряжения и, во-вторых, значения этого параметра для амплитудного значения этого равноопасного циклического напряжения после умножения этого значения этого параметра на отношение предела прочности при одноосном растяжении к пределу усталости при симметричном одноосном цикле материала тела.

Следствие. Единственным параметром напрягающе-деформирующего нагружения и напряжённо-деформированного процесса линейно упругого и линейно прочного двухслойного цилиндра при одном и том же материале слоёв под циклическим внутренним давлением является это циклическое внутреннее давление. Равносильным (эквивалентным) значением параметра напряжённо-деформированного процесса линейно упругого и линейно прочного двухслойного цилиндра при одном и том же материале слоёв под циклическим внутренним давлением является сумма, во-первых, среднего значения этого циклического внутреннего давления и, во-вторых, амплитудного значения этого циклического внутреннего давления после умножения этого значения на отношение предела прочности при одноосном растяжении к пределу усталости при симметричном одноосном цикле материала двухслойного цилиндра. Множеством всех точек минимакса равноопасных напряжённо-деформированных процессов, пропорционального этому значению равносильного (эквивалентного) параметра напряжённо-деформированного процесса линейно упругого и линейно прочного двухслойного цилиндра при одном и том же материале слоёв под циклическим внутренним давлением, является множество всех точек внутренних поверхностей обоих слоёв цилиндра.

Замечание. Подобно одному параметру в общепринятом определении простого нагружения, параметр действительного напряжённо-деформированного процесса линейно упругого и линейно прочного тела из однородного материала является одним из единых и общих параметров для всего процесса и всего тела, но никоим образом не единственным единым и общим параметром вообще. Существует бесконечное множество таких единых и общих параметров, пропорциональных друг другу с произвольными ненулевыми коэффициентами пропорциональности. По принципу допустимой простоты выбирается наиболее простой и естественный именно действительный параметр, например давление, а не его произведение на произвольный множитель, отличный от нуля и единицы.

С целью уточнить полученные результаты можно применить параболическое приближение Гербера [231]

$$(\sigma_m/\sigma_u)^2 + \sigma_a/\sigma_{-1} = 1,$$

тогда при том же наилучшем радиусе сопряжения

$$r_c = (r_1 r_2)^{1/2}$$

равнопрочность слоёв составного цилиндра между собой обеспечивается сборочным контактным давлением

$$p_c = (1/2)[p_m + (1/2)(1 - r_1/r_2)\sigma_u^2\sigma_{-1}^{-1}p_a/p_m](r_2 - r_1)/(r_2 + r_1)$$

( $p_m = 0$  влечёт  $p_a = 0$ ) также с обобщением решения задачи А. В. Гадолина [87]  $p_a = 0$ , а несколько более сложный статический эквивалент циклического внутреннего давления

$$p_e = p_m + (1/2)(1 - r_1/r_2)\sigma_u^2\sigma_{-1}^{-1}p_a/p_m$$

утрачивает универсальность ввиду дополнительных зависимостей от  $r_2/r_1$  и от  $\sigma_u/p_m$ .

Если же используется сама диаграмма усталостной прочности Хэя

$$f(\sigma_m/\sigma_u, \sigma_a/\sigma_{-1}) = 1$$

взамен её приближений, то при том же наилучшем радиусе сопряжения

$$r_c = (r_1 r_2)^{1/2}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 440/556

равнопрочность слоёв составного цилиндра между собой обеспечивается сборочным контактным давлением  $p_c$ , которое неявно определяется уравнением

$$f[-2r_2(r_2 - r_1)^{-1}p_c/\sigma_u + 2r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_m/\sigma_u, 2r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_a/\sigma_{-1}] = \\ f[2r_2(r_2 - r_1)^{-1}p_c/\sigma_u + 2r_1r_2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_m/\sigma_u, 2r_1r_2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p_a/\sigma_{-1}].$$

Если ту же диаграмму усталостной прочности  $X_{\Sigma}$  при

$$\sigma_m \geq 0$$

представить в виде

$$\sigma_m/\sigma_u = f_1(\sigma_a/\sigma_{-1}),$$

то равнопрочность составного цилиндра между собой обеспечивается сборочным контактным давлением

$$p_c = \sigma_m r_2^2 (r_2^2 - r_1^2)^{-1} \{ f_1 [ 2r_2^2 (r_2^2 - r_1^2)^{-1} r_1^2 r_c^{-2} p_a / \sigma_{-1} ] - r_1^2 r_c^{-2} f_1 [ 2r_2^2 (r_2^2 - r_1^2)^{-1} p_a / \sigma_{-1} ] \} / \{ r_2^2 (r_2^2 - r_c^2)^{-1} f_1 [ 2r_2^2 (r_2^2 - r_1^2)^{-1} p_a / \sigma_{-1} ] + r_c^2 (r_c^2 - r_1^2)^{-1} f_1 [ 2r_2^2 (r_2^2 - r_1^2)^{-1} r_1^2 r_c^{-2} p_a / \sigma_{-1} ] \},$$

обращённый общий запас циклической прочности слоёв

$1/n_1 = 1/n_2 = 1/n = 2(p_m/\sigma_u) / \{ (r_2^2 - r_c^2) r_2^{-2} f_1 [ 2r_2^2 (r_2^2 - r_1^2)^{-1} r_1^2 r_c^{-2} p_a / \sigma_{-1} ] + (r_c^2 - r_1^2) r_c^{-2} f_1 [ 2r_2^2 (r_2^2 - r_1^2)^{-1} p_a / \sigma_{-1} ] \}$ ,  
а наилучший радиус сопряжения слоёв составного цилиндра аннулирует производную выражения

$$(r_2^2 - r_c^2) r_2^{-2} f_1 [ 2r_2^2 (r_2^2 - r_1^2)^{-1} r_1^2 r_c^{-2} p_a / \sigma_{-1} ] + (r_c^2 - r_1^2) r_c^{-2} f_1 [ 2r_2^2 (r_2^2 - r_1^2)^{-1} p_a / \sigma_{-1} ]$$

по  $r_c^2$ . Если, в частности,

$$f_1(\sigma_a/\sigma_{-1}) = 1 - \sigma_a/\sigma_{-1},$$

то вновь приходим к полученным выше по диаграмме усталостной прочности  $X_{\Sigma}$  в приближении Гудмена результатам, причём линейность приближения не только достаточна, но и необходима для получения универсального замкнутого решения задачи циклической прочности.

Таким образом, теория оптимизации технологичности и статической и циклической прочности составного цилиндра конечной длины при его тепловой сборке, запрессовке, гидропрессовой сборке и предложенной и обоснованной именно вполне обратимой технологии сжатия-растяжения для сборки-разборки соединений с натягом, основанной на явлении поперечной деформации, установила существование статического эквивалента циклического нагружения внутренним рабочим давлением в критериях наилучшего проектирования составного цилиндра конечной длины.

#### **5.4. Теория оптимизации составного цилиндра с учётом подлинных запасов прочности при сложном нагружении по общей методологии всеобщего запаса, мультипликативной и аддитивной методологиям общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных**

Созданные общая методология всеобщего запаса, мультипликативная и аддитивная методологии общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных, в частности для определения запаса прочности при наложении (суперпозиции) нагрузок, позволяют уточнить условие равнопрочности слоёв составного цилиндра.

Для испытания этих методологий, требующего сопоставлений получаемых по этим методологиям и классических результатов, рассмотрим испытательную задачу в простейшем и важнейшем частном случае равенств модулей продольной упругости Юнга

$$E_1 = E_2 = E$$

и коэффициентов поперечной деформации Пуассона

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu$$

материалов слоёв составного цилиндра.

При использовании мультипликативной методологии общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных для простейшего случая одинаковых материалов слоёв и статического нагружения после исключения обеспечивающего равнопрочность слоёв значения сборочного контактного давления  $p_{c0}$  для общего запаса усталостной прочности слоёв получается кубическое уравнение с зависящими от  $r_c/r_2$



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 441/556

коэффициентами, позволяющее решить задачу наилучшего проектирования, но не дающее замкнутого аналитического решения.

Более того, если априорно принять в качестве наилучшего прежний радиус сборки

$$r_c = (r_1 r_2)^{1/2},$$

то названный запас  $n$  определяется кубическим уравнением уже с постоянными коэффициентами

$$n^3 - (1/2)(1 - r_1^2/r_2^2)(\sigma_u/p)n^2 - (r_1/r_2)n - (1/2)(1 - r_1^2/r_2^2)\sigma_u/p = 0$$

и по запасу  $n$  устанавливается наилучшее сборочное контактное давление  $p_{c0}$ .

Аддитивная методология общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных при том же априорном предположении

$$r_c = (r_1 r_2)^{1/2}$$

даёт более простой результат и позволяет даже учесть различие относительных погрешностей (в расчётах выражаемых не в процентах, а в долях единицы) определения рабочего  $p$  и сборочного контактного  $p_{c0}$  давлений, обычно 2...5 % для  $p$  и 10...15 % для  $p_{c0}$ .

С целью обеспечения именно единственности искомого неизвестного положительного числа  $\delta$  достаточно считать, что единая относительная погрешность  $\delta$ , через которую выражаются все относительные погрешности в решаемой задаче, в данном случае есть меньшая относительная погрешность определения рабочего давления  $p$  и что единственная остающаяся большая относительная погрешность определения сборочного контактного давления  $p_{c0}$  при чисто аддитивной методологии превышает  $\delta$  на известную долю единицы  $\delta_0$  и составляет  $\delta + \delta_0$ , а при смешанной аддитивно-мультипликативной методологии превышает  $\delta$  в большее единицы известное действительное число раз  $k > 1$  и составляет  $k\delta$ .

Выразим все предельные значения для внутреннего и внешнего слоёв двухслойного цилиндра соответственно в решаемой задаче через именно единственное искомое неизвестное положительное число  $\delta$  при чисто аддитивной методологии

$$\begin{aligned} -2(1 - \delta - \delta_0)r_c^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}p_{c0} + 2(1 + \delta)r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p &= \sigma_u; \\ 2(1 + \delta + \delta_0)r_2^2(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_{c0} + 2(1 + \delta)r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}r_1^2r_c^{-2}p &= \sigma_u \end{aligned}$$

и при смешанной аддитивно-мультипликативной методологии, которой в данном случае для примера и ограничимся,

$$\begin{aligned} -2(1 - k\delta)r_c^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}p_{c0} + 2(1 + \delta)r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}p &= \sigma_u; \\ 2(1 + k\delta)r_2^2(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_{c0} + 2(1 + \delta)r_2^2(r_2^2 - r_1^2)^{-1}r_1^2r_c^{-2}p &= \sigma_u, \end{aligned}$$

где, как указано выше,  $k > 1$  считается известной мультипликативной характеристикой различий относительных погрешностей определения рабочего  $p$  и сборочного  $p_{c0}$  давлений.

Тогда по наихудшим сочетаниям предельных значений напряжений в обоих слоях составного цилиндра при рабочем  $p$  и сборочном контактном  $p_{c0}$  давлениях в пределах

$$\begin{aligned} (1 - k\delta)p_{c0} \leq p_{c0} \leq (1 + k\delta)p_{c0}; \\ (1 - \delta)p \leq p \leq (1 + \delta)p \end{aligned}$$

исключение  $\delta$  даёт наилучшее сборочное контактное давление

$$p_{c0} = (1/4)k^{-1}[(k - 1)r_2 - (k + 1)r_1]p/(r_1 + r_2) + (1/4)k^{-1}\{[(k - 1)r_2 - (k + 1)r_1]^2p^2/(r_1 + r_2)^2 + 4k(r_2 - r_1)^2r_2^{-1}(r_1 + r_2)^{-1}\sigma_u p\}^{1/2}.$$

В частности, при равных между собой относительных погрешностях определения давлений  $p$  и  $p_{c0}$

$$k = 1$$

и

$$p_{c0} = (1/2)\{-pr_1/(r_1 + r_2) + [p^2r_1^2/(r_1 + r_2)^2 + (r_2 - r_1)^2r_2^{-1}(r_1 + r_2)^{-1}\sigma_u p]^{1/2}\}.$$

Затем легко устанавливаются  $\delta$  и

$$n = 1 + \delta.$$

Сопоставим полученные результаты с даваемыми формулой А. В. Гадолина [87] (1.14) в случае

$$r_2 = 4r_1$$

и

$$p = \sigma_u/2.$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 442/556

Классический результат А. В. Гадолина [87] даёт

$$p_{c0} = 0.150\sigma_u.$$

Мультипликативная методология общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных даёт

$$p_{c0} = 0.188\sigma_u.$$

Смешанная аддитивно-мультипликативная методология общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных даёт

$$p_c = 0.194\sigma_u \text{ при } k = 1;$$

$$p_c = 0.175\sigma_u \text{ при } k = 3.$$

Отсюда видно, что уточнение, даваемое теорией оптимизации составного цилиндра с учётом подлинных запасов прочности при сложном нагружении с наложением (суперпозицией) нагрузок по общей методологии всеобщего запаса, мультипликативной и аддитивной методологиям общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных, применительно к составным цилиндрам довольно существенно, причём различные методологии в рамках этой теории дают согласующиеся между собой результаты с возможностью самопроверяемости и взаимной проверяемости и применения для наилучшего проектирования.

### **5.5. Теория комплексной оптимизации составного цилиндра при наличии или отсутствии полного сжатия твердосплавного внутреннего слоя самоскреплённым (автофретированным) внешним слоем**

Задача повышения несущей способности циклически нагруженных цилиндров высокого давления при ограниченных прочностных характеристиках материалов может быть решена путём сглаживания неравномерности в распределении напряжений по толщине цилиндра разными методами: увеличения числа слоёв [140, 205, 271, 340], рулонирования, самоскрепления (автофретирования) [140, 205, 271, 298, 340], внешней поддержки и другими [205, 340].

Понижение при пластическом деформировании химической стойкости металла (особенно по отношению к межкристаллитной коррозии) и необходимость повышенной износостойкости рабочей поверхности цилиндра препятствуют использованию в компрессоростроении самоскреплённых (автофретированных) цилиндров и конструкции двухслойного цилиндра с самоскреплённым (автофретированным) внутренним слоем (лайнером).

Поэтому в современном машиностроении в большинстве случаев для высокого давления используются многослойные цилиндры, причём так называемое второе направление в проектировании предусматривает скрепление внутренней втулки из обладающего повышенными прочностью в области сжатия и износостойкостью металлокерамического твёрдого сплава слоями из одного материала.

Следует заметить что принятый в [140, 205, 271, 298, 340] и других известных работах метод расчёта на статическое нагружение ведёт к ошибкам в проектировании цилиндров поршневых компрессоров, работающих в условиях циклического нагружения.

Величина и роль этих ошибок возрастают при увеличении рабочего давления и амплитуды его изменения.

Созданная теория комплексной оптимизации составного цилиндра полным сжатием твердосплавного внутреннего слоя самоскреплённым (автофретированным) внешним слоем [103] включает метод расчёта на усталостную прочность собранного с радиальным натягом двухслойного цилиндра, в котором внутренний слой из металлокерамического твёрдого сплава предварительно сжат самоскреплённым (автофретированным) стальным корпусом.

Целесообразность этой впервые предложенной конструкции составного цилиндра следует из того факта, что верхний предел прочности многослойного составного сосуда при числе слоёв, стремящемся к бесконечности, и оптимальной конструкции приближается к прочности

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 443/556

идеального самоскреплённого (автофретированного) цилиндра с таким же точно полным отношением диаметров из того же материала с теми же прочностными свойствами [205].

Эта предложенная конструкция сочетает преимущества методов самоскрепления (автофретирования) и увеличения числа слоёв и при этом даёт больший эффект скрепления при значительно меньших затратах, тем более что мелкосерийный характер изготовления компрессорных машин не даёт возможности использовать селективный метод сборки для обеспечения гарантированного натяга между слоями составного цилиндра.

Решение задачи усталостной прочности для предложенной конструкции составного цилиндра [103] основывается на полученных и известных [271] результатах для самоскрепления (автофретирования) цилиндра из линейно упрочняющегося материала (1.19) – (1.21).

Созданный метод расчёта на усталостную прочность собранного с радиальным натягом двухслойного цилиндра, в котором внутренний слой из металлокерамического твёрдого сплава предварительно сжат самоскреплённым (автофретированным) стальным корпусом, для заданных условий нагружения (давлений всасывания и нагнетания), внутреннего диаметра (определяемого производительностью компрессора), механических характеристик материалов слоёв, отношения абсолютной величины остаточного сжимающего тангенциального (окружного) напряжения на внутренней поверхности самоскреплённого (автофретированного) слоя к соответствующему пределу текучести определяет напряжённое состояние составного цилиндра и устанавливает оптимальные натяг сборки и радиусы слоёв (рис. 5.5, 5.6).

Введём следующие обозначения (см. рис. 5.5, 5.6):

$r$  – текущий радиус;

$r_1, r_2, r_c$  – внутренний и внешний радиусы и радиус сборки двухслойного цилиндра соответственно;

$\alpha = r_2/r_1$ ;

$\beta = r_c/r_1$ ;

$q$  – радиальный натяг двухслойного цилиндра;

$E_1, \mu_1, E_2, \mu_2$  – модули продольной упругости Юнга и коэффициенты поперечной деформации Пуассона материалов внутреннего и внешнего слоёв двухслойного цилиндра соответственно;

$\sigma_s, \sigma_{-1}$  – предел текучести и предел усталости при симметричном цикле соответственно материала внешнего слоя двухслойного цилиндра;

$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min})/2$  – среднее напряжение цикла напряжения  $\sigma$  при циклическом нагружении;

$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2$  – амплитудное напряжение цикла напряжения  $\sigma$  при циклическом нагружении;

$p$  – внутреннее давление;

$p_{\min}, p_{\max}$  – давление всасывания и давление нагнетания соответственно;

$p_m = (p_{\max} + p_{\min})/2$  – среднее давление;

$p_a = (p_{\max} - p_{\min})/2$  – амплитудное давление;

$p_{c0}$  – контактное давление между слоями после сборки двухслойного цилиндра при нулевом внутреннем давлении;

$p_{cp}$  – контактное давление между слоями двухслойного цилиндра при внутреннем давлении  $p$ ;

$p_0$  – давление самоскрепления (автофретирования) внешнего слоя двухслойного цилиндра;

$\eta$  – отношение абсолютной величины остаточного сжимающего тангенциального (окружного) напряжения на внутренней поверхности самоскреплённого (автофретированного) внешнего слоя двухслойного цилиндра к пределу текучести  $\sigma_s$  материала внешнего слоя,  $0 \leq \eta \leq 1$ ;

$\gamma = r_0/r_c$  – относительный радиус упругопластической границы ( $r_0$  – радиус упругопластической границы упругой и пластической зон) самоскреплённого (автофретированного) внешнего слоя двухслойного цилиндра;

$\lambda = 1 - E_{p2}/E_2$  – показатель упрочнения материала внешнего слоя ( $E_{p2}$  – модуль упрочнения);

$\sigma_r, \sigma_t$  – радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения в двухслойном цилиндре.

Для определения поля напряжений в двухслойном цилиндре найдём контактное давление на поверхности сборки как функцию внутреннего давления [271]:

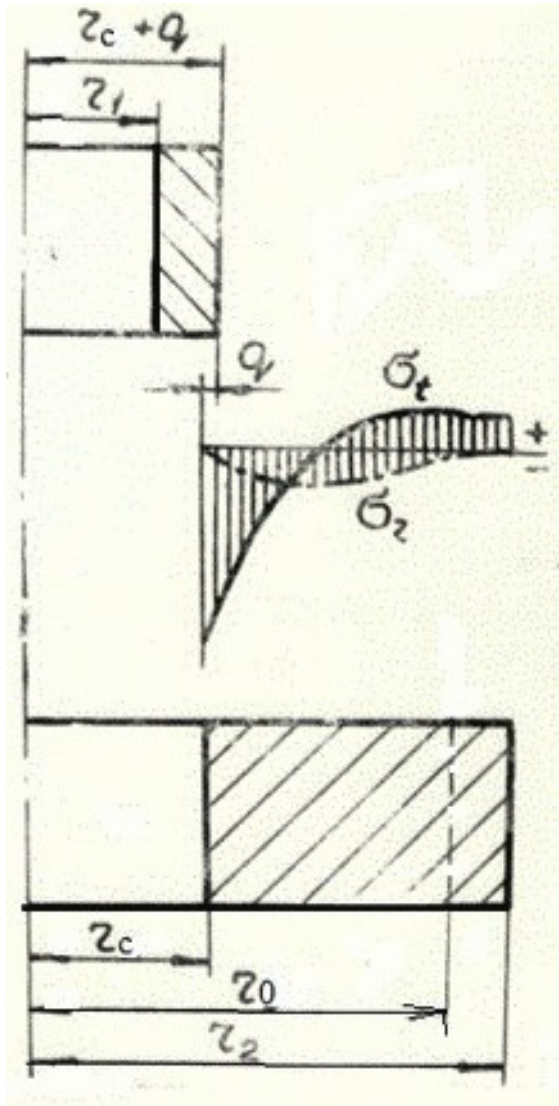


Рисунок 5.5. Внутренняя твердосплавная втулка и самоскреплённый (автофретированный) корпус до сборки:

$\sigma_r$ ,  $\sigma_t$  – соответственно радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения в корпусе;

----- граница упругой и пластической зон.

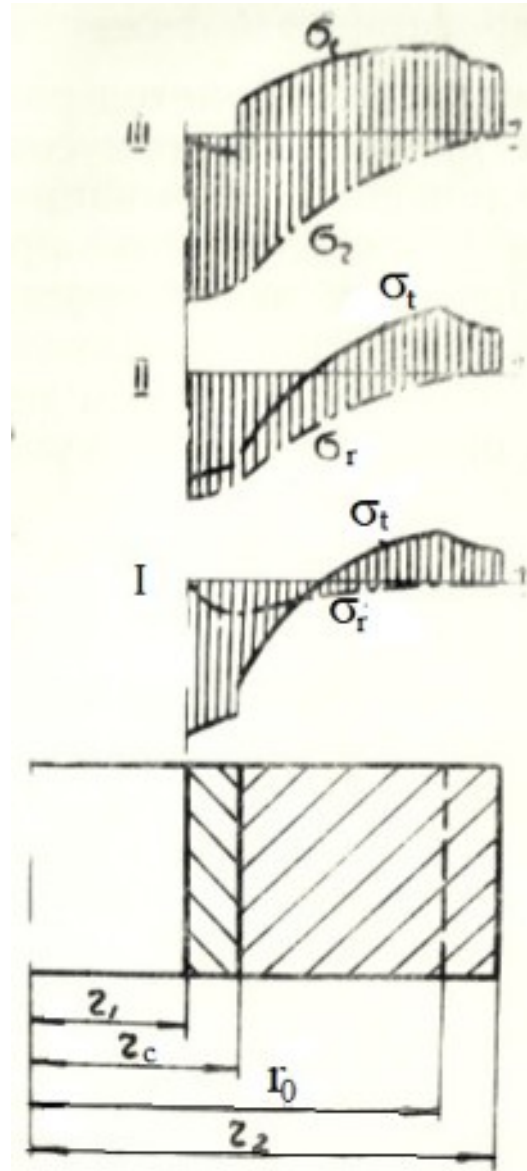


Рисунок 5.6. Эпюры радиального  $\sigma_r$  и тангенциального (окружного)  $\sigma_t$  напряжений в двухслойном цилиндре:

I – после сборки с натягом;

II – при всасывании;

III – при нагнетании.

(5.50)

$$p_{cp} = (q/r_c + 2p/((\beta^2 - 1)E_1))/(((\beta^2 + 1)/(\beta^2 - 1) - \mu_1)/E_1 + ((\alpha^2 + \beta^2)/(\alpha^2 - \beta^2) + \mu_2)/E_2).$$

Кроме того, определим давление самоскрепления (автофретирования)  $p_0$  внешнего слоя, обеспечивающее заданное  $\eta$  (случай  $\eta = 0$  соответствует отсутствию самоскрепления (автофретирования), ограничение  $\eta \leq 1$  принято во избежание вторичных пластических деформаций [140, 205]).

Точным решениям как по теории малых упругопластических деформаций при любом заданном законе упрочнения (диаграмме деформирования), так и по теории течения,

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 445/556

приведённым в [140, 298], предпочтём достаточно точное для практики замкнутое решение для материала с линейным упрочнением [271].

Связь между  $p_0$  и относительным радиусом  $\gamma$  упругопластической границы

(5.51)

$$p_0 = 3^{-1/2} \sigma_s ((1 - \lambda - \beta^2/\alpha^2)\gamma^2 + \lambda + 2\lambda \ln \gamma)$$

наряду с формулами для остаточных напряжений в пластической зоне ( $1 \leq \rho \leq \gamma$ ,  $\rho = r/r_c$ )

$$\sigma_{r0} = -p_0 + 3^{-1/2} \sigma_s ((1 - \lambda)\gamma^2(1 - 1/\rho^2) + 2\lambda \ln \rho) + p_0(\alpha^2/\rho^2 - \beta^2)/(\alpha^2 - \beta^2),$$

$$\sigma_{t0} = -p_0 + 3^{-1/2} \sigma_s (2\lambda + (1 - \lambda)\gamma^2(1 + 1/\rho^2) + 2\lambda \ln \rho) - p_0(\alpha^2/\rho^2 + \beta^2)/(\alpha^2 - \beta^2)$$

и в упругой зоне ( $\gamma \leq \rho \leq \alpha/\beta$ )

$$\sigma_{r0} = -p_0 + 3^{-1/2} \sigma_s (\gamma^2 - \gamma^2/\rho^2 - \lambda(\gamma^2 - 1) + 2\lambda \ln \gamma) + p_0(\alpha^2/\rho^2 - \beta^2)/(\alpha^2 - \beta^2),$$

$$\sigma_{t0} = -p_0 + 3^{-1/2} \sigma_s (\gamma^2 + \gamma^2/\rho^2 - \lambda(\gamma^2 - 1) + 2\lambda \ln \gamma) - p_0(\alpha^2/\rho^2 + \beta^2)/(\alpha^2 - \beta^2)$$

приводят к трансцендентному уравнению относительно  $\gamma$

$$\alpha^2((1 - \lambda - \beta^2/\alpha^2)\gamma^2 + \lambda + 2\lambda \ln \gamma)/(\alpha^2 - \beta^2) - \lambda - (1 - \lambda)\gamma^2 = 3^{1/2} \eta/2,$$

численное решение которого с учётом формулы (5.51) определяет давление самоскрепления (автофретирования)  $p_0$  внешнего слоя и поле остаточных напряжений во внешнем слое.

Погрешность, возникающая вследствие механической обработки самоскреплённого (автофретированного) слоя, невелика.

Теперь формулы Ламе [358] позволяют с помощью формулы (5.50) определить поле рабочих напряжений во внутренней твердосплавной втулке

(5.52)

$$\sigma_r(r) = (p - p_{cp}\beta^2)/(\beta^2 - 1) - (p - p_{cp})(r_c/r)^2/(\beta^2 - 1),$$

(5.53)

$$\sigma_t(r) = (p - p_{cp}\beta^2)/(\beta^2 - 1) + (p - p_{cp})(r_c/r)^2/(\beta^2 - 1)$$

и во внешнем слое

(5.54)

$$\sigma_r(r) = -p_{cp}(\alpha^2/\rho^2 - \beta^2)/(\alpha^2 - \beta^2) + \sigma_{r0},$$

(5.55)

$$\sigma_t(r) = p_{cp}(\alpha^2/\rho^2 + \beta^2)/(\alpha^2 - \beta^2) + \sigma_{t0}$$

в зависимости от внутреннего давления  $p$ , изменяющегося от давления всасывания  $p_{\min}$  до давления нагнетания  $p_{\max}$ .

Эти формулы доказывают наибольшую опасность напряжённого состояния именно внутренних поверхностей слоёв составного цилиндра как по средним напряжениям, так и по амплитудным напряжениям.

Кроме того, многолетняя практика использования цилиндров поршневых компрессоров показывает, что разрушение таких цилиндров начинается с внутренней поверхности.

Эти два обстоятельства делают необходимым анализ напряжённого состояния на внутренних поверхностях слоёв составного цилиндра.

Для работы лишь в области сжатия внутренней твердосплавной втулки необходимо и достаточно, чтобы в ней при нагнетании тангенциальное (окружное) напряжение было не растягивающим, то есть

$$\sigma_t \leq 0.$$

Отсюда находим минимально необходимое контактное давление  $p_{c0}$  между слоями после сборки двухслойного цилиндра при нулевом внутреннем давлении и соответствующий радиальный натяг двухслойного цилиндра

(5.56)

$q = n_r r_c \{ (\beta^2 + 1)/(2\beta^2) [ (\beta^2 + 1)/(\beta^2 - 1) - \mu_1 + ((\alpha^2 + \beta^2)/(\alpha^2 - \beta^2) + \mu_2) E_1/E_2 ] - 2/(\beta^2 - 1) \} (p_m + p_a)/E_1$ , где запас на релаксацию  $n_r > 1$  выбирается с учётом ослабления (релаксации) предварительных напряжений (отсутствию ослабления соответствовало бы  $n_r = 1$ ).

Определяемые по формулам (5.52) – (5.55) характеристики циклов радиального  $\sigma_r$ , тангенциального (окружного)  $\sigma_t$  и равносильного (эквивалентного) напряжений

$$\sigma_e = \sigma_t - \sigma_r$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 446/556

по третьей теории прочности (критерию наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска в сравнении с прочностными характеристиками металлокерамики в области сжатия (равно как и опыт использования цилиндров с внутренней твердосплавной втулкой) показывают, что разрушения можно ожидать только при выходе тангенциального (окружного) напряжения  $\sigma_t$  на внутренней поверхности этой втулки в область растяжения вследствие ослабления остаточных (при нулевом внутреннем давлении  $p$ ) контактного давления  $p_{c0}$  между слоями после сборки двухслойного цилиндра и вызванных  $p_{c0}$  напряжений во внутренней твердосплавной втулке.

Поэтому необходимо и достаточно обеспечить должный радиальный натяг (5.56).

Изменение тензора напряжений на внутренней поверхности самоскрепленного (автофретированного) слоя в данном случае приемлемо отражается циклическим изменением равносильного (эквивалентного) напряжения

$$\sigma_e = \sigma_t - \sigma_r$$

по третьей теории прочности (критерию наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска.

Линейное приближение Зодерберга

$$\sigma_m/\sigma_s + \sigma_a/\sigma_{-1} = 1$$

диаграммы усталостной прочности Хэя позволяет найти запас прочности внешнего слоя (с небольшим недостатком)

$$n = 1/(A(1 + 1/\beta^2)/(\alpha^2 - \beta^2) + C/(C_0 + C_1\beta^2 + C_2\beta^4) - \eta), \quad (5.57)$$

где

$$\begin{aligned} A &= n_r \alpha^2 (p_m + p_a) / \sigma_s, \\ C &= 4\alpha^2 (p_m / \sigma_s + p_a / \sigma_{-1} - n_r (p_m + p_a) / \sigma_s), \\ C_0 &= (1 - \mu_1) \alpha^2 - (1 + \mu_2) E_1 / E_2, \\ C_1 &= (1 - \mu_1) \alpha^2 - (1 + \mu_1) + ((1 + \mu_2) \alpha^2 - (1 - \mu_2)) E_1 / E_2, \\ C_2 &= - (1 - \mu_1) + (1 - \mu_2) E_1 / E_2. \end{aligned}$$

Дифференцирование обратной величины  $1/n$  запаса прочности  $n$  внешнего слоя по

$$B = \beta^2$$

при фиксированном  $\alpha$  позволяет найти наилучшее значение

$$\beta = B^{1/2}$$

из алгебраического уравнения

$$A(B^2 + 2B - \alpha^2)(C_0 + C_1B + C_2B^2)^2 = C(C_1 + 2C_2B)(\alpha^2B - B^2)^2, \quad (5.58)$$

которое решается численным методом.

Из формулы (5.57) следует, что при недостатке  $n$  необходимо увеличить  $\alpha$ , при избытке  $n$  уменьшить  $\alpha$  и каждый раз искать наилучшее значение  $\beta$ , которое согласно уравнению (5.58) при стремлении  $\alpha$  к бесконечности стремится к бесконечности как  $\alpha^{1/2}$ .

Исходя из этого, устанавливаем верхний предел запаса усталостной (циклической) прочности  $n$  предложенной конструкции

$$n \leq \sigma_{s2} / [n_r (p_m + p_a) - \eta \sigma_{s2}].$$

Экспериментальные исследования доказывают практическую применимость методов расчёта как многослойных, так и самоскрепленных (автофретированных) цилиндров [205].

Это обстоятельство, не отменяя необходимости и полезности опытного изучения предлагаемой конструкции (тем более что релаксацию напряжений ещё предстоит оценить количественно), позволяет именно вполне обоснованно надеяться на целесообразность использования собранного с радиальным натягом двухслойного цилиндра, в котором внутренний слой из металлокерамического твёрдого сплава предварительно сжат самоскрепленным (автофретированным) стальным корпусом, для компрессоров высокого давления.

То есть применительно к циклическому нагружению предложена именно рациональная конструкция составного цилиндра, включающего работающий лишь на сжатие внутренний

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 447/556

металлокерамический твердосплавный слой в самоскрепленном (автофретированном) внешнем слое.

Она позволяет именно комплексно использовать преимущества известных методов скрепления толстостенных цилиндров:

упрочнение путём увеличения числа слоёв с радиальными натягами между ними; высокую прочность при сжатии, химическую стойкость и износостойкость металлокерамических твёрдых сплавов;

возможность достижения эффекта упрочнения при самоскреплении (автофретировании) цельного цилиндра равносильно (эквивалентно) наилучшему многослойному цилиндру из того же пластичного материала с теми же габаритами при теоретически бесконечном увеличении числа слоёв.

К тому же увеличение числа слоёв свыше трёх-четырёх технологически затруднительно, особенно с учётом мелкосерийного характера производства составных цилиндров, препятствующего их селективной сборке.

Предложенная именно рациональная конструкция составного цилиндра позволяет избежать как понижения химической стойкости металла (особенно против межкристаллитной коррозии) при пластическом деформировании, так и недостаточной износостойкости рабочей поверхности, уже не относящейся к самоскрепленному (автофретированному) цилиндру.

Неположительность окружного напряжения во внутреннем слое предложенной конструкции составного цилиндра не позволяет использовать решение А. В. Гадолина [87] и его обобщение Х. Л. Пью [205].

В этой же задаче возможно и связанное с отказом от неположительности окружного напряжения во внутреннем слое предложенной конструкции составного цилиндра использование предложенного метода приведения критериев предельных состояний на случай различно сопротивляющихся растяжению и сжатию материалов при циклическом нагружении.

Приведённая третья теория прочности (2.130) с общим преобразованием напряжений (2.124) позволяет с учётом тангенциальных (окружных)

$$\begin{aligned}\sigma_{t1}(r_1) &= 2r_c^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1} \{p[1 - 2r_1^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}E_1^{-1}A_c^{-1}] - p_c\} - p; \\ \sigma_{t2}(r_c) &= (r_2^2 + r_c^2)(r_2^2 - r_c^2)^{-1}[2pr_1^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}E_1^{-1}A_c^{-1} + p_c] - \eta\sigma_{s2}\end{aligned}$$

( $A_c$  принимается по формуле (5.12)) и радиальных

$$\begin{aligned}\sigma_{r1}(r_1) &= -p; \\ \sigma_{r2}(r_c) &= -2pr_1^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}E_1^{-1}A_c^{-1} - p_c\end{aligned}$$

напряжений на опасных внутренних поверхностях обоих слоёв обеспечить максимум общего запаса их усталостной прочности.

Вновь для получения замкнутых результатов необходимо и достаточно линейное приближение соответствующей правой половины диаграммы Хэя

$$\begin{aligned}(2\sigma_m + \sigma_c - \sigma_t)/(\sigma_t + \sigma_c) + \sigma_a/\sigma_{-1}' &= 1, \\ \sigma_{-1}' &= \max\sigma_a(\sigma_m)\end{aligned}$$

или только положительной части диаграммы Хэя

$$\sigma_m/\sigma_t + \sigma_a/\sigma_{-1} = 1,$$

в обоих случаях с обобщениями приближения Гудмена.

Соответственно получаются изложенные ниже результаты для различных одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию материалов слоёв в случае линейного приближения соответствующей правой половины диаграммы Хэя с заменами

$$\sigma_{u1}, \sigma_{u2}, \sigma_{-11}, \sigma_{-12}$$

на

$$(\sigma_{t1} + \sigma_{c1})/2, (\sigma_{t2} + \sigma_{c2})/2, \sigma_{-11}' = \max\sigma_{a1}(\sigma_{m1}), \sigma_{-12}' = \max\sigma_{a2}(\sigma_{m2})$$

соответственно, а в случае линейного приближения только положительной части диаграммы Хэя с заменами

$$\sigma_{u1}, \sigma_{u2}$$

на

$$\sigma_{11}, \sigma_{12}$$

соответственно.

Для таких материалов на внутренних поверхностях слоёв

$$\begin{aligned}\sigma_{e1m}(r_1) &= 2r_c^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1} \{p_m[1 - 2r_1^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}E_1^{-1}A_c^{-1}] - p_c\}; \\ \sigma_{e1a}(r_1) &= 2r_c^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}p_a[1 - 2r_1^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}E_1^{-1}A_c^{-1}]; \\ \sigma_{e2m}(r_c) &= 2r_2^2(r_2^2 - r_c^2)^{-1}[2p_m r_1^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}E_1^{-1}A_c^{-1} + p_c] - \eta\sigma_{s2}; \\ \sigma_{e2a}(r_c) &= 4r_1^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}r_2^2(r_2^2 - r_c^2)^{-1}p_a E_1^{-1}A_c^{-1},\end{aligned}$$

и условие их циклической равнопрочности

$$\sigma_{e1m}(r_1)/\sigma_{u1} + \sigma_{e1a}(r_1)/\sigma_{-11} = \sigma_{e2m}(r_c)/\sigma_{u2} + \sigma_{e2a}(r_c)/\sigma_{-12}$$

устанавливает контактное давление  $p_{c0}$  после сборки при нулевом внутреннем давлении  $p$

$$p_{c0} = \{r_c^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}(p_m/\sigma_{u1} + p_a/\sigma_{-11})[1 - 2r_1^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}E_1^{-1}A_c^{-1}] - 2r_2^2(r_2^2 - r_c^2)^{-1}(p_m/\sigma_{u2} + p_a/\sigma_{-12})r_1^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}E_1^{-1}A_c^{-1} + (1/2)\eta\sigma_{s2}/\sigma_{u2}\} / [r_c^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}/\sigma_{u1} + r_2^2(r_2^2 - r_c^2)^{-1}/\sigma_{u2}]$$

с обращённым общим запасом усталостной (циклической) прочности слоёв

$$1/n_1 = 1/n_2 = 1/n = 2 \{p_m/\sigma_{u1} + (p_a/\sigma_{-11})[1 + 2(\sigma_{u1}^{-1}\sigma_{u2}\sigma_{-11}\sigma_{-12}^{-1} - 1)r_1^2(r_c^2 - r_1^2)^{-1}E_1^{-1}A_c^{-1}] - (1/2)\eta\sigma_{s2}/\sigma_{u1}(1 - r_c^2/r_2^2)\} / [1 + \sigma_{u1}^{-1}\sigma_{u2} - (r_1^2/r_c^2 + \sigma_{u1}^{-1}\sigma_{u2}r_c^2/r_2^2)].$$

В целях получения универсального значения наилучшего радиуса сопряжения  $r_c|_{\eta=0}$  положим пределы усталости при симметричном цикле пропорциональными пределам прочности материалов слоёв.

Тогда числитель становится инвариантом, а искомым максимум знаменателя устанавливается элементарно даже без дифференцирования.

Так как среднее арифметическое неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического, то

$$r_1^2/r_c^2 + \sigma_{u1}^{-1}\sigma_{u2}r_c^2/r_2^2 \geq 2(\sigma_{u2}/\sigma_{u1})^{1/2}r_1/r_2$$

с равенством при условии равенства этих чисел между собой

$$r_c = (\sigma_{u1}/\sigma_{u2})^{1/4}(r_1r_2)^{1/2},$$

так что

$$1/n_1 = 1/n_2 = 1/n = 2[p_m + (\sigma_{u1}/\sigma_{-11})p_a] / [\sigma_{u1} - 2(\sigma_{u1}\sigma_{u2})^{1/2}r_1/r_2 + \sigma_{u2}]$$

с обобщением на случай циклического нагружения результатов Х. Л. Пью [205] (1.13') по наилучшему проектированию составного цилиндра со слоями из различных материалов, причём статический эквивалент циклического внутреннего давления

$$p_e = p_m + (\sigma_{u1}/\sigma_{-11})p_a = p_m + (\sigma_{u2}/\sigma_{-12})p_a.$$

Заметим, что универсальное преобразование (2.124) и результаты С. Г. Лехницкого [187] позволяют получить решение задачи усталостной прочности для составного цилиндра и при анизотропных различно сопротивляющихся растяжениям и сжатиям материалах слоёв.

## 5.6. Теория концентрации напряжений в несущих деталях сосудов высокого давления

Основными концентраторами напряжений в несущих деталях сосудов высокого давления (корпусах, заглушках, крепёжных элементах) являются галтели и отверстия.

Рациональным выбором образующих галтелей обычно удаётся снизить напряжения в них до безопасных пределов, что подтверждается как различными аналитическими, численными (рис. 5.7) и экспериментальными методами исследований, так и практикой использования сосудов высокого давления.

Отсюда следует наибольшая опасность концентрации напряжений именно у отверстий в корпусе и заглушках.

Если, как это обычно имеет место, заглушки являются плоскими, то поля номинальных напряжений в них определяются общими (полу)степенным и интегральным аналитическими методами макроэлементов непосредственно по изложенным формулам, а действительные напряжения с учётом концентрации по этим номинальным напряжениям – с помощью решения Кирша [319, 321], и дополнительного учёта влияния внутреннего давления в



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 449/556

отверстии но формулам Ламе [358] для цилиндра теоретически бесконечной толстостенности.

Для радиальных отверстий круглой формы в корпусах, как известно [205], коэффициент концентрации равносильного (эквивалентного) напряжения по третьей теории прочности равен 2.5, причём оно максимально в двух точках пересечения поверхности отверстия, внутренней поверхности корпуса и плоскости, проходящей через их оси.

Известные исследования концентрации напряжений у отверстий произвольной формы [64, 341] показывают, что в неравноосном поле номинальных напряжений наилучшей является именно эллиптическая форма одиночного отверстия, однако неясно наилучшее отношение осей эллипса в случае действия давления на поверхность отверстия.

Кроме того, для проектирования сосудов с отверстиями необходимо располагать формулами для напряжений на поверхностях отверстий и в случае эллиптической формы отверстия с произвольным отношением осей эллипса.

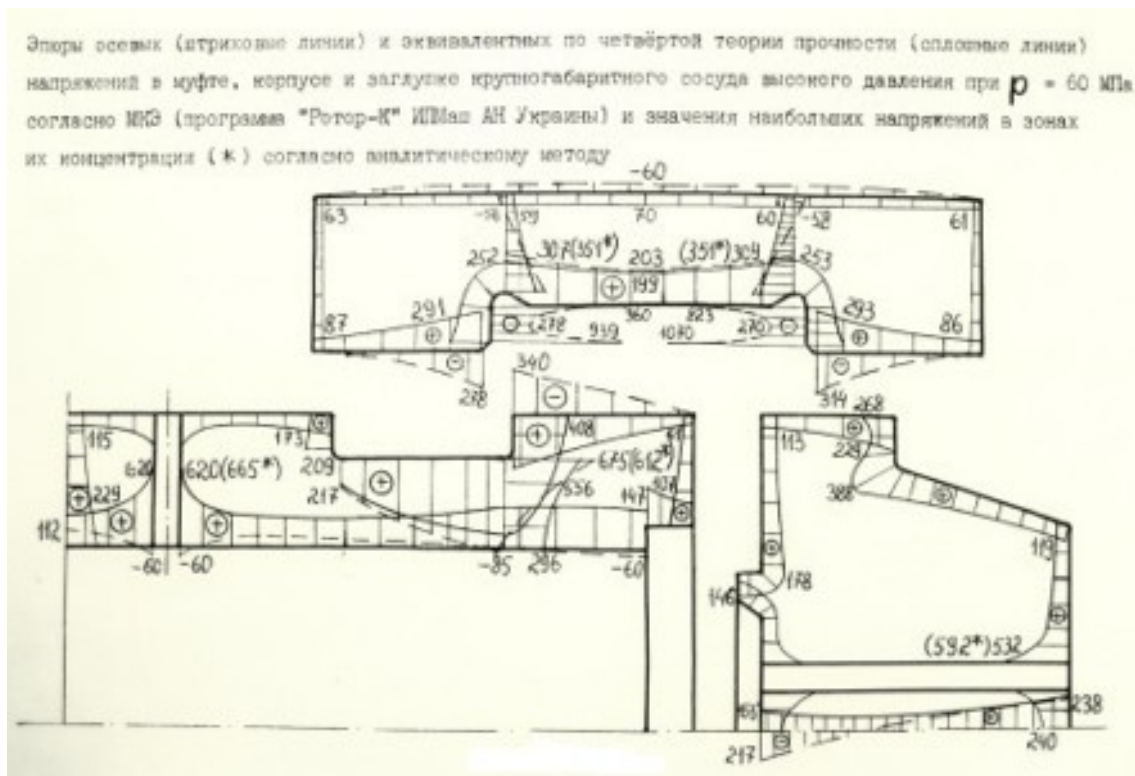


Рисунок 5.7. Эпюры осевых (штриховые линии) и равносильных (эквивалентных) по четвёртой теории прочности (сплошные линии) напряжений в муфте, корпусе и заглушке крупногабаритного сосуда высокого давления при  $p = 60$  МПа по методу конечных элементов (МКЭ, программа «Ротор-К» Института проблем машиностроения АН Украины) и значения наибольших напряжений в зонах их концентрации (\*) согласно общему (полу)степенному аналитическому методу макроэлементов.

Как и в частном случае круглого отверстия, для получения инженерного решения для напряжений на поверхности эллиптического отверстия исследуем случай плоского напряжённого состояния.

Рассмотрим бесконечную пластину с эллиптическим отверстием, контур которого нагружен давлением  $p$ , растягиваемую вдали от отверстия главными напряжениями  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , причём связанная с ними система координат  $x'Oy'$  – результат поворота на угол  $\alpha$  (отсчитываемый против часовой стрелки, как и поворот от оси  $Ox'$  до оси  $Oy'$ ) связанной с эллиптическим отверстием главной системы координат  $xOy$  (рис. 5.8, а).

Введя обозначение

$$m_0 = (x_0 - y_0)/(x_0 + y_0),$$

где  $x_0, y_0$  – соответственно большая и малая полуоси эллипса,

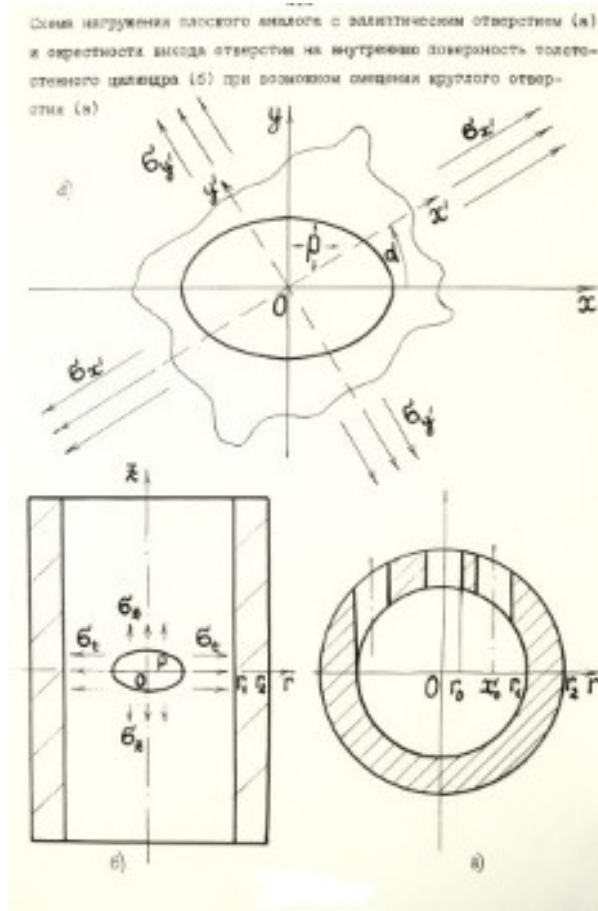


Рисунок 5.8. Схема нагружения плоского аналога с эллиптическим отверстием (а) и окрестности выхода отверстия на внутреннюю поверхность толстостенного цилиндра (б) при возможном смещении круглого отверстия (в).

суперпозицией обобщающих задачи Ламе [358] и Кирша [319, 321] известных решений А. И. Лурье [193] и Н. И. Мусхелишвили [212] устанавливаем, что на контуре отверстия наряду с радиальным напряжением

$$\sigma_r = -p$$

тангенциальное (окружное) напряжение  $\sigma_\varphi$  состоит из парциальных вкладов от давления  $p$  на контур

$$\sigma_{\varphi p}(\varphi) = p + 4pm_0(\cos 2\varphi - m_0)/(1 - 2m_0 \cos 2\varphi + m_0^2),$$

от напряжения  $\sigma_x$

$$\sigma_{\varphi x}(\varphi) = \sigma_x[1 - m_0^2 + 2m_0 \cos 2\alpha - 2\cos 2(\varphi - \alpha)]/(1 - 2m_0 \cos 2\varphi + m_0^2)$$

и от напряжения  $\sigma_y$

$$\sigma_{\varphi y}(\varphi) = \sigma_y[1 - m_0^2 - 2m_0 \cos 2\alpha + 2\cos 2(\varphi - \alpha)]/(1 - 2m_0 \cos 2\varphi + m_0^2).$$

В результате по принципу наложения (суперпозиции)

$$\sigma_\varphi(\varphi) = \sigma_{\varphi p}(\varphi) + \sigma_{\varphi x}(\varphi) + \sigma_{\varphi y}(\varphi).$$

В представляющем интерес для предпринятого исследования частном случае действия главных напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  по главным осям эллипса ( $\alpha = 0$ )

$$(5.59)$$

$$\sigma_\varphi(\varphi) = p + [-4m_0^2 p + (1 - m_0^2)(\sigma_x + \sigma_y) + 2m_0(\sigma_x - \sigma_y) - 2(\sigma_x - \sigma_y - 2m_0 p)\cos 2\varphi]/(1 - 2m_0 \cos 2\varphi + m_0^2).$$

Производная тангенциального (окружного) напряжения

$$d\sigma_\varphi(\varphi)/d\cos 2\varphi = 2(1 - m_0^2)[m_0(2p + \sigma_x + \sigma_y) - (\sigma_x - \sigma_y)]/(1 - 2m_0 \cos 2\varphi + m_0^2)^2$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 451/556

с учётом  $m_0 \geq 0$  аннулируется или при  $m_0 = 0$  с вырождением эллипса в отрезок, что важно для механики разрушения, но в решаемой задаче не имеет места, или при условии

$$m_0 = (\sigma_x - \sigma_y)/(2p + \sigma_x + \sigma_y),$$

равносильном (эквивалентном) соотношению

$$(5.60)$$

$$x_0/y_0 = (p + \sigma_x)/(p + \sigma_y),$$

обеспечивающему ввиду независимости от  $\varphi$  постоянство окружного напряжения на контуре

$$(5.61)$$

$$\sigma_\varphi(\varphi) = p + \sigma_x + \sigma_y.$$

Для полноты исследований устанавливаем, что тангенциальное (окружное) напряжение  $\sigma_\varphi(\varphi)$  на концах области изменения  $\cos 2\varphi$ , то есть при

$$\cos 2\varphi = \pm 1,$$

то есть при

$$\varphi = \pi k,$$

а также при

$$\varphi = \pi/2 + \pi k,$$

где

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$$

то есть в концах осей эллипса – большой

$$(5.62)$$

$$\sigma_\varphi(0) = (2x_0/y_0 - 1)p + (1 + 2x_0/y_0)\sigma_y - \sigma_x$$

и малой

$$(5.63)$$

$$\sigma_\varphi(\pi/2) = (2y_0/x_0 - 1)p + (1 + 2y_0/x_0)\sigma_x - \sigma_y$$

– превышают значение (5.59) соответственно при условиях

$$x_0/y_0 > (p + \sigma_x)/(p + \sigma_y),$$

и

$$y_0/x_0 > (p + \sigma_y)/(p + \sigma_x)$$

и равны между собой и значению (5.59) тогда и только тогда, когда вместо последних двух неравенств имеют место равносильные (эквивалентные) между собой равенства.

Следовательно, минимакс тангенциального (окружного) напряжения

$$\min_{x_0/y_0} \max_{\varphi} \sigma_\varphi(\varphi)$$

имеет место при отношении осей эллипса, равном отношению соответствующих напряжений вдали от отверстия, сложенных с величиной давления на контуре отверстия.

При этом тангенциальное (окружное) напряжение постоянно по контуру отверстия и равно сумме давления на его контуре и главных напряжений вдали от отверстия.

Равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности

$$(5.64)$$

$$\sigma_e(\varphi) = \sigma_\varphi(\varphi) - \sigma_p(\varphi) = \sigma_\varphi(\varphi) + p$$

при наилучшей форме отверстия составляет

$$(5.65)$$

$$\sigma_e(\varphi) = 2p + \sigma_x + \sigma_y.$$

Заметим, что условие (5.60) является обобщением известного условия [64, 341], относящегося лишь к случаю  $p = 0$ .

Симметричное вхождение  $x$  и  $y$  в формулы (5.59) и (5.60) позволяет использовать их безотносительно ограничения

$$x_0/y_0 \geq 1.$$

Необходима и достаточна неотрицательность полуосей эллипса  $x_0$  и  $y_0$ , равносильная (эквивалентная) совпадению знаков сумм  $p + \sigma_x$  и  $p + \sigma_y$ .

В противоречащем случае минимакс и осуществляющая его инвариантность тангенциального (окружного) и равносильного (эквивалентного) напряжений на контуре

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 452/556

отверстия недостижимы и взамен идеального решения проблемы с равнопрочностью по контуру получается обеспечивающая улучшение зависимость: чем больше вытянут эллипс в соответствующем направлении, тем меньше максимумы тангенциального (окружного) и равносильного (эквивалентного) напряжений, неравномерных на контуре отверстия.

В задаче для цилиндра с отверстием (рис. 5.8, б) по формулам Ламе для осевого  $\sigma_z$  и тангенциального (окружного)  $\sigma_t$  напряжений на внутренней поверхности цилиндра

$$(5.66) \\ \sigma_x = \sigma_t = p(r_2^2 + r_1^2)/(r_2^2 - r_1^2); \\ \sigma_y = \sigma_z = pr_1^2/(r_2^2 - r_1^2).$$

Ввиду положительности обеих сумм  $p + \sigma_x$  и  $p + \sigma_y$  существует идеальное решение проблемы с равнопрочностью по контуру эллиптического отверстия, причём наилучшее отношение полуосей эллипса

$$x_0/y_0 = (p + \sigma_x)/(p + \sigma_y) = (p + \sigma_t)/(p + \sigma_z) = 2$$

с наилучшим эксцентриситетом

$$(1 - y_0^2/x_0^2)^{1/2} = (1 - 1/4)^{1/2} = 3^{1/2}/2$$

является инвариантом относительной толстостенности цилиндра и на всей кривой выхода отверстия на внутреннюю поверхность цилиндра тангенциальное (окружное) и равносильное (эквивалентное) напряжения равномерны:

$$(5.67) \\ \sigma_\varphi(\varphi) = p + \sigma_x + \sigma_y = p + \sigma_t + \sigma_z = p(2r_2^2 + r_1^2)/(r_2^2 - r_1^2); \\ \sigma_e(\varphi) = 2p + \sigma_x + \sigma_y = p + \sigma_t + \sigma_z = 3pr_2^2/(r_2^2 - r_1^2).$$

Из формул (5.62) – (5.64) и (5.66) с учётом

$$\sigma_t(r_1) = -p$$

в сопоставлении с (5.67) устанавливаем, что в случае эллиптического отверстия наилучшего эксцентриситета  $3^{1/2}/2$  концентрация равносильного (эквивалентного) напряжения в цилиндре произвольной толстостенности относительно равносильного (эквивалентного) напряжения вдали от отверстия выражается коэффициентом 1.5 взамен 2.5 для случая круглого отверстия. Однако выполнение отверстия эллиптической формы в толстостенном цилиндре технологически затруднительно, к тому же резко осложняются проблемы присоединения и герметизации трубопроводной арматуры.

Поэтому представляется рациональным обеспечить наилучшую форму выхода на внутреннюю поверхность цилиндра отверстия круглого сечения за счёт параллельного переноса оси отверстия в пределах поперечного сечения цилиндра (рис. 5.8, в).

При этом ось отверстия, оставаясь нормальной к оси цилиндра, уже не пересекается, а скрещивается с ней.

Предел рационального смещения отверстия соответствует касанию внутренней поверхности цилиндра с крайней (в сторону смещения) образующей отверстия, – назовём такую ориентацию отверстия тангенциальной (касательной).

Отношение осей именно неплоского выхода отверстия на внутреннюю поверхность цилиндра (неплоскостность существенна для не совсем малого радиального отверстия канонической несмещённой радиальной ориентации с осью отверстия вдоль радиуса цилиндра или для смещённого отверстия) можно учесть по развёртке внутренней поверхности цилиндра.

При увеличении радиуса радиального отверстия круглого сечения от нуля до внутреннего радиуса цилиндра отношение осей выхода отверстия растёт от 1 до  $\pi/2 \approx 1.57$  и коэффициент концентрации напряжений снижается с 2.5 до 1.76 согласно (5.62) и (5.63), что согласуется с выводами Дж. Джердина [355, 356].

Для рационального проектирования цилиндрического корпуса со смещённым отверстием круглой формы следует установить, на какое расстояние  $x_0'$  надо сместить от радиальной ориентации отверстие радиусом  $r_0$ , чтобы на развёртке внутренней поверхности цилиндра радиусом  $r_1$  получить кривую выхода отверстия, близкую к эллипсу с наилучшим двукратным отношением осей (см. рис. 5.8, в).

При этом длина дуги – прообраза большой оси выхода на развёртке –

$$L = r_1 \{ \arccos[(x_0' - r_0)/r_1] - \arccos[(x_0' + r_0)/r_1] \} = 4r_0.$$

$x_0'$  определяется трансцендентным уравнением

$$(5.68)$$

$$\arccos[(x_0' - r_0)/r_1] - \arccos[(x_0' + r_0)/r_1] = 4r_0/r_1.$$

Необходимым и достаточным условием существования его решения, единственного в силу монотонного возрастания левой части уравнения (5.68) вместе с  $x_0'$  при его изменении от 0 до крайнего значения  $r_1 - r_0$ , является неравенство

$$\arccos(1 - 2r_0/r_1) \geq 4r_0/r_1,$$

в котором слева стоит левая часть уравнения (5.68) при

$$x_0' = r_1 - r_0.$$

Ввиду строго монотонного убывания косинуса на отрезке  $[0, \pi]$  последнему неравенству равносильно (эквивалентно)

$$(5.69)$$

$$1 - 2r_0/r_1 \leq \cos(4r_0/r_1).$$

Вследствие разложения

$$\cos(4r_0/r_1) = 1 - 2!^{-1}16r_0^2/r_1^2 + 4!^{-1}256r_0^4/r_1^4 - \dots$$

достаточным условием существования решения трансцендентного уравнения (5.68) оказывается

$$1 - 2!^{-1}16r_0^2/r_1^2 \geq 1 - 2r_0/r_1,$$

равносильное (эквивалентное) неравенству

$$r_0/r_1 \leq 1/4.$$

Ввиду (5.69) необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (5.68) является

$$(5.70)$$

$$r_0/r_1 \leq \alpha_0,$$

где  $\alpha_0$  – корень трансцендентного уравнения

$$\cos(4\alpha_0) = 1 - 2\alpha_0,$$

составляющий

$$\alpha_0 = 0.277\dots,$$

чем несколько уточняется достаточное условие

$$r_0/r_1 \leq 1/4.$$

В большинстве действительных конструкций сосудов высокого давления условие (5.70) выполнено и следует решать трансцендентное уравнение (5.68).

В противоречащем случае наилучшим, хотя и недостаточным для инвариантности тангенциального (окружного) и равносильного (эквивалентного) напряжений на выходе отверстия, является смещение

$$x_0' = r_1 - r_0$$

отверстия круглого поперечного сечения в тангенциальное (касательное) положение.

При

$$r_0 = r_1$$

получаем

$$x_0' = 0,$$

что вполне соответствует нецелесообразности смещения отверстия круглого поперечного сечения радиусом, равным внутреннему радиусу толстостенного цилиндра.

Наряду с конструктивными способами упрочнения несущих деталей сосудов высокого давления с концентраторами напряжений могут использоваться и технологические способы, обычно приводящие к поверхностному пластическому деформированию: статические (термоскрепление; раскатывание, обкатывание, вибрационное накатывание и выглаживание роликами или шариками; дорнование отверстий) и ударные (чеканка; центробежная, дробеструйная, вибрационная, ультразвуковая обработка и др.).

Наиболее предпочтительным является естественное для техники высоких давлений самоскрепление (автофретирование), приводящее к именно объёмному пластическому

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 454/556

деформированию. Лишь оно осуществляется нагружением упрочняемого элемента и, более того, конструкции в целом, которое подобно рабочему нагружению.

При этом наибольшие по модулю сжимающие остаточные напряжения создаются именно в тех точках конструкции, в которых действуют максимальные растягивающие рабочие напряжения, так что может быть осуществлено поле остаточных напряжений, оптимизирующее прочность конструкции.

Самоскрепление (автофретирование) к тому же наиболее технологично ввиду резкого снижения трудоёмкости и вследствие ненадобности дополнительной оснастки и представляется наиболее рациональным, если только вообще необходимо упрочнение.

Выбор наилучшего давления самоскрепления (автофретирования)

$$p_a > 1.25p = p_{test}$$

в соответствии с необходимостью [249] испытания превышающим рабочее давление  $p$  пробным давлением  $p_{test}$  определяется наибольшими рабочими напряжениями и, следовательно, коэффициентами их концентрации в несущих элементах упрочняемой конструкции.

Пусть, например, наибольший коэффициент концентрации упругого равносильного (эквивалентного) напряжения в корпусе сосуда высокого давления, например у отверстия или в галтели, относительно упругого равносильного (эквивалентного) напряжения на гладкой цилиндрической части внутренней поверхности корпуса вдали от концентраторов напряжений составляет  $C_f$ .

Тогда давлению самоскрепления (автофретирования) корпуса  $p_{ac}$  соответствует фиктивный максимум упругого равносильного (эквивалентного) напряжения

$$\sigma_{ec}(p_{ac}) = 2C_f p_{ac} r_2^2 / (r_2^2 - r_1^2).$$

В предположении идеальной пластичности материала корпуса действительный максимум равносильного (эквивалентного) напряжения

$$\sigma_{ec}(p_{ac}) = \sigma_s.$$

После сброса давления самоскрепления (автофретирования) корпуса  $p_{ac}$  при отсутствии вторичных пластических деформаций в корпусе упругая разгрузка даёт равносильное (эквивалентное) напряжение

$$\sigma_{ec}(0) = \sigma_s - 2C_f p_{ac} r_2^2 / (r_2^2 - r_1^2).$$

Если в первом приближении пренебречь эффектом Баушингера [151, 199], то анализ разности тангенциального (окружного) и радиального напряжений с учётом её знака приводит к условию отсутствия вторичных пластических деформаций

$$\sigma_s - 2C_f p_{ac} r_2^2 / (r_2^2 - r_1^2) \geq -\sigma_s$$

и к соответствующей верхней границе давления самоскрепления (автофретирования):

$$(5.71)$$

$$p_{ac} \leq C_f^{-1} \sigma_s (r_2^2 - r_1^2) / r_2^2.$$

Действительная погрешность формулы (5.71) от принятия совокупности допущений идеальной пластичности и отсутствия эффекта Баушингера снижается взаимной компенсацией противоположных их влияний.

В правую часть формулы (5.71) может быть введен множитель  $C_{2p}^{-1}$ , где  $C_{2p} > 1$  – коэффициент запаса по вторичным пластическим деформациям.

Получив подобные формулы и для других несущих элементов (заглушек и крепёжных элементов, например захватов), устанавливаем рекомендуемое давление самоскрепления (автофретирования) конструкции в целом  $p_a$ , равное минимуму правых частей неравенств типа (5.71) с возможными запасами по вторичным пластическим деформациям.

Ведущее к вторичным пластическим деформациям превышение давлением самоскрепления (автофретирования) этого значения  $p_a$  нежелательно, как и занижение давлением самоскрепления (автофретирования) этого значения  $p_a$  с неполным эффектом упрочнения применительно к действительному статическому, малоцикловому или усталостному нагружению.

При нарушении исходного неравенства

$$p_a > 1.25p = p_{\text{test}}$$

самоскрепление (автофретирование) не проводится специально, а фактически осуществляется при нормативном гидравлическом испытании пробным давлением  $p_{\text{test}}$ .

В лаборатории прочностных исследований конструкций, работающих под давлением, ВНИИкомпрессормаш выполнена программа экспериментальных исследований концентрации напряжений у поперечных отверстий в толстостенных цилиндрах методом электротензометрии. Эту программу под руководством Б. И. Огурцова осуществил Е. А. Шерстюк с использованием сконструированных А. В. Рубаненко деталей сосудов высокого давления и камеры для тарировки электротензорезисторов в среде высокого гидростатического давления на специальной балке со срединным участком чистого изгиба благодаря четырёхточечному нагружению.

Автор выполнил руководство обработкой данных этой программы экспериментальных исследований концентрации напряжений у поперечных отверстий в толстостенных цилиндрах методом электротензометрии, а также анализ и синтез этих данных и сопоставление их с итогами теоретических исследований по собственным теориям деформирования и прочности несущих элементов техники высоких давлений с концентраторами напряжений у отверстий.

У выхода малого радиального отверстия на внутреннюю поверхность корпуса радиальное и осевое напряжения

$$\sigma_r = \sigma_z = -p$$

являются главными вместе с тангенциальным (окружным) напряжением  $\sigma_\phi$ , устанавливаемым по тангенциальной (окружной) деформации  $\varepsilon_\phi$ :

$$\sigma_\phi = E\varepsilon_\phi - 2\mu r.$$

В других случаях достаточно дополнительно измерить осевую деформацию  $\varepsilon_z$ :

$$\sigma_\phi = -\mu(1 - \mu)^{-1}p + E(1 - \mu^2)^{-1}(\varepsilon_\phi + \mu\varepsilon_z);$$

$$\sigma_z = -\mu(1 - \mu)^{-1}p + E(1 - \mu^2)^{-1}(\varepsilon_z + \mu\varepsilon_\phi).$$

Самопъезокомпенсированные тензорезисторы [326] не использовались, а влияние давления исключалось схемной компенсацией или исправлением по результатам тарировки тензорезисторов под давлением при включении компенсационного тензорезистора вне области давления в полумостовую схему измерительного прибора.

Отбор и тарировка тензорезисторов осуществлялись на специальном стенде, включающем сосуд давления с тарировочной балкой в его полости, механизм нагружения балки с обеспечением чистого изгиба средней части её длины, механизм измерения прогиба этой части, механизм компенсации влияния давления на этот прогиб, а также систему устройств создания, транспортировки и измерения давлений.

Для электротензометрии в зоне высоких давлений использовался специально разработанный многопроводный гермоввод.

По известным рекомендациям и результатам тарировки были отобраны тензорезисторы типов 2ПКБ-10-100ХБ, 2ПКП-5-100ГВ, 2ПКБ-200ГВ, 2ПКП-10-200ГВ, а также ТФРЦ и ТФЦП-2-100 базой 2 мм конструкции Московского инженерно-строительного института.

Специальное стендовое оборудование содержало включённые последовательно источники давления (многоплунжерный насос и два гидрокомпрессора), работающие на любых неагрессивных жидкостях типа минеральных масел, бензина, керосина, спирта и некоторых их смесей, а также систему трубопроводов и вентилей, пульт дистанционного управления и приборный щит.

Давление измерялось стандартными датчиками давления с электрическими выходными сигналами МСВЭ и МПЭ-3, а также и показывающими манометрами.

Тензорезисторы, наклеенные на исследуемые элементы, через дистанционный переключатель ПД-100М соединялись с цифровым тензометрическим мостом ЦТМ-3 или ЦТМ-5, состоящим из блока измерения и блока коммутации.

Для обработки и вывода информации использовались клавишная ЭВМ «Искра-108Д» и перфоратор ленточный унифицированный ПЛУ-1.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 456/556

Тарировка показала, что влиянием давлений на показания тензорезисторов типов ТФРЦ и ТФЦП можно пренебречь, к тому же они как малобазные способствуют снижению погрешностей усреднения деформаций в зонах концентрации напряжений и достаточно надёжны при измерениях за пределами упругости.

В целях получения объективной информации о распределении деформаций у отверстий использовались радиальные цепочки тензорезисторов, ориентированных в окружных направлениях.

Однако эксперименты показали, что по данным разных тензорезисторов одной радиальной цепочки искомая максимальная деформация на поверхности отверстия  $\epsilon_{\text{фmax}}$  имеет существенно различные значения.

Поэтому для достижения объективности измерения деформаций вблизи концентраторов напряжений по данным тензорезистора необходимо создать и применить метод исправления влияния, во-первых, удаления тензорезистора от точки наибольшей концентрации напряжений и деформаций и, во-вторых, усреднения деформации по площади измерительной решётки тензорезистора.

### **5.7. Общая теория измерения физических величин с неоднородными статическими и динамическими распределениями и теория исправления погрешностей измерений коэффициентами мультипликации применительно к электротензометрии мест концентрации напряжений**

Созданная общая теория измерения физических величин открыла явление существования и неперменного наличия естественной (не устранимой никаким совершенствованием средств измерения) самопогрешности (собственной погрешности) любой физической величины, так что её измерение с меньшей погрешностью, чем самопогрешность этой физической величины, теоретически невозможно, и обобщила понятие самопогрешности с физической величины на любой реальный объект, который, как известно, всегда отличается от любой его идеальной модели (расчётной схемы), единственность которой достигается по принципу допустимой простоты.

Самопогрешность любого реального объекта как мера его неидеальности по сравнению с его идеальной моделью (расчётной схемой) определяется как всеобщая погрешность формального равенства реального объекта и его ближайшей простейшей достаточно точной идеальной модели (расчётной схемы).

Для этого общая теория невязок сопряжения обобщила это понятие на нетождественность реального объекта и его идеальной модели (расчётной схемы), так что получилась невязка сопряжения реального объекта и его идеальной модели (расчётной схемы), при их достаточной близости могущая оцениваться также относительной погрешностью.

Минимизация такой невязки сопряжения реального объекта и его идеальной модели (расчётной схемы) может достигаться различными методами, в частности среднеквадратичным, обеспечивающим минимум модуля и коллокационным, а также другими методами, использующими специфику решаемой задачи.

Например, внутренняя поверхность бокса как защитного сооружения для испытаний техники высоких давлений, если отвлечься от умышленных функционально необходимых отклонений наподобие дверей, по идеальной модели (расчётной схеме) является прямоугольным параллелепипедом, однако ввиду строительных допусков отклоняется от него как квазипрямоугольный квазипараллелепипед, причём непременно нарушаются плоскостность, параллельность и перпендикулярность соответствующих поверхностей, так что внутренняя поверхность бокса не имеет ни вполне определённой точной длины, ни вполне определённой точной ширины, ни вполне определённой точной высоты, ни вполне определённых точных прямолинейных траекторий измерения длины, ширины и высоты.

Каждый метод минимизации невязки сопряжения реального объекта и его идеальной модели (расчётной схемы) даёт свои три (ближайший к внутренней поверхности бокса, ближайший к



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 457/556

внутренней поверхности бокса вписанный и ближайший к внутренней поверхности бокса описанный) прямоугольных параллелепипеда (средний, внутренний и внешний соответственно), определяющих средние, наименьшие и наибольшие длину, ширину и высоту внутренней поверхности бокса, так что в качестве длины, ширины и высоты внутренней поверхности бокса можно принять соответствующие средние значения и использовать соответствующие наименьшие и наибольшие значения для оценивания самопогрешностей длины, ширины и высоты внутренней поверхности бокса снизу и сверху соответственно абсолютной, относительной и всеобщей погрешностями.

Неединственность оценок используется для самопроверяемости и взаимной проверяемости итогов по каждому из методов и по совокупности методов.

Аналогичны самопогрешности радиусов и толщин (высот) реальных сплошных и полых квазипрямых квазикруговых квазицилиндров с неперемными нецилиндричностью и несоосностью боковых поверхностей и их неперпендикулярностью неплоским непараллельным основаниям (торцам).

Эталон любой физической величины имеет самопогрешность.

Самопогрешности принципиально важны, однако практически более значительными часто оказываются неоднородности распределения физических величин.

Процесс измерения произвольной физической величины, не являющейся инвариантом четырёхмерного пространства-времени, с помощью действительного (имеющего конечные размеры и инертность) физического прибора даёт измерительную информацию, искажённую модуляцией по определённому закону и, вообще говоря, запаздыванием по времени.

Для экспериментальных исследований и использования оборудования во многих отраслях науки и техники, в том числе связанных с высокими давлениями, достаточно актуальной является проблема установления истинных значений измеряемой величины (прообраза) по искажённой измерительной информации (образу).

Названные выше два проявления искажений измерительной информации приводят к разного порядка трудностям исправления искажений.

Именно, запаздывание по времени в предположении постоянного значения запаздывания исключается элементарной синхронизацией путём сдвига образа на это значение в направлении опережения времени, что намного проще демодуляции – исправления погрешностей модуляции, которая не является универсальной вследствие зависимости не только от характеристик измерительного прибора, но и от специфики измеряемой физической величины.

Методы оценки и исправления измерительной информации математически строго проанализированы и для любого математического моделирования обобщены общими теориями и методами оценки и исправления погрешностей усреднения при измерениях существенно неоднородных пространственных и/или временных статических и динамических распределений.

Основные проблемы и закономерности модуляции и рациональные методы демодуляции наилучшим образом уясняются в простейшем случае модуляции – усреднении непрерывной однопараметрической переменной величины  $p(s)$  с весовой функцией, постоянной на отрезке фиксированной длины  $\Delta$ , являющейся постоянной данного измерительного прибора, универсальной в пределах данного экспериментального исследования (или измерения вообще).

Именно, вместо истинного значения  $p(s)$  в результате измерения получается среднее значение переменной  $p(s)$  по промежутку размером  $\Delta$ , включающему значение  $s$ .

Априорно рационален выбор промежутка  $\Delta$  с серединой в  $s$ , минимизирующий математическое ожидание погрешности измерения.

Соответствующее среднее значение равно

$$\Delta^{-1} \int_{s-\Delta/2}^{s+\Delta/2} p(t) dt.$$

Итак, оператор измерения

$$(5.72)$$

$$M_{\Delta}: p(s) \rightarrow p_{\Delta}(s) = \Delta^{-1} \int_{s-\Delta/2}^{s+\Delta/2} p(t) dt$$

(5.73)

преобразует искомую функцию  $p(s)$  в функцию  $p_{\Delta}(s)$  такую, что

$$p_{\Delta}(s) = \Delta^{-1} \int_{s-\Delta/2}^{s+\Delta/2} p(t) dt.$$

Разумеется, при таком отображении (5.72) может произойти сужение области определения  $S_{\Delta}$  функции  $p_{\Delta}(s)$  по сравнению с областью определения  $S$  функции  $p(s)$  не более чем на  $0.5\Delta$  от каждой из граничных точек для  $S$  независимо от характера изменения функции  $p(s)$ .

Теоретически интересно и практически необходимо обращение интегрального оператора (5.72), определяющее истинные значения функции  $p(s)$  по её измеренным усреднённым значениям  $p_{\Delta}(s)$ .

Так возникает проблема существования, единственности и практического определения решения линейного неоднородного интегрального уравнения типа Вольтерра (5.73) относительно функции  $p(s)$  при известной функции  $p_{\Delta}(s)$ .

Для исследования единственности допустим, что функции  $p_1(s)$  и  $p_2(s)$  суть два произвольных непрерывных решения уравнения (5.73):

$$\int_{s-\Delta/2}^{s+\Delta/2} p_1(t) dt = p_{\Delta}(s)\Delta;$$

$$\int_{s-\Delta/2}^{s+\Delta/2} p_2(t) dt = p_{\Delta}(s)\Delta.$$

Тогда разность этих функций

$$q(s) = p_2(s) - p_1(s)$$

есть решение уже однородного

$$\int_{s-\Delta/2}^{s+\Delta/2} q(t) dt = 0.$$

(5.74)

Дифференцирование уравнения (5.74) по  $s$  даёт для любого  $s$  из области  $S_{\Delta}$  определения функции  $p_{\Delta}(s)$

$$q(s + \Delta/2) = q(s - \Delta/2).$$

(5.75)

Ввиду (5.75)  $q(s)$  – периодическая функция с периодом  $\Delta$ , а согласно (5.74) её интеграл на периоде  $\Delta$  равен нулю. Таким образом, (5.74) и (5.75) суть необходимые и в совокупности (ввиду обратимости выкладок) достаточные ограничения меры разброса (степени неоднозначности) решения уравнения (5.73).

Например, обоим этим условиям удовлетворяют гармоники, частоты которых кратны частоте, соответствующей периоду  $\Delta$ , а также конечные и бесконечные линейные комбинации этих гармоник.

Итак, обращение интегрального оператора усреднения (5.72) неоднозначно в том смысле, что прообраз определён с точностью до функции, периодичной с периодом  $\Delta$  и имеющей нулевое среднее интегральное значение на этом периоде.

Если вариация функции  $p(s)$  на любом отрезке длиной  $\Delta$  хотя бы на порядок меньше минимума модуля  $p(s)$  на этом отрезке (то есть правильно выбран измерительный прибор), то могут считаться имеющая период  $\Delta$  и нулевое среднее значение на нём функция  $q(s)$  тождественно равной нулю и обращение оператора (5.72) однозначным.

В противоречащем случае необходимо и достаточно провести измерение и другим прибором с постоянной  $\Delta'$ , теоретически или практически несоизмеримой с  $\Delta$ , то есть наибольшая общая мера  $\Delta$  и  $\Delta'$  не существует или хотя бы на порядок меньше их минимума.

Введены общие понятия действительной единоразмерности и практической несоизмеримости.

Определение. Действительными единоразмерными называются количества как элементы их конечного или бесконечного множества, равные произведениям некоторых действительных чисел на единую для всех этих количеств физическую размерность (единицу измерения).

Определение. Теоретически соизмеримыми называются такие действительные единоразмерные количества как элементы их конечного или бесконечного множества, что существует такое наибольшее строго положительное число, умножение которого на эту единую размерность даёт наибольшую общую меру всех этих элементов множества, так что

отношения к ней всех этих количеств суть в совокупности взаимно простые целые числа, то есть их наибольший общий делитель равен единице.

**Определение.** Практически несоизмеримыми называются такие теоретически соизмеримые действительные единоразмерные количества как элементы их конечного или бесконечного множества, что наибольшая общая мера всех этих количеств хотя бы на порядок меньше модуля каждого из этих количеств.

При исследовании существования решения уравнения (5.73) полагаем функцию  $p_{\Delta}(s)$  всюду непрерывно дифференцируемой, что необходимо для непрерывности решения.

Действительно, давая произвольному  $s$  бесконечно малое приращение  $\Delta s$ , получаем:

$$(5.76) \quad p_{\Delta}(s + \Delta s) = \Delta^{-1} \int_{s+\Delta s-\Delta/2}^{s+\Delta s+\Delta/2} p(t) dt.$$

Вследствие (5.73) и (5.76)

$$(5.77) \quad [p_{\Delta}(s + \Delta s) - p_{\Delta}(s)]/\Delta s = \Delta s^{-1} \Delta^{-1} \int_{s+\Delta/2}^{s+\Delta/2+\Delta s} p(t) dt - \Delta s^{-1} \Delta^{-1} \int_{s-\Delta/2}^{s-\Delta/2+\Delta s} p(t) dt$$

и ввиду непрерывности функции  $p(t)$  в точках  $s + \Delta/2$  и  $s - \Delta/2$  предел (5.77) при  $\Delta s \rightarrow 0$  существует и равен

$$(5.78) \quad dp_{\Delta}(s)/ds = \Delta^{-1} [p(s + \Delta/2) - p(s - \Delta/2)].$$

При априорной дифференцируемости функции  $p_{\Delta}(s)$  (5.78) есть следствие простого дифференцирования (5.73).

Вместе с тем непрерывная дифференцируемость функции  $p_{\Delta}(s)$  (5.78) является и достаточным условием существования непрерывного решения (5.73).

Действительно, выберем  $s'$  так, чтобы отрезок  $[s' - \Delta/2, s' + \Delta/2]$  был включён в область определения  $S$  функции  $p(s)$ , и определим на нём функцию  $p(s)$  непрерывной так, чтобы среднее её значение на этом отрезке равнялось  $p_{\Delta}(s')$ :

$$(5.79) \quad \Delta^{-1} \int_{s'-\Delta/2}^{s'+\Delta/2} p(t) dt = p_{\Delta}(s').$$

В частности, можно принять функцию  $p(s)$  на этом отрезке тождественно равной  $p_{\Delta}(s')$ .

Затем однозначно экстраполируем функцию  $p(s)$  вправо от точки  $s' + \Delta/2$  по формуле

$$(5.80) \quad p(s + \Delta/2) = p(s - \Delta/2) + \Delta dp_{\Delta}(s)/ds,$$

а влево от точки  $s' - \Delta/2$  – по формуле

$$(5.81) \quad p(s - \Delta/2) = p(s + \Delta/2) - \Delta dp_{\Delta}(s)/ds.$$

Формулы (5.80) и (5.81) суть эквиваленты формулы (5.78).

В силу непрерывной дифференцируемости функции  $p_{\Delta}(s)$  построенная функция  $p(s)$  непрерывна в области своего определения с выполнением соотношений (5.78) и (5.79).

Интегрируя (5.78) на отрезке  $[s', s]$  из области определения функции  $p(s)$ , получаем (интегрируемость соответствующих функций следует из их непрерывности)

$$\begin{aligned} p_{\Delta}(s) - p_{\Delta}(s') &= \Delta^{-1} \int_{s'}^s p(t + \Delta/2) dt - \Delta^{-1} \int_{s'}^s p(t - \Delta/2) dt = \\ &= \Delta^{-1} \int_{s'+\Delta/2}^{s+\Delta/2} p(t) dt - \Delta^{-1} \int_{s'-\Delta/2}^{s-\Delta/2} p(t) dt = \\ &= \Delta^{-1} \int_{s-\Delta/2}^{s+\Delta/2} p(t) dt - \Delta^{-1} \int_{s'-\Delta/2}^{s'+\Delta/2} p(t) dt, \end{aligned}$$

откуда с учётом (5.79) получаем формулу (5.73), что и завершает доказательство теоремы существования.

Заметим, что выбор функции  $p(s)$  на одном отрезке длиной  $\Delta$  может быть произвольным с ограничениями по непрерывности и среднему значению, а экстраполяция ввне этого отрезка вполне однозначна, что согласуется с установленной мерой неоднозначности обращения оператора (5.72). Это конструктивное доказательство теоремы существования в принципе даёт алгоритм построения решения уравнения (5.73).

Но в практически важных случаях в результате измерений известна не сама функция  $p_{\Delta}(s)$ , а дискретная информация о ней (совокупность значений функции  $p_{\Delta}(s)$  в ряде точек) с неизбежной погрешностью измерений.

Интерполяция и тем более дифференцирование дискретно заданной функции приводят к большим и часто недопустимым погрешностям. Поэтому устанавливать искомую функцию  $p(s)$  по известным значениям её образа  $p_{\Delta}(s)$  рациональнее другим алгоритмом.

Обычно о функции  $p(s)$  имеется, хотя и недостаточная, априорная информация об области определения и характере изменения (периодичности, монотонности, экстремумах, выпуклости, чётности, знаке, порядке роста и т. д.), дополняемая качественным анализом измерительной информации, относящейся к функции  $p_{\Delta}(s)$ .

Поэтому можно определить, в ряд по каким стандартным функциям (степенным, показательным, логарифмическим, гиперболическим, тригонометрическим и т. д.) целесообразно разложить искомую функцию  $p(s)$ .

Тем самым задача сводится к установлению коэффициентов при этих стандартных функциях и/или их аргументах по известным значениям функции  $p_{\Delta}(s)$  в ряде точек, то есть к решению системы уравнений (линейных, если коэффициенты при аргументах стандартных функций выбраны априорно). По принципу допустимой простоты число слагаемых в разложении искомой функции должно быть наименьшим, обеспечивающим достаточную близость совокупностей вычисленных и измеренных значений функции  $p_{\Delta}(s)$  по приемлемой мере (среднеквадратичному отклонению, наибольшему отклонению и др.).

Такой алгоритм ведёт к физически ясной простейшей математической модели и не только не допускает повышения погрешности по сравнению с погрешностью измерений, но и позволяет хотя бы частично избавиться от неизбежной погрешности разброса экспериментальных данных, например по общему методу наименьших нормально взвешенных степеней, в частности квадратов.

Ввиду линейности оператора (5.72) достаточно исследовать преобразование им стандартных функций (табл. 5.1).

Обращение оператора формально можно заменить умножением образа на приемлемый коэффициент мультипликации  $K_m$ :

$$\begin{aligned} K_m &= 1 \text{ для } as + b \text{ (инвариант усреднения);} \\ K_m &= 0.5n\Delta/\text{sh}(0.5n\Delta) \text{ для } \exp(ns), \text{sh}(ns), \text{ch}(ns); \\ K_m &= 0.5n\Delta/\sin(0.5n\Delta) \text{ для } \sin(ns), \cos(ns). \end{aligned}$$

Таблица 5.1. Преобразование стандартных функций оператором усреднения.

$p(s)$	$p_{\Delta}(s) = M_{\Delta}(p(s)) = \Delta^{-1} \int_{s-\Delta/2}^{s+\Delta/2} p(t) dt$
$as + b$	$as + b$
$s^2$	$s^2 + \Delta^2/12$
$s^n, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	$s^n + \sum_{k=1}^{[n/2]} n!(n-2k)!^{-1}(2k+1)!^{-1} s^{n-2k} (\Delta/2)^{2k}, [x] = \text{entier}(x)$
$1/s,  s  > \Delta/2$	$1/s + \sum_{k=1}^{+\infty} (2k+1)^{-1} s^{-(2k+1)} (\Delta/2)^{2k}$
$\ln(s), s > \Delta/2$	$\ln(s) - \sum_{k=1}^{+\infty} (2k)^{-1} (2k+1)^{-1} s^{-2k} (\Delta/2)^{2k}$
$\exp(ns)$	$\text{sh}(0.5n\Delta)/(0.5n\Delta) \exp(ns)$
$\text{sh}(ns)$	$\text{sh}(0.5n\Delta)/(0.5n\Delta) \text{sh}(ns)$
$\text{ch}(ns)$	$\text{sh}(0.5n\Delta)/(0.5n\Delta) \text{ch}(ns)$
$\sin(ns)$	$\sin(0.5n\Delta)/(0.5n\Delta) \sin(ns)$
$\cos(ns)$	$\sin(0.5n\Delta)/(0.5n\Delta) \cos(ns)$

Пусть, например,  $p(s)$  – априорно периодическая непрерывная функция, исчерпывающе задаваемая значениями на любом равном периоде отрезке, совпадающими на его концах (обобщающее несовпадение, приводящее к дополнению последующих разложений слагаемым  $p_1s$ , не влечёт осложнений ввиду инвариантности линейной функции).

Предварительное масштабирование позволяет считать период равным  $2\pi$  и разложить искомую функцию в равномерно сходящийся ряд Фурье с неопределёнными коэффициентами

$$p(s) = 0.5c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n \cos(ns) + s_n \sin(ns)),$$

допускающий интегрирование, и ввиду линейности оператора (5.72)

$$p_\Delta(s) = 0.5c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (\sin(0.5n\Delta)/(0.5n\Delta))(c_{n\Delta} \cos(ns) + s_{n\Delta} \sin(ns)).$$

Отсюда ясен алгоритм обращения оператора (5.72) в данном случае.

Образ  $p_\Delta(s)$  разлагается в ряд Фурье

$$(5.82)$$

$$p_\Delta(s) = 0.5c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_{n\Delta} \cos(ns) + s_{n\Delta} \sin(ns)),$$

а искомая функция (прообраз) устанавливается с использованием приемлемых коэффициентов мультипликации:

$$(5.83)$$

$$p(s) = 0.5c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (0.5n\Delta/\sin(0.5n\Delta))(c_{n\Delta} \cos(ns) + s_{n\Delta} \sin(ns)),$$

причём нули в знаменателях возможны лишь в коэффициентах у гармоник с периодом  $\Delta$ , отсутствующих в  $p_\Delta(s)$  и входящих с произвольными коэффициентами в  $p(s)$ .

В этом и состоит неоднозначность обращения.

При дискретном задании функции  $p_\Delta(s)$  разложения (5.82) и (5.83) содержат конечное минимально допустимое число слагаемых и притом одинаковое, если не считать гармоник, вносящих неоднозначность.

Аналогично обращается оператор (5.72) и при другой априорной информации о прообразе и измерительной информации об образе, а также обобщающий (5.72) оператор измерения или произвольной модуляции с не тождественным единичному ядром в пространстве любой размерности.

Приложение изложенного общего метода исправления погрешностей измерений произвольных неоднородных статических и динамических распределений создало общий метод исправления погрешностей измерений неоднородных распределений в задачах электротензометрии мест концентрации напряжений, показывающий, что для определения истинной наибольшей деформации по данным тензорезистора соответствующей ориентации его показание следует умножить на приемлемый коэффициент мультипликации как функцию относительных размеров измерительной решётки тензорезистора и её относительного удаления от точки наибольшей концентрации напряжений и деформаций. Коэффициент мультипликации является инвариантом пропорционального изменения системы нагрузок (простого нагружения) и довольно мало зависит от их соотношений в общем случае.

В характерных задачах концентрации напряжений предложены методы определения коэффициентов мультипликации для тензорезисторов и экспериментально показана объективность результатов исправления показаний тензорезисторов по методам определения коэффициентов мультипликации. Характерны следующие одномерные задачи электротензометрии, в которых, кроме двумерной объединённой задачи Ламе–Кирша, для простоты коэффициент поперечной чувствительности тензорезистора  $\mu_t$  не учитывается.

В задаче Кирша [319, 321] (рис. 5.9, а) истинная окружная деформация контура отверстия

$$\varepsilon_\varphi = (\sigma/E)(1 + 2\cos 2\varphi),$$

а среднее её значение на измеряемом участке

$$\varepsilon_{\varphi m} = (\sigma/E)(1 + \varphi_0^{-1} \sin 2\varphi_0),$$

где  $\sigma$  – напряжение на бесконечности в бесконечной пластине с круглым отверстием;

$a$  – радиус отверстия;

$\varphi$  – угол, отсчитываемый от перпендикулярного направлению напряжения  $\sigma$  диаметра отверстия;

$2\varphi_0$  – центральный угол в отверстии, опирающийся на базу  $L$  тензорезистора, наклеенного на боковую поверхность отверстия так, что середина базы  $L$  лежит на этом перпендикулярном диаметре, в концах которого имеет место наибольшая концентрация напряжений и деформаций.

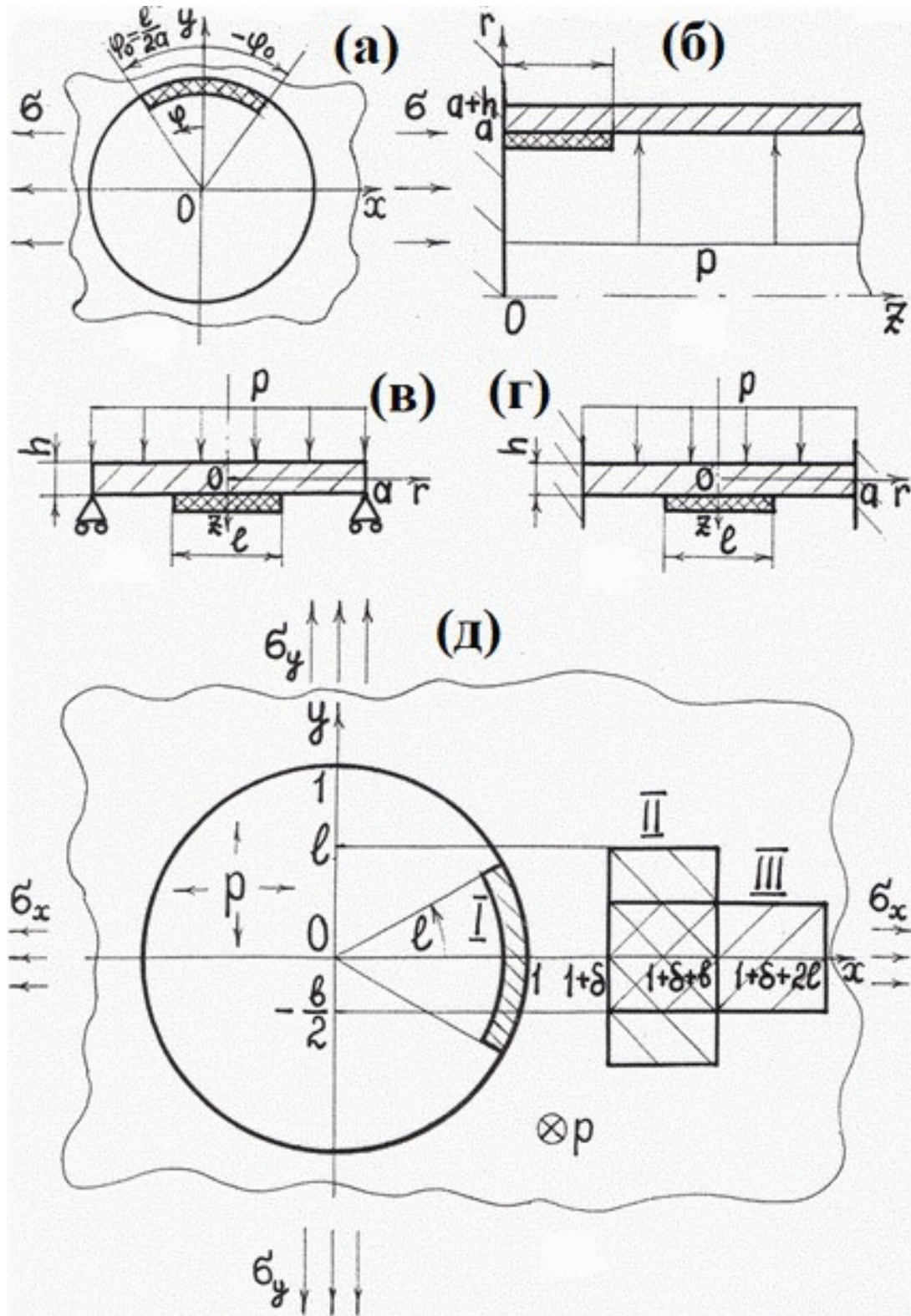


Рисунок 5.9. Типичные схемы нагружения для характерных задач электротензометрии с концентрацией напряжений и деформаций при базе  $L = l$  тензорезистора: задача Кирша (а); задача о нагруженной равномерным внутренним давлением жёстко закреплённой по краю длинной цилиндрической оболочке (б); задача о нагруженной односторонним равномерным давлением  $p$  круглой пластине радиусом  $a$ , свободно опёртой по краю (в); задача о нагруженной односторонним равномерным давлением  $p$  круглой пластине радиусом  $a$ , жёстко закреплённой по краю (г); двумерная объединённая задача Ламе–Кирша (д).

В зависимости от базы  $L$  тензорезистора относительное отклонение  $\delta(L)$ , определяемое делением разности измеренного и истинного  $3\sigma/E$  значений на истинное значение, и коэффициент мультипликации

$$K_m(L) = 1/[1 + \delta(L)]$$

– отношение истинного значения к измеренному – составляют

$$\delta(L) = (1/3)[(2a/L)\sin(L/a) - 2];$$

$$K_m(L) = 3/[1 + (2a/L)\sin(L/a)].$$

В задаче о нагруженной равномерным внутренним давлением жёстко защемлённой по краю длинной цилиндрической оболочке (рис. 5.9, б) с усреднённой деформацией  $\varepsilon_{zm}$

$$k = [3(1 - \mu^2)]^{1/4}(ah)^{-1/2};$$

$$\varepsilon_z(a, z) = (p/E)k^2 a^2 e^{-kz}(\cos kz - \sin kz);$$

$$\varepsilon_{zm} = (p/E)ka^2 L^{-1} e^{-kL} \sin kL;$$

$$\delta(L) = (kL)^{-1} e^{-kL} \sin kL - 1;$$

$$K_m(L) = kL e^{-kL} / \sin kL.$$

В задаче о нагруженной односторонним равномерным давлением  $p$  свободно опертой по краю круглой пластине радиусом  $a$  и толщиной  $h$  при наклейке тензорезистора базой  $L$  в центре свободной стороны пластины (рис. 5.9, в) с усреднённой деформацией  $\varepsilon_{m1}$

$$D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)];$$

$$\varepsilon_r(r, h/2) = (1/32)(ph/D)[(3 + \mu)(1 + \mu)^{-1}a^2 - 3r^2];$$

$$\varepsilon_{m1} = (1/32)(ph/D)[(3 + \mu)(1 + \mu)^{-1}a^2 - (1/4)L^2];$$

$$\delta(L) = - (1/4)(1 + \mu)(3 + \mu)^{-1}(L/a)^2;$$

$$K_m(L) = [1 - (1/4)(1 + \mu)(3 + \mu)^{-1}(L/a)^2]^{-1}.$$

В задаче о нагруженной односторонним равномерным давлением  $p$  круглой пластине радиусом  $a$ , жёстко защемлённой по краю, при наклейке тензорезистора базой  $L$  в центре свободной стороны пластины (рис. 5.9, г) с усреднённой деформацией  $\varepsilon_{m2}$

$$D = Eh^3/[12(1 - \mu^2)];$$

$$\varepsilon_r(r, h/2) = (1/32)(ph/D)(a^2 - 3r^2);$$

$$\varepsilon_{m2} = (1/32)(ph/D)[a^2 - (1/4)L^2];$$

$$\delta(L) = - (1/4)(L/a)^2;$$

$$K_m(L) = [1 - (1/4)(L/a)^2]^{-1}.$$

В двумерной объединённой задаче Ламе–Кирша с действием главных напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  вдали от круглого отверстия, а также давления  $p$  на его контур и на основания пластины (рис. 5.9, д) с учётом поперечной чувствительности  $\mu_t$  тензорезистора в положении I на контуре, наклеенного на боковую поверхность отверстия так, что середина базы  $L$  лежит на диаметре в направлении напряжения  $\sigma_x$ ,

$$K_{m\phi I}(L, \mu_t) = [(1 + 2\mu)p + 3\sigma_y - \sigma_x] / \{(1 + 2\mu - \mu_t)p + (1 - \mu\mu_t)[\sigma_x + \sigma_y - L^{-1}\sin 2L(\sigma_x - \sigma_y)]\};$$

в положении II на основании

$$K_{m\phi II}(L, b, \mu_t, \delta) = [(1 + 2\mu)p + 3\sigma_y - \sigma_x] / \{\mu(1 + \mu_t)p + (\mu_t - \mu)\sigma_x + (1 - \mu\mu_t)\sigma_y + [(1 + \mu)(1 - \mu_t)p + (1/2)(-1 + 3\mu - 3\mu_t + \mu\mu_t)\sigma_x + (1/2)(3 - \mu + \mu_t - 3\mu\mu_t)\sigma_y](bL)^{-1}[\arctg(L/(1 + \delta)) - \arctg(L/(1 + \delta + b))]$$

$$+ (1 + \mu)(1 - \mu_t)(\sigma_x - \sigma_y)b^{-1}[(1 + \delta)((1 + \delta)^2 + L^2)^{-1} - (1 + \delta + b)((1 + \delta + b)^2 + L^2)^{-1} - (3/2)(1 + \delta)((1 + \delta)^2 + L^2)^{-2} + (3/4)(1 + (1 + \delta + b)^2(1 + \delta)^{-2})(1 + \delta + b)((1 + \delta + b)^2 + L^2)^{-2} + (1 + \delta)((1 + \delta)^2 + L^2)^{-2} - ((1 + \delta)^2 + L^2)(1 + \delta)^{-2}(1 + \delta + b)^3((1 + \delta + b)^2 + L^2)^{-3} - (1/2)b(1 + \delta + b/2)(1 + \delta + b)(3(1 + \delta + b)^2 - L^2)(1 + \delta)^{-2}((1 + \delta + b)^2 + L^2)^{-3}]\};$$

в положении III для измерения радиальной деформации

$$K_{m\phi III}(L, b, \mu_t, \delta) = \mu_t K_{m\phi II}(b/2, 2L, \mu_t^{-1}, \delta).$$

Метод исправления показаний тензорезисторов умножением показаний на соответствующие коэффициенты мультипликации проверен при электротензометрии уменьшенной в масштабе 1:5 модели корпуса центробежного компрессора, имеющей относительную толстостенность  $\alpha = 2.2$ , круглые отверстия диаметром 4.2 мм и овальные отверстия 12.5×20 мм (рис. 5.10, а).

Сгруппированы теоретически эквивалентные между собой экспериментальные данные, относящиеся к аналогичным точкам разных отверстий одного размера при одинаковых коэффициентах мультипликации.

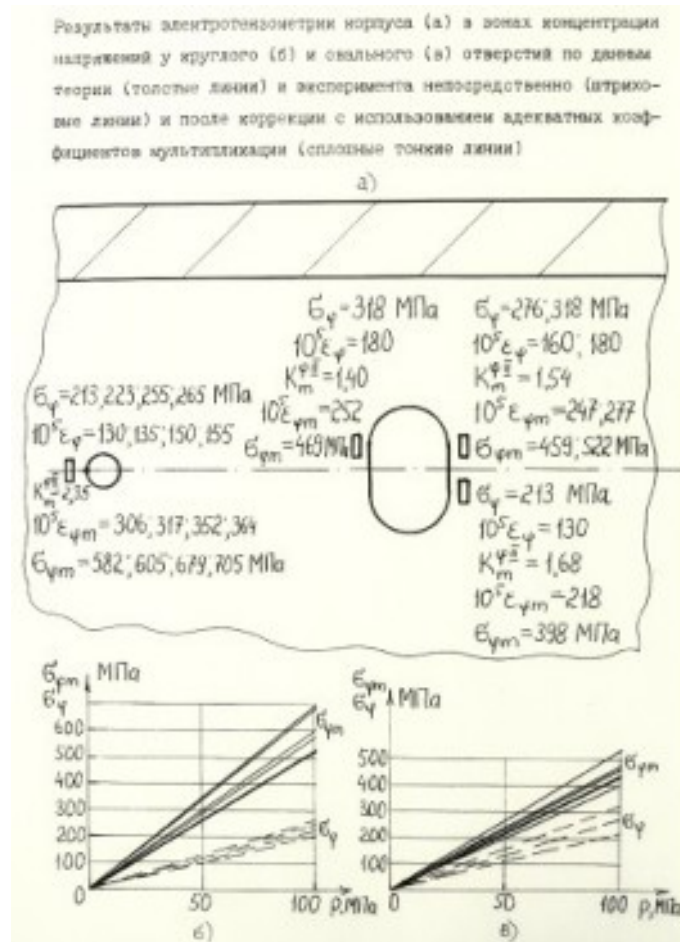


Рисунок 5.10. Результаты электротензометрии корпуса (а) в зонах концентрации напряжений у круглого (б) и овального (в) отверстий по данным теории (толстые линии) и эксперимента непосредственно (штриховые линии) и после исправления с использованием приемлемых коэффициентов мультипликации (сплошные тонкие линии).

Все данные для овальных отверстий дифференцированы по исполнительным радиусам закругления  $r_0$ .

Теоретически у круглого отверстия

$$\sigma_{\varphi} = 5.30p,$$

а у эллиптического отверстия с осями такого овального отверстия

$$\sigma_{\varphi} = 3.41p.$$

Поэтому за отсутствием достаточно полных известных данных примем для овального отверстия в первом приближении полусумму значений для круглого и эллиптического отверстий:

$$\sigma_{\varphi} = 4.36p.$$

Теоретические значения тангенциальных (окружных) напряжений на контурах выходов отверстий на внутреннюю поверхность показаны толстыми линиями, экспериментальные до исправления – штриховыми линиями и после исправления – сплошными линиями как для круглого отверстия (рис. 5.8, б), так и для овального отверстия (рис. 5.8, в).

Сопоставление теоретических и экспериментальных данных показывает необходимость и существенность предложенного исправления последних, особенно при увеличении отношения базы тензорезистора к характерному размеру отверстия, что в данном случае имеет место при переходе от круглых отверстий к овальным отверстиям.

Заметим, что именно исправление подтверждает целесообразность выполнения овального отверстия с большей осью, перпендикулярной оси корпуса, взамен круглого отверстия.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 465/556

Итак, приложение созданных общей теории измерения физических величин с неоднородными статическими и динамическими распределениями и теории исправления погрешностей измерений коэффициентами мультипликации применительно к электротензометрии мест концентрации напряжений с общим методом исправления погрешностей измерений произвольных неоднородных статических и динамических распределений и общим методом исправления погрешностей измерений неоднородных распределений в задачах электротензометрии мест концентрации напряжений позволяет получать приемлемую измерительную информацию о напряжённо-деформированных состояниях элементов конструкций сложных конфигураций.

### **5.8. Методы совершенствования средств экспериментальных исследований и конструкций сосудов высокого давления, защищённых авторскими свидетельствами на изобретения**

Для электротензометрии и других исследований, а также для передачи энергии в зону действия высоких давлений требуются герметичные вводы.

На основании полученных принципиально новых представлений о деформировании трёхмерных осесимметричных тел по общим (полу)степенному и интегральному аналитическим методам макроэлементов и по соответствующим теориям для таких тел предложен и обоснован ряд гермовводов, защищённых авторскими свидетельствами.

Герметичный ввод кабеля [56] содержит расположенный в корпусе штепсельный разъём с контактными элементами, к которым присоединены разделённые жилы кабеля, уплотнительную и передающую втулки, между которыми установлены уплотнительные элементы и пружина (рис. 5.11, а). При этом с целью повышения надёжности путём равномерного распределения усилий по длине уплотнения участка кабеля уплотнительный элемент выполнен в виде шнура и расположен между витками пружины.

Многопроводный электроввод [50] содержит корпус со сквозным ступенчатым отверстием для проводов, расположенную в отверстии большей ступени с зазором втулку с коническим отверстием, в которой с помощью герметика закреплены провода, проходящие через отверстие корпуса с зазором (рис. 5.11, б). Электроввод снабжён расположенным между отверстием меньшей ступени и втулкой ограничительным элементом, выполненным в виде диска с закруглёнными кромками. При этом втулка обращена отверстием меньшего диаметра к диску, перекрывающему отверстия втулки и меньшей ступени корпуса. Кроме того, зазоры между корпусом, диском, втулкой и проводниками заполнены герметиком, а провода огибают диск. Такая конструкция обладает высокой надёжностью, предотвращая выдавливание проводов в зону низкого давления.

Многопроводный электроввод [52] в дополнение к предыдущему снабжён расположенным со стороны большей ступени дополнительным корпусом из эластичного материала с центральным отверстием и размещёнными в последнем электрическими соединителями, разделёнными жёстким изоляционным элементом в виде тела вращения (рис. 5.11, в). Одна из ответных частей каждого соединителя выполнена с кольцевым выступом, расположенным в зоне герметика и взаимодействующим с торцом дополнительного корпуса. При этом ответные части соединителя соединены с соответствующими проводами, а дополнительный корпус на части длины охватывает основной корпус. Вдоль образующих изоляционного элемента могут быть выполнены пазы, в которых расположены другие ответные части соединителя. Преимуществом такой конструкции является повышение надёжности электроввода при снижении трудоёмкости его монтажа и демонтажа.

Герметичный ввод [53] содержит корпус со ступенчатым отверстием и расположенные в нём герметизирующий компаунд и элемент, ограничивающий перемещения проводов (рис. 5.11, г). Ввод снабжён размещёнными в большей ступени отверстия корпуса изоляционным барабаном со ступенчатым отверстием и продольными пазами. В большей ступени отверстия барабана со стороны корпуса находится ряд изоляционных шайб, между которыми и в пазах

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 466/556

барабана проходят провода с возможной волокнистой изоляцией. Такая конструкция обеспечивает повышение надёжности герметичного ввода путём упорядоченного расположения проводов.

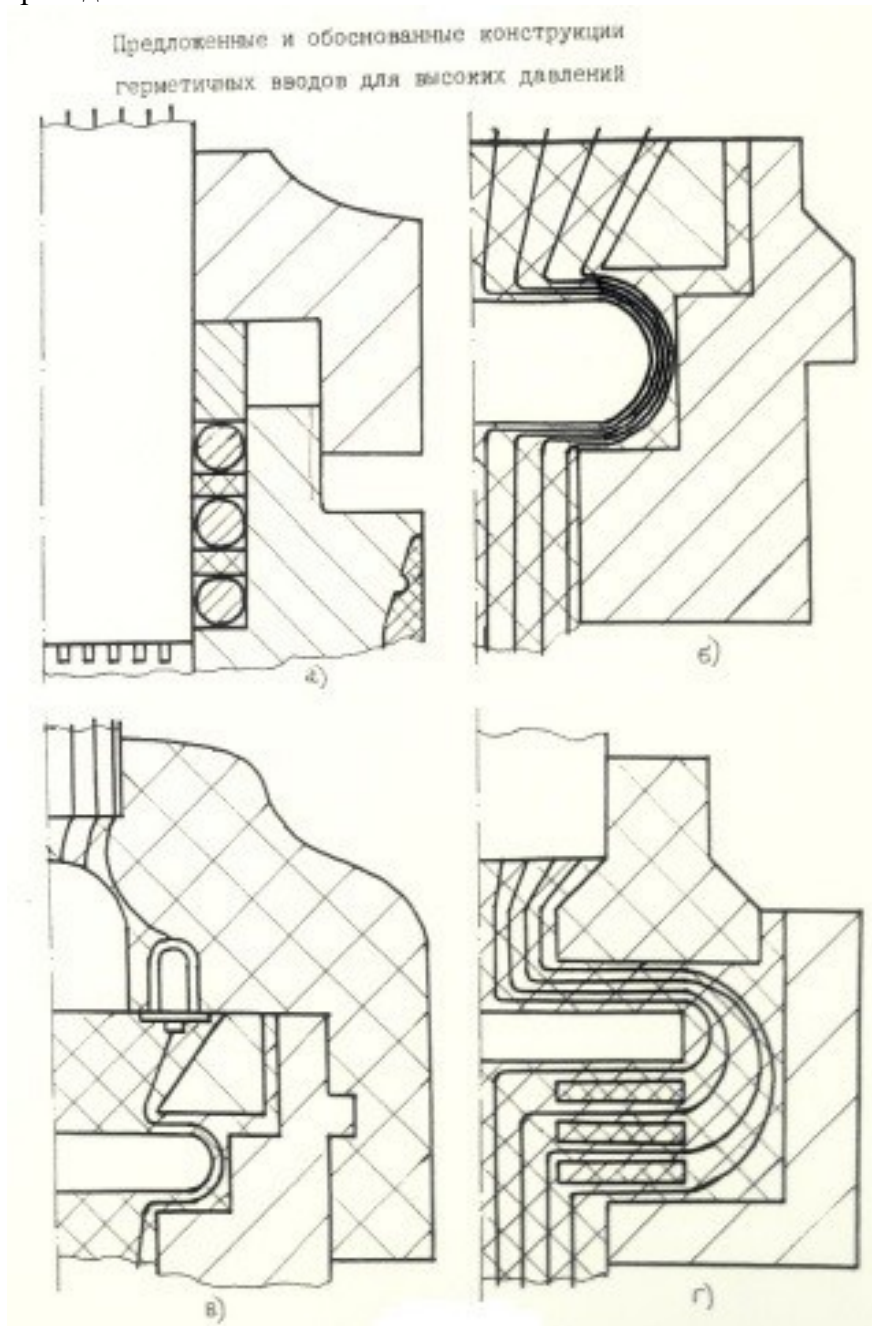


Рисунок 5.11. Предложенные и обоснованные конструкции герметичных вводов для высоких давлений.

Избраны и другие направления совершенствования средств экспериментальных исследований.

Так, с учётом расширения полости сосуда и сжатия рабочей жидкости высоким давлением требуется дополнительное её количество сверх свободно налитого в сосуд до подачи давления и создание соответствующей ёмкости, а также защитного оборудования в зависимости от суммарной энергии гидравлического испытания.

Рассмотрим сосуд в виде трёхмерного цилиндра

$$0 < a \leq r \leq b, 0 \leq z \leq L, \alpha = b/a$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 467/556

с двумя полусферическими заглушками, форма которого обобщает цилиндрическую и сферическую формы с взаимной компенсацией влияний неканоничности деформирования обоих типов частей на участках их сопряжений.

Пусть  $V_p$  – объём полости сосуда при внутреннем давлении  $p$ , равный

$$V_p = \pi a^2 L \left\{ 1 + (p/E)[3(1 - 2\mu) + 2\alpha^2(1 + \mu)]/(\alpha^2 - 1) \right\} + (4/3)\pi a^3 \left\{ 1 + (p/E)[3(1 - 2\mu) + (3/2)\alpha^3(1 + \mu)]/(\alpha^3 - 1) \right\}.$$

Установим нормальный объём рабочей жидкости  $V_0'$ , который под давлением  $p$  занимает объём

$$V_p' = V_p.$$

Полагая её сжимаемость

$$\chi = - (dV/V)/dq$$

равномерной при

$$0 \leq q \leq p,$$

получаем

$$V_q' = V_0' e^{-\chi q}$$

и, в частности,

$$V_p' = V_0' e^{-\chi p},$$

так что искомое дополнительное количество жидкости

$$V_0' - V_0 = \pi a^2 L \left\{ 1 + (p/E)[3(1 - 2\mu) + 2\alpha^2(1 + \mu)]/(\alpha^2 - 1) \right\} e^{\chi p} - \pi a^2 L + (4/3)\pi a^3 \left\{ 1 + (p/E)[3(1 - 2\mu) + (3/2)\alpha^3(1 + \mu)]/(\alpha^3 - 1) \right\} e^{\chi p} - (4/3)\pi a^3$$

нелинейно зависит от давления, как и суммарная энергия гидравлического испытания

$$W = \chi^{-1} (e^{\chi p} - 1 - \chi p) \pi a^2 L \left\{ 1 + (p/E)[3(1 - 2\mu) + 2\alpha^2(1 + \mu)]/(\alpha^2 - 1) \right\} + \chi^{-1} (e^{\chi p} - 1 - \chi p) (4/3)\pi a^3 \left\{ 1 + (p/E)[3(1 - 2\mu) + (3/2)\alpha^3(1 + \mu)]/(\alpha^3 - 1) \right\} + (1/2)(p^2/E) \left\{ \pi a^2 L [3(1 - 2\mu) + 2\alpha^2(1 + \mu)]/(\alpha^2 - 1) + (4/3)\pi a^3 [3(1 - 2\mu) + (3/2)\alpha^3(1 + \mu)]/(\alpha^3 - 1) \right\}.$$

Величины  $V_0' - V_0$  и  $W$  особенно существенны в случае крупногабаритных сосудов высокого давления.

Например, при

$$a = 0.6 \text{ м};$$

$$L = 2 \text{ м};$$

$$\alpha = 4/3;$$

$$\chi = 0.00067 \text{ МПа}^{-1}$$

(трансформаторное масло);

$$p = 60 \text{ МПа}$$

оказывается

$$V_0' - V_0 = 96 \text{ л};$$

$$W = 2.98 \text{ МДж},$$

что соответствует потенциальной энергии каждой из заглушек массой 5 т на высоте 60 м.

Ещё примерно на два порядка опаснее пневматические испытания.

Так, для корпуса газоперекачивающего агрегата при

$$V_0 = 3.7 \text{ м}^3$$

и

$$p = 20 \text{ МПа}$$

энергия испытания

$$W = 144 \text{ МДж}.$$

Снижение опасности гидравлического испытания сосуда высокого давления и требований к защитным сооружениям достигается способом, защищённым наряду с последующими авторским свидетельством [54]. Испытуемое изделие, которое может быть и неразъёмным, помещается в полость разъёмного полого сосуда (рис. 5.12, а) с заполнением жидкостью свободного объёма этой полости, соединённой калиброванным отверстием в разъёмном полом сосуда с полостью испытательной камеры, также заполненной жидкостью. При этом скорость уменьшения объёма испытуемого изделия во время его разрушения ограничена

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 468/556  
 скоростью перетекания жидкости из камеры в сосуд через калиброванное отверстие, что препятствует возникновению гидроудара [90, 91].

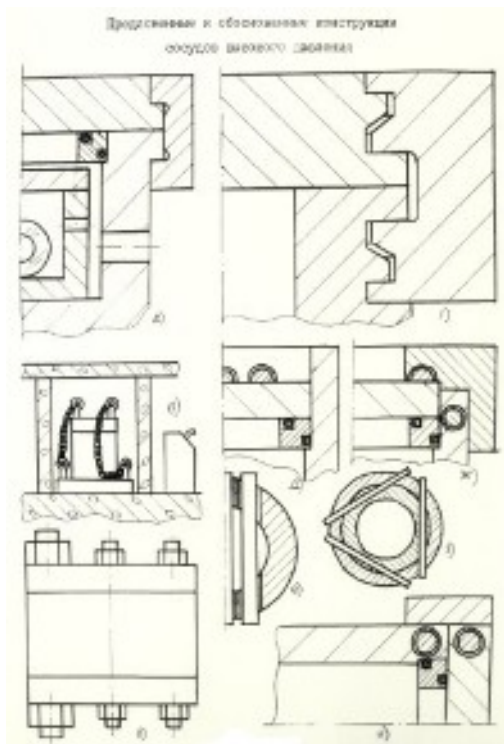


Рисунок 5.12. Предложенные и обоснованные конструкции сосудов высокого давления.

Возможно также использование стенда [59] с защитным устройством, включающего сосуд высокого давления в виде установленного на фундаменте корпуса и заглушек, соединённых между собой либо с фундаментом или стеной защитного сооружения нерастяжимыми гибкими элементами, например цепями или тросами, разной длины, уменьшающейся в направлении желательного наименее опасного перемещения заглушек при возможном разрушении сосуда (рис. 5.12, б).

Иным способом снижения опасности гидравлического испытания также за счёт обеспечения перемещений заглушек в направлении желательного наименее опасного перемещения заглушек [57] является одностороннее усиление их соединений, например путём увеличения сечений крепёжных элементов в том же направлении (рис. 5.12, в), использования более прочных материалов или увеличения частоты размещения крепёжных элементов.

Также на повышение надёжности направлены предложенные конструкции сосудов высокого давления, защищённые авторскими свидетельствами.

Сосуд [55] содержит корпус с крышкой, имеющие выступы на их боковых поверхностях, и охватывающий их захват в виде втулки с выступами на её внутренней поверхности, размещёнными с возможностью ввода между ними выступов крышки и корпуса и взаимной фиксации последних (рис. 5.12, г). Сосуд высокого давления отличается тем, что в крышке и корпусе выполнено по два выступа, два средних выступа захвата выполнены с возможностью одновременного ввода между ними по одному из выступов крышки и корпуса, а высоты этих выступов составляют 1.3...1.7 от высот остальных выступов захвата, крышки и корпуса. Это улучшает технологичность сборки и повышает надёжность сосуда высокого давления.

Сосуд высокого давления [58] содержит корпус и затвор, выполненный в виде крышки с уплотнением и взаимодействующего с ней замкового элемента, состоящего из отверстий в торцевой части корпуса с осями, перпендикулярными продольной оси сосуда, и стержней, установленных в этих отверстиях с возможностью взаимодействия корпуса и замкового

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 469/556

элемента (рис. 5.12, д, е). Это же изобретение предусматривает и ряд дополнительных вариантов.

Сосуд высокого давления (рис. 5.12, ж, з) отличается тем, что замковый элемент дополнительно снабжён втулкой с отверстиями и размещёнными в них стержнями, установленными с возможностью взаимодействия крышки и замкового элемента.

Сосуд высокого давления (см. рис. 5.12, ж, з) отличается тем, что стержни установлены в отверстиях с возможностью взаимодействия с внешней поверхностью крышки.

Сосуд высокого давления (см. рис. 5.12, ж, з) отличается тем, что втулка выполнена с упором, размещённым с возможностью взаимодействия его внутренней поверхности и внешней поверхности крышки.

Сосуд высокого давления (рис. 5.12, и) отличается тем, что втулка выполнена цилиндрической, сопряжённой по внутренней поверхности с корпусом и крышкой, имеющими сопряжённые торцы.

Эти технические решения позволяют повысить прочность и технологичность изготовления и использования сосудов высокого давления.

Таким образом, на основании полученных принципиально новых представлений о деформировании, жёсткости, прочности и разрушении трёхмерных осесимметричных тел по общим (полу)степенному и интегральному аналитическим методам макроэлементов и по соответствующим теориям для таких тел предложен и обоснован ряд гермовводов, рациональных средств гидравлических испытаний и сосудов высокого давления, защищённых авторскими свидетельствами на изобретения.

## 5.9. Выводы по главе 5

1. Созданы общая метрология и общая теория принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных состояний и процессов, прочности и технологичности элементов и систем техники высоких давлений с учётом трения, сцепления, проскальзывания и концентрации напряжений. Выдвинуто общее понятие напряжённо-деформированного процесса как изменения напряжённо-деформированного состояния тела во времени. Достоверность и полезность созданной общей теории принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных состояний и процессов, прочности и технологичности элементов и систем техники высоких давлений аналитически доказаны обобщением и существенным уточнением являющихся для общей теории предельными случаями известных решений для плоского напряжённого и плоского деформированного состояний. Открыты системы принципиально новых явлений и законов деформирования и прочности существенно трёхмерных тел.

2. Создана система теорий впервые принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных состояний и процессов, прочности и технологичности составного цилиндра конечной длины с учётом трения и взаимных осевых сцепления и проскальзывания слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения. Открыты и доказаны явления и законы экспоненциальности осевых напряжений в слоях составного цилиндра на примыкающих к его торцам участках взаимного осевого проскальзывания слоёв вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения. Открыты и доказаны явления и законы симметрии и асимметрии торцевых по длине участков взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра относительно его срединной плоскости, перпендикулярной его оси. Открыты и доказаны явление необязательной возможности и необходимые и достаточные условия наличия срединного по длине участка взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра вдоль первоначально цилиндрической поверхности их сопряжения в зависимости от технологии его сборки. Открыты и доказаны явления и законы симметрии и асимметрии срединного по длине участка взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра относительно его срединной плоскости, перпендикулярной его оси.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 470/556

3. Создана теория принципиально трёхмерного напряжённо-деформированного процесса составного цилиндра конечной длины при его тепловой сборке. Открыты и доказаны явление и закон строго положительной разности осевых деформаций внешнего и внутреннего слоёв составного цилиндра бесконечной длины при его плоской деформации в отличие от нулевой разности, принятой в известном решении. Тем самым доказано практически важное явление умножения подлинного сборочного контактного давления между слоями составного цилиндра конечной длины по сравнению с классическим значением для плоского напряжённого состояния составного кольца (чрезвычайно короткого цилиндра) и с известным значением для плоской деформации чрезвычайно длинного цилиндра вдали от его торцов на соответствующие коэффициенты мультипликации. Впервые именно количественно для составного цилиндра конечной длины исследован торцевой эффект изменения напряжений по длине составного цилиндра от их значений на его торцах. Открыты и доказаны явление и закон существования именно симметричных торцевых участков взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра с экспоненциальным ростом от классических значений на торцах в направлениях к срединной плоскости составного цилиндра осевых напряжений во внешнем слое, модулей осевых напряжений во внутреннем слое и контактного давления между слоями составного цилиндра. Открыты и доказаны явление и закон существования критической длины составного цилиндра, при одинаковых упругих постоянных материалов слоёв равной отношению диаметра сопряжения слоёв к коэффициенту трения покоя между ними, превышение которой приводит к появлению срединного участка взаимного их сцепления с равномерными осевыми напряжениями и контактным давлением, превышающим классическое значение на 40 % в случае стального цилиндра. Предложено линейное увеличение натяга от границ срединного участка сцепления к торцам, обеспечивающее равнопрочность трёхмерного составного цилиндра по его длине.

4. Создана теория принципиально трёхмерного напряжённо-деформированного процесса составного цилиндра конечной длины при его запрессовке. Поставлены и решены задачи принципиально трёхмерного напряжённо-деформированного процесса составного цилиндра конечной длины в конце его запрессовки и после её завершения. Открыты и доказаны явление и закон обусловленного существования в общем случае асимметричных и в частном случае симметричных торцевых участков взаимного осевого проскальзывания (слоёв составного цилиндра), разделённых промежуточным участком взаимного осевого сцепления слоёв, длина которого при одинаковых коэффициентах поперечной деформации Пуассона материалов слоёв равна половине длины составного цилиндра независимо от соотношения модулей продольной упругости Юнга материалов слоёв. Контактное давление и сжимающие со стороны первоначально сжатых торцов слоёв составного цилиндра осевые напряжения в его слоях кусочно-экспоненциальны. Равномерность контактного давления и равнопрочность составного цилиндра по длине обеспечиваются непрерывным кусочно-линейным натягом при постоянном модуле производной с аналогичными распределениями осевых напряжений по длине составного цилиндра в его слоях. Открыты и доказаны следующие явления и закономерности равнопрочности цилиндра по длине:

4.1) положительные алгебраические максимумы осевых напряжений в слоях, достигаемые на границах промежуточного участка взаимного осевого сцепления слоёв составного цилиндра со стороны первоначально свободных торцов соответствующих слоёв, равны между собой и среднему геометрическому отрицательных их алгебраических минимумов, достигаемых на границах промежуточного участка со стороны первоначально сжатых торцов соответствующих слоёв;

4.2) наклоны различных участков каждой из эпюр относительного натяга и осевых напряжений в слоях составного цилиндра по модулю постоянны и меняют лишь знак, так что границы промежуточного участка взаимного осевого сцепления слоёв делят пополам участки между общим нулём этих эпюр относительного натяга и осевых напряжений в слоях составного цилиндра и соответствующим торцом;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 471/556

4.3) для расположения этого общего нуля этих эпюр относительного натяга и осевых напряжений в слоях составного цилиндра именно на его срединной плоскости и вообще для обратносимметричности эпюр осевых напряжений в слоях необходимо и достаточно равенство продольных жёсткостей слоёв составного цилиндра, осуществляемое при среднеквадратичности радиуса сборки между внутренним и внешним радиусами составного цилиндра, при этом и только в этом случае равные между собой длины торцевых участков взаимного осевого проскальзывания слоёв составного цилиндра равны четверти его длины, а длина промежуточного участка взаимного осевого сцепления слоёв равна половине длины составного цилиндра;

4.4) положительные ординаты пересечений с первоначально свободными торцами продолжений эпюр осевых напряжений в слоях составного цилиндра на промежуточном участке взаимного осевого сцепления слоёв равны между собой и среднему геометрическому отрицательных ординат пересечений этих продолжений с первоначально сжатыми торцами, при этом названные ординаты являются удвоениями действительных алгебраических максимумов и минимумов.

5. Создана теория оптимизации технологичности и статической и циклической прочности составного цилиндра конечной длины при его тепловой сборке, запрессовке, гидропрессовой сборке и предложенной и обоснованной именно вполне обратимой технологии сжатия-растяжения для сборки-разборки соединений с натягом. Технология сжатия-растяжения основана на явлении поперечной деформации и заключается в осевых сжатии охватывающей детали и/или растяжении охватываемой детали отдельно или в сочетании с запрессовкой. Показано, что при действительных условиях сборки и нагружения равномерность контактного давления между слоями собранного по любой технологии составного цилиндра обеспечивает его равнопрочность по длине. При этом наилучшие радиус сопряжения и контактное давление определяются классическими формулами для плоского напряжённого состояния составного кольца (чрезвычайно короткого цилиндра), а соответствующее оптимальное изменение натяга по длине определяется полученным решением по теории принципиально трёхмерного напряжённо-деформированного процесса составного цилиндра конечной длины при осуществляющейся технологии его сборки. Открыты и доказаны явление и закон существования статического эквивалента циклического внутреннего давления. Он равен среднему давлению цикла, сложенному с амплитудным давлением, умноженным на отношение предела прочности к пределу усталости при симметричном цикле, если оно совпадает для материалов слоёв, с превышением наибольшего давления цикла или равенством статическому давлению. Тем самым обобщены классические условия наилучшего проектирования составного цилиндра на случай циклического нагружения.

6. Создана теория оптимизации составного цилиндра с учётом подлинных запасов прочности при сложном нагружении по созданным общей методологии всеобщего запаса, мультипликативной и аддитивной методологиям общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных, в частности для определения запаса прочности при наложении (суперпозиции) нагрузок, что позволяет уточнить условие равнопрочности слоёв составного цилиндра. Даваемое уточнение применительно к составным цилиндрам довольно существенно, причём различные методологии в рамках этой теории дают согласующиеся между собой результаты с возможностью самопроверяемости и взаимной проверяемости и применения для наилучшего проектирования составных цилиндров.

7. Создана теория комплексной оптимизации составного цилиндра при наличии или отсутствии полного сжатия твердосплавного внутреннего слоя самоскреплённым (автофретированным) внешним слоем. Предложены и обоснованы соответствующие рациональные конструкции составных цилиндров, сочетающие преимущества известных методов упрочнения толстостенных цилиндров.

8. Создана теория концентрации напряжений в несущих деталях сосудов высокого давления. Обосновано снижение коэффициента концентрации напряжений в цилиндре произвольной

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 472/556

толстостенности у отверстия с 2.5 до 1.5 путём замены круглой его формы на эллиптическую наилучшую форму с универсальным двукратным отношением осей эллипса и ориентацией большей оси эллипса перпендикулярно оси цилиндра. При отношении диаметра отверстия к внутреннему диаметру цилиндра до 0.277 аналогичный эффект достигается наилучшим смещением оси круглого отверстия в поперечном сечении цилиндра от радиального её положения вплоть до положения, соответствующего касанию крайней образующей отверстия с внутренней поверхностью цилиндра.

9. Создана общая метрология, в частности общая теория измерения физических величин с их самопогрешностями и неоднородными статическими и динамическими распределениями и теория исправления погрешностей измерений коэффициентами мультипликации, в том числе для электротензометрии мест концентрации напряжений, с общим методом исправления погрешностей измерений произвольных неоднородных статических и динамических распределений, в том числе в задачах электротензометрии мест концентрации напряжений. Установлены существование обращения линейного интегрального оператора усреднения в случае дифференцируемости образа и однозначность обращения с точностью до функций, для которых база измерительного прибора является периодом с нулевым средним интегральным их значением на периоде. Обращение оператора усреднения равносильно (эквивалентно) умножению образа на приемлемый коэффициент мультипликации. На основе приложения оператора усреднения к стандартным функциям разработан алгоритм непрерывного обращения искажённой дискретной измерительной информации. Приложение теории исправления погрешностей измерений коэффициентами мультипликации к электротензометрии мест концентрации напряжений и деформаций показало, что истинная наибольшая деформация определяется произведением измеренной деформации на приемлемый коэффициент мультипликации. Он зависит в наибольшей степени от делённых на характерный размер концентратора удаления от него и размеров измерительной решётки соответствующего тензорезистора и устанавливается приложением общего (полу)степенного аналитического метода макроэлементов и других аналитических методов к задачам с характерными концентраторами напряжений.

10. На основе открытых явлений и законов принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных процессов и прочности элементов и соединений техники высоких давлений с учётом соответствующих принципиально новых представлений по созданным общим теориям, методологиям и методам предложены и обоснованы новые рациональные конструкции сосудов высокого давления и гермовводов и способы снижения опасности гидравлических испытаний, защищённые авторскими свидетельствами на изобретения.

## **6. СОЗДАНИЕ ТЕОРИЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПРОЧНОСТИ УСЛОЖНЁННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И СОЕДИНЕНИЙ ТЕХНИКИ ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЙ**

Изложению этой шестой главы диссертации необходимо и очень полезно предпослать целый ряд существенных замечаний.

Во-первых, из общности и общей применимости созданных общих аналитических методов никоим образом не следуют их непременно всеобщая целесообразность и тем более исключительность. Основополагающим в настоящей диссертации является принцип допустимой простоты (при необходимости и возможности выбирается простейшее аналитическое выражение помимо заведомо несоответствующих известным данным) в соединении с инженерной точностью. Поэтому для отдельных задач и их классов вполне могут оказаться целесообразными как раз другие аналитические методы и обобщённые аналитические методы соответственно. Использование именно созданных общих аналитических методов ни в коем случае не является самоцелью. Они в принципе применимы к чрезвычайно широкому классу задач, однако на деле применяются тогда и



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 473/556

только тогда, когда не удаётся построить более простые непременно приемлемые приближённые аналитические методы с инженерной точностью.

Во-вторых, как раз более простые аналитические методы с инженерной точностью и строятся не только ввиду достаточности и удобства практического использования, но и в качестве важного обоснования выдвинутых в диссертации теоретических идей существования обобщённого аналитического метода решения каждого класса задач прочности и аналитического метода решения каждой задачи прочности для действительных (типов) конструкций с инженерной точностью и достаточно простотой по мере сложности граничных условий решаемых класса задач и задачи соответственно. Разумеется, при этом полностью отсутствует какая бы то ни было необходимость именно явного увязывания таких более простых аналитических методов с инженерной точностью и даваемых ими решений задач и их классов с обладающими наибольшей общностью созданными и развитыми в диссертации общими аналитическими методами. Впрочем, на самом деле соответствующее неявное увязывание всё-таки наличествует. Ведь эти более простые аналитические методы с инженерной точностью создаются автором этих общих аналитических методов с несомненным учётом полученных общими аналитическими методами принципиально новых представлений о деформировании, прочности и разрушении существенно трёхмерных тел с открытием и обоснованием соответствующих систем явлений и законов.

В-третьих, шестая глава диссертации более чем существенно расширяет систему поставленных и решённых ещё и с экспериментальной проверкой и внедрением «задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений» с цитированием здесь расширенной второй части названия диссертации, а именно усложнённых элементов и систем техники высоких давлений с концентраторами напряжений. В начале шестой главы представлен метод циклически прочного соединения разнородных материалов с системой натягов и зазора в составном плунжере. Кстати, составной плунжер с внешними твердосплавными втулками и внутренним стальным сердечником с осевым натягом может быть использован внутри предложенного в пятой главе составного цилиндра с твердосплавным внутренним слоем и самоскреплённым (автофретированным) стальным внешним слоем с радиальным натягом. При именно таких соединениях с явной симметрией идей наилучшим образом сочетаются достоинства и устраняются недостатки обоих типов конструкционных материалов. В середине шестой главы представлен метод совместного учёта конструктивной анизотропии и концентрации напряжений в цельнолитом корпусе прямоточного клапана. Завершает шестую главу теория циклической прочности при концентрации напряжений циклически симметричной системой отверстий применительно к ограничителю грибкового клапана. Разумеется, для осесимметричного плунжера в принципе вполне можно использовать созданный и развитый аналитический метод макроэлементов для осесимметричной упругой задачи без объёмных сил и кручения на основе впервые полученного именно общего решения бигармонического уравнения в степенных рядах как в собственном классе функций для оператора бигармонического уравнения, в том числе применительно к бигармонической функции напряжений Лява. А для конструктивно ортотропного цельнолитого корпуса прямоточного клапана и для ограничителя грибкового клапана с циклически симметричной системой отверстий в принципе вполне можно использовать аналитический метод макроэлементов для трёхмерной упругой задачи в декартовой прямоугольной системе координат на основе впервые полученного именно общего решения гармонического уравнения в степенных рядах как в собственном классе функций для оператора гармонического уравнения, в том числе применительно к каждой из трёх гармонических функций напряжений для общего решения в форме Папковича–Нейбера. Однако априорно ясно, что для всех этих трёх конструкций шестой главы диссертации использование аналитического метода макроэлементов привело бы к заведомо более сложным решениям, чем решения, полученные специально разработанными для соответствующих типов конструкций и классов задач прочности более простыми аналитическими методами с инженерной точностью, и тем самым не только нарушило бы

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 474/556 основополагающий для диссертации принцип допустимой простоты, но и оказалось бы именно практически нецелесообразным.

### 6.1. Метод циклически прочного соединения разнородных материалов с системой натягов и зазора в составном плунжере

Составной плунжер конструкции В. М. Данько, Б. И. Огурцова, А. В. Богуты и др. (ВНИИкомпрессормаш, Научно-производственное предприятие "Сплав-Т") [61] включает твердосплавные рабочие втулки, надетые с радиальным натягом на центрирующие стальные втулки и стянутые с осевым натягом пластичным сердечником, имеющим радиальный зазор с центрирующими втулками (рис. 6.1). Применение составной конструкции плунжера взамен его цельных твердосплавной металлокерамической конструкции и пластичной конструкции с химико-термическим упрочнением рабочей поверхности позволяет соединить преимущества этих конструкций (износостойкость и гибкость) и избавиться от недостатков этих конструкций (массивности, высокой стоимости и хрупкости, а также недолговечности).

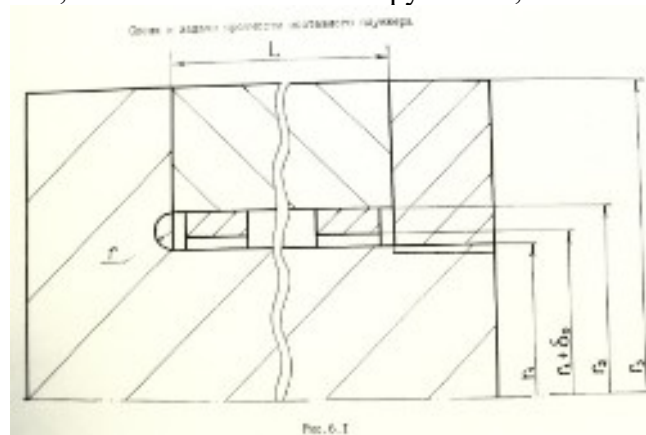


Рисунок 6.1. Схема к методу циклически прочного соединения разнородных материалов с системой натягов и зазора в составном плунжере.

Но для этого необходимо рационально выбрать натяги и зазор в составном плунжере. Его тепловая сборка и гидрозатяжка, осуществляющие осевой натяг  $\Delta_0$ , ввиду наличия радиального зазора в отличие от сборки составного цилиндра приводят к одинаковым результатам.

Сопряжение термоупругих перемещений с учётом теплового уменьшения осевого натяга даёт суммарные осевые напряжения в стержне сердечника и в рабочих втулках соответственно

$$\sigma_{z1} = \{E_1 E_2 (r_3^2 - r_2^2) [\Delta_0 / L - (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t^\circ] - (1 - 2\mu_2) E_1 p r_3^2\} / [E_1 r_1^2 + E_2 (r_3^2 - r_2^2)];$$

$\sigma_{z2} = - \{E_1 E_2 r_1^2 [\Delta_0 / L - (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t^\circ] + (1 - 2\mu_2) E_1 p r_1^2 r_3^2 / (r_3^2 - r_2^2)\} / [E_1 r_1^2 + E_2 (r_3^2 - r_2^2)] - p r_3^2 / (r_3^2 - r_2^2)$ , где  $E_1, E_2, \mu_1, \mu_2, \alpha_1$  и  $\alpha_2$  – модули продольной упругости Юнга, коэффициенты поперечной деформации Пуассона и температурные коэффициенты линейного расширения материалов сердечника и рабочих втулок соответственно;

$p$  – внешнее рабочее давление;

$\Delta t^\circ$  – превышение рабочей температуры над нормальной температурой.

Радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_t$  напряжения в рабочих втулках определяются формулами Ламе [358].

Раздельный учёт по плоским аналогам [236, 283] коэффициентов концентрации  $K_t$  и  $K_b$  растягивающих и изгибных напряжений соответственно в галтели головки сердечника даёт наибольшее именно после сборки осевое напряжение в ней

$$\sigma_{z1max} = E_1 E_2 (\Delta_0 / L) [K_t (r_3^2 - r_2^2) + 1.2 K_b (r_3 - r_2) (r_3 + r_2 - r_1)] / [E_1 r_1^2 + E_2 (r_3^2 - r_2^2)].$$

Поскольку коэффициенты концентрации  $K_t$  и  $K_b$  определяются прежде всего отношением  $r/r_1$ , то радиус закругления  $r$  следует максимально увеличить до  $(r_2 - r_1)/2$  и более с поднутрением, если это необходимо.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 475/556

Рациональный радиальный натяг  $q_0$  между центрирующими и рабочими втулками по радиусу  $r_2$  их сопряжения – наименьший гарантированный натяг (не переходящий в зазор).

Сборочный радиальный зазор между центрирующими втулками и стержнем сердечника (гарантированный, не переходящий в натяг при  $p_{\max}$  и  $\Delta t^\circ$ ) с запасом  $n_r > 1$

$$\delta_0 = n_r \{ q_0 - [\Delta_0/L - (\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t^\circ] [\mu_2 E_1 r_1 r_2 + \mu_1 E_2 (r_3^2 - r_2^2)] / [E_1 r_1^2 + E_2 (r_3^2 - r_2^2)] + (\alpha_1 r_1 - \alpha_2 r_2) \Delta t^\circ + p_{\max} r_3^2 (\mu_1 r_1 - \mu_2 r_2) / [E_1 r_1^2 + E_2 (r_3^2 - r_2^2)] + 2(p_{\max}/E_2) r_2 r_3^2 / (r_3^2 - r_2^2) \}.$$

Завершение расчётов статической и усталостной прочности стержня и определяющей прочностью плунжера галтели сердечника, резьбовой гайки, центрирующих и рабочих втулок достигается известными методами [68, 78, 303, 305].

Поскольку при внешнем давлении уплотнение осуществляется по принципу некомпенсированной площади, то герметичность гарантирована при условии ( $n_z > 1$ )

$$\Delta_0 = n_z L (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t^\circ.$$

При действительных исходных параметрах устойчивость [260] плунжера обеспечена.

Для расчёта принимаются следующие исходные данные:

давление всасывания

$$p_{\min} = 55 \text{ МПа},$$

давление нагнетания

$$p_{\max} = 150 \text{ МПа}$$

в ступени поршневого компрессора,

$$\Delta t^\circ = 100 \text{ }^\circ\text{C},$$

$$r_1 = 15 \text{ мм},$$

$$r_2 = 17.5 \text{ мм},$$

$$r_3 = 28 \text{ мм},$$

$$L = 260 \text{ мм},$$

набор рабочих втулок выполнен из твёрдого сплава ТНМ-20 с

$$E_2 = 4.13 * 10^5 \text{ МПа},$$

$$\alpha_2 = 7.1 * 10^{-6} \text{ град}^{-1},$$

прочностью на сжатие

$$\sigma_{c2} = 3500 \text{ МПа}$$

и прочностью при изгибе

$$\sigma_{b2} = 1150 \text{ МПа},$$

сердечник выполнен из стали 38ХНЗМФА с

$$E_1 = 2.1 * 10^5 \text{ МПа},$$

$$\alpha_1 = 11 * 10^{-6} \text{ град}^{-1},$$

пределом текучести

$$\sigma_{s1} = 800 \text{ МПа}$$

и пределом прочности

$$\sigma_{u1} = 1000 \text{ МПа},$$

а гайка и центрирующие втулки – из той же стали 38ХНЗМФА, термообработанной на предел текучести

$$\sigma_{s3} = 1150 \text{ МПа}$$

и предел прочности

$$\sigma_{u3} = 1340 \text{ МПа}.$$

Результаты расчёта следующие:

сборочный осевой натяг

$$\Delta_0 = 0.13 \text{ мм}$$

снижается при

$$\Delta t^\circ = 100 \text{ }^\circ\text{C}$$

до

$$\Delta_t = 0.03 \text{ мм};$$

сборочный радиальный натяг

$$q_0 = 0.015 \text{ мм},$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 476/556

которому соответствует контактное давление между рабочими и центрирующими втулками 25 МПа и который при работе изменяется в пределах (и далее при  $p_{\min} \dots p_{\max}$  соответственно)

0.021...0.033 мм,

контактное давление при работе изменяется в пределах

35...53 МПа,

равносильное (эквивалентное) напряжение на внутренней поверхности центрирующих втулок при работе изменяется в пределах

270...410 МПа

с запасом усталостной прочности 2.66;

сборочный радиальный зазор между центрирующими втулками и сердечником

$\delta_0 = 0.040$  мм

при работе изменяется в пределах

0.019...0.007 мм;

сборочное осевое напряжение в галтели сердечника

$\sigma_{z1\max} = 535$  МПа

с запасом прочности по пределу текучести

$n_s = 1.50$ ;

осевые напряжения при работе изменяются в пределах

-56...-18 МПа

в сердечнике,

-97...-258 МПа

в головке сердечника, гайке и рабочих втулках;

окружные напряжения на внутренних поверхностях рабочих втулок при работе изменяются в пределах

-180...-490 МПа;

запасы усталостной прочности гайки составляют 1.88 по контактными давлениям и 2.48 по резьбе.

В других вариантах исполнения составного плунжера сердечник может быть изготовлен из титанового сплава ВТ6С с

$E_1 = 1.15 * 10^5$  МПа,

$\alpha_1 = 8.5 * 10^{-6}$  град<sup>-1</sup>,

$\sigma_{s1} = 770$  МПа,

$\sigma_{u1} = 830$  МПа,

гайка и центрирующие втулки – из той же стали 38ХН3МФА, термообработанной на

$\sigma_{s3} = 1150$  МПа,

$\sigma_{u3} = 1340$  МПа,

а рабочие втулки – из твёрдого сплава ВК6.

Могут использоваться отработанные втулки составных цилиндров с изношенными внутренними поверхностями, которые в составных плунжерах уже не являются рабочими, что удваивает срок службы твердосплавных втулок.

Рациональный выбор сборочных натягов и зазора в составном плунжере позволяет осуществить его потенциальные преимущества перед цельными твердосплавными и пластичными аналогами.

## **6.2. Метод совместного учёта конструктивной анизотропии и концентрации напряжений применительно к деформированию и прочности конструктивно ортотропного цельнолитого корпуса прямого клапана**

Корпус клапана конструкции Г. Л. Захаржевского (ВНИИкомпрессормаш), выполненный из алюминиевого сплава АЛ-14В, является многосвязным осеасимметричным телом с двумя ортогональными срединной плоскости плоскостями симметрии (рис. 6.2).

Схема к задаче прочности  
цельнолитого корпуса прямооточного клапана

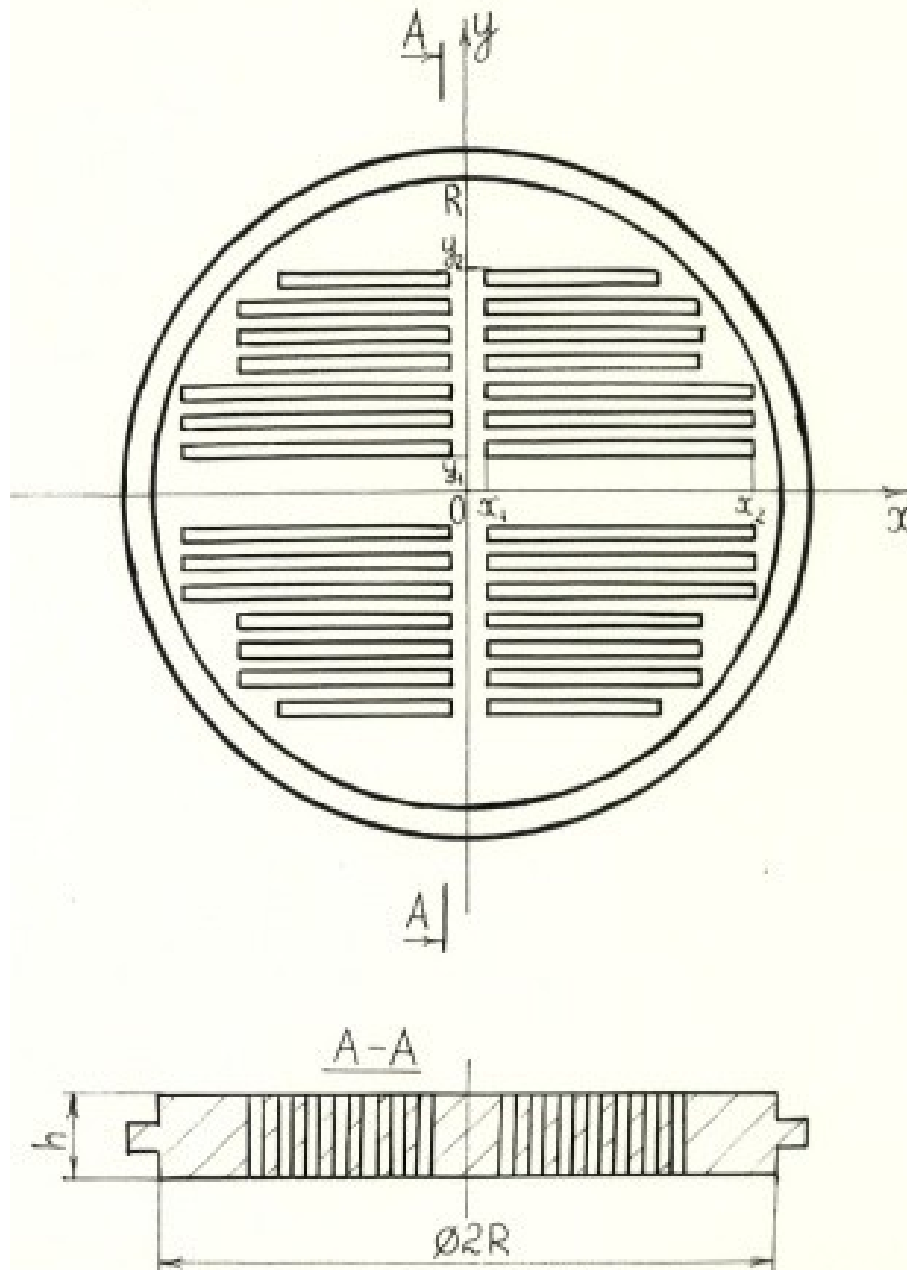


Рис. 6.2

Рисунок 6.2. Схема к методу совместного учёта конструктивной анизотропии и концентрации напряжений применительно к прочности цельнолитого корпуса прямооточного клапана.

Дифференциальное уравнение прогиба  $w$  конструктивно ортотропной пластины толщиной  $h$  под равномерным давлением  $p$  [187] имеет вид

$$D_x \partial^4 w(x, y) / \partial x^4 + 2D \partial^4 w(x, y) / (\partial x^2 \partial y^2) + D_y \partial^4 w(x, y) / \partial y^4 = p,$$

где  $x, y, E_x, E_y, \mu_x, \mu_y,$

$$D_x = E_x h^3 / [12(1 - \mu_x \mu_y)],$$

$$D_y = E_y h^3 / [12(1 - \mu_x \mu_y)]$$

– главные направления ортотропной пластины и в них модули продольной упругости Юнга, коэффициенты поперечной деформации Пуассона и изгибные жёсткости соответственно;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 478/556

$$D_{\omega} = Gh^3/12,$$

$$D = D_x\mu_y + 2D_{\omega}$$

– крутильная и приведённая жёсткости пластины;

$G$  – модуль сдвига материала пластины.

Точное решение для пластины радиусом  $R$  с жёстко закреплённым краем [187]

$$w(x, y) = p(R^2 - x^2 - y^2)/(64D'),$$

где

$$D' = (3D_x + 2D + 3D_y)/8.$$

Эквивалентная континуализация дискретной решётчатой структуры [187, 320] даёт

$$w(x, y) = (1/2)(p/E)(R^3/h^3)(R^2 - x^2 - y^2)/[2R + x_1h_3^3/h^3 + 3x_1(h_3/h)(1 - h_3/h)^2 - x_2 + y_1 - y_2 + b],$$

где  $h_3$  ( $h_3 < h$ ) – толщина перемычки, примыкающей основанием к основанию корпуса;

$b$  – суммарная ширина перемычек на участке от  $y_1$  до  $y_2$  (см. рис. 6.2).

Коэффициент концентрации напряжений у щелей, образующих проходное сечение, определён аналитическим приближением приведённых в [236] данных об изгибе полосы с симметричными относительно продольной оси глубокими вырезами ( $r$  – радиус закругления щелей)

$$K = 1 + 0.11(2x_1/r)^{0.735}.$$

В итоге наибольшее равносильное (эквивалентное) напряжение в точках

$$x = \pm x_1,$$

$$y = \pm y_2$$

составляет

$$(6.1)$$

$$\sigma_{eL} = [1 + 0.11(2x_1/r)^{0.735}]p(R^3/h^2)(3y_2^2/R^2 - 1)/[2R + x_1h_3^3/h^3 + 3x_1(h_3/h)(1 - h_3/h)^2 - x_2 + y_1 - y_2 + b].$$

Однако действительные условия краевой поддержки корпуса являются промежуточными между рассмотренным жёстким защемлением и более приемлемым свободным опиранием, причём малость мембранных напряжений позволяет ограничиться изгибными напряжениями, как и выше при выводе формулы (6.1).

Известно, что для изотропных круглых пластин максимальные изгибные напряжения при свободном её опирании достигаются в её центре и при  $\mu = 0.3$  (ориентировочно для алюминиевых соединений) в 1.65 раза больше таковых, достигаемых на краю пластины при жёстком её защемлении [320].

За отсутствием данных предположим выполнение этого соотношения и для ортотропных пластин.

Тогда наибольшее равносильное (эквивалентное) напряжение в местах наибольшей концентрации напряжений (теперь уже в точках

$$x = \pm x_1,$$

$$y = \pm y_2$$

на растянутой стороне)

$$(6.2)$$

$$\sigma_{eU} = 3.3[1 + 0.11(2x_1/r)^{0.735}]p(R^3/h^2)(1 - 3y_1^2/R^2)/[2R + x_1h_3^3/h^3 + 3x_1(h_3/h)(1 - h_3/h)^2 - x_2 + y_1 - y_2 + b].$$

Удвоение числа 1.65 связано с тем, что последний множитель в квадратных скобках в формуле (6.1) при

$$y_2 = R$$

вдвое больше, чем в формуле (6.2) при

$$y_1 = 0.$$

Значения  $\sigma_{eL}$  и  $\sigma_{eU}$  суть соответственно нижняя и верхняя границы действительного наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения в местах наибольшей концентрации напряжений при действительных условиях поддержки корпуса по краю.

Более приемлемая формула (6.2) позволяет оптимизировать конструкцию корпуса в прочностном аспекте без ухудшения газодинамических свойств прямооточного клапана поршневого компрессора.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 479/556

При выбранных радиусе  $R$ , квадрат которого пропорционален проходному сечению клапана, и давлению  $p$  размеры  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  и  $b$  практически не подлежат изменению, иначе уменьшается или проходное сечение, или прочность корпуса за счёт утонения перемычек. Зависимости же  $\sigma_{eL}$  и  $\sigma_{eU}$  от  $h_3$  ввиду соотношений

$$h_3 < h$$

и

$$x_1 \ll R$$

являются весьма слабыми.

Поэтому для минимизации наибольшего равносильного (эквивалентного) напряжения в корпусе необходимо и достаточно увеличить радиус закругления  $r$  щелей для прохода газа вплоть до половины их ширины и, если это требуется, увеличить толщину  $h$  корпуса в пределах, допускаемых технологичностью.

В частности, для двух типоразмеров цельнолитых корпусов с

$$R = 55 \text{ мм}; 62.5 \text{ мм}$$

имеют место

$$\begin{aligned} h &= 15 \text{ мм}; \\ h_3 &= 3.7 \text{ мм}; \\ x_1 &= 2.3 \text{ мм}; 2.9 \text{ мм}; \\ x_2 &= 40 \text{ мм}; 55 \text{ мм}; \\ y_1 &= 5.8 \text{ мм}; \\ y_2 &= 41.8 \text{ мм}; 48.8 \text{ мм}; \\ b &= 16.5 \text{ мм}; 19.5 \text{ мм} \end{aligned}$$

и

$$r = 0.5 \text{ мм};$$

согласно формуле (6.2) соответственно

$$\sigma_{eU} = 71.5p; 123p;$$

с учётом предела текучести

$$\sigma_s = 170 \text{ МПа}$$

давление начала пластического течения, то есть предел упругого сопротивления,

$$p_s = 2.48 \text{ МПа}; 1.38 \text{ МПа}.$$

Увеличение в большем типоразмере  $r$  с 0.5 мм до 1.95 мм снижает коэффициент концентрации  $K$  на четверть и соответственно повышает  $p_s$  на треть.

В лаборатории прочностных исследований конструкций, работающих под давлением, ВНИИкомпрессормаш выполнена программа экспериментальных исследований деформирования цельнолитого корпуса прямого клапана методом электротензометрии. Эту программу под руководством Б. И. Огурцова осуществил Е. А. Шерстюк с использованием сконструированных А. В. Рубаненко деталей камеры для тарировки электротензорезисторов в среде высокого гидростатического давления на специальной балке со срединным участком чистого изгиба благодаря четырёхточечному нагружению.

Автор выполнил руководство обработкой данных этой программы экспериментальных исследований деформирования цельнолитого корпуса прямого клапана методом электротензометрии, а также анализ и синтез этих данных и сопоставление их с итогами теоретических исследований по собственным теориям деформирования и прочности несущих элементов техники высоких давлений с концентрацией напряжений и деформаций у отверстий.

По данным экспериментов предел упругого сопротивления цельнолитого корпуса каждого из типоразмеров соответствовал началу нелинейности в зависимости деформаций корпуса от давления.

Корпус с наклеенным на него тензорезистором ПКБ-10-100ГВ, покрытым вместе с подводными проводами влагозащитной мастикой, закреплялся аналогично рабочим условиям в специальной камере, в полость которой подавалось трансформаторное масло под давлением с помощью насоса Н-403Е.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 480/556

Его производительность 24 л/мин обеспечивала даже при утечках достаточную скорость повышения давления, измеряемого двумя манометрами – показывающим и МПЭ-3 с электрическим выходом и самопишущим миллиамперметром КСУ2-015И в качестве вторичного прибора.

Для измерения деформаций применялась тензометрическая станция фирмы «Брюль и Кьер». Компенсационный тензорезистор наклеивался на пластину из того же сплава АЛ-14В, размещённую в непосредственной близости от корпуса.

Для получения графического изображения зависимостей деформаций от давлений использовался самопишущий двухкоординатный миллиамперметр типа Н359, на абсциссу и ординату которого через блоки согласования и усилители подавались соответственно сигнал измерения давления с самопишущего миллиамперметра КСУ2-015И и сигнал измерения деформации с выхода тензометрической станции «Брюль и Кьер».

Анализ полученных зависимостей деформаций от давлений для нескольких корпусов каждого из типоразмеров показал, что в большинстве случаев с малой погрешностью можно установить начало нелинейности этих зависимостей, которое и соответствует пределу упругого сопротивления корпуса.

Для четырёх корпусов типоразмера

$$R = 55 \text{ мм} \\ p_s = 2.0 \text{ МПа}; 2.6 \text{ МПа}; 2.85 \text{ МПа}; 3.2 \text{ МПа},$$

в среднем

$$p_s = 2.7 \text{ МПа}.$$

Для шести корпусов типоразмера

$$R = 62.5 \text{ мм} \\ p_s = 1.85 \text{ МПа}; 1.2 \text{ МПа}; 1.35 \text{ МПа}; 1.0 \text{ МПа}; 1.65 \text{ МПа}; 1.7 \text{ МПа},$$

в среднем

$$p_s = 1.5 \text{ МПа}.$$

Метод совместного учёта конструктивной анизотропии и концентрации напряжений применительно к деформированию и прочности конструктивно ортотропного цельнолитого корпуса прямооточного клапана дал для этих обоих типоразмеров соответственно давление начала пластического течения, то есть предел упругого сопротивления,

$$p_s = 2.48 \text{ МПа}; 1.38 \text{ МПа}.$$

Таким образом, простой аналитический метод совместного учёта конструктивной анизотропии и концентрации напряжений применительно к деформированию и прочности конструктивно ортотропного цельнолитого корпуса прямооточного клапана даёт достаточно приемлемые результаты, позволяющие оптимизировать его конструкцию.

### **6.3. Теория циклической прочности при концентрации напряжений циклически симметричной системой отверстий применительно к ограничителю грибкового клапана**

Ограничитель хода запорных органов на стороне всасывания комбинированного грибкового клапана поршневого компрессора высокого давления является трёхмерным цилиндрическим телом (рис. 6.3) радиусом  $R_c$  с чётным  $n = 2k$

( $k$  – натуральное число, не меньшее 2) числом циклически симметричных ступенчатых отверстий средним по толщине радиусом  $R_i$ , оси которых лежат на соосной (коаксиальной) цилиндрической поверхности радиусом  $R_c$ , и возможным центральным отверстием средним по толщине радиусом  $R_{ic}$ , при этом

$$0 \leq R_{ic} < R_c - R_i < R_c < R_c + R_i < R_c.$$

Ограничитель нагружен статическим давлением всасывания  $p_{\min}$  на внешнюю боковую поверхность и циклическим давлением  $p$  в цилиндре компрессора от  $p_{\min}$  до давления нагнетания  $p_{\max}$

$$(p_{\min} \leq p \leq p_{\max})$$



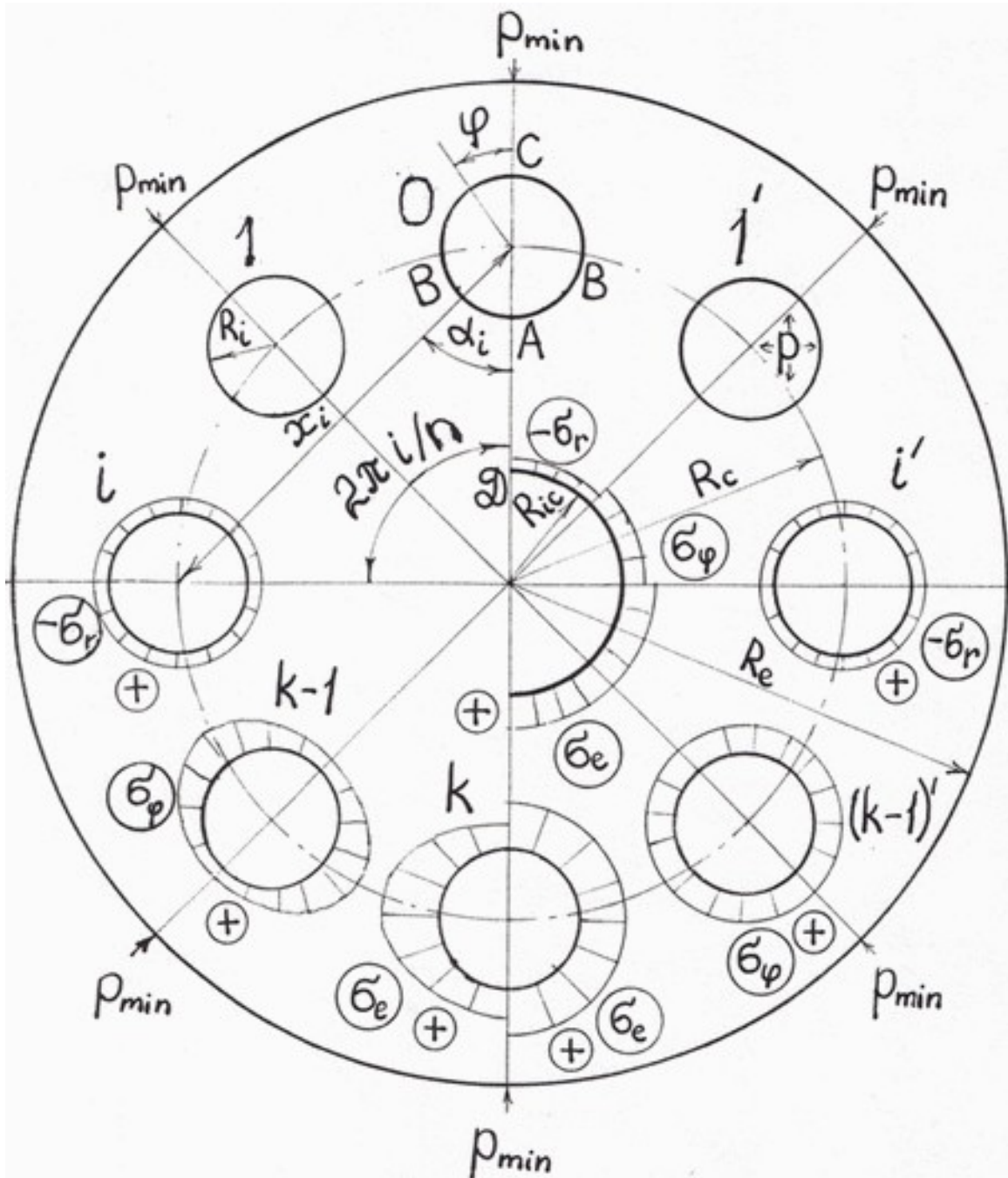


Рисунок 6.3. Схема к решению задачи прочности и эпюры радиальных, тангенциальных (окружных) и равносильных (эквивалентных) напряжений на поверхностях циклически симметричных отверстий в цилиндрическом теле, в т. ч. ограничителе грибовидного клапана, при отсутствии (слева) и наличии (справа) центрального отверстия наилучшего радиуса.

на остальную поверхность (за не учитываемым по созданным общим методам малых и немалых отверстий исключением уплотнительных поясков у краёв оснований

$$R_{si} \leq r \leq R_{se}$$

с контактным давлением  $p_s$  и их узкой внешности

$$R_{se} \leq r \leq R_e$$

с давлением всасывания  $p_{min}$ ). Напряжённое состояние ограничителя хода запорных органов комбинированного грибовидного клапана близко к плоскому и концентрируется у отверстий, где и зарождаются усталостные трещины при разрушении ограничителя.

Поэтому в данной задаче главным является определение именно концентрации напряжений на изображённых точками А, В, С, D (см. рис. 6.3) нормалях наибольших попарных сближений боковых поверхностей ограничителя и отверстий, осуществимое по созданным общим методам малых и немалых отверстий, в частности методам циклически симметричных малых и немалых отверстий, и общему методу сосредоточенного сопряжённого усреднения.

По общему методу малых отверстий, в частности методу циклически симметричных малых отверстий, с принципом наложения (суперпозиции) предположим, что диаметры отверстий существенно меньше их расстояний между собой и от боковой поверхности.

Тогда для определения напряжений вне произвольного отверстия 0, на рисунке 6.3 верхнего, от действия давления  $p$  в самом этом отверстии можно воспользоваться решением Ламе [358] для цилиндра большой относительной толстостенности, в том числе для центров (на деле осей) всех остальных периферических отверстий в условном предположении отсутствия всех остальных периферических отверстий.

Погрешность этого предположения тем меньше, чем меньше отношение диаметров отверстий к расстояниям между ними.

Формулы Ламе [358] для полого толстостенного цилиндра при наших обозначениях и предположениях принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rN}(r) &= -pR_{ic}^2(R_e^2/r^2 - 1)/(R_e^2 - R_{ic}^2) - p_{min}R_e^2(1 - R_{ic}^2/r^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2), \\ \sigma_{tN}(r) &= pR_{ic}^2(R_e^2/r^2 + 1)/(R_e^2 - R_{ic}^2) - p_{min}R_e^2(1 + R_{ic}^2/r^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2), \\ \tau_{rN} &= 0,\end{aligned}$$

где  $\sigma_{rN}$ ,  $\sigma_{tN}$ ,  $\tau_{rN}$  – номинальные (в предположении отсутствия периферических отверстий, то есть не зависящие от местной концентрации напряжений у этих отверстий) радиальное, тангенциальное (окружное) и сдвиговое напряжения соответственно в полом толстостенном цилиндре, зависящие только от изменяющегося в пределах от  $R_{ic}$  до  $R_e$  текущего расстояния  $r$  рассматриваемой точки от оси полого толстостенного цилиндра.

В частности, на внутренней поверхности полого толстостенного цилиндра, в нашем случае на поверхности центрального отверстия,

$$\begin{aligned}r &= R_{ic}, \\ \sigma_{rN}(R_{ic}) &= -p, \\ \sigma_{tN}(R_{ic}) &= p(R_e^2 + R_{ic}^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2) - 2p_{min}R_e^2/(R_e^2 - R_{ic}^2) = \\ &= [p(R_e^2 + R_{ic}^2) - 2p_{min}R_e^2]/(R_e^2 - R_{ic}^2),\end{aligned}$$

а на внешней поверхности полого толстостенного цилиндра

$$\begin{aligned}r &= R_e, \\ \sigma_{rN}(R_e) &= -p_b, \\ \sigma_{tN}(R_e) &= 2pR_{ic}^2/(R_e^2 - R_{ic}^2) - p_{min}(R_e^2 + R_{ic}^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2) = \\ &= [2pR_{ic}^2 - p_{min}(R_e^2 + R_{ic}^2)]/(R_e^2 - R_{ic}^2).\end{aligned}$$

А для напряжений от действия давлений  $p$  в каждом из остальных отверстий и давления  $p_{min}$  на боковую поверхность можно воспользоваться решением Кирша [319, 321] для условно бесконечной пластины с круглым отверстием, равномерно растягиваемой на противоположных краях вдоль одной оси, то есть в паре противоположных направлений.

Известно, что при одноосном растяжении условно бесконечной пластины с круглым отверстием в пределах упругости напряжённое состояние на кромке отверстия определяется следующими соотношениями Кирша [319, 321]:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 0, \\ \sigma_\phi &= \sigma(1 - 2\cos 2\phi), \\ \tau_{r\phi} &= 0,\end{aligned}$$

где

$\sigma_r$ ,  $\sigma_\phi$ ,  $\tau_{r\phi}$  – соответственно радиальное, тангенциальное (окружное) и сдвиговое напряжения в пластине;

$\phi$  – угол, отсчитываемый от оси в направлении напряжения  $\sigma$ , растягивающего пластину на условной бесконечности.

Определим напряжённое состояние на кромке рассматриваемого периферического отверстия 0, на рисунке 6.3 верхнего, от действия равных давлений  $p$  в паре периферических отверстий  $i$  и  $i'$  радиусом  $R_i$ , симметричных относительно плоскости, проходящей через оси ограничителя и рассматриваемого отверстия 0 (см. рис. 6.3).

Оси периферических отверстий  $i$  и  $i'$  расположены на равных расстояниях

$$r = x_i$$

от оси рассматриваемого отверстия 0.

В нашем случае исходными являются радиальное  $\sigma_r$  и тангенциальное (окружное)  $\sigma_t$  напряжения от действия давления  $p$  в любом отверстии на расстоянии  $x_i$ , не меньшем радиуса этого отверстия, от оси этого отверстия, в нашем случае на оси рассматриваемого периферического отверстия 0, на рисунке верхнего, в предположении отсутствия его и концентрации напряжений около него.

В общем методе малых отверстий отверстия считаются малыми относительно расстояний между собой и от боковой поверхности.

К тому же хорошо известно, что по формулам Ламе [358] в полом толстостенном цилиндре, нагруженном только внутренним давлением, обусловленные им напряжения быстро убывают с увеличением радиуса, так что уже при относительной толстостенности как отношении внешнего радиуса полого толстостенного цилиндра к внутреннему радиусу не менее трёх-четырёх внешний радиус можно считать условно бесконечным, поскольку внешние слои такого цилиндра нагружены весьма слабо и поэтому погрешности в определении напряжённого состояния там, где оно существенно, находятся в пределах 10 %.

Эти радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения на границе окрестности рассматриваемого отверстия 0, на рисунке 6.3 верхнего, приближённо определяются по формулам Ламе [358] для цилиндра с условно бесконечным внешним радиусом и составляют соответственно:

$$\begin{aligned}\sigma_r(x_i) &= -pR_i^2/x_i^2, \\ \sigma_t(x_i) &= pR_i^2/x_i^2.\end{aligned}$$

Тогда в принятых обозначениях (см. рис. 6.3) на кромке рассматриваемого периферического отверстия 0, на рисунке 6.3 верхнего, радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения (с учётом концентрации напряжений у этого отверстия) от действия давления  $p$  в отверстии  $i$  составляют по формулам Кирша [319, 321] соответственно:

$$\begin{aligned}\sigma_{\phi i} &= 0, \\ \sigma_{\phi i} &= pR_i^2x_i^{-2}[1 - 2\cos 2(\pi/2 + \alpha_i - \phi)] - pR_i^2x_i^{-2}[1 - 2\cos 2(\alpha_i - \phi)] = 4pR_i^2x_i^{-2}\cos 2(\alpha_i - \phi).\end{aligned}$$

Аналогично на кромке рассматриваемого периферического отверстия 0, на рисунке 6.3 верхнего, радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения (с учётом концентрации напряжений у этого отверстия) от действия давления  $p$  в отверстии  $i'$  составляют по формулам Кирша [319, 321] соответственно:

$$\begin{aligned}\sigma_{\phi i'} &= 0, \\ \sigma_{\phi i'} &= pR_i^2x_i^{-2}[1 - 2\cos 2(\pi/2 + \alpha_i + \phi)] - pR_i^2x_i^{-2}[1 - 2\cos 2(\alpha_i + \phi)] = 4pR_i^2x_i^{-2}\cos 2(\alpha_i + \phi).\end{aligned}$$

Поэтому на кромке рассматриваемого периферического отверстия 0, на рисунке 6.3 верхнего, радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения (с учётом концентрации напряжений у этого отверстия) от действия давлений  $p$  в паре отверстий  $i$  и  $i'$  составляют по формулам Кирша [319, 321] соответственно:

$$\begin{aligned}\sigma_{\phi ii'} &= \sigma_{\phi i} + \sigma_{\phi i'} = 0, \\ \sigma_{\phi ii'} &= \sigma_{\phi i} + \sigma_{\phi i'} = 8pR_i^2x_i^{-2}\cos 2\alpha_i \cos 2\phi.\end{aligned}$$

Пусть теперь  $i$  последовательно пробегает все значения

$$1, 2, 3, \dots, k - 1.$$

Тогда рассмотренная выше текущая пара отверстий  $i$  и  $i'$  пробегает все пары симметричных отверстий

$$1 \text{ и } 1', 2 \text{ и } 2', 3 \text{ и } 3', \dots, (k - 1) \text{ и } (k - 1)'$$

Таким образом учитывается влияние давлений  $p$  во всех этих парах симметричных отверстий и в непарном противоположном отверстию 0 отверстию  $k$ , на рисунке 6.3 нижнем.

А для правильного n-угольника ( $n = 2k$ )

$$x_i = 2R_c \sin(\pi/n),$$

$$2\alpha_i = \pi - 2\pi/n,$$

где

$$i = 1, 2, 3, \dots, k - 1.$$

В результате на кромке рассматриваемого периферического отверстия 0, на рисунке 6.3 верхнего, радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения (с учётом концентрации напряжений у этого отверстия) от действия давлений  $p$  во всех этих парах симметричных отверстий и в непарном противоположном отверстию 0 отверстию  $k$ , на рисунке 6.3 нижнем, составляют по формулам Кирша [319, 321] соответственно:

$$\sigma_{\rho 1k} = 0,$$

$$\sigma_{\varphi 1k} = -8pR_i^2 \cos 2\varphi \sum_{i=1}^{k-1} \cos(2\pi i/n) / [4R_c^2 \sin^2(\pi/n)] + 4pR_i^2 (2R_c)^{-2} \cos 2\varphi =$$

$$pR_i^2 R_c^{-2} \cos 2\varphi [1 - 2\sum_{i=1}^{k-1} \cos(\pi/k) / \sin^2(0.5\pi/k)].$$

Обозначим

$$S_k = \sum_{i=1}^{k-1} \cos(\pi/k) / \sin^2(0.5\pi/k),$$

$$A_k = 2S_k - 1.$$

Тогда

$$\sigma_{\varphi 1k} = -A_k p R_i^2 R_c^{-2} \cos 2\varphi.$$

Сумма  $S_k$  для малых  $k$  подсчитывается непосредственно, в частности:

$$S_2 = 0;$$

$$S_3 = 4/3;$$

$$S_4 = 4;$$

$$S_6 = 40/3.$$

При  $k \geq 6$  вполне приемлема приближённая формула

$$S_k \approx 0.69k^2 - 2.17k + 2.$$

Относительная погрешность при определении суммы  $S_k$  по этому соотношению уменьшается с увеличением числа отверстий и для  $k \geq 6$  не превышает 4 %.

От действия давления  $p$  в самом рассматриваемом периферическом отверстии 0, на рисунке 6.3 верхнем, радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения на кромке отверстия 0

$$\sigma_{\rho 0} = -p;$$

$$\sigma_{\varphi 0} = p.$$

Радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения на кромке рассматриваемого периферического отверстия 0, на рисунке 6.3 верхнего, от действия внутреннего давления  $p$  в центральном отверстии (то есть на внутренней поверхности

$$r = R_{ic}$$

полого толстостенного цилиндра) и от внешнего давления  $p_{min}$  приближённо определяются подстановкой формул Ламе [358] для номинальных напряжений  $\sigma_{rN}(R_c)$  и  $\sigma_{tN}(R_c)$  на соосной с деталью цилиндрической поверхности  $r = R_c$ , где циклически симметрично расположены оси  $n$  периферических отверстий радиусом  $R_i$ , в полом толстостенном цилиндре в формулы Кирша [319, 321] для условно бесконечной пластины с отверстием, равномерно растягиваемой на краях в одном направлении с условно бесконечным внешним радиусом.

При этом следует учесть, что номинальное радиальное напряжение

$$\sigma_{rN}(R_c) = -pR_{ic}^2 (R_c^2/R_c^2 - 1) / (R_c^2 - R_{ic}^2) - p_{min} R_c^2 (1 - R_{ic}^2/R_c^2) / (R_c^2 - R_{ic}^2)$$

действует в направлениях  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  и для него формулы Кирша [319, 321] берутся в приведённом выше виде

$$\sigma_{\rho} = 0,$$

$$\sigma_{\varphi} = \sigma(1 - 2\cos 2\varphi),$$

$$\tau_{\rho\varphi} = 0,$$

а номинальное тангенциальное (окружное) напряжение

$$\sigma_{tN}(R_c) = pR_{ic}^2 (R_c^2/R_c^2 + 1) / (R_c^2 - R_{ic}^2) - p_{min} R_c^2 (1 + R_{ic}^2/R_c^2) / (R_c^2 - R_{ic}^2)$$

действует в направлениях  $\varphi = \pi/2$  и  $\varphi = 3\pi/2$  и для него формулы Кирша [319, 321] берутся с заменой  $\varphi$  на  $\varphi + \pi/2$ , то есть

$$\begin{aligned}\sigma_p &= 0, \\ \sigma_\varphi &= \sigma[1 - 2\cos 2(\varphi + \pi/2)] = \sigma(1 + 2\cos 2\varphi), \\ \tau_{p\varphi} &= 0.\end{aligned}$$

Поэтому радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения на кромке рассматриваемого периферического отверстия 0, на рисунке 6.3 верхнего, с учётом концентрации напряжений у этого отверстия от действия внутреннего давления  $p$  в центральном отверстии (то есть на внутренней поверхности  $r = R_{ic}$  полого толстостенного цилиндра) и от внешнего давления  $p_{min}$  составляют соответственно:

$$\begin{aligned}\sigma_{pce} &= 0, \\ \sigma_{\varphi ce} &= \sigma_{rN}(R_c)(1 - 2\cos 2\varphi) + \sigma_{tN}(R_c)(1 + 2\cos 2\varphi) = \\ &[-pR_{ic}^2(R_e^2/R_c^2 - 1)/(R_e^2 - R_{ic}^2) - p_{min}R_e^2(1 - R_{ic}^2/R_c^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2)](1 - 2\cos 2\varphi) + \\ &[pR_{ic}^2(R_e^2/R_c^2 + 1)/(R_e^2 - R_{ic}^2) - p_{min}R_e^2(1 + R_{ic}^2/R_c^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2)](1 + 2\cos 2\varphi) = \\ &-pR_{ic}^2(R_e^2/R_c^2 - 1)/(R_e^2 - R_{ic}^2) - p_{min}R_e^2(1 - R_{ic}^2/R_c^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2) + \\ &pR_{ic}^2(R_e^2/R_c^2 + 1)/(R_e^2 - R_{ic}^2) - p_{min}R_e^2(1 + R_{ic}^2/R_c^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2) + \\ &[pR_{ic}^2(R_e^2/R_c^2 - 1)/(R_e^2 - R_{ic}^2) + p_{min}R_e^2(1 - R_{ic}^2/R_c^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2)]2\cos 2\varphi + \\ &[pR_{ic}^2(R_e^2/R_c^2 + 1)/(R_e^2 - R_{ic}^2) - p_{min}R_e^2(1 + R_{ic}^2/R_c^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2)]2\cos 2\varphi = \\ &2pR_{ic}^2/(R_e^2 - R_{ic}^2) - 2p_{min}R_e^2/(R_e^2 - R_{ic}^2) + \\ &[2pR_{ic}^2R_e^2/R_c^2/(R_e^2 - R_{ic}^2) - 2p_{min}R_e^2R_{ic}^2/R_c^2/(R_e^2 - R_{ic}^2)]2\cos 2\varphi = \\ &2(pR_{ic}^2 - p_{min}R_e^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2) + 4(p - p_{min})R_{ic}^2R_e^2/[R_c^2(R_e^2 - R_{ic}^2)]\cos 2\varphi.\end{aligned}$$

В итоге на кромке рассматриваемого периферического отверстия 0, на рисунке 6.3 верхнего, действуют следующие радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения соответственно с учётом концентрации напряжений у этого отверстия:

$$\begin{aligned}\sigma_{pp} &= \sigma_{p1k} + \sigma_{p0} + \sigma_{pce} = 0 - p + 0 = -p, \\ \sigma_{\varphi p} &= \sigma_{\varphi 1k} + \sigma_{\varphi 0} + \sigma_{\varphi ce} = -A_k p R_{ic}^2 R_c^2 \cos 2\varphi + p + \\ &2(pR_{ic}^2 - p_{min}R_e^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2) + 4(p - p_{min})R_{ic}^2 R_e^2/[R_c^2(R_e^2 - R_{ic}^2)]\cos 2\varphi = \\ &p + 2(pR_{ic}^2 - p_{min}R_e^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2) + \{4(p - p_{min})R_{ic}^2 R_e^2/[R_c^2(R_e^2 - R_{ic}^2)] - A_k p R_{ic}^2/R_c^2\}\cos 2\varphi.\end{aligned}$$

Равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности (критерию наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска на кромке рассматриваемого периферического отверстия 0, на рисунке 6.3 верхнего, составляет:

$$\sigma_{ep} = \sigma_{\varphi p} - \sigma_{pp} = 2p + 2(pR_{ic}^2 - p_{min}R_e^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2) + \{4(p - p_{min})R_{ic}^2 R_e^2/[R_c^2(R_e^2 - R_{ic}^2)] - A_k p R_{ic}^2/R_c^2\}\cos 2\varphi.$$

Определим напряжённое состояние на кромке центрального отверстия. Угол  $\varphi$  для него будем отсчитывать от оси, проходящей через центр ранее рассмотренного периферического отверстия 0, на рисунке 6.3 верхнего. Рассуждая подобно предыдущему, найдём радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения соответственно от действия давлений  $p$  во всех  $n$  периферических отверстиях:

$$\begin{aligned}\sigma_{pcn} &= 0, \\ \sigma_{\varphi cn} &= 8p(R_i/R_c)^2 \cos 2\varphi [\cos(4\pi/n) + \cos(8\pi/n) + \dots + \cos(2\pi - 4\pi/n)] + 8p(R_i/R_c)^2 \cos \pi \cos(\pi + 2\varphi) = \\ &8p(R_i/R_c)^2 \cos 2\varphi [1 + \cos(4\pi/n) + \cos(8\pi/n) + \dots + \cos(2\pi - 4\pi/n)] = \\ &8p(R_i/R_c)^2 S \cos 2\varphi = 0.\end{aligned}$$

Действительно, последняя сумма косинусов (имеется в виду  $1 = \cos 0$ ) в квадратных скобках

$$\begin{aligned}S &= 1 + \cos(4\pi/n) + \cos(8\pi/n) + \dots + \cos(2\pi - 4\pi/n) = \\ &\cos 0 + \cos(2\pi/k) + \cos(4\pi/k) + \dots + \cos(2\pi - 2\pi/k)\end{aligned}$$

есть сумма проекций на ось абсцисс системы единичных векторов, проведённых из начала координат во все вершины вписанного в окружность единичного радиуса правильного  $k$ -угольника ( $n = 2k$ ,  $k$  – натуральное число, не меньшее 2; при  $k = 2$  эта система векторов есть система двух противоположных радиальных векторов, лежащих на одном диаметре этой окружности, могущем рассматриваться как вписанный в неё двуугольник, так что логично вводится общее понятие всегда правильного двуугольника как отрезка произвольной длины, середина которого является центром двуугольника, описанной окружности радиусом, равным половине длины этого отрезка, и вписанной окружности нулевого радиуса) и изображающих комплексные корни  $k$ -й степени из 1, причём один из этих векторов является ортом

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 486/556

(единичным вектором) оси абсцисс. Вектор, равный сумме всех векторов этой системы, является инвариантом поворота на угол  $2\pi/k$ , то есть не должен изменяться при повороте этой системы векторов на угол  $2\pi/k$ , так как при таком повороте эта система векторов преобразуется сама в себя. Следовательно, вектор, равный сумме всех векторов этой системы, является нулевым вектором, что легко доказывается методом от противоречащего. Действительно, временно допускаем противоречащее утверждение: вектор, равный сумме всех векторов этой системы, не является нулевым вектором. Тогда он имеет некоторую непременно строго положительную длину и некоторое вполне определённое направление. Но тогда указанный поворот этой системы векторов приводит к повороту этого суммарного вектора на тот же угол в том же направлении, что неминуемо ведёт к изменению этого суммарного вектора с учётом его направленности, поскольку этот суммарный вектор имеет именно строго положительную длину. Однако этот суммарный вектор не должен изменяться при таком повороте этой системы векторов, поскольку она преобразуется при этом сама в себя. Полученным противоречием доказано требуемое утверждение. Заметим, что при  $k$ , равном единице, имел бы место поворот на угол  $2\pi$  с полным оборотом относительно начала координат, суммарный вектор преобразовался бы сам в себя, и не было бы никакого противоречия. Заметим также, что для любого чётного числа  $k$  аннулирование суммарного вектора этой системы векторов очевидно непосредственно, поскольку тогда эта система состоит из  $k/2$  пар противоположных векторов и ясна их попарная аннигиляция. Однако, в отличие от непременно чётного натурального числа  $n$ , натуральное число

$$k = n/2$$

вовне может быть и нечётным. Если же этот суммарный вектор является нулевым, то есть имеет нулевую длину и произвольное неопределённое направление, то не изменяется при любом повороте этой системы векторов и самого этого суммарного вектора. Проекция этого суммарного вектора на ось абсцисс равна, как известно, сумме проекций всех единичных векторов этой их системы, то есть как раз сумме  $S$  косинусов, которая, следовательно, равняется именно нулю как проекции нулевого вектора на эту ось, что и требовалось доказать.

Следовательно, совокупность равных давлений в относительно малых циклически симметричных отверстиях не влияет на напряжения, действующие на поверхности центрального отверстия и вполне определяемые давлениями в самом этом отверстии и на боковую поверхность.

Радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения на кромке центрального отверстия (то есть на внутренней поверхности

$$r = R_{ic}$$

полого толстостенного цилиндра) от действия внутреннего давления  $p$  в самом центральном отверстии и от внешнего давления  $p_{min}$  точно определены выше по формулам Ламе [358] для полого толстостенного цилиндра и составляют соответственно:

$$\sigma_{pcN} = -p,$$

$$\sigma_{pcN} = p(R_e^2 + R_{ic}^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2) - 2p_{min}R_e^2/(R_e^2 - R_{ic}^2) =$$

$$[p(R_e^2 + R_{ic}^2) - 2p_{min}R_e^2]/(R_e^2 - R_{ic}^2).$$

Поэтому итоговые радиальное и тангенциальное (окружное) напряжения на кромке центрального отверстия составляют соответственно:

$$\sigma_{pc} = \sigma_{pcN} + \sigma_{pcN} = 0 - p = -p,$$

$$\sigma_{pc} = \sigma_{pcN} + \sigma_{pcN} = 0 + p(R_e^2 + R_{ic}^2)/(R_e^2 - R_{ic}^2) - 2p_{min}R_e^2/(R_e^2 - R_{ic}^2) =$$

$$[p(R_e^2 + R_{ic}^2) - 2p_{min}R_e^2]/(R_e^2 - R_{ic}^2).$$

Равносильное (эквивалентное) напряжение по третьей теории прочности (критерию наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска на кромке центрального отверстия составляет:

$$\sigma_{ec} = \sigma_{pc} - \sigma_{pc} = [p(R_e^2 + R_{ic}^2) - 2p_{min}R_e^2]/(R_e^2 - R_{ic}^2) + p =$$

$$2(p - p_{min})R_e^2/(R_e^2 - R_{ic}^2).$$

Следовательно, под влиянием всестороннего равномерного сжатия постоянным давлением  $p_{\min}$  и пульсирующей разности давлений  $p - p_{\min}$  в

$$n = 2k$$

периферических и, возможно, центральном отверстиях в прямом круговом цилиндре с, возможно, включающей центральное отверстие циклически симметричной системой малых цилиндрических отверстий с осями, параллельными оси цилиндра, в частности в ограничителе хода запорных органов комбинированного грибкового клапана, возникают наиболее опасные на поверхностях отверстий как концентраторов напряжений радиальные

$$\sigma_p = -p,$$

тангенциальные (окружные)  $\sigma_\varphi$  и равносильные (эквивалентные) по третьей теории прочности (критерию наибольших сдвиговых напряжений) Кулона–Треска

$$\sigma_c = \sigma_\varphi - \sigma_p = \sigma_\varphi + p$$

напряжения.

На контурах периферических отверстий радиусом  $R_i$  равносильные (эквивалентные) напряжения

$$(6.3)$$

$$\sigma_{ep} = \{2\alpha^2/(\alpha^2 - 1) - R_c^{-2}[A_k R_i^2 - 4R_c^2/(\alpha^2 - 1)]\cos 2\varphi\}(p - p_{\min}).$$

На контуре центрального отверстия радиусом  $R_c$  равносильное (эквивалентное) напряжение

$$(6.4)$$

$$\sigma_{ec} = 2\alpha^2(\alpha^2 - 1)^{-1}(p - p_{\min}).$$

Здесь  $p$  – давление в цилиндре, циклически изменяющееся от давления всасывания  $p_{\min}$  до давления нагнетания  $p_{\max}$ ;

$$A_k = 2\sum_{i=1}^{k-1} \cos \pi i k^{-1} \sin^2(\pi i k^{-1}/2) - 1;$$

$$n = 2k$$

( $k$  – натуральное число, не меньше 2) – число периферических отверстий с циклически симметричным расположением осей (центров на проекции) на цилиндрической поверхности (окружности на проекции) радиусом  $R_c$ ;

$R_c$  – внешний радиус цилиндрического тела с циклически симметричной системой отверстий, в частности ограничителя хода запорных органов комбинированного грибкового клапана;

$$\alpha = R_c/R_{ic}.$$

Анализ формул (6.3) и (6.4) показывает, что при любом давлении  $p$  в цилиндре справедливо следующее:

1. Равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_{ec}$  по контуру центрального отверстия распределено равномерно.
2. Равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_{ep}$  по контуру каждого периферического отверстия распределено неравномерно в общем случае или равномерно в частном случае, причём имеет среднюю по контуру величину  $\sigma_{epm}$ , равную равномерному равносильному (эквивалентному) напряжению  $\sigma_{ec}$  на контуре центрального отверстия:

$$\sigma_{epm} = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \sigma_{ep} d\varphi = \sigma_{ec}.$$

3. Наибольшие равносильные (эквивалентные) напряжения  $\sigma_{emax}$  в цилиндрическом теле с циклически симметричной системой отверстий, в частности в ограничителе хода запорных органов комбинированного грибкового клапана,

$$(6.5)$$

$$\sigma_{emax} = [2\alpha^2/(\alpha^2 - 1) + R_c^{-2}[A_k R_i^2 - 4R_c^2/(\alpha^2 - 1)]](p - p_{\min})$$

возникают в тех точках периферических отверстий, в которых справедливо соотношение

$$\cos 2\varphi = \text{sign}[4R_c^2 R_i^2 - A_k(\alpha^2 - 1)],$$

где функция знака действительного числа  $x$

$$\text{sign}(x) = x/|x|, x \neq 0;$$

$$\text{sign}(0) = 0;$$

$|x|$  – модуль комплексного числа  $x$ , в частности абсолютная величина действительного числа  $x$ .

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 488/556

В частности, при отсутствии центрального отверстия ( $\alpha$  стремится к плюс бесконечности) равносильные (эквивалентные) напряжения  $\sigma_e$  достигают максимума  $\sigma_{e\max}$  в наиболее узких местах («шейках» перемычек между периферическими отверстиями)

$$(\cos 2\varphi = -1),$$

где непременно зарождаются рабочие разрушения.

Соответствующие (при отсутствии центрального отверстия) эпюры радиальных  $\sigma_r$ , тангенциальных (окружных)  $\sigma_\varphi$  и равносильных (эквивалентных)  $\sigma_e$  напряжений приведены в левой половине рисунка 6.3.

4. Минимум  $\min_\alpha \max_\varphi \sigma_e$  равносильных (эквивалентных) напряжений, как показывает дифференцирование формулы (6.5) по  $\alpha^2$ , достигается при условии

$$(6.6)$$

$$A_k(\alpha^2 - 1) = 4R_e^2 R_i^{-2},$$

которое обеспечивает и единые постоянные по контурам всех отверстий величины тангенциального (окружного)  $\sigma_\varphi$  и равносильного (эквивалентного)  $\sigma_e$  напряжений.

На основании вышеизложенного целесообразно наличие центрального отверстия наилучшим радиусом

$$R_{ic} = R_e \alpha^{-1},$$

где  $\alpha$  по формуле (6.6) при выбранном  $R_i$  определяется так:

$$(6.7)$$

$$\alpha = (1 + 4R_e^2 R_i^{-2} A_k^{-1})^{1/2}.$$

Если требуется сохранить общую площадь проходного сечения  $\pi F$ , где

$$(6.8)$$

$$F = 2kR_i^2 + R_e^2 \alpha^{-2},$$

то по формуле (6.6)

$$R_i^2 = 4R_e^2 A_k^{-1} (\alpha^2 - 1)^{-1},$$

подстановка чего в формулу (6.8) ведёт к биквадратному уравнению

$$FR_e^{-2} \alpha^4 - (1 + FR_e^{-2} + 8kA_k^{-1}) \alpha^2 + 1 = 0,$$

имеющему единственный больший единицы корень

$$(6.9)$$

$$\alpha = \{1 + FR_e^{-2} + 8kA_k^{-1} + [(1 + FR_e^{-2} + 8kA_k^{-1})^2 - 4FR_e^{-2}]^{1/2}\}^{1/2} R_e / (2F)^{1/2}.$$

Соответствующие (при наличии центрального отверстия указанным наилучшим радиусом) эпюры радиальных  $\sigma_r$ , тангенциальных (окружных)  $\sigma_\varphi$  и равносильных (эквивалентных)  $\sigma_e$  напряжений приведены в правой половине рисунка 6.3.

Из формул (6.7) и (6.9) следует, что наилучший радиус центрального отверстия может и отличаться от радиуса периферических отверстий.

При наилучшем радиусе центрального отверстия по формулам (6.7) и (6.9) наилучшим является цилиндрическое тело с циклически симметричной системой малых цилиндрических отверстий с наименьшим возможным значением  $n$ , так как согласно формуле (6.4) оптимуму значения  $n$  соответствует максимум значения  $\alpha$ , а  $kA_k^{-1}$  и  $A_k^{-1}$  – монотонно убывающие функции числа  $k$ . То есть при  $k \geq 2$  наиболее целесообразно цилиндрическое тело с циклически симметричной системой четырёх (шести несколько хуже) малых цилиндрических отверстий и с наилучшим центральным отверстием.

В случае наилучшего центрального отверстия согласно формуле (6.4) при циклическом изменении давления  $p$  единая величина равносильного (эквивалентного) напряжения  $\sigma_e$  на контурах всех отверстий изменяется от 0 до

$$2\alpha^2(\alpha^2 - 1)^{-1}(p_{\max} - p_{\min}).$$

Запас усталостной прочности цилиндрического тела с циклически симметричной системой малых цилиндрических отверстий и с наилучшим центральным отверстием составляет

$$f = 0.5\alpha^2(\alpha^2 - 1)\sigma_0(p_{\max} - p_{\min})^{-1},$$

где  $\sigma_0$  – предел усталости материала цилиндрического тела при пульсационном цикле с учётом масштабного фактора, температуры, действия газовой среды, а также гидростатического давления.



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 489/556

Нижняя оценка предела усталости  $\sigma_0$  может быть получена линейным приближением Гудмена [204, 238, 242, 260, 302, 324] диаграммы усталостной прочности Хэя:

$$\sigma_0 \geq 2\sigma_u\sigma_{-1}(\sigma_u + \sigma_{-1})^{-1}.$$

Здесь  $\sigma_u$ ,  $\sigma_{-1}$  – соответственно предел прочности и предел усталости материала цилиндрического тела при симметричном цикле.

На основании проведённого анализа была изменена конструкция комбинированного грибкового клапана. В частности, его ограничитель был снабжён центральным отверстием радиусом, близким к наилучшему радиусу.

Изложенный выше метод циклически симметричных малых отверстий позволяет выявить места наибольшей концентрации напряжений и оптимизировать конструкцию комбинированного грибкового клапана, но не учитывает контактное давление  $p_s$  по уплотнительным поясам ограничителя хода запорных органов комбинированного грибкового клапана.

Приближённое решение, получаемое по методу циклически симметричных малых отверстий, стремится к точному решению только при стремлении радиуса  $R_i$  к нулю, но непригодно при стремлении радиуса  $R_i$  к  $R_c \sin(\pi/n)$ , когда стремится к нулю ширина «шейки» перемычки между соседними периферическими отверстиями, и даёт заметную погрешность при условии

$$R_i \approx 0.5R_c \sin(\pi/n),$$

вполне возможном для практически целесообразных ограничителей.

Кроме того, из анализа решений Ламе [358] и Кирша [319, 321] следует, что общий метод малых отверстий имеет инженерную погрешность при расстояниях между отверстиями не менее суммы их диаметров.

Обобщающее уточнение общего метода малых отверстий достигается общим методом немалых отверстий с использованием данных [236, 283] о растяжении пластин с двумя отверстиями или рядом отверстий перпендикулярно прямой линии их центров при любых относительных расстояниях между ними.

В частности, метод циклически симметричных немалых отверстий и приводит к таким формулам для наибольших равносильных (эквивалентных) напряжений  $\sigma_e$  в «шейках» перемычек, то есть в местах А, В, С, D соответственно (см. рисунок 6.3) наибольших попарных сближений отверстий между собой и с боковой поверхностью ограничителя:

$$(6.10)$$

$$\sigma_{eA} = \{1 + (2R_c + R_i + R_{ic})^{1/2}(2R_c - R_i - R_{ic})^{-1/2}[(\alpha^2 + 1)/(\alpha^2 - 1) - A_k R_i^2/R_c^2 + 4(\alpha^2 - 1)^{-1}R_c^2/R_c^2]\}(p - p_{\min});$$

$$\sigma_{eB} = \{1 + [R_c \sin(\pi/n) + R_i]^{1/2}[R_c \sin(\pi/n) - R_i]^{-1/2}[(\alpha^2 + 1)/(\alpha^2 - 1) + A_k R_i^2/R_c^2 - 4(\alpha^2 - 1)^{-1}R_c^2/R_c^2]\}(p - p_{\min});$$

$$\sigma_{eC} = \{1 + (R_e + R_c + R_i)^{1/2}(R_e + R_c - R_i)^{-1/2}[(\alpha^2 + 1)/(\alpha^2 - 1) - A_k R_i^2/R_c^2 + 4(\alpha^2 - 1)^{-1}R_c^2/R_c^2]\}(p - p_{\min});$$

$$\sigma_{eD} = [1 + (2R_c + R_i + R_{ic})^{1/2}(2R_c - R_i - R_{ic})^{-1/2}(\alpha^2 + 1)/(\alpha^2 - 1)](p - p_{\min}).$$

Решение по общему методу малых отверстий может быть уточнено и общим методом сосредоточенного сопряжённого усреднения, который изначально учитывает возможность одного порядка диаметров отверстий и расстояний между ними в прямом круговом цилиндре с, возможно, включающей центральное отверстие циклически симметричной системой цилиндрических отверстий с осями, параллельными оси цилиндра, в частности в ограничителе хода запорных органов комбинированного грибкового клапана, и сущность которого заключается в следующем.

В соответствии с принципом наложения (суперпозиции) отделяя от поверхностной нагрузки элементарно исследуемое по формулам Ламе [358] всестороннее сжатие цилиндрического тела с циклически симметричной системой цилиндрических отверстий (ограничителя хода запорных органов комбинированного грибкового клапана) давлением  $p$ , рассмотрим воздействие давления  $p_s - p$  по уплотнительному пояску, на котором текущий радиус  $r$  изменяется в пределах от внутреннего радиуса пояска  $R_{si}$  до внешнего радиуса пояска  $R_{se}$ , а также растяжение удельной нагрузкой  $p - p_{\min}$  вне уплотнительного пояска

$$R_{se} \leq r \leq R_e$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 490/556

и по внешней боковой поверхности цилиндрического тела (ограничителя)

$$r = R_c.$$

Условие равновесия элемента перемычки между соседними периферическими отверстиями требует, чтобы в любом её сечении зависящее от текущего радиуса  $r$  номинальное, или среднее по ширине, радиальное напряжение  $\sigma_{rm}(r)$  было обратно пропорционально текущей ширине сечения перемычки. Этим определяются как функции от наибольшего номинального, или среднего по ширине, радиального напряжения  $\sigma_{rm}$ , имеющего место в «шейке» перемычки, следующие величины:

номинальные, или средние по ширине, радиальные напряжения  $\sigma_{rm}(r)$  и деформация  $\varepsilon_{rm}(r)$  в каждом сечении перемычки в пределах её длины

$$R_c - R_i \leq r \leq R_c + R_i$$

вдоль текущего радиуса  $r$ ;

удлинение перемычки как интеграл в пределах её длины

$$\Delta u = \int \varepsilon_{rm}(r) dr (R_c - R_i \leq r \leq R_c + R_i);$$

радиальное перемещение  $u(R_c - R_i)$  внешней поверхности внутренней круглой или кольцевой части

$$R_{ic} \leq r \leq R_c - R_i$$

и радиальное перемещение  $u(R_c + R_i)$  внутренней поверхности внешней кольцевой части

$$R_c + R_i \leq r \leq R_c.$$

Удлинение перемычки  $\Delta u$  равно разности радиального перемещения внутренней поверхности внешней кольцевой части и радиального перемещения внешней поверхности внутренней круглой или кольцевой части, поскольку

$$u(R_c - R_i) + \Delta u = u(R_c + R_i).$$

Из этого условия совместности радиальных перемещений центрального диска или кольца, перемычки и внешнего кольца находим после интегрирования наибольшее номинальное, или среднее по ширине, радиальное напряжение  $\sigma_{rm}$ , имеющее место в «шейке» перемычки:

(6.11)

$$\sigma_{rm} = (R_c + R_i) \{ (p - p_{min}) [2R_c^2 - \mu(R_c^2 - R_{se}^2)] + \mu(p_s - p)(R_{se}^2 - R_{si}^2) \} [R_c^2 - (R_c + R_i)^2]^{-1} / \{ \pi^{-1} n [R_c \sin(\pi/n) - R_i] H + 4R_c \sin(\pi/n) Q^{-1} \arctg Q - \pi [R_c \sin(\pi/n) - R_i] \},$$

где

$$H = [(R_c - R_i)^2 + R_{ic}^2] / [(R_c - R_i)^2 - R_{ic}^2] + [R_c^2 + (R_c + R_i)^2] / [R_c^2 - (R_c + R_i)^2],$$

$$Q = \{ [R_c \sin(\pi/n) + R_i] / [R_c \sin(\pi/n) - R_i] \}^{1/2}.$$

Поскольку в практически целесообразных ограничителях ширина перемычки между отверстиями не меньше их диаметров, то графические зависимости [236] коэффициентов концентрации напряжений от относительных размеров вырезов можно линейно приблизить с погрешностью не более 6 %.

Так как данные [236] относятся к прямолинейной полосе, то к кривизне  $R_i^{-1}$  в точке А (см. рисунок 6.3) следует прибавить величину  $(R_c - R_i)^{-1}$ :

$$1/R_i + 1/(R_c - R_i) = R_c / [R_c(R_c - R_i)],$$

а от кривизны  $R_i^{-1}$  в точке С (см. рисунок 6.3) следует отнять величину  $(R_c + R_i)^{-1}$ :

$$1/R_i - 1/(R_c + R_i) = R_c / [R_c(R_c + R_i)].$$

Тогда коэффициенты концентрации напряжений в точках А, В, С составляют соответственно

(6.12)

$$K_A = 3.065 - 2.065 R_i (R_c - R_i) / [(R_c - R_{ic})^2 - R_i^2],$$

$$K_B = 3.065 [1 - R_i R_c^{-1} \sin^{-1}(\pi/n)],$$

$$K_C = 3.065 - 2.065 R_i (R_c + R_i) / [R_c (R_c - R_c) + R_i^2].$$

Тангенциальные (окружные) напряжения в точках А, В, С (см. рисунок 6.3) учётом всестороннего сжатия давлением  $p$  составляют соответственно

(6.13)

$$\sigma_{\phi A} = K_A \pi^{-1} n [R_c \sin(\pi/n) - R_i] (R_c + R_i)^{-1} [(R_c - R_i)^2 + R_{ic}^2] [(R_c - R_i)^2 - R_{ic}^2]^{-1} \sigma_{rm} - p,$$

$$\sigma_{\phi B} = K_B \sigma_{rm} - p,$$

$$\sigma_{\phi C} = K_C [(R_c^2 + (R_c + R_i)^2) [R_c^2 - (R_c + R_i)^2]^{-1} (p - p_{min}) -$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 491/556

$$2\pi^{-1}nR_c^2[R_c^2 - (R_c + R_i)^2]^{-1}[R_c\sin(\pi/n) - R_i](R_c + R_i)^{-1}\sigma_{rm} - p.$$

На контуре каждого отверстия радиальное напряжение

$$\sigma_r = -p.$$

Поэтому согласно предыдущим формулам (6.12) и (6.13) равносильные (эквивалентные) напряжения являются наибольшими именно в точках В:

$$(6.14)$$

$$\sigma_{eB} = K_B\sigma_{rm}.$$

На основании формулы (6.14) можно определить такие характеристики цикла равносильных (эквивалентных) напряжений, как наибольшее  $\sigma_{emax}$ , наименьшее  $\sigma_{emin}$ , среднее  $\sigma_{em}$  и амплитудное  $\sigma_{ea}$  равносильные (эквивалентные) напряжения цикла, а по приближению Гудмена диаграммы усталостной прочности Хэя – запас усталостной прочности ограничителя

$$f = (\sigma_{em}/\sigma_u + \sigma_{ea}/\sigma_{-1})^{-1}.$$

Общий метод сосредоточенного сопряжённого усреднения, проигрывая общим методам малых и немалых отверстий в простоте и наглядности результатов и предполагая использование ЭВМ для оптимизации цилиндрического тела (ограничителя), не только позволяет выявить места концентрации напряжений и сделать вывод о целесообразности наличия центрального отверстия, но и учитывает контактное давление  $p_s$  по уплотнительному пояску и даёт приближённое решение, сходящееся к точному решению как при стремлении радиуса периферических отверстий  $R_i$  к нулю, так и при стремлении этого радиуса  $R_i$  к  $R_c\sin(\pi/n)$ , когда стремится к нулю ширина «шейки» перемычки между соседними периферическими отверстиями.

В лаборатории прочностных исследований конструкций, работающих под давлением, ВНИИкомпрессормаш выполнена программа экспериментальных исследований деформирования и разрушения ограничителя комбинированного грибкового клапана, которой руководил Б. И. Огурцов и которую осуществил Е. А. Шерстюк с использованием сконструированных А. В. Рубаненко деталей комбинированного грибкового клапана и камеры для тарировки электротензорезисторов в среде высокого всестороннего давления на специальной балке со срединным участком чистого изгиба благодаря четырёхточечному нагружению.

Автор выполнил руководство обработкой данных этой программы экспериментальных исследований ограничителя комбинированного грибкового клапана, а также анализ и синтез этих данных и сопоставление их с итогами теоретических исследований деформирования и прочности ограничителя комбинированного грибкового клапана по созданным общим методам малых и немалых отверстий, в частности методам циклически симметричных малых и немалых отверстий, и общему методу сосредоточенного сопряжённого усреднения в циклически симметричных задачах теорий упругости, прочности и концентрации напряжений.

Выполнена электротензометрия ограничителя комбинированного грибкового клапана с использованием отобранных предварительной тарировкой тензорезисторов типа 2ПКБ-10-100ГБ и клея БФ-2 при обязательной последующей термообработке. Действующие на ограничитель давления  $p$ ,  $p_{min}$  и  $p_s$  имитировали с помощью гидрокомпрессоров в камере специального стенда, включающего также трубопроводную арматуру, контрольно-измерительные приборы и камеру для подсоединения проводов, идущих от ограничителя к многоточечному (53 токоввода) тензовводу, выполненному в виде отдельного узла, расчёт которого был сделан по созданным общим методам малых и немалых отверстий, в частности методам циклически симметричных малых и немалых отверстий, и общему методу сосредоточенного сопряжённого усреднения с учётом нескольких кольцевых рядов периферических отверстий. Запись показаний повторяли трижды в каждом замере деформаций с помощью цифрового тензометрического моста ЦТМ-3, переключателя ПД-100М и цифropечатающей машинки СД-107М в ненагруженном состоянии ограничителя и при различных значениях давлений  $p$ ,  $p_{min}$  и  $p_s$ .

Известные формулы обобщённого закона Гука

$$(6.15) \\ \sigma_{\varphi} = -\mu(1 - \mu)^{-1}p + E(1 - \mu^2)^{-1}(\varepsilon_{\varphi} + \mu\varepsilon_{\zeta}), \\ \sigma_{\zeta} = -\mu(1 - \mu)^{-1}p + E(1 - \mu^2)^{-1}(\varepsilon_{\zeta} + \mu\varepsilon_{\varphi})$$

с учётом

$$\sigma_p = -p$$

для радиальных напряжений позволяют установить тангенциальные (окружные)  $\sigma_{\varphi}$  и осевые  $\sigma_{\zeta}$  напряжения на кромках отверстий по замеренным значениям тангенциальных (окружных)  $\varepsilon_{\varphi}$  и осевых  $\varepsilon_{\zeta}$  деформаций ( $E$  – модуль продольной упругости Юнга;  $\mu$  – коэффициент поперечной деформации Пуассона).

В ходе эксперимента на показаниях тензорезисторных преобразователей сказалась их ползучесть, для исключения влияния которой было проведено следующее исправление.

Растяжению усилием  $p - p_{\min}$  по боковой поверхности ограничителя соответствуют на поверхностях отверстий тангенциальные (окружные) напряжения

$$(6.16) \\ \sigma_{\varphi} = C(\varphi)(p - p_{\min})$$

и тангенциальные (окружные) и осевые деформации

$$(6.17) \\ \varepsilon_{\varphi} = C(\varphi)(p - p_{\min})E^{-1}, \\ \varepsilon_{\zeta} = -\mu C(\varphi)(p - p_{\min})E^{-1}.$$

Здесь

$C(\varphi)$  – коэффициент концентрации напряжений (при отсутствии отверстий  $C(\varphi) = 1$ ), зависящий только от  $\varphi$ , то есть от размещения ориентированного в тангенциальном (окружном) направлении электротензорезисторного преобразователя, и являющийся монотонно возрастающей функцией соответствующего тангенциального (окружного) напряжения  $\sigma_{\varphi}$ , позволяющей выявить места наибольшей концентрации напряжений.

При отсутствии ползучести электротензорезисторных преобразователей вычитание составляющих, обусловленных всесторонним давлением, из замеренных значений тангенциальных (окружных)  $\varepsilon_{\varphi}$  и осевых  $\varepsilon_{\zeta}$  деформаций дало бы величины типа (6.17). Зависимость  $\varepsilon + (1 - 2\mu)^{-1}pE^{-1}$  от  $(p - p_{\min})E^{-1}$ , построенная для каждого электротензорезисторного преобразователя, оказывается практически линейной, но соответствующая прямая пересекает ось  $\varepsilon$  в точке с ординатой  $\Delta\varepsilon$ , своей для каждого электротензорезисторного преобразователя. Следовательно, для компенсации ползучести рассматриваемого электротензорезисторного преобразователя достаточно от его показаний отнять величину  $\Delta\varepsilon$  и под тангенциальными (окружными)  $\varepsilon_{\varphi}$  и осевыми  $\varepsilon_{\zeta}$  деформациями понимать именно таким способом исправленные значения. Подстановкой их в формулы (6.15) определяем тангенциальные (окружные)  $\sigma_{\varphi}$  и осевые  $\sigma_{\zeta}$  напряжения на кромках отверстий по замеренным значениям тангенциальных (окружных)  $\varepsilon_{\varphi}$  и осевых  $\varepsilon_{\zeta}$  деформаций. Для проверки правильности определения тангенциальных (окружных) напряжений  $\sigma_{\varphi}$  можно использовать критерий

$$(6.18) \\ \sigma_{\varphi} + p = C(\varphi)(p - p_{\min}),$$

получаемый из соотношения (6.16) с учётом того, что растяжению усилием  $p - p_{\min}$  соответствуют тангенциальные (окружные) напряжения  $\sigma_{\varphi} + p$ . Здесь  $C(\varphi)$  – зависящий лишь от  $\varphi$  коэффициент концентрации напряжений, необязательно максимальных, то есть обобщённый.

Результаты обработки данных экспериментальных исследований напряжённо-деформированного состояния ограничителя хода запорных органов комбинированного грибкового клапана поршневого компрессора высокого давления при различных значениях давлений  $p_s$ ,  $p_{\min}$  и  $p$  позволили сделать следующие выводы:

1. В ограничителе без центрального отверстия с

$$R_c = 72 \text{ мм},$$

$$R_i = 7.5 \text{ мм},$$

$$R_c = 40 \text{ мм},$$

$$n = 8$$

при

$$p - p_{\min} = 97 \text{ МПа}$$

наибольшие равносильные (эквивалентные) напряжения

$$\sigma_{eB} = 314 \text{ МПа}$$

с наибольшим экспериментальным значением коэффициента концентрации равносильных (эквивалентных) напряжений

$$K_{\text{Вexp}} = 3.29$$

имеют место в «шейках» перемычек между соседними периферическими отверстиями ( $\varphi = \pm \pi/2$ )

и вдвое превосходят равносильные (эквивалентные) напряжения

$$\sigma_{eA} = \sigma_{eC} = 157 \text{ МПа}$$

в наиболее близких к центру ( $\varphi = 0$ ) или к внешней поверхности ( $\varphi = \pi$ ) ограничителя местах контуров периферических отверстий.

2. Наличие центрального отверстия радиусом

$$R_{ic} = 10 \text{ мм},$$

близким к его наилучшему значению, позволяет добиться более равномерного распределения равносильных (эквивалентных) напряжений по кромкам периферических отверстий в пределах

$$\sigma_e = 270 \dots 280 \text{ МПа}$$

с наибольшим экспериментальным значением коэффициента концентрации равносильных (эквивалентных) напряжений

$$K_{\text{Вexp}} = 2.75$$

за счёт снижения равносильных (эквивалентных) напряжений  $\sigma_e$  в «шейках» и повышения равносильных (эквивалентных) напряжений  $\sigma_e$  в наиболее близких к центру ( $\varphi = 0$ ) или к внешней поверхности ( $\varphi = \pi$ ) ограничителя местах контуров периферических отверстий. На кромке центрального отверстия равносильные (эквивалентные) напряжения

$$\sigma_e = 240 \text{ МПа}$$

оказались несколько ниже, чем на кромках периферических отверстий. Таким образом, наличие центрального отверстия привело к снижению наибольших равносильных (эквивалентных) напряжений и наибольшего коэффициента их концентрации примерно на 16 %.

3. Тангенциальные (окружные)  $\sigma_\varphi$  и, следовательно, равносильные (эквивалентные)  $\sigma_e$  напряжения на поверхностях отверстий изменяются по толщине ограничителя ввиду ступенчатости отверстий. В частности, на кромке центрального отверстия на верхней стороне ограничителя

$$\sigma_e = 190 \text{ МПа}; K_{\text{Вexp}} = 2.0;$$

на нижней стороне ограничителя

$$\sigma_e = 290 \text{ МПа}; K_{\text{Вexp}} = 2.8.$$

Это объясняется тем, что диаметр отверстий для размещения запорных органов на нижней стороне ограничителя (4 мм) намного меньше, чем на верхней стороне (20 мм), и поэтому на нижней стороне ограничителя перемычки между смежными ступенями периферических отверстий являются более широкими и в большей мере передают на поверхность центрального отверстия растяжение боковой поверхности ограничителя после отделения всестороннего сжатия давлением  $p$ . Уменьшить неравномерность напряжений по толщине ограничителя можно увеличением меньшего диаметра отверстий для размещения запорных органов до значения, не препятствующего подпружиниванию запорных органов клапана. При этом снижаются наибольшее равносильное (эквивалентное) напряжение и в качестве побочного результата погрешность схематизации и трёхмерного напряжённого состояния плоским, позволяющим получить замкнутое решение циклически симметричной задачи.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 494/556

Впрочем и при пятикратном различии диаметров ступеней отверстий принятая схематизация оказывается удовлетворительной.

Кроме экспериментальной проверки, возможна и полезна проверка полученных результатов известными данными [236] о значениях коэффициента  $C_{\max}$  (в наших обозначениях  $K_B$ ) концентрации напряжений в растягиваемой круглой пластине с циклически симметричными отверстиями при некоторых соотношениях размеров:

$$R_c = 0.625R_e;$$

$$R_{ic} = 0.25R_e$$

или

$$R_{ic} = R_i;$$

$$n = 4$$

или

$$n = 6.$$

При соотношениях

$$R_c = 0.625R_e;$$

$$R_{ic} = R_i = 0.15R_e;$$

$$n = 6$$

данные [236] сопоставлены с данными эксперимента для ограничителя и с данными по созданному общему методу немалых отверстий, в т. ч. методу циклически симметричных немалых отверстий, и общему методу сосредоточенного сопряжённого усреднения.

В таблице 6.1 приведены итоги сопоставления этих значений наибольших коэффициентов концентрации напряжений.

Таблица 6.1. Сопоставление наибольших значений коэффициентов концентрации напряжений по созданным общему методу немалых отверстий, в частности методу циклически симметричных немалых отверстий, и общему методу сосредоточенного сопряжённого усреднения с данными эксперимента для ограничителя и с данными [236] для циклически симметричной задачи теории упругости при указанных соотношениях размеров.

Объект исследований		Коэффициент концентрации напряжений $C_{\max} = K_B$			
		по <u>общему методу немалых отверстий</u>	по <u>общему методу сосредоточенного сопряжённого усреднения</u>	по данным [236]	по данным эксперимента для ограничителя
Ограничитель	$R_{ic} = 0$	3.13	3.30	–	3.29
	$R_{ic} = 10$ мм	2.79	3.01	–	2.75
Пластина (тест)		2.53	3.25	2.51	–

Анализ результатов сопоставления данных по наибольшему коэффициенту концентрации напряжений в ограничителе хода запорных органов комбинированного грибкового клапана поршневого компрессора высокого давления и в циклически симметричной задаче теории упругости позволяет сделать следующие выводы:

1. Созданные общие методы малых и немалых отверстий, в частности методы циклически симметричных малых и немалых отверстий, и общий метод сосредоточенного сопряжённого усреднения в теориях упругости, прочности и концентрации напряжений позволяют учитывать взаимное влияние отверстий.
2. Общий метод немалых отверстий даёт приемлемые результаты с погрешностью до 5 %.
3. Общий метод сосредоточенного сопряжённого усреднения даёт почти точный результат для ограничителя без центрального отверстия и завышенные результаты для ограничителя с центральным отверстием на 10 % и в тестовой задаче на 30 %, то есть верхние оценки.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 495/556

4. Общий метод малых отверстий, общий метод немалых отверстий, общий метод сосредоточенного сопряжённого усреднения и ещё убедительнее эксперимент доказывают целесообразность центрального отверстия радиусом, близким к наилучшему, в ограничителе и соответствующих изменений в конструкции комбинированного грибкового клапана поршневого компрессора высокого давления.

#### **6.4. Выводы по главе 6**

1. Создан метод рационального выбора систем натягов и зазоров для сочетания преимуществ разнородных материалов в циклически прочном соединении элементов техники высоких давлений, в частности применительно к составному плунжеру. Значительное повышение его циклической прочности, надёжности и долговечности обеспечивается рациональным выбором осевого натяга между сердечником и рабочими втулками, радиального натяга между рабочими и центрирующими втулками и радиального зазора между центрирующими втулками и сердечником. Метод позволяет именно наилучшим образом соединить гибкость стального сердечника с высокой прочностью при сжатии, химической стойкостью и износостойкостью твердосплавных втулок в конструкции составного плунжера. Составной плунжер с внешними твердосплавными втулками и внутренним стальным сердечником с осевым натягом может быть использован внутри предложенного в пятой главе составного цилиндра с твердосплавным внутренним слоем и самоскреплённым (автофретированным) стальным внешним слоем с радиальным натягом. При именно таких соединениях с явной симметрией идей наилучшим образом сочетаются достоинства и устраняются недостатки обоих типов конструкционных материалов.

2. Создан метод совместного учёта конструктивной анизотропии и концентрации напряжений применительно к деформированию и прочности конструктивно ортотропного цельнолитого корпуса прямого клапана центробежного компрессора. Предложено рациональное закругление щелей для прохода газа, позволяющее без изменения газодинамики и металлоёмкости повысить на треть прочность цельнолитого корпуса прямого клапана.

3. Создана теория циклической прочности трёхмерного цилиндрического тела с концентрацией напряжений циклически симметричной системой отверстий применительно к ограничителю хода запорных органов комбинированного грибкового клапана, включающая общие методы малых и немалых отверстий, в частности методы циклически симметричных малых и немалых отверстий, и общий метод сосредоточенного сопряжённого усреднения. Созданные теория и методы проверены экспериментально и на тестовой задаче и позволили предложить и обосновать выполнение центрального отверстия определяемого наилучшего размера и соответствующее введение центрального запорного органа, что существенно повышает усталостную прочность, надёжность и долговечность комбинированного грибкового клапана поршневого компрессора высокого давления.

4. Показано, что на основе созданных общих теорий, методологий и методов с открытием и обоснованием систем принципиально новых явлений и законов деформирования, оптики, прочности и разрушения трёхмерных тел возможно создание теорий и простых аналитических методов применительно к деформированию, прочности и научно обоснованному рациональному проектированию усложнённых элементов и соединений техники высоких давлений с достаточно приемлемым учётом специфики различных конфигураций.

5. Разумеется, для осесимметричного плунжера в принципе вполне можно использовать созданные и развитые интегральный и (полу)степенной аналитические методы макроэлементов для осесимметричной упругой задачи без объёмных сил и кручения на основе впервые полученного именно общего решения бигармонического уравнения в степенных рядах как в собственном классе функций для оператора бигармонического уравнения, в том числе применительно к бигармонической функции напряжений Лява. А для конструктивно ортотропного цельнолитого корпуса прямого клапана и для

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 496/556

ограничителя грибового клапана с циклически симметричной системой отверстий в принципе вполне можно использовать (полу)степенной аналитический метод макроэлементов для трёхмерной упругой задачи в декартовой прямоугольной системе координат на основе впервые полученного именно общего решения гармонического уравнения в степенных рядах как в собственном классе функций для оператора гармонического уравнения, в том числе применительно к каждой из трёх гармонических функций напряжений для общего решения в форме Папковича–Нейбера. Однако априорно ясно, что для всех этих трёх конструкций шестой главы диссертации использование интегрального и (полу)степенного аналитических методов макроэлементов привело бы к заведомо более сложным решениям, чем решения, полученные специально разработанными для соответствующих типов конструкций и классов задач прочности более простыми аналитическими методами с инженерной точностью, и тем самым не только нарушило бы основополагающий для настоящей докторской диссертации принцип допустимой простоты, но и оказалось бы именно практически нецелесообразным.

6. Настоящая докторская диссертация является обобщением исследований автора с двадцатилетним безаварийным опытом его именно аналитических методов расчёта на прочность порядка тысячи конструкций в технике высоких давлений, причём в лаборатории прочности конструкций, работающих под давлением, ВНИИкомпрессормаш среди других использовался гидрокомпрессор на давления до 1600 МПа, что примерно в 15 раз превышает давление на дне Марианской впадины, глубочайшей в Мировом океане. Автор руководил испытанными по своим аналитическим методам численными конечно-элементными расчётами прочности внедрённых особо ответственных крупногабаритных сосудов высокого давления, в том числе для Института проблем прочности Академии Наук Украины, обосновал все эти расчёты и организовал их доскональные взыскательные проверки докторами и кандидатами наук, обсуждение и затем утверждение ИркутскНИИХимаш как головным институтом СССР по сосудам высокого давления. В основе диссертации лежит общий принцип допустимой простоты: при необходимости и возможности выбирается простейшее аналитическое выражение помимо заведомо несоответствующих известным данным. Использование именно созданных общих аналитических методов ни в коем случае не является самоцелью. Они в принципе применимы к чрезвычайно широкому классу задач, однако на деле применяются тогда и только тогда, когда не удаётся построить более простые непременно приемлемые приближённые аналитические методы с инженерной точностью. Как раз более простые аналитические методы с инженерной точностью и строятся не только ввиду достаточности и удобства практического использования, но и в качестве важного обоснования выдвинутых в диссертации теоретических идей существования обобщённого аналитического метода решения каждого класса задач прочности и аналитического метода решения каждой задачи прочности для действительных (типов) конструкций с инженерной точностью и достаточно простотой по мере сложности граничных условий решаемых класса задач и задачи соответственно. Разумеется, при этом полностью отсутствует какая бы то ни было необходимость именно явного увязывания таких более простых аналитических методов с инженерной точностью и даваемых ими решений задач и их классов с обладающими наибольшей общностью созданными и развитыми в диссертации общими аналитическими методами. Впрочем, на самом деле соответствующее неявное увязывание всё-таки наличествует. Ведь эти более простые аналитические методы с инженерной точностью создаются автором этих общих аналитических методов с несомненным учётом полученных общими аналитическими методами принципиально новых представлений о деформировании, прочности и разрушении существенно трёхмерных тел с открытием и обоснованием систем соответствующих явлений и законов.



## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ**

1. Как закономерный итог достижения цели этой докторской диссертации с выполнением её задач выдвиганием и осуществлением её идей созданы и практически целесообразно развиты иерархические математическая, метрологическая, оптико-механическая и прочностная системы принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов как теоретический фундамент для разработки теорий (с открытием и обоснованием систем принципиально новых явлений и законов) и простых замкнутых общих аналитических методов рациональных комплексных инженерных исследования, проектирования и управления системами напряжённо-деформированных состояний и процессов, жёсткости, прочности и оптических свойств именно существенно трёхмерных типовых несущих и светопрозрачных пластичных и хрупких элементов и систем различных конфигураций в технике высоких давлений, в том числе с концентраторами напряжений, трением и взаимными сцеплением и проскальзыванием.
2. Создана и развита иерархическая математическая система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, среди которых общие теории количественных множеств; именно дополнительных альтернативных новых действий, в том числе альтернативного возведения в степень (минус-остепенения) с обобщением степенных, показательных и степенно-показательных функций на отрицательные основания, в частности для начальных, центральных и смещённых моментов любых нецелых порядков и для обобщений общего (полу)степенного метода и критериев предельных состояний и прочности; общих математических задач (систем функциональных уравнений); даже бесконечных полных линейности оператора, линейной независимости и линейной зависимости; собственных совокупностей классов функций для множеств операторов; общие решения гармонического и бигармонического уравнений в (полу)степенных рядах (собственных классах функций); полная линейно-комбинационная и целочастичная (парциальная) методологии и общие (полу)степенной и интегральный методы решения общих систем функциональных уравнений.
3. Создана и развита иерархическая метрологическая система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, в частности общие теории, методологии и методы измерения физических величин; оценки и исправления погрешностей усреднения при измерениях неоднородных пространственных и/или временных статических и динамических распределений; псевдорешений и всеобщих погрешности и запаса (с непрерывными всеобщей логикой и иерархиями псевдоправильности, псевдоточности и псевдорешений и с открытием философского закона перехода анализа как первого общенаучного метода от качественного различия к количественному измерению различий) и их оптимизации; наилучших аналитических приближений к дискретным экспериментальным данным с их разбросом при опоре именно на лучшие из них и при нормально взвешенном учёте непременно всех данных безотносительно нормальности их распределения и без исключения выбросов, в том числе применительно к совершенствованию методов экспериментальных исследований напряжённо-деформированных состояний и прочности именно существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов конструкций при высоких давлениях.
4. Создана и развита иерархическая оптико-механическая система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, в частности общие теории всеобщих напряжений; иерархичности типов схем нагружения; минимизации и устранения невязок сопряжения; осесимметричного изгиба и его влияния на оптические свойства именно существенно трёхмерных цилиндрических тел; принципиально трёхмерных напряжённо-деформированных процессов составного цилиндра конечной длины при его тепловой сборке и запрессовке; комплексной оптимизации совокупностей механических, прочностных и оптических свойств именно существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов и систем различных конфигураций, в том числе с концентраторами напряжений, трением и

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 498/556

взаимными сцеплением и проскальзыванием; общие (полу)степенной и интегральный аналитические методы макроэлементов как (полу)степенная и интегральная модификации соответственно аналитической методологии макроэлементов.

5. Создана и развита иерархическая прочностная система принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, в частности общая теория прочности материалов с открытием первых в истории всеобщих прочностных законов природы во всеобщих напряжениях, в том числе путём исправляющего и обобщающего приведения к ним известных частных критериев предельных состояний и прочности, и общая теория прочности объектов с открытием и обоснованием системы явлений и законов запасов и дальнейшими обобщениями всеобщих прочностных законов природы с предельных состояний также на неопредельные состояния, в том числе с запасом прочности при сложном нагружении как функцией индивидуальных запасов независимых нагрузок с учётом наиболее опасного их сочетания.

6. На основе созданных и развитых иерархических математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов созданы теории и аналитические методы расчёта, исследования и комплексной оптимизации напряжённо-деформированных состояний и процессов, жёсткости, прочности и оптических свойств типовых именно существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов и систем различных конфигураций в технике высоких давлений, в том числе с концентраторами напряжений, трением и взаимными сцеплением и проскальзыванием, в качестве теорий рациональных комплексных проектирования объектов и управления их системами этих ключевых свойств.

7. Приложение созданных математических, метрологических, оптико-механических и прочностных теорий и аналитических методов к впервые решаемым нетривиальным задачам механики, прочности и оптики для именно существенно трёхмерных тел привело к открытию и обоснованию систем принципиально новых явлений и законов механики, прочности, оптики, запаса и всеобщих явлений и законов с уточнением, развитием, обобщением и полезным дополнением классических и других известных аналитических методов определения напряжённо-деформированных состояний существенно трёхмерных тел различных конфигураций из пластичных и хрупких конструкционных материалов, в том числе применительно к типовым расчётным схемам и реальным объектам техники высоких давлений.

8. Достоверность созданных и развитых иерархических математической, метрологической, оптико-механической и прочностной систем принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов испытана и доказана путём аналитических и численных сопоставлений полученных формул и расчётов по ним с формулами классических и других известных аналитических решений и расчётами по ним, итогами численных методов и приемлемо обработанными экспериментальными данными.

9. Теории рациональных комплексных проектирования именно существенно трёхмерных несущих и светопрозрачных элементов и управления их напряжённо-деформированными состояниями и процессами, жёсткостью, прочностью и оптическими свойствами, созданные иерархическими математической, метрологической, оптико-механической и прочностной системами принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов, привели к обоснованию и внедрению принципиально новых методов и эффективных конструкций для техники высокого давления, в том числе защищённых авторскими свидетельствами на изобретения.

10. Созданные и развитые иерархические математическая, метрологическая, оптико-механическая и прочностная системы принципиально новых основополагающих общих теорий, методологий и методов существенно развивают математику, метрологию, механику деформируемого твёрдого тела и науку о прочности.

Таким образом, совокупность разработанных автором теоретических положений можно квалифицировать как обобщение аналитических методов решения задач прочности,

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 499/556

являющееся новым крупным достижением в развитии перспективного научного направления в динамике, прочности машин, приборов и аппаратуры – создания обобщённых аналитических методов, устанавливающих основные закономерности деформирования и прочности пространственных тел применительно к рациональному проектированию элементов конструкций из различных материалов для высоких удельных нагрузок. Кроме того, в настоящей докторской диссертации изложены научно обоснованные технические решения актуальных задач рационального проектирования типовых элементов конструкций в технике для высокого давления, внедрение которых позволяет обеспечить существенное повышение прочности и других основных рабочих характеристик и снижение материалоемкости и тем самым вносит значительный вклад в ускорение научно-технического прогресса.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ НАУЧНЫХ ТРУДОВ СО ССЫЛКАМИ В ТЕКСТЕ (использовано свыше 1500 научных трудов)**

1. Александров А. П., Журков С. Н. Явление хрупкого разрыва. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1933. 52 с.
2. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Наука, 1979. 464 с.
3. Алексеев С. А. Изгиб толстых плит. М.: Военно-воздушная инженерная академия им. Н. Е. Жуковского, 1949. 120 с. (Труды Военно-воздушной инженерной академии им. Н. Е. Жуковского. Вып. 312).
4. Алексидзе М. А. Фундаментальные функции в приближённых решениях граничных задач. М.: Наука, 1991. 352 с.
5. Амелянович К. К., Гелимсон Лев Г., Каринцев И. Б. Напряжённо-деформированное состояние и прочность светопрозрачных элементов иллюминаторов // Оптический журнал. 1992. 11. С. 11–15.
6. А. с. 198123 СССР. Аппарат для глубоководного фотографирования / А. В. Майер, И. Л. Андреев, В. Е. Джус, А. В. Игнатъев, Т. А. Кунец. Оpubл. 09.06.1967, Бюл. 13.
7. А. с. 238852 СССР. Оптический тензомер / А. А. Лебедев, В. В. Матвеев. Оpubл. 10.03.1969, Бюл. 10.
8. А. с. 311240 СССР. Герметичный корпус съёмочной камеры / А. С. Массарский. Оpubл. 09.08.1971, Бюл. 24.
9. А. с. 338243 СССР. Сосуд высокого давления большой ёмкости / Л. Ф. Верещагин, А. А. Семерчак, Э. А. Кемниц, Ю. А. Саянов. Оpubл. 15.05.1972, Бюл. 16.
10. А. с. 412922 СССР. Сосуд высокого давления / М. К. Лушпей, В. И. Лившиц, В. В. Иванцов и др. Оpubл. 30.01.1974, Бюл. 4.
11. А. с. 433069 СССР. Токоввод глубоководного аппарата для электрического соединения с внешним источником / А. И. Арсеньев, Г. В. Костромитинов, Б. М. Лев и др. Оpubл. 25.06.1974, Бюл. 23.
12. А. с. 443222 СССР. Сосуд высокого давления / А. А. Семерчак, Э. А. Кемниц, В. В. Попов, Ю. А. Садков. Оpubл. 15.09.1974, Бюл. 34.
13. А. с. 450236 СССР. Электроввод для сосудов высокого давления / А. Н. Духовный, Б. К. Сушков, А. Г. Ветошкин и др. Оpubл. 15.11.1974, Бюл. 42.
14. А. с. 464758 СССР. Затвор сосуда высокого давления / А. К. Древин, В. К. Погодин. Оpubл. 25.03.1975, Бюл. 11.
15. А. с. 479930 СССР. Затвор сосуда высокого давления / В. И. Лившиц, В. К. Погодин, А. К. Древин. Оpubл. 05.08.1975, Бюл. 29.
16. А. с. 485276 СССР. Сосуд высоких давлений и температур / Э. Б. Фельдман, Б. П. Бутузов, С. И. Махонин и др. Оpubл. 25.09.1975, Бюл. 35.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 500/556

17. А. с. 495846 СССР. Резервуар высокого давления / М. Шупак, А. Ван Дер Полл (США). Оpubл. 15.12.1975, Бюл. 46.
18. А. с. 507735 СССР. Уплотнение затвора сосуда высокого давления / В. А. Акопян, В. П. Зацаринный, В. Ф. Конопкин, Н. И. Гаврик. Оpubл. 25.03.1976, Бюл. 11.
19. А. с. 540105 СССР. Смотровое устройство / В. Д. Графов, В. К. Черкунов, Ф. Б. Байбаков. Оpubл. 25.12.1976, Бюл. 47.
20. А. с. 550518 СССР. Резервуар высокого давления / В. И. Горбунов, А. М. Прудовский. Оpubл. 15.03.1977, Бюл. 10.
21. А. с. 552468 СССР. Сосуд высокого давления / А. Н. Новиков, Е. Д. Кудрикова, О. Н. Морогина, А. М. Малетин. Оpubл. 30.03.1977, Бюл. 12.
22. А. с. 559287 СССР. Герметичный кабельный ввод / В. Т. Бекусов. Оpubл. 25.05.1977, Бюл. 19.
23. А. с. 573182 СССР. Камера высокого давления для оптических исследований / Л. Ф. Верещагин, А. П. Новиков, Н. С. Фатеев. Оpubл. 25.09.1977, Бюл. 35.
24. А. с. 581351 СССР. Сосуд высокого давления / В. Д. Продан, А. Ф. Першин, В. И. Лившиц и др. Оpubл. 25.11.1977, Бюл. 43.
25. А. с. 581510 СССР. Герметичный кабельный ввод / А. И. Сорокин, Т. П. Сергеечева. Оpubл. 25.11.1977, Бюл. 43.
26. А. с. 582436 СССР. Многослойный сосуд высокого давления / П. Г. Пимштейн, М. М. Шель, Е. Р. Хисматулин и др. Оpubл. 30.11.1977, Бюл. 44.
27. А. с. 611073 СССР. Смотровое окно сосудов высокого давления / М. А. Яковлев. Оpubл. 15.06.1978, Бюл. 22.
28. А. с. 612085 СССР. Фланцевое соединение сосуда высокого давления / В. Д. Продан, А. Г. Ткачёв, О. С. Чехов. Оpubл. 25.06.1978, Бюл. 23.
29. А. с. 634067 СССР. Корпус сосуда высокого давления / А. И. Меренков, Н. И. Жильцов. Оpubл. 25.11.1978, Бюл. 43.
30. А. с. 634087 СССР. Способ измерения деформаций / А. А. Лебедев, Н. Р. Музыка. Оpubл. 25.11.1978, Бюл. 43.
31. А. с. 648780 СССР. Уплотнение разъёмного соединения / В. С. Безух. Оpubл. 25.02.1979, Бюл. 7.
32. А. с. 670775 СССР. Затвор сосуда давления / В. К. Погодин, Ю. Л. Гармазов, А. К. Древин. Оpubл. 30.06.1979, Бюл. 24.
33. А. с. 685548 СССР. Иллюминатор / Б. М. Олефиренко. Оpubл. 15.09.1979, Бюл. 34.
34. А. с. 689882 СССР. Присоединительная камера для испытаний иллюминаторов / А. Ф. Маурер, А. И. Никитинский, В. А. Кондратьев и др. Оpubл. 05.10.1979, Бюл. 37.
35. А. с. 808770 СССР. Сосуд высокого давления / Л. Г. Полиновская, Л. А. Полиновский. Оpubл. 28.02.1981, Бюл. 8.
36. А. с. 832239 СССР. Многослойный сосуд высокого давления / А. В. Курамжин, В. Г. Усенко, В. М. Макаров и др. Оpubл. 23.05.1981, Бюл. 19.
37. А. с. 927631 СССР. Иллюминатор для подводных исследовательских приборов / А. В. Зимин, С. И. Кожемякин, В. Е. Перегонцев, С. Л. Шимьянский. Оpubл. 15.05.1982, Бюл. 18.
38. А. с. 969583 СССР. Иллюминатор / Ю. В. Комягин, И. И. Дьячков. Оpubл. 30.10.1982, Бюл. 40.
39. А. с. 979199 СССР. Иллюминатор для подводного аппарата / Л. А. Свистун. Оpubл. 07.12.1982, Бюл. 45.
40. А. с. 1038661 СССР. Узел уплотнения фланцевого соединения / А. А. Пичугин, Е. В. Шленов. Оpubл. 30.08.1983, Бюл. 32.
41. А. с. 1054187 СССР. Иллюминатор высокого давления / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон. Оpubл. 15.11.1983, Бюл. 42.
42. А. с. 1057364 СССР. Иллюминатор высокого давления / Лев Г. Гелимсон, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский. Оpubл. 30.11.1983, Бюл. 44.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 501/556

43. А. с. 1063695 СССР. Иллюминатор / В. В. Бортовой, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон. Оpubл. 30.12.1983, Бюл. 48.
44. А. с. 1068342 СССР. Иллюминатор высокого давления / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон. Оpubл. 23.01.1984, Бюл. 3.
45. А. с. 1078162 СССР. Быстродействующий затвор сосуда давления / В. К. Погодин, А. К. Древин, Л. А. Калитин и др. Оpubл. 07.03.1984, Бюл. 9.
46. А. с. 1078393 СССР. Гидрообъектив с вынесенным входным зрачком / М. М. Русинов, И. Л. Анитропова, Г. Л. Никифорова, П. Д. Иванов. Оpubл. 07.03.1984, Бюл. 9.
47. А. с. 1082674 СССР. Иллюминатор высокого давления / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон. Оpubл. 30.03.1984, Бюл. 12.
48. А. с. 1134462 СССР. Иллюминатор высокого давления / В. В. Бортовой, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон, А. А. Каминский. Оpubл. 15.01.1985, Бюл. 2.
49. А. с. 1161814 СССР. Тензомер / А. А. Лебедев, В. П. Ламашевский, В. И. Попелюх. Оpubл. 15.06.1985, Бюл. 22.
50. А. с. 1191947 СССР. Многопроводный электроввод / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон. Оpubл. 15.11.1985, Бюл. 42.
51. А. с. 1323808 СССР. Уплотнение разъёмного соединения / Лев Г. Гелимсон, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский. Оpubл. 15.07.1987, Бюл. 26.
52. А. с. 1387052 СССР. Многопроводный электроввод / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон и др. Оpubл. 07.04.1988, Бюл. 13.
53. А. с. 1432618 СССР. Герметичный ввод / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, В. Н. Покотило, Лев Г. Гелимсон, В. В. Усенко, А. И. Дегтяренко. Оpubл. 23.10.1988, Бюл. 39.
54. А. с. 1456827 СССР. Способ испытания оболочек внешним гидростатическим давлением / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, А. В. Васильев, Лев Г. Гелимсон, А. Р. Рахимов. Оpubл. 07.02.1989, Бюл. 5.
55. А. с. 1588964 СССР. Сосуд высокого давления / В. В. Усенко, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон. Оpubл. 30.08.1990, Бюл. 32.
56. А. с. 1601675 СССР. Узел соединения кабеля со штепсельным разъёмом / В. А. Орлов, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон. Оpubл. 23.10.1990, Бюл. 39.
57. А. с. 1603109 СССР. Сосуд высокого давления / В. В. Усенко, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон. Оpubл. 30.10.1990, Бюл. 40.
58. А. с. 1622681 СССР. Сосуд высокого давления / Лев Г. Гелимсон, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский и др. Оpubл. 23.01.1991, Бюл. 3.
59. А. с. 1634898 СССР. Стенд с защитным устройством / В. В. Усенко, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон. Оpubл. 15.03.1991, Бюл. 10.
60. А. с. 1645931 СССР. Устройство для подводного фотографирования / Лев Г. Гелимсон, И. Б. Каринцев, А. А. Каминский, А. П. Манжос. Оpubл. 30.04.1991, Бюл. 16.
61. А. с. 1724930 СССР. Компрессор сверхвысокого давления / В. М. Данько, В. Б. Ковпак, Б. И. Огурцов, А. В. Богута, А. В. Рубаненко, В. А. Фоменко. Оpubл. 07.04.1992, Бюл. № 13.
62. А. с. 1751554 СССР. Герметичное разъёмное соединение ёмкости / А. А. Каминский, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон, М. В. Олефиренко. Оpubл. 30.07.1992, Бюл. 28.
63. Балацкий Л. Г. Прочность прессовых соединений. Киев: Тэхника, 1982. 146 с.
64. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 255 с.
65. Безухов Н. И. Теория упругости и пластичности. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. 420 с.
66. Беляев Н. М. Труды по теории упругости и пластичности. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. 632 с.
67. Бидерман В. Л., Фирсов В. Т., Гречушкин Г. М. Расчёт напряжённого состояния прессовых соединений, полученных путём тепловой сборки // Проблемы прочности. 1986. 10. С. 112–116.
68. Биргер И. А., Шорр Б. Ф., Иосилевич Г. Б. Расчёт на прочность деталей машин. М.: Машиностроение, 1979. 702 с.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 502/556

69. Блох В. И. Теория упругости. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1964. 484 с.
70. Болотин В. В. Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. 278 с.
71. Бородачѳв Н. М. Динамическая задача о трещине в случае деформации продольного сдвига // Проблемы прочности. 1973. 3. С. 23–25.
72. Бородачѳв Н. М. Об одном вариационном методе решения пространственной задачи теории упругости для тела с плоской трещиной // Прикладная механика. 1986. 22. 4. С. 71–76.
73. Бородачѳв Н. М. Трещина, близкая к круговой, в трансверсально-изотропном теле // Проблемы прочности. 1989. 8. С. 60–63.
74. Бриджмен П. Изучение больших пластических деформаций и разрыва. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 444 с.
75. Бубнов И. Г. Избранные труды. Л.: Государственное издательство литературы по судостроению, 1956. 439 с.
76. Бурлаков А. В., Львов Г. И., Морачковский О. К. Длительная прочность оболочек. Харьков: Выща школа, 1981. 103 с.
77. Бухаринов Г. Н. К задаче о равновесии упругого круглого цилиндра // Вестник Ленингр. ун-та. 1952. 2. С. 3–23.
78. Вайнберг Д. В. Концентрация напряжений в пластинах около отверстий и выкружек. Киев: Тѳхника, 1969. 220 с.
79. Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д. Пластины, диски, балки-стенки. Киев: Госстройиздат УССР, 1959. 1052 с.
80. Вайнберг Д. В., Вайнберг Е. Д. Расчѳт пластин. Киев: Будивѳльныйк, 1970. 436 с.
81. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 544 с.
82. Васильев В. З. Осесимметричная деформация элементов строительных конструкций. Л.: Стройиздат, 1988. 87 с.
83. Верещагин Л. Ф. Твѳрдое тело при высоких давлениях: Избранные труды. М.: Наука, 1981. 287 с.
84. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 512 с.
85. Ворошко П. П. К построению разрешающих соотношений МКЭ для задач теории упругости // Проблемы прочности. 1981. 10. С. 76–78.
86. Ворошко П. П. Смешанные вариационные формулировки задач теории упругости и их реализация методом конечных элементов // Проблемы прочности. 1985. 1. С. 100–105.
87. Гадолин А. В. Теория орудий, скреплѳнных обручами // Артиллерийский журнал. 1861. 12. С. 1033–1071.
88. Гажа Г. П. Расчѳт сосудов сверхвысокого давления: препринт. Киев: Ин-т металлофизики АН УССР, 1971. 80 с.
89. Галѳркин Б. Г. Собрание сочинений. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 1. 391 с.
90. Галиев Ш. У. Динамика взаимодействия элементов конструкций с волной давления в жидкости. Киев: Наукова думка, 1977. 165 с.
91. Галиев Ш. У. Динамика гидроупругопластических систем. Киев: Наукова думка, 1981. 276 с.
92. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 303 с.
93. Гантваргер Р. Б. Дельные вещи в судостроении. Л.: Судостроение, 1986. 272 с.
94. Гелимсон Лев Г. К инженерному методу расчѳта прочности сотового уплотнения вала турбокомпрессора // Третье Всесоюз. науч.-техн. совещ. по уплотнительной технике. Сумы, 1982. С. 109–110.
95. Гелимсон Лев Г. К исключению погрешности усреднения при обработке измерительной информации // Пути совершенствования, интенсификации и повышения надёжности аппаратов в основной химии: Второе Всесоюз. науч.-техн. совещ. Сумы, 1982. С. 144–147.

- Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 503/556
96. Гелимсон Лев Г. К оптимизации циклически нагруженного двухслойного цилиндра // Проблемы оптимизации в машиностроении: Семинар-совещ. Харьков, 1982. С. 42.
97. Гелимсон Лев Г. К учёту неравномерных распределений контактных давлений по уплотнительным и заниженным разгрузочным поясам узла цилиндра поршневого компрессора // Третье Всесоюз. науч.-техн. совещ. по уплотнительной технике. Сумы, 1982. С. 161–162.
98. Гелимсон Лев Г. Напряжённо-деформированное состояние дисков иллюминаторов из неорганического стекла // Повышение эффективности и надёжности машин и аппаратов в основной химии: Всесоюз. совещ. Сумы, 1986. С. 52–53.
99. Гелимсон Лев Г. Напряжённо-деформированное состояние стеклоэлементов иллюминаторов // Проблемы прочности стекла и стеклокристаллических материалов: Всесоюзный семинар. Константиновка, 1991. С. 7–8.
100. Гелимсон Лев Г. Обобщение аналитических методов решения задач прочности. Сумы: Друкар, 1992. 20 с.
101. Гелимсон Лев Г. Оптимальная компоновка макросфер при создании блоков плавучести // Композиционные материалы в конструкциях глубоководных технических средств: Всесоюз. науч.-техн. конф. Николаев, 1991. С. 14–16.
102. Гелимсон Лев Г. Прочность стеклоэлементов иллюминаторов // Проблемы прочности стекла и стеклокристаллических материалов: Всесоюзный семинар. Константиновка, 1991. С. 8–10.
103. Гелимсон Лев Г. Циклически нагруженный двухслойный цилиндр с автофретированным внешним слоем // Конструирование, исследование, технология и организация производства компрессорных машин: Тематич. сб. науч. тр. Сумы: ВНИИкомпрессормаш, 1977. С. 70–76.
104. Гелимсон Лев Г. Электротензометрия поверхностей в зонах отверстий // Пути совершенствования, интенсификации и повышения надёжности аппаратов в основной химии: Второе Всесоюз. науч.-техн. совещ. Сумы, 1982. С. 148–151.
105. Гелимсон Лев Г., Каминский А. А., Каринцев И. Б. Определение необходимого количества жидкости и энергии гидроиспытания сосуда высокого давления // Пути совершенствования, интенсификации и повышения надёжности аппаратов в основной химии: Второе Всесоюз. науч.-техн. совещ. Сумы, 1982. С. 152–155.
106. Гелимсон Лев Г., Каминский А. А., Каринцев И. Б. О прочностной оптимизации плоскопараллельных глубоководных иллюминаторов // Динамика и прочность машин. 1985. 41. С. 108–114.
107. Гелимсон Лев Г., Огурцов Б. И., Шерстюк Е. А. Исследование прочности цельнолитого корпуса прямооточного клапана // Совершенствование холодильных и компрессорных машин в процессе исследования и проектирования: Тематич. сб. тр. М.: ВНИИХолодмаш, 1981. С. 180–188.
108. Годунов С. К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971. 416 с.
109. Годфри Д. Е. Р. Теория упругости и пластичности. Киев: Будивэльнык, 1969. 310 с.
110. Гольденблат И. И., Бажанов В. Л., Копнов В. А. Длительная прочность в машиностроении. М.: Машиностроение, 1977. 248 с.
111. Гольденблат И. И., Копнов В. А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.
112. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
113. Гольдман А. Я. Прочность конструкционных пластмасс. Л.: Машиностроение, 1979. 320 с.
114. Гоникберг М. Г. Высокие и сверхвысокие давления в химии. М.: Наука, 1968. 64 с.
115. Горбачёв К. П. Техническая теория тонких пластин и пологих оболочек. Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 1985. 164 с.
116. ГОСТ 13659-72. Стекло оптическое бесцветное. Физико-химические характеристики. Основные параметры. Взамен ГОСТ 13659-68; Введ. 01.01.80 до 01.01.90.
117. ГОСТ 14249-80. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчёта на прочность.

- Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 504/556
118. ГОСТ 17622-72 Е. Стекло органическое техническое. Технические условия. Введ. 01.07.73 до 01.01.87.
119. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 1100 с.
120. Грач С. А. Расчёт круглых плит. Фрунзе: Мектеп, 1979, 1981. Ч. 1, 2.
121. Гречищев Е. С., Ильяшенко А. А. Соединения с натягом: Расчёты, проектирование, изготовление. М.: Машиностроение, 1981. 237 с.
122. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука, 1970. 556 с.
123. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. О точном решении осесимметричной задачи теории упругости для круглой жёстко защемлённой плиты // Прикладная механика. 1963. 26, вып. 5. С. 6–9.
124. Громадка П. Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. М.: Мир, 1990. 303 с.
125. Гузь А. Н., Немиш Ю. Н. Методы возмущения в пространственных задачах теории упругости. Киев: Выща школа, 1982. 352 с.
126. Гуляр А. И. Об одном методе расчёта пространственных конструкций на основе обобщения полуаналитического варианта МКЭ для замкнутых некруговых конечных элементов // Сопротивление материалов и теория сооружений. 1984. 44. С. 44–46.
127. Гутман С. Г. Расчёт толстых упругих плит под непрерывно распределённым давлением // Известия Ленинградского НИИ гидротехники. 1940. 28. С. 212–238.
128. Демидов С. П. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979. 432 с.
129. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.
130. Дмитриев А. Н. Проектирование подводных аппаратов. Л.: Судостроение, 1978. 240 с.
131. Долгинов Л. Ш., Прокопов В. К., Самсонов Ю. А. Расчёт и конструирование фланцевых соединений судовых трубопроводов и сосудов. Л.: Судостроение, 1972. 264 с.
132. Доннел Л. Г. Балки, пластины и оболочки. М.: Наука, 1982. 568 с.
133. Жемочкин Б. Н. Расчёт круглых плит на упругом основании на симметричную нагрузку. М.: Изд-во Военно-инж. акад. РККА им. В. В. Куйбышева, 1938. 136 с.
134. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / А. Н. Подгорный, П. П. Гонтаровский, Б. Н. Киркач и др. Киев: Наукова думка, 1989. 232 с.
135. Заярный В. И. Основы теории совмещённых сосудов. Львов: Изд-во Львовского ун-та, 1972. 124 с.
136. Зедгенидзе Г. П., Гогсадзе Р. Ш. Математические методы в измерительной технике. М.: Изд-во Комитета стандартов, 1970. 616 с.
137. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 544 с.
138. Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их применения. М.: Наука, 1971. 518 с.
139. Иванов А. В. Прочность оптических материалов. Л.: Машиностроение, 1989. 144 с.
140. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Уруго-пластические деформации полых цилиндров. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960. 228 с.
141. Иосилевич Г. Б. Концентрация напряжений и деформаций в деталях машин. М.: Машиностроение, 1981. 224 с.
142. Исследование напряжённо-деформированного состояния ограничителя грибового клапана / Лев Г. Гелимсон, Б. И. Огурцов, А. В. Рубаненко, Е. А. Шерстюк // Исследование, конструирование и расчёт холодильных и компрессорных машин: Тематич. сб. тр. М.: ВНИИХолодмаш, 1979. С. 181–189.
143. Исследование прочности деталей машин при помощи тензодатчиков сопротивления / И. А. Козлов, В. Г. Баженов, В. В. Матвеев и др.; под ред. Г. С. Писаренко. Киев: Тэхника, 1967. 204 с.
144. Исследование прочности оргстекла в условиях сложного напряжённого состояния / О. Е. Ольховик, А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон и др. // Проблемы прочности. 1983. 8. С. 77–79.



- Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 505/556
145. Казарновский Ю. Э. Основы теории упругости: Критический анализ. М.: Машиностроение, 1989. 56 с.
  146. Кан С. Н. Строительная механика оболочек. М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1966. 508 с.
  147. Кантор Б. Я., Катаржнов С. И. Вариационно-сегментный метод в нелинейной теории оболочек. Киев: Наукова думка, 1982. 136 с.
  148. Канторович З. Б. Основы расчёта химических машин и аппаратов. М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1960. 743 с.
  149. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближённые методы высшего анализа. Л.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. 708 с.
  150. Карзов Г. П., Леонов В. П., Тимофеев Б. Т. Сварные сосуды высокого давления. Л.: Машиностроение, 1982. 287 с.
  151. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
  152. Квитка А. Л., Ворошко П. П., Бобрицкая С. Д. Напряжённо-деформированное состояние тел вращения. Киев: Наукова думка, 1977. 208 с.
  153. Квитка А. Л., Дьячков И. И. Напряжённое состояние и прочность оболочек из хрупких неметаллических материалов. Киев: Наукова думка, 1983. 284 с.
  154. Кирхгоф Г. Механика. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 402 с.
  155. Клёнов В. Ф. Расчёт подводных иллюминаторов цилиндрической формы // Изв. вузов. Машиностроение. 1975. 12. С. 13–17.
  156. Клокова Н. П. Тензорезисторы: Теория, методика расчёта, разработки. М.: Машиностроение, 1990. 224 с.
  157. Кобрин М. М., Дегтярь Л. И. Определение внутренних напряжений в цилиндрических деталях. М.: Машиностроение, 1965. 175 с.
  158. Коваленко А. Д. Круглые пластины переменной толщины. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. 296 с.
  159. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 307 с.
  160. Ковальчук Б. И., Лебедев А. А., Уманский С. Э. Механика неупругого деформирования материалов и элементов конструкций. Киев: Наукова думка, 1987. 280 с.
  161. Когаев В. П., Дроздов Ю. Н. Прочность и износостойкость деталей машин. М.: Высшая школа, 1991. 319 с.
  162. Когаев В. П., Махутов Н. А., Гусенков А. П. Расчёты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность: Справ. М.: Машиностроение, 1985. 224 с.
  163. Колосов Г. В. Применение комплексных диаграмм и теории функций комплексной переменной к теории упругости. Л.; М.: Государственное объединённое научно-техническое издательство Народного комиссариата тяжёлой промышленности СССР, 1935. 224 с.
  164. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Пасько Д. А. Прочность полых цилиндров. М.: Машиностроение, 1981. 264 с.
  165. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. М.: Высшая школа, 1975. 527 с.
  166. Колтунов М. А., Майборода В. П., Зубчанинов В. Г. Прочностные расчёты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 240 с.
  167. Кольман-Иванов Э. Э. Конструкции затворов сосудов и аппаратов высокого давления. М.: ЦИНТИхимнефтемаш, 1982. 30 с.
  168. Кондаков Л. А. Рабочие жидкости и уплотнения гидравлических систем. М.: Машиностроение, 1982. 216 с.
  169. Конструкционная прочность стёкол и ситаллов / Г. С. Писаренко, К. К. Амелянович, Ю. И. Козуб и др. Киев: Наукова думка, 1979. 284 с.
  170. Корндорф Б. А. Техника высоких давлений в химии. Л.; М.: Государственное научно-техническое издательство химической литературы, 1952. 443 с.
  171. Корнишин М. С. Исанбаева Ф. С. Гибкие пластины и панели. М.: Наука, 1968. 260 с.

- Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 506/556
172. Короткин Я. И., Локшин А. З., Сиверс Н. Л. Изгиб и устойчивость пластин и круговых оболочек. Л.: Судостроение, 1955. 308 с.
173. Космодамианский А. С., Шалдырван В. А. Толстые многосвязные пластины. Киев: Наукова думка, 1978. 240 с.
174. Коялович Б. М. Исследование о бесконечных системах линейных уравнений // Изв. Физ.-матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1930. Вып. 3. С. 41–167.
175. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчётов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
176. К расчёту автоскреплённых контейнеров высокого давления / В. Г. Сынков, А. А. Лебедев, Ю. Ф. Чёрный, О. Е. Глауберман // Проблемы прочности. 1976. 11. С. 87–91.
177. Крутков Ю. А. Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. 200 с.
178. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 472 с.
179. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трёхмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 663 с.
180. К уточнению величины контактного давления в составных цилиндрах / А. В. Асаёнок, Лев Г. Гелимсон, Д. В. Муриков, Б. И. Огурцов // Динамика и прочность машин. 1978. 27. С. 49–52.
181. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Теоретическая физика. Теория упругости. 4-е изд., испр. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 248 с.
182. Латыев С. М. Компенсация погрешностей в оптических приборах. Л.: Машиностроение, 1985. 248 с.
183. Лебедев А. А. Методы механических испытаний материалов при сложном напряжённом состоянии. Киев: Наукова думка, 1976. 147 с.
184. Лебедев А. А. Расчёты на прочность при сложном напряжённом состоянии. Киев: Выща школа, 1968. 67 с.
185. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 464 с.
186. Лейкин А. С. Напряжённость и выносливость деталей сложной конфигурации. М.: Машиностроение, 1968. 371 с.
187. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
188. Лошкарёв М. А. Исследование напряжённого состояния толстостенного цилиндра, ослабленного отверстием // Вопросы прочности в химическом машиностроении. М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1958. С. 44–53.
189. Лубенец В. Д. Расчёт составной толстостенной трубы с учётом неравномерного осесимметричного нагрева // Расчёты на прочность элементов машиностроительных конструкций. 1955. 31. С. 63–98.
190. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
191. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 492 с.
192. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 252 с.
193. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
194. Лурье К. А. Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 480 с.
195. Ляв А. Математическая теория упругости. М.; Л.: Государственное объединённое научно-техническое издательство Народного комиссариата тяжёлой промышленности СССР, 1935. 674 с.
196. Лянзберг В. П., Шалашилин В. И. Конические акриловые иллюминаторы при кратковременном нагружении // Проблемы прочности. 1983. 11. С. 105–109.

- Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 507/556
197. Макаров В. М., Зисельман Б. Г. Рулонированные сосуды высокого давления. М.: Машиностроение, 1985. 238 с.
198. Макаров Г. В. Уплотнительные устройства. Л.: Машиностроение, 1973. 232 с.
199. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 400 с.
200. Маньковский В. А. Прочность и надёжность композиционных материалов при неоднородном их деформировании. Киев: Знание, 1987. 20 с.
201. Марцинковский В. А. Гидродинамика и прочность центробежных насосов. М.: Машиностроение, 1970. 272 с.
202. Метод конечных элементов в механике твёрдых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислокий, В. В. Киричевский и др.; под общ. ред. А. С. Сахарова, И. Альтенбаха. Киев: Выща школа, 1982. 480 с.
203. Методы соединения оптических деталей / Е. Н. Прокофьев, Г. Ф. Пищик, В. С. Чередник, Г. А. Куршев. Киев: Тэхника, 1984. 130 с.
204. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряжённом состоянии: Справ. / А. А. Лебедев, Б. И. Ковальчук, Ф. Ф. Гигиняк, В. П. Ламашевский. Киев: Наукова думка, 1983. 368 с.
205. Механические свойства материалов под высоким давлением / под ред. Х. Л. Пью. М.: Мир, 1973. Ч. 1, 2.
206. Михайлов А. К., Малюшенко В. В. Конструкции и расчёт центробежных насосов высокого давления. М.: Машиностроение, 1971. 304 с.
207. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
208. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 432 с.
209. Михлин С. Г. Некоторые вопросы теории погрешностей. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. 334 с.
210. Морозов Б. А. Моделирование и прочность металлургических машин. М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1963. 284 с.
211. Москвитин В. В. Циклические нагрузки элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с.
212. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1968. 706 с.
213. Надаи А. Пластичность. М.; Л.: Государственное объединённое научно-техническое издательство Народного комиссариата тяжёлой промышленности СССР, 1936. 280 с.
214. Нейбер Г. Концентрация напряжений. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 204 с.
215. Несущая способность и расчёт деталей машин на прочность / С. В. Серенсен, В. П. Когаев, Л. А. Козлов, Р. М. Шнейдерович. М.: Машиностроение, 1975. 488 с.
216. Несущие и светопрозрачные элементы конструкций из стекла / Г. С. Писаренко, К. К. Амелянович, И. Б. Каринцев; под ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наукова думка, 1987. 200 с. (В завершении предисловия Г. С. Писаренко, К. К. Амеляновича и И. Б. Каринцева к этой монографии последний абзац таков: «В монографии приведены результаты исследований, выполненных в этих направлениях под руководством и при участии авторов монографии в Институте проблем прочности (ИПП, ныне имени Г. С. Писаренко) Академии Наук Украины и в Сумском филиале Харьковского политехнического института (ныне Сумском государственном университете) совместно с Е. Т. Гораликом, Л. Г. Гелимсоном и А. А. Каминским.» Лев Г. Гелимсон является автором главы IV «Напряжённо-деформированное состояние и оптические свойства смотровых окон» (с. 132–191) и соответствующих частей списка литературы и оглавления на с. 192–200.)
217. Никольс Р. В. Конструирование и технология изготовления сосудов давления. М.: Машиностроение, 1975. 464 с.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 508/556

218. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
219. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Государственное издательство литературы по судостроению, 1962. 432 с.
220. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Государственное издательство литературы по судостроению, 1956. 371 с.
221. Новожилов В. В., Финкельштейн Р. М. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек // Прикл. матем. и механика. 1943. 7, вып. 5. С. 331–340.
222. Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
223. Нормы расчёта на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок (ПНАЭ Г-7-002-86) / Госатомэнергонадзор СССР. М.: Энергоатомиздат, 1989. 525 с.
224. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. 696 с.
225. Одинг И. А. Допускаемые напряжения в машиностроении и циклическая прочность металлов. М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1962. 260 с.
226. О напряжённно-деформированном состоянии цилиндрического стеклоэлемента иллюминатора / И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон, А. А. Каминский, В. В. Усенко // Динамика и прочность машин. 1988. 48. С. 32–35.
227. Опыт использования метода конечных элементов для оценки напряжённного состояния и условий разрушения конструкций из хрупких материалов, нагруженных внешним давлением / А. И. Гуляр, Т. А. Кушниренко, Ю. М. Родичев, А. С. Сахаров // Проблемы прочности. 1983. 4. С. 19–23.
228. Орлов П. И. Основы конструирования. М.: Машиностроение, 1978. Кн. 1, 2.
229. О связи прочности стекла с числом трещин при разрушении / А. А. Каминский, Лев Г. Гелимсон, И. Б. Каринцев, О. К. Морачковский // Проблемы прочности. 1985. 12. С. 44–45.
230. ОСТ 26-1046-87. Сосуды и аппараты высокого давления. Нормы и методы расчёта на прочность.
231. Павлов П. А. Основы инженерных расчётов элементов машин на усталость и длительную прочность. Л.: Машиностроение, 1988. 253 с.
232. Панин В. Ф. Конструкции с сотовым наполнителем. М.: Машиностроение, 1982. 153 с.
233. Папкович П. Ф. Теория упругости. Л.; М.: Государственное издательство оборонной литературы, 1939. 640 с.
234. Партон В. З., Перлин П. И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312 с.
235. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
236. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. М.: Мир, 1977. 302 с.
237. Пикуль В. В. Прикладная механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1989. 224 с.
238. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряжённном состоянии. Киев: Наукова думка, 1976. 416 с.
239. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Соппротивление материалов деформированию и разрушению при сложном напряжённном состоянии. Киев: Наукова думка, 1969. 212 с.
240. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С., Антипов Е. А. Пластичность и прочность материалов при нестационарных нагружениях / под ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наукова думка, 1984. 216 с.
241. Писаренко Г. С., Стрижало В. А. Экспериментальные методы в механике деформируемого твёрдого тела. Киев: Наукова думка, 1986. 264 с.
242. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. Справочник по сопротивлению материалов. Киев: Наукова думка, 1988. 736 с.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 509/556

243. Пищик Г. Ф. Напряжения и деформации в деталях оптических приборов. Л.: Машиностроение, 1968. 248 с.
244. Погодин В. К., Цвик Л. Б. Принцип поочерёдной непрерывности в задаче о контакте соосных цилиндров // Механика твёрдого тела. 1979. 5. С. 72–81.
245. Подводная фотография / Э. В. Бабак, П. Д. Иванов, Б. Н. Котлецов, С. А. Родионов. Л.: Машиностроение, 1969. 176 с.
246. Подгорный А. Н., Марченко Г. А., Пустынников В. И. Основы и методы прикладной теории упругости. Киев: Выща школа, 1981. 328 с.
247. Подильчук Ю. Н. Трёхмерные задачи теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979. 240 с.
248. Положий Г. Н. Теория и применение  $p$ -аналитических и  $(p, q)$ -аналитических функций. Киев: Наукова думка, 1973. 424 с.
249. Правила устройства и безопасной эксплуатации сосудов, работающих под давлением / Утв. Госгортехнадзором СССР 27.11.87. М.: Недра, 1990. 135 с.
250. Прагер В. Основы теории оптимального проектирования конструкций. М.: Мир, 1977. 109 с.
251. Прагер В., Ходж Ф. Г. Теория идеально пластических тел. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 399 с.
252. Пригоровский Н. И. Методы и средства определения полей деформаций и напряжений: Справ. М.: Машиностроение, 1983. 248 с.
253. Продан В. Д. Техника герметизации разъёмных соединений. М.: Машиностроение, 1991. 160 с.
254. Прокопов В. К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1967. 279. С. 31–46.
255. Прокопович И. Е., Слезингер И. Н., Штейнберг М. В. Расчёт тонких упругих цилиндрических оболочек и призматических складок. Киев: Будивэльнык, 1967. 240 с.
256. Протопопов В. Б. Уплотнения судовых фланцевых соединений (трубопроводов и сосудов). Л.: Судостроение, 1966. 160 с.
257. Прочность дисковых иллюминаторов из оптического стекла / А. А. Каминский, А. В. Ридченко, И. Б. Каринцев, Лев Г. Гелимсон // Динамика и прочность машин. 1985. Вып. 42. С. 47–50.
258. Прочность материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях / под ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наукова думка, 1980. Т. 1, 2.
259. Прочность твердосплавных элементов аппаратов высокого давления для синтеза сверхтвёрдых материалов / Н. В. Новиков, А. А. Лебедев, М. Г. Лошак и др. // Проблемы прочности. 1983. 9. С. 58–64.
260. Прочность, устойчивость, колебания: Справ. / под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. Т. 1–3.
261. Прочность элементов конструкций из стекла и ситалла: Сб. науч. тр. / отв. ред. Г. С. Писаренко. Киев: Наукова думка, 1983. 220 с.
262. Прочные оболочки из силикатных материалов / Г. С. Писаренко, К. К. Амелянович, Ю. И. Козуб и др. Киев: Наукова думка, 1989. 223 с.
263. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит. Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. 256 с.
264. Пух В. П. Прочность и разрушение стекла. Л.: Наука, 1973. 156 с.
265. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твёрдого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
266. Раер Г. А. Динамика и прочность центробежных компрессорных машин. Л.: Машиностроение, 1968. 260 с.
267. Разрушение / под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1973–1975. Т. 1–7.
268. Расчёт и испытания на прочность. Методы механических испытаний металлов при сложном напряжённом состоянии: Методические рекомендации: МР 249-87 / А. А. Лебедев, Б. И. Ковальчук, Ф. Ф. Гигиняк и др. М.: Изд-во Госстандартов, 1987. 50 с.

- Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 510/556
269. Расчёт напряжённого состояния сосудов: сборник статей / Х. Спас, Р. Китчинг, С. Гилл и др.; ред.-сост. Р. Никольс; пер. с англ. Р. А. Васина; под ред. Б. Е. Победри. М.: Мир, 1980. 208 с.
270. Расчёты и испытания на прочность. Методы определения эквивалентных и допускаемых напряжений при однократном статическом нагружении: Методические рекомендации: МР 158-85 / А. А. Лебедев, Б. И. Ковальчук, Ф. Ф. Гигиняк и др. М.: Изд-во Госстандартов, 1985. 44 с.
271. Расчёты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарёв, В. Л. Бидерман, К. К. Лихарев и др. М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1958. Т. 1–3.
272. Расчёты при сложном напряжённом состоянии (определение эквивалентных напряжений) / А. А. Лебедев, Б. И. Ковальчук, В. П. Ламашевский и др.: Препр. Киев: Ин-т проблем прочности АН УССР, 1979. 63 с.
273. Рахмилевич Р. З., Зусмановская С. И. Расчёт аппаратуры, работающей под давлением. М.: Изд-во стандартов, 1968. 180 с.
274. Рвачёв В. Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. Киев: Наукова думка, 1982. 552 с.
275. Рейтман М. И., Шапиро Г. С. Методы оптимального проектирования деформируемых тел. М.: Наука, 1976. 258 с.
276. Рекач В. Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. М.: Высшая школа, 1984. 287 с.
277. Русинов М. М. Композиция оптических систем. Л.: Машиностроение, 1989. 383 с.
278. Русинов М. М. Несферические поверхности в оптике. М.: Недра, 1965. 196 с.
279. Русинов М. М. Техническая оптика. Л.: Машиностроение, 1979. 488 с.
280. Русинов М. М. Юстировка оптических приборов. М.: Недра, 1969. 328 с.
281. Ряполов А. Ф. Монтаж аппаратуры высокого давления. М.: Стройиздат, 1970. 176 с.
282. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наукова думка, 1968. 887 с.
283. Савин Г. Н., Тульчий В. И. Справочник по концентрации напряжений. Киев: Выща школа, 1976. 412 с.
284. Салтыков М. А., Щеглов В. Ф., Гинзбург М. А. Метод определения максимальных напряжений на контуре по показаниям тензорезисторов, расположенных в окрестности кругового отверстия // Тр. ВНИТИ. 1974. 39. С. 96–105.
285. Сапонджян О. М. Изгиб тонких упругих плит. Ереван: Айастан, 1975. 435 с.
286. Свенсон К. Физика высоких давлений. М.: Изд-во иностр. лит.. 1963. 367 с.
287. Свешников А. А. Основы теории ошибок. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1972. 122 с.
288. Серенсен С. В. Избранные труды. Киев: Наукова думка, 1985. Т. 1–3.
289. Системы и элементы глубоководной техники подводных исследований / под общ. ред. В. С. Ястребова. Л.: Судостроение, 1981. 304 с.
290. Смирнов-Аляев Г. А. Сопротивление материалов пластическому деформированию. Инженерные расчёты конечного формоизменения материалов. Л.: Машиностроение, 1978. 368 с.
291. Снеддон И. Преобразование Фурье. М.: Изд-во иностр. лит.. 1955. 668 с.
292. Снеддон И. С., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 220 с.
293. Создание оптического иллюминатора. Сообщ. 1. Напряжённо-деформированное состояние плоского стеклоэлемента / И. И. Дьячков, А. Л. Квитка, Ю. В. Комягин, В. С. Морганюк // Проблемы прочности. 1986. 9. С. 114–119.
294. Создание оптического иллюминатора. Сообщ. 2. Напряжённо-деформированное состояние дискового стеклоэлемента в сборном узле / И. И. Дьячков, А. Л. Квитка, Ю. В. Комягин, Ю. Б. Гнучий // Проблемы прочности. 1986. 9. С. 119–123.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 511/556

295. Создание оптического иллюминатора. Сообщ. 3. Напряжённо-деформированное состояние и прочность плоского стеклоэлемента / И. И. Дьячков, А. Л. Квитка, Ю. В. Комягин, Ю. Б. Гнучий // Проблемы прочности. 1986. 11. С. 97–101.
296. Создание работоспособного оптического иллюминатора. Сообщ. 1 / И. И. Дьячков, А. Л. Квитка, Ю. В. Комягин, В. С. Морганюк // Проблемы прочности. 1985. 11. С. 104–109.
297. Создание работоспособного оптического иллюминатора. Сообщ. 2 / И. И. Дьячков, А. Л. Квитка, Ю. В. Комягин, Ю. Б. Гнучий // Проблемы прочности. 1985. 12. С. 90–94.
298. Соколовский В. В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
299. Солнцев С. С., Морозов Е. М. Разрушение стекла. М.: Машиностроение, 1978. 152 с.
300. Соляник-Красса К. В. Кручение валов переменного сечения. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 167 с.
301. Соляник-Красса К. В. Осесимметричная задача теории упругости. М.: Стройиздат, 1987. 336 с.
302. Соппротивление материалов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка, В. Г. Попков, Э. С. Уманский; под ред. акад. АН УССР Г. С. Писаренко. 5-е изд., перераб. и доп. Киев: Выща школа, 1986. 775 с.
303. Сосуды и трубопроводы высокого давления: Справ. / Е. Р. Хисматулин, Е. М. Королев, В. И. Лившиц и др. М.: Машиностроение, 1990. 384 с.
304. Справочник по теории упругости / под ред. П. М. Варвака и А. Ф. Рябова. Киев: Будивэльнык, 1971. 420 с.
305. Справочное пособие по расчёту машиностроительных конструкций на прочность / А. А. Лебедев, Б. И. Ковальчук, С. Э. Уманский, Ф. Ф. Гигиняк, В. П. Ламашевский. Киев: Тэхника, 1990. 240 с.
306. Стэчив Дж. Д. Иллюминаторы со сферическими окнами из стекла или прозрачной керамики для глубоководных аппаратов // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1975. 3. С. 210–220.
307. Стэчив Дж. Д. Конические акриловые иллюминаторы под длительным давлением 350 атм // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1972. 3. С. 78–83.
308. Стэчив Дж. Д. Конические акриловые иллюминаторы при длительном воздействии гидростатического давления 700 кгс/см<sup>2</sup> // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1972. 4. С. 92–98.
309. Стэчив Дж. Д. Конические акриловые иллюминаторы при длительном воздействии гидростатического давления 1400 кгс/см<sup>2</sup> // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1972. 2. С. 321–329.
310. Стэчив Дж. Д. Критическое давление для сферических акриловых иллюминаторов при кратковременном гидростатическом нагружении // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1969. 3. С. 46–58.
311. Стэчив Дж. Д. Полусферические оболочки из акриловой пластмассы с фланцами для подводных систем. Часть 2. Прочность при статическом и циклическом нагружении гидростатическим давлением // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1978. 2. С. 292–306.
312. Стэчив Дж. Д. Сферические иллюминаторы для подводных аппаратов // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1979. 3. С. 210–220.
313. Стэчив Дж. Д., Слеттен Р. Рассчитанные на рабочую глубину 3600 м акриловые стёкла иллюминаторов в форме секторов сферической оболочки, предназначенные для глубоководного аппарата // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия В. Конструирование и технология машиностроения. 1976. 2. С. 144–161.
314. Сухарев И. П. Экспериментальные методы исследования деформаций и прочности. М.: Машиностроение, 1987. 216 с.

- Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 512/556
315. Тарабасов Н. Д. Расчёты напряжённых посадок в машиностроении. М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы, 1961. 266 с.
316. Теоретические и экспериментальные исследования прочности элементов машиностроительных конструкций энергомашин, ядерных и термоядерных реакторов с учётом влияния рабочих сред: Инструкция для программ прочностных расчётов: Отчёт о НИР (заключ.) / Ин-т пробл. машиностроения (ИПМаш) АН УССР; руководитель А. Н. Подгорный; отв. исполн. Г. А. Марченко. № ГР 01829040552; Инв. № 02860039541. Харьков, 1986. 155 с.
317. Теория оптических систем / Б. Н. Бегунов, Н. П. Заказнов, С. И. Кирюшин, В. И. Кузичев. М.: Машиностроение, 1981. 432 с.
318. Тимошенко С. П. История науки о сопротивлении материалов. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1957. 536 с.
319. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. Киев: Наукова думка, 1972. 508 с.
320. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
321. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.
322. Третьяченко Г. Н. Моделирование при изучении прочности конструкций. Киев: Наукова думка, 1979. 230 с.
323. Треффц Е. Математическая теория упругости / ред. А. И. Лурье. 2-е изд., испр. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1934. 172 с.
324. Трощенко В. Т. Деформирование и разрушение металлов при многоцикловом нагружении. Киев: Наукова думка, 1981. 344 с.
325. Трощенко В. Т., Сосновский Л. А. Сопротивление усталости металлов и сплавов: Справ. Киев: Наукова думка, 1987. Ч. 1, 2.
326. Уйк Г. К. Тензометрия аппаратов высокого давления. Л.: Машиностроение, 1974. 192 с.
327. Уманский С. Э. Оптимизация приближённых методов решения краевых задач механики. Киев: Наукова думка, 1983. 167 с.
328. Уплотнения и уплотнительная техника: Справ. / под общ. ред. А. И. Голубева и Л. А. Кондакова. М.: Машиностроение, 1986. 463 с.
329. Уфлянд Я. С. Биполярные координаты в теории упругости. М.; Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 232 с.
330. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
331. Фёппль А., Фёппль Л. Сила и деформация. М.; Л.: Государственное объединённое научно-техническое издательство Народного комиссариата тяжёлой промышленности СССР, 1936. Т. 1, 2.
332. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 160 с.
333. Филоненко-Бородич М. М. Механические теории прочности. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1961. 90 с.
334. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. 300 с.
335. Францевич И. Н., Воронов Ф. Ф., Бакута С. А. Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов: Справ. Киев: Наукова думка, 1982. 286 с.
336. Фридман Я. Б. Механические свойства металлов. М.: Машиностроение, 1974. Т. 1, 2.
337. Хан Х. Теория упругости. М.: Мир, 1988. 344 с.
338. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 408 с.
339. Цвик Л. Б. О невязках сопряжения перемещений и напряжений в задачах о сопряжении и контакте упругих тел // Докл. АН СССР. 1983. 268. 3. С. 570–574.
340. Циклис Д. С. Техника физико-химических исследований при высоких и сверхвысоких давлениях. М.: Химия, 1976. 432 с.
341. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.



- Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 513/556
342. Чернов В. Ю., Радзиевский В. Н. Применение паяных сотовых уплотнений в центробежных компрессорах // Конструирование, исследование, технология и организация производства компрессорных машин: Тематич. сб. науч. тр. Сумы: ВНИИкомпрессормаш, 1977. С. 87–92.
343. Шевченко Ю. Н. Термопластичность при переменных нагрузениях. Киев: Наукова думка, 1970. 288 с.
344. Шевченко Ю. Н. Численные методы решения прикладных задач. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Киев: Наукова думка, 1986. 272 с.
345. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Терехов Р. Г. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. Киев: Наукова думка, 1992. 328 с.
346. Шенк Г., Кендалл Г. Подводная съёмка. М.: Искусство, 1960. 192 с.
347. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. 270 с.
348. Шульман М. Я. Автоматическая фокусировка оптических систем. Л.: Машиностроение, 1990. 224 с.
349. Шульман М. Я. Измерение передаточных функций оптических систем. Л.: Машиностроение, 1980. 208 с.
350. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений: Справ. пособие / отв. ред. Б. С. Касаткин. Киев: Наукова думка, 1981. 584 с.
351. Beton-Kalender: Taschenbuch für den Beton und Stahlbetonbau. Berlin: Ernst und Sohn, 1944. 137 S.
352. Cycle creep and low cycle fatigue of pressure vessel sheet materials in multiaxial stress / F. F. Giginyak, A. A. Lebedev, Yu. I. Zvezdin, B. T. Timofeev // Intern. J. Res Mech. 1987. Vol. 27, N1. P. 325–353.
353. Deep-Sea Photography / ed. by J. B. Hersey. Baltimore: Jones Hopkins Press, 1967. 310 pp.
354. Gelimson Lev G. General Strength Theory. Sumy: Drukar Publishers, 1993. 64 pp.
355. Gerdeen J. C. Analysis of stress concentration in thick cylinders with sideholes and crossholes // Trans. ASME. Ser. B. 1972. Vol. 94. P. 815.
356. Gerdeen J. C., Smith R. E. Experimental determination of stress concentration factors in thick-walled cylinders with crossholes and sideholes // Exper. Mech. 1972. Vol. 12. P. 530.
357. Kraus H. Stress Concentration Factors for Perforated Annular Bodies Loaded in Their Plane. Hartford: Pratt and Whitney Co., 1963.
358. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris: Gauthier-Villars, 1852. 335 pp.
359. Lamé G. Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications. Paris: Gauthier-Villars, 1859. 368 pp.
360. Life of high-stressed pressure vessel components under cyclic loading at complex stress state / F. F. Giginyak, Y. P. Karzov, A. A. Lebedev, B. T. Timofeev // 10th Intern. Conf. on Structural Mech. in Reactor Technology. Anaheim (California, USA), 1989. P. 171–176.
361. Materials selection is key to test chamber's success // Machinery (USA). 1970. 76, No. 9. P. 70–72.
362. MHI 1200 kg/cm<sup>2</sup> hydrostatic tank // Jap. Shipbuild. and Mar. Eng. 1970. 5, No. 1. P. 33–35.
363. Monney N. T. Technical requirements for deep ocean simulation facilities // J. Environ. Sci. 1971. 14, No. 1. P. 21–24.
364. Parsons D. O. Design and fabrication of environmental test chambers for oceanographic research // J. Environ. Sci. 1970. 13, No. 5. P. 22–24.
365. Pat. 653275 BRD. Dichtungsvorrichtung für unter hohem Druck stehende Gefäßverschlüsse / Maschinenbau Scholz & Co. in Coesfeld, Westf. Publ. 19.11.1937.
366. Pat. 713101 BRD. Abdichtung für Hochdruckgefäße / IG Farbenindustrie Akt.-Ges. in Frankfurt, Main. Publ. 30.10.1941.
367. Pat. 1192944 BRD. Wasserdichtes Bullauge, insbesondere für Unterwassergeräte / J. G. M. J. de Wouters d'Oplinter. Publ. 13.01.1966.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 514/556

368. Pat. 2100348 BRD. Großvolumiger Behälter für hohe Innendrücke / B. V. S. Isere. Publ. 24.01.1974.
369. Pat. 2100951 BRD. Verschluss für einen zylindrischen HD-Behälter von großem Durchmesser / B. V. S. Isere. Publ. 21.02.1974.
370. Pat. 2357093 BRD. Unterwasserkamera / A. Pocachard. Publ. 12.05.1977.
371. Pat. 2531938 BRD. Unterwasserkamera für den Tiefseeinsatz / H. Winnacker. Publ. 20.07.1978.
372. Pat. 2650524 BRD. Unterwasserkamera / H. Winnacker, J. Dierssen. Publ. 07.09.1978.
373. Pat. 2656516 BRD. Druckfestes, im wesentlichen zylindrisches Unterwasserkameragehäuse für die Tiefsee / H. Winnacker. Publ. 10.05.1979.
374. Pat. 1563730 France. Récipients sous pression / Foster Wheeler Corporation. Publ. 18.04.1969.
375. Pat. 2030574 France. Dispositif de fermeture rapide pour appareils sous pression ou dépression / Le Matériel Physico-Chimique Flam & Co. Publ. 13.11.1970.
376. Pat. 2150073 France. Ensemble formant obturateur pour récipient / Foster Wheeler Corporation. Publ. 30.03.1973.
377. Pat. 2197438 France. Dispositif obturateur pour tuyaux en grès a manchon / Deutsche Steinzeug und Kunststoffwarenfabrik. Publ. 22.03.1974.
378. Pat. 2260037 France. Culasse à ouverture et fermeture rapides / P. Bavera. Publ. 29.08.1975.
379. Pat. 2106255 République Française. Hublot pour appareils de plongée et chambres pressurisées / Dragerwerk AG. Publ. 28.04.1972.
380. Pat. 2177857 République Française. Dispositif d'observation dans des compartiments dont les parois intérieures ou extérieures sont soumises à des pressions élevées / Fried. Krupp Gesellschaft mit beschränkter Haftung. Publ. 09.11.1973.
381. Pat. 2318436 République Française. Chambre de prises de vues sous-marines munie d'un dispositif de lampe flash / H. Winnacker. Publ. 11.02.1977.
382. Pat. 2370299 République Française. Appareil de prises de vues sous-marines / H. Winnacker, J. Dierssen. Publ. 02.06.78.
383. Pat. 2374660 République Française. Appareil de prise de vues sous-marines pour grande profondeurs / H. Winnacker. Publ. 13.07.78.
384. Pat. 947918 GB. An improved method of and apparatus for carrying out under-water exploration / D. I. Rebikoff. Publ. 29.01.1964.
385. Pat. 1282690 GB. Remotely controlled hydraulically operated connectible and disconnectible flexible joint / Vetco Offshore Industries, Inc. Publ. 19.07.1972.
386. Pat. 1319345 GB. Improvements in or relating to pressure vessels / P. S. Venkatesan. Publ. 06.06.1973.
387. Pat. 734050 Italy. Dispositivo di chiusura a tenuta per recipienti ad altissima pressione / Gray Tool Co. Publ. 15.12.1966.
388. Pat. 3074589 USA. Closure means for withstanding high pressures / P. E. Chaney. Publ. 22.01.1963.
389. Pat. 3144163 USA. Seal / F. Gasche. Publ. 11.08.1964.
390. Pat. 3279644 USA. Pressure vessel closure / W. W. Robertson. Publ. 18.10.1966.
391. Pat. 3433382 USA. Pre-stressed segmented containers or pressure vessels / F. G. Boggio. Publ. 18.03.1969.
392. Pat. 3462041 USA. High pressure sealing structure / R. O. Wilson. Publ. 19.08.1969.
393. Pat. 3899790 USA. Apparatus for taking underwater pictures / A. Pocachard. Publ. 12.08.1975.
394. Pat. 4153357 USA. Underwater camera / H. Winnacker, J. Dierssen. Publ. 08.09.1979.
395. Pat. 4184758 USA. Deep-sea underwater camera / H. Winnacker. Publ. 22.01.1980.
396. Pat. 4295721 USA. High pressure and high speed optical enclosure system / D. Rebikoff. Publ. 20.10.1981.
397. Project de construction d'un caisson pour les essais de résistance de d'appareils a'grande profondeur simulée // Cahiers océanogr. 1969. 21, No. 7. P. 625–626.

- Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 515/556
398. Schiff M. Sur l'équilibre d'un cylindre élastique // J. de Math. pures et appliq. 1883. Ser. 3, No. 9. P. 407–419.
399. Testing facility simulates depth 8 miles // Ocean Ind. 1970. 5, No. 1. P. 14.

## ПРИЛОЖЕНИЯ. СИСТЕМА ДАЛЬНЕЙШИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ, МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ, МЕХАНИЧЕСКИХ И ПРОЧНОСТНЫХ ОБОБЩЕНИЙ. СПРАВКИ О ПРАКТИЧЕСКОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ И АКТЫ ВНЕДРЕНИЯ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ НАСТОЯЩЕЙ ДОКТОРСКОЙ ДИССЕРТАЦИИ

### П.1. Открытие и доказательство необходимости бигармоничности функции напряжений Лява для точного выполнения уравнений равновесия и совместности деформаций

Согласно [195], бигармоничность функции Лява  $L(r, z)$  достаточна для точного выполнения уравнений равновесия и совместности деформаций в осесимметричной упругой задаче. Проблема же необходимости, по-видимому, не ставилась и должна быть решена, чтобы выяснить, является ли подход Лява исчерпывающим или необходимо использование других подходов для отыскания иных возможных решений, упускаемых функциями Лява. Преобразование уравнений равновесия осесимметричной задачи теории упругости [165] в радиальных и осевых перемещениях даёт

(П.1)

$$\partial^2 u_z(r, z) / (\partial r \partial z) = -2(1 - \mu) [\partial^2 u_r(r, z) / \partial r^2 + (1/r) \partial u_r(r, z) / \partial r - (1/r^2) u_r(r, z)] - (1 - 2\mu) \partial^2 u_r(r, z) / \partial z^2;$$

(П.2)

$$\partial^4 u_r(r, z) / \partial r^4 + 2\partial^4 u_r(r, z) / (\partial r^2 \partial z^2) + \partial^4 u_r(r, z) / \partial z^4 + (2/r) [\partial^3 u_r(r, z) / \partial r^3 + \partial^3 u_r(r, z) / (\partial r \partial z^2)] - (3/r^2) \partial^2 u_r(r, z) / \partial r^2 - (2/r^2) \partial^2 u_r(r, z) / \partial z^2 + (3/r^3) \partial u_r(r, z) / \partial r - (3/r^4) u_r(r, z) = 0.$$

Полагая возможным двукратное интегрирование функции  $u_r(r, z)$ , введём без снижения общности функцию  $\varphi(r, z)$ , неоднозначно определённую условием

(П.3)

$$\partial^2 \varphi(r, z) / (\partial r \partial z) = u_r(r, z).$$

Тогда уравнение (П.1) даёт

(П.4)

$$u_z(r, z) = -2(1 - \mu) [\partial^2 \varphi(r, z) / \partial r^2 + (1/r) \partial \varphi(r, z) / \partial r] - (1 - 2\mu) \partial^2 \varphi(r, z) / \partial z^2 + C_1(r) + C_2(z),$$

где  $C_1(r)$ ,  $C_2(z)$  – функции только  $r$  и только  $z$  соответственно.

Нетрудно видеть существование аналогичных функций  $C_1'(r)$  и  $C_2'(z)$  таких, что уже для функции

(П.5)

$$\varphi'(r, z) = \varphi(r, z) + C_1'(r) + C_2'(z)$$

выполнены уравнения (П.3) и (П.4) без  $C_1(r)$  и  $C_2(z)$ .

Подстановка условия (П.3) в уравнение (П.2) показывает бигармоничность функции (П.5), которая пропорциональна функции Лява с точностью до несущественной аддитивной постоянной.

Итак, бигармоничность функции напряжений не только достаточна, но и необходима для существования точного решения уравнений равновесия и совместности деформаций в осесимметричной упругой задаче.

Замечание. Здесь для полноты приходится отчасти повторить сказанное выше об этом, в том числе применительно к общему степенному методу, который позволил впервые получить именно самое общее решение бигармонического уравнения в классе степенных рядов как

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 516/556

собственном классе функций для оператора этого уравнения, в частности применительно к общему решению осесимметричной задачи теории упругости без объёмных сил и кручения через бигармоническую функцию напряжений Лява. Ляв доказал достаточность бигармоничности своей функции напряжений, через которую выражаются все перемещения и напряжения с помощью указанных им дифференциальных операторов, для точного выполнения всех уравнений равновесия и совместности деформаций. Однако проблема именно необходимости бигармоничности функции напряжений Лява для этого ранее даже не ставилась, хотя она имеет принципиальное значение, ведь при отсутствии такой необходимости возможна неполнота множества решений, получаемых посредством функций напряжений Лява. Эта проблема впервые отмечена, поставлена и именно положительно решена в этой диссертации, в которой тем самым строго доказана полнота множества решений, получаемых посредством функций напряжений Лява. Следовательно, в частности, никаких других полиномиальных решений осесимметричной задачи теории упругости без объёмных сил и кручения, кроме даваемых функциями напряжений Лява в степенных рядах как собственном классе функций для оператора бигармонического уравнения, принципиально не может быть.

Попутно отметим причину многих затруднений при решении осесимметричной задачи теории упругости.

В декартовой системе координат перемещения и напряжения являются бигармоническими функциями, а объёмная деформация и среднее (нормальное октаэдрическое) напряжение даже гармоническими функциями [195], что обусловлено перестановочностью дифференцирования и оператора Лапласа, в котором коэффициенты при подоператорах, означающих дифференцирование по отдельным независимым переменным, постоянны (единичны).

А в цилиндрической системе координат оператор Лапласа

(П.6)

$$\nabla^2 = \partial^2/\partial r^2 + (1/r)\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2$$

включает подоператор  $\partial/\partial r$  с переменным коэффициентом  $(1/r)$  и не коммутирует с дифференцированием  $\partial/\partial r$ .

Поэтому, как показывают дифференциальные операторы Лява (1.21), в общем случае осесимметричной упругой задачи без объёмных сил и кручения бигармоничны лишь осевые перемещение и напряжение.

Бигармоничность последнего показывается и сложением относящихся к нормальным напряжениям уравнений совместности деформаций в напряжениях.

Необязательность бигармоничности остальных перемещений и напряжений иллюстрируется контрпримерами.

Так, для точного решения Ламе [358] (1.6) – (1.8)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 u_r(r, z) &= \\ \nabla^2 \nabla^2 [rC_1' + (1/r)C_2] &= \\ (1/r^3)C_1' + (9/r^5)C_2; \\ \nabla^2 \nabla^2 \sigma_r(r, z) &= \\ \nabla^2 \nabla^2 [C_1 - (1/r^2)C_2] &= \\ - (64/r^6)C_2; \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \sigma_i(r, z) = \nabla^2 \nabla^2 [C_1 + (1/r^2)C_2] = (64/r^6)C_2$$

с постоянными  $C_1'$ ,  $C_1$  и  $C_2$  тождественно аннулируются лишь при равенстве боковых давлений  $p$ , а первое – и только при некотором  $\sigma_z(p)$ .

## П.2. Общая теория осесимметричного (без объёмных сил и кручения) деформирования трёхмерного цилиндрического тела, нагруженного по схеме основного типа с одним свободным торцом

Рассмотрим цилиндрическое тело

$$\begin{aligned} 0 \leq r \leq a, \\ 0 \leq z \leq 1 \end{aligned}$$

со свободным торцом  $z = 0$

$$\sigma_z(r, 0) = 0; \tau_{rz}(r, 0) = 0; \sigma_z(r, 1); \tau_{rz}(r, 1); \sigma_r(a, z); \tau_{rz}(a, z)$$

при выполненных уравнении равновесия

$$\int_0^a \sigma_z(r, 1) r dr + a \int_0^1 \tau_{rz}(a, z) dz = 0$$

и условиях парности сдвиговых напряжений

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(a, 0) &= 0; \\ \tau_{rz}(0, 1) &= 0; \\ \tau_{rz}(r, 1)|_{r=a} &= \tau_{rz}(a, z)|_{z=1}. \end{aligned}$$

Разложим ненулевые граничные условия в ряды Маклорена ( $g_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} (\text{П.7}) \\ \sigma_z(r, 1) &= \sum_{i=0}^{\infty} d_i r^{2i}; \\ \tau_{rz}(r, 1) &= \sum_{i=0}^{\infty} e_i r^{2i+1}; \\ \sigma_r(a, z) &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j r^j; \\ \tau_{rz}(r, 1) &= \sum_{j=0}^{\infty} g_j r^j. \end{aligned}$$

Совокупность тождеств

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, 0) &= 0; \\ \tau_{rz}(r, 0) &= 0, \end{aligned}$$

эквивалентная системе

$$\begin{aligned} 2^{2-2i}(i+2-\mu)(2i+1)!i!^{-2}a_{1,2i+1} + 2^{-2i}(i+1-\mu)(2i+3)!i!^{-2}a_{0,2i+3} &= 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots); \\ 2^{1-2i}(i+2-\mu)(i+1)(2i+2)!(i+1)!^{-2}a_{1,2i+2} + 2^{-1-2i}(i+1-\mu)(2i+4)!(i+1)!^{-2}a_{0,2i+4} &= 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

индуктивно приводит к доказываемой методом математической индукции рекуррентной формуле ( $[x] = \text{entier } x - \text{целая часть числа } x$ )

$$a_{ij} = - (1/4) \{ [(j+1)/2] - \mu \} \{ [(j+3)/2] - \mu \}^{-1} (j+1)(j+2)a_{0,j+2}.$$

Теперь (2.12) и (П.7) дают систему четырёх рядов уравнений

$$\begin{aligned} (\text{П.8}) \\ \sum_{j=2}^{\infty} [j/2] \{ i + [j/2] + 2 - \mu \}^{-1} 2^{-2i} (2i+j+3)! i!^{-2} j!^{-1} a_{0,2i+j+3} &= (-1)^{i+1} d_i \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots); \\ (\text{П.9}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} [(j+1)/2] \{ i + [(j+1)/2] + 2 - \mu \}^{-1} 2^{-1-2i} (i+1)(2i+j+4)!(i+1)!^{-2} j!^{-1} a_{0,2i+j+4} &= (-1)^i e_i \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots); \\ (\text{П.10}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \{ (2i+1)([j/2] + 1) + \mu \} \{ i + [j/2] + 2 - \mu \}^{-1} 2^{-1-2i} (i+1)(2i+j+3)!(i+1)!^{-2} j!^{-1} a_{0,2i+j+3} &= f_j \quad (j = 0, 1, 2, 3, \dots); \\ (\text{П.11}) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i [(j+1)/2] \{ i + [(j+1)/2] + 2 - \mu \}^{-1} 2^{-1-2i} (i+1)(2i+j+4)!(i+1)!^{-2} j!^{-1} a_{0,2i+j+4} = g_j \quad (j = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Обозначив

$$a_j = a_{0j},$$

заменив в (П.9) и (П.11)  $j$  на  $j - 1$ , разделив при  $j = 2, 3, \dots$  уравнения (П.11) на  $a[j/2]j$ , вычтя домноженные на  $\mu$  последние результаты из (П.10), отделив первые два из уравнений (П.10) для определения  $a_3$  и  $a_4$  после нахождения

$$a_5, a_6, \dots,$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 518/556

дополнительно разделив преобразованные уравнения (П.10) на  $[j/2] + 1$ , прибавив к ним преобразованные уравнения (П.11), удвоив последние и уравнения (П.9) и обозначив

$$\begin{aligned}d_i' &= (-1)^{i+1}(1/8)i!^2a^{2i+3}d_i \\ &(i = 0, 1, 2, 3, \dots); \\ e_i' &= (-1)^i(1/4)(i+1)i!^2a^{2i+3}e_i \\ &(i = 0, 1, 2, 3, \dots); \\ f_j' &= j!([j/2] + 1)^{-1}(a/2)^{j+3}f_j + ([j/2] + 1 - \mu)[j/2]^{-1}([j/2] + 1)^{-1}(j-1)!(a^{j+2}/2^{j+3})g_{j-1} \\ &(j = 2, 3, 4, 5, \dots); \\ g_j' &= (j-1)! [j/2]^{-1}(a/2)^{j+2}g_{j-1} \\ &(j = 2, 3, 4, 5, \dots); \\ a_n' &= n! \{[(n+1)/2] - \mu\}^{-1}(a/2)^n a_n \\ &(n = 5, 6, 7, 8, \dots),\end{aligned}$$

получаем взамен системы (П.8) – (П.11) систему

(П.12)

$$\sum_{j=2}^{\infty} [j/2] j!^{-1} (2/a)^j a_{2i+j+3}' = d_i' \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots);$$

(П.13)

$$\sum_{j=2}^{\infty} [j/2] (j-1)!^{-1} (2/a)^j a_{2i+j+3}' = e_i' \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots);$$

(П.14)

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i i!^{-2} a_{2i+j+3}' = f_j' \quad (j = 2, 3, 4, 5, \dots);$$

(П.15)

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (i+1)^{-1} i!^{-2} a_{2i+j+3}' = g_j' \quad (j = 2, 3, 4, 5, \dots).$$

Подсистемы (П.12) – (П.15), вообще говоря, не являются регулярными [149, 174, 178], к тому же нет оснований выбирать лишь ограниченные их решения, тем более что последовательности правых частей не обязаны быть ограниченными.

Поэтому проблема решения этой системы едва ли может быть решена раз и навсегда, – это придётся делать, исходя из специфики решаемых задач, что отнюдь не препятствует получению некоторых полезных общих результатов.

Так, однородный аналог подсистемы (П.12) имеет общее решение

$$a_n' = A(ay/2)^n \quad (n = 5, 6, 7, 8, \dots),$$

где

A – произвольная постоянная;

y – корень уравнения

$$\sum_{j=2}^{\infty} [j/2] j!^{-1} y^j = 0.$$

Для подсистемы (П.13) в отличие от предыдущего уравнение имеет вид

$$\sum_{j=2}^{\infty} [j/2] (j-1)!^{-1} y^j = 0.$$

Для подсистемы (П.14)

$$a_{2k+1}' = A_1 x_1^k \quad (k = 2, 3, 4, 5, \dots);$$

$$a_{2k}' = A_2 x_2^k \quad (k = 3, 4, 5, 6, \dots),$$

где

A<sub>1</sub>, A<sub>2</sub> – произвольные постоянные;

x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub> – любые (различные или одинаковые) корни уравнения

(П.16)

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i i!^{-2} x^i = 0.$$

Для подсистемы (П.15) в отличие от предыдущего уравнение таково:

(П.17)

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (i+1)^{-1} i!^{-2} x^i = 0.$$

Нетрудно видеть [119], что левые части уравнений (П.16) и домноженного на x<sup>1/2</sup> (П.17) являются функциями Бесселя J<sub>0</sub>(2x<sup>1/2</sup>) и J<sub>1</sub>(2x<sup>1/2</sup>) соответственно, то есть решение подсистем (П.14) и (П.15) сводится к известным нулям функций Бесселя.

Для (П.12) и (П.13) необходимо исследование нулей аналогичных функций

$$G_0(y) = \sum_{j=2}^{\infty} [j/2] j!^{-1} y^j;$$

$$G_{-1}(y) = \sum_{j=2}^{\infty} [j/2] (j-1)!^{-1} y^j.$$

### П.3. Теории полной линейной зависимости и полной линейной независимости системы и полной линейности оператора (применительно к бесконечным линейным комбинациям)

Обычно [4, 138, 207] рассматриваются лишь конечные линейные комбинации

$$\sum_{k=1}^n a_{i(k)} Z_{i(k)}$$

с произвольными числовыми коэффициентами  $a_{i(k)}$ ,

$$i(k) \in \Omega,$$

$n$  – натуральное число,

различных (это подразумевалось, но явно не указывалось) элементов даже бесконечной системы

$$[\omega \in \Omega Z_\omega].$$

Для лишь конечных линейных комбинаций известны понятия линейной независимости системы и линейности оператора.

Даже бесконечная система

$$[\omega \in \Omega Z_\omega]$$

называется линейно независимой, если из равенства нулю

$$\sum_{k=1}^n a_{i(k)} Z_{i(k)} = 0$$

любой конечной линейной комбинации элементов этой системы с произвольными числовыми коэффициентами  $a_{i(k)}$  следует аннулирование всех коэффициентов  $a_{i(k)}$  этой линейной комбинации:

$$a_{i(k)} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4, \dots, n).$$

Оператор  $L$  называется линейным, если он преобразует любую конечную линейную комбинацию

$$\sum_{k=1}^n a_{i(k)} Z_{i(k)}$$

элементов этой системы с произвольными числовыми коэффициентами  $a_{i(k)}$  в соответствующую (с теми же числовыми коэффициентами  $a_{i(k)}$ ) линейную комбинацию преобразованных этим оператором элементов системы:

$$L \left\{ \sum_{k=1}^n a_{i(k)} Z_{i(k)} \right\} = \sum_{k=1}^n a_{i(k)} L \{ Z_{i(k)} \},$$

поэтому именно в данном случае фигурные скобки можно – и принято – опускать.

Однако практика применения полной линейно-комбинационной методологии решения систем функциональных уравнений требует рассмотрения произвольных (возможно, и бесконечных) линейных комбинаций элементов системы.

Это также представляет интерес для математики и различных её приложений.

Пусть множества элементов произвольной природы – поле

$$[a \in A a_\alpha]$$

и аддитивные группы

$$[\omega \in \Omega Z_\omega]$$

и

$$[\psi \in \Psi Y_\psi]$$

с нулями

$$0_a, 0_z, 0_y$$

соответственно таковы, что для любых элементов  $a_\alpha$  и  $Z_\omega$  существует единственный элемент

$$y_\psi = a_\alpha Z_\omega,$$

причём эта бинарная операция взаимного умножения удовлетворяет обычным законам коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности.

Конечной (бесконечной) линейной комбинацией некоторых различных элементов множества

$$[\omega \in \Omega Z_\omega]$$

над полем

$$[a \in A a_\alpha]$$

называется конечная (бесконечная) сумма (если она существует в обычном или обобщённом смысле)

$$\sum_{\xi \in \Xi} a_{\xi} Z_{\xi},$$

где для любого  $\xi \in \Xi$  выполнены оба условия

$$a_{\xi} \in [a \in A \ a_a]$$

и

$$Z_{\xi} \in [\omega \in \Omega \ Z_{\omega}].$$

Совокупность этих двух условий можно (при необходимости с реиндексацией) записать как собственную или несобственную включённость множества  $\Xi$  в пересечение множеств  $A$  и  $\Omega$ :

$$\Xi \subseteq A \cap \Omega.$$

Система  $[_{\xi \in \Xi} Z_{\xi}]$  элементов множества  $[_{\omega \in \Omega} Z_{\omega}]$  называется вполне линейно независимой над полем  $[_{a \in A} a_a]$ , если даже при бесконечности множества  $\Xi$  из равенства нулю

$$\sum_{\xi \in \Xi} a_{\xi} Z_{\xi} = 0_y$$

любой конечной или бесконечной линейной комбинации элементов этой системы с произвольными числовыми коэффициентами  $a_{\xi}$  следует аннулирование всех коэффициентов  $a_{\xi}$  этой линейной комбинации:

$$a_{\xi} = 0_a \ (\xi \in \Xi).$$

Оператор  $L$  для элементов множеств  $[_{\omega \in \Omega} Z_{\omega}]$  и  $[_{\psi \in \Psi} Y_{\psi}]$  называется вполне линейным над полем  $[_{a \in A} a_a]$ , если для любого

$$\Xi \subseteq A \cap \Omega$$

преобразует любую конечную или бесконечную линейную комбинацию

$$\sum_{\xi \in \Xi} a_{\xi} Z_{\xi}$$

элементов системы  $[_{\xi \in \Xi} Z_{\xi}]$  с произвольными числовыми коэффициентами

$$a_{\xi} \in [a \in A \ a_a]$$

в соответствующую (с теми же коэффициентами  $a_{\xi}$ ) линейную комбинацию преобразованных этим оператором элементов системы (суммы в названных смыслах предполагаются существующими):

$$L\{\sum_{\xi \in \Xi} a_{\xi} Z_{\xi}\} = \sum_{\xi \in \Xi} a_{\xi} L\{Z_{\xi}\},$$

поэтому именно в данном случае фигурные скобки можно – и принято – опускать.

Поскольку, в частности, множество  $\Xi$  может быть конечным, то вполне линейный оператор линеен, а вполне линейно независимая система линейно независима.

Обратное же утверждать нельзя, как показывает следующий контрпример.

Пусть  $H$  – полное пространство со счётным ортонормированным базисом [138]

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_k, \dots,$$

образующим систему  $\Phi$ .

Дополним её до системы  $\Phi^+$  элементом

$$\varphi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k \in H$$

как существенно бесконечным

$$(\forall n \in N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \ \exists k > n: a_k \neq 0)$$

сходящимся рядом (достаточна сходимость

$$\varphi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2,$$

например

$$a_k = 1/k).$$

Очевидно, система  $\Phi^+$  не является вполне линейно независимой, поскольку

$$(-1)\varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k = 0$$

с бесконечным множеством ненулевых коэффициентов.

Покажем, однако, линейную независимость системы  $\Phi^+$ :

$$\forall n \in N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \ \forall b_{k(j)} \ (k(j) \in \{0, 1, 2, \dots\} = \{0\} \cup N):$$

$$\sum_{k=0}^n b_{k(j)} \varphi_{k(j)} = 0 \Rightarrow \forall j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}: b_{k(j)} = 0.$$

Действительно, если в эту линейную комбинацию  $\varphi_0$  не входит, то требуемое следует из базисности системы  $\Phi$ .

Если в эту линейную комбинацию  $\varphi_0$  входит, то возможна перенумерация индексов, приводящая эту линейную комбинацию к виду

$$b_{k(0)} \varphi_0 + \sum_{j=1}^n b_{k(j)} \varphi_{k(j)} = 0 \ (b_{k(0)} \neq 0),$$



но тогда

$$\varphi_0 = \sum_{j=1}^n [(-b_{k(j)})/b_{k(0)}] \varphi_{k(j)},$$

что противоречит допущению о существенной бесконечности ряда для  $\varphi_0$  (разложение по базису единственно).

Следовательно, система может быть линейно независимой и не быть вполне линейно независимой.

Если линейный оператор  $L$  непрерывен, то применительно к бесконечной линейной комбинации возможен переход к пределу и оператор вполне линеен.

Непрерывность же линейного оператора равносильна (эквивалентна) его ограниченности в смысле ограниченности образа единичного шара.

Если оператор вполне линеен, то он линеен и в произвольной бесконечной линейной комбинации допускает переход к пределу, откуда следует и непрерывность оператора.

Значит, непрерывность (или равносильная (эквивалентная) ей ограниченность) линейного оператора необходима и достаточна для его полной линейности.

#### П.4. Всеобщая погрешность псевдорешения системы функциональных уравнений и система общих методов его оптимизации

В общем случае система функциональных уравнений (2.1) даже в принципе не обязана иметь (точное) решение, которое, будучи подставленным во все уравнения системы, обращает их в тождества, – а именно при несовместности системы (наличии внутренних противоречий).

Тогда вообще теряет смысл понятие приближённого решения как некоторого приближения к точному решению, чрезвычайно полезное и необходимое при существовании точного решения, если оно не может быть выражено (или хотя бы не удаётся его выразить) в явном аналитическом виде через функции избранных классов (например элементарные и табулированные специальные функции), в частности ввиду неполноты подобных классов.

Поэтому для произвольной системы функциональных уравнений (2.1) необходимо обобщение понятий точного и приближённого решений в виде наилучшего и приближённого к нему псевдорешений вида

$$[\varphi \in \Phi \quad f_\varphi[\omega \in \Omega \quad Z_\omega]]$$

для системы функциональных уравнений (2.1), не обязанного обращать все её уравнения в тождества, но дающего при этом теоретически или хотя бы практически минимально возможные погрешности.

Общая погрешность псевдорешения системы функциональных уравнений (2.1) определяется как средняя степенная погрешность по совокупности всех уравнений системы (2.1) для средних степенных всеобщих погрешностей по каждому из уравнений системы (2.1) согласно формулам (2.3) и (2.4).

При этом местная (в точке  $[\omega \in \Omega \quad Z_\omega]$ ) всеобщая погрешность псевдорешения по  $\lambda$ -му уравнению системы

$$(П.18)$$

$$\delta_\lambda[\omega \in \Omega \quad Z_\omega] = \|L_\lambda[\varphi \in \Phi \quad f_\varphi[\omega \in \Omega \quad Z_\omega]]\| / \sup \|L_\lambda[\varphi \in \Phi \quad f'_\varphi[\omega \in \Omega \quad Z_\omega]]\|_\lambda,$$

причём точная верхняя грань  $\sup$  в знаменателе этой дроби берётся по множеству всех таких функций  $f'_\varphi[\omega \in \Omega \quad Z_\omega]$ , что

$$\|f'_\varphi[\omega \in \Omega \quad Z_\omega]\|_\varphi = \|f_\varphi[\omega \in \Omega \quad Z_\omega]\|_\varphi,$$

по всевозможным выражениям при различных изометрических (сохраняющих соответствующие нормы) преобразованиях даже одинаковых (кратных) элементов исходного выражения, в данном случае  $\lambda$ -го уравнения системы функциональных уравнений (2.1).

Естественность формулы (2.4) становится особенно явной при некоторой практически важной конкретизации.

Если подынтегральная дробь постоянна в области определения  $Z_\lambda$  (для чего достаточна алгебраичность системы функциональных уравнений (2.1)), то в формуле (2.4) опускаются

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 522/556

усреднение интегрированием и предельный переход, а ввиду независимости  $\delta_\lambda$  от  $g(\lambda)$  принимается

$$g(\lambda) = 1,$$

– и тот же результат даёт применённая в решённых задачах упрощённая оценочная дробь (2.4').

Если мера  $V_{Z(\lambda)}$  области определения  $Z_\lambda$  конечна, то принятие

$$Z'_\lambda = Z_\lambda$$

снимает предельный переход в формуле (2.4).

Для числовых функций нормы заменяются модулями.

В частности, для векторного (в линейном нормированном пространстве) и числового равенств

$$\sum_{\omega \in \Omega} z_\omega = 0;$$

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha = 0$$

всеобщие погрешности по формулам (П.18) и (2.4) совпадают с оценочными дробями (2.4') и вполне естественны:

$$\delta_z = \|\sum_{\omega \in \Omega} z_\omega\|_z / \sum_{\omega \in \Omega} \|z_\omega\|_z;$$

$$\delta_a = |\sum_{\alpha \in A} a_\alpha| / \sum_{\alpha \in A} |a_\alpha|.$$

Для системы  $\Lambda$  линейных алгебраических уравнений

$$(П.19)$$

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j = b_i$$

$$(i \in \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\})$$

с не обязательно квадратной матрицей всеобщие погрешности псевдорешения

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

по  $i$ -му уравнению и системе функциональных уравнений (2.1) равны

$$(П.20)$$

$$\delta_i = |\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j - b_i| / (\sum_{j=1}^m |a_{ij}| |x_j| + |b_i|) \quad (i \in \{1, 2, \dots, n\});$$

$$(П.21)$$

$$\delta_\Lambda = (n^{-1} \sum_{i=1}^n \delta_i^n)^{1/n}.$$

В указанных случаях ввиду постоянства всех функций  $f_\phi$  излишне наряду с предельным переходом и усреднение интегрированием, так что средняя всеобщая погрешность  $g^{(\lambda)} \delta_\lambda$  совпадает с упрощённой оценочной дробью  $\delta_\lambda$ .

Вообще же

$$\delta_\lambda \leq g^{(\lambda)} \delta_\lambda$$

вследствие взятия в знаменателе (2.4') точной верхней грани выражения с изометрически преобразуемыми элементами для всей области определения, а не отдельной её точки.

Применительно к задаче прочности оценочная дробь (2.4') вполне оправдана, поскольку погрешности в определении напряжений, малых сравнительно с соответствующими предельными напряжениями, несущественны.

Прочность же определяется именно наибольшим равносильным (эквивалентным) напряжением в наиболее опасной точке тела (отсюда выбор знаменателя дроби), а при неравномерности равносильного (эквивалентного) напряжения в теле его прочность выше, чем если бы равносильное (эквивалентное) напряжение повсеместно равнялось своему значению в наиболее опасной точке тела, за счёт поддерживающего влияния менее напряжённых частей тела (отсюда выбор числителя оценочной дроби).

Простая, очевидная и естественная оценка всеобщей погрешности  $g^{(\lambda)} \delta_\lambda$  сверху

$$(П.22)$$

$$\delta_{\lambda u} = \sup_{Z(\lambda)} \{ \|L_\lambda[f_\phi \in \Phi f_{[\omega \in \Omega Z_\omega]}]\|_\lambda / \sup \|L_\lambda[f_\phi \in \Phi f'_{[\omega \in \Omega Z_\omega]}]\|_\lambda \},$$

причём внутренняя точная верхняя грань  $\sup$  в знаменателе дроби берётся по множеству всех таких функций  $f'_{[\omega \in \Omega Z_\omega]}$ , что

$$\|f'_{[\omega \in \Omega Z_\omega]}\|_\phi = \|f_{[\omega \in \Omega Z_\omega]}\|_\phi,$$

при различных изометрических преобразованиях даже одинаковых элементов  $\lambda$ -го равенства непосредственно после подстановки псевдорешения в  $\lambda$ -е уравнение системы

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 523/556

функциональных уравнений (2.1), а внешняя точная верхняя грань  $\sup$  перед дробью – по области определения

$$Z(\lambda) = Z_\lambda$$

$\lambda$ -го уравнения системы функциональных уравнений (2.1), так что всегда

$$0 \leq \underline{\delta}_\lambda \leq {}^{g(\lambda)}\delta_\lambda \leq \delta_{\lambda u} \leq 1.$$

Кроме того, с учётом степенного усреднения (2.3) для целой системы функциональных уравнений (2.1)

$$0 \leq \inf_{\lambda \in \Lambda} {}^{g(\lambda)}\delta_\lambda \leq \delta_\Lambda \leq \sup_{\lambda \in \Lambda} {}^{g(\lambda)}\delta_\lambda \leq 1.$$

Соотношения между указанными всеобщими погрешностями применительно к достаточно типичной задаче о свободном опирании цилиндрического тела

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq a, \\ 0 &\leq z \leq h \end{aligned}$$

под равномерным односторонним давлением  $p$

$$(\sigma_z(r, h) = -p)$$

таковы.

Система уравнений равновесия и неразрывности разбивается на одну (разрешающую) подсистему трёх уравнений с нулевыми всеобщими погрешностями

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$$

и другую (оценочную) подсистему из одного уравнения, дающего при подстановке найденного аналитического псевдорешения (парциального решения)

$$\begin{aligned} L_\lambda[f_{\varphi \in \Phi} f_\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]] = L_4[\sigma_r(r, z); \sigma_t(r, z); \sigma_z(r, z); \tau_{rz}(r, z)] = L_4'(r, z) = \\ 3p(r/h^2)(1 - 2z/h)[\mu(3 + \mu) - 2(1 + \mu)] = 0 \quad (0 \leq r \leq a, 0 \leq z \leq h). \end{aligned}$$

Местная (в точке  $(r, z)$ ) всеобщая погрешность (П.18) последнего равенства

$$\begin{aligned} \delta_\lambda[f_{\varphi \in \Phi} f_\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]] = \delta_4(r, z) = \\ |3p(r/h^2)(1 - 2z/h)[\mu(3 + \mu) - 2(1 + \mu)] / \{3p(r/h^2)(1 + 2z/h)[\mu(3 + \mu) + 2(1 + \mu)]\} = \\ (1 - \mu)(2 + \mu)(2 + 5\mu + \mu^2)^{-1} |1 - 2z/h| / (1 + 2z/h) \end{aligned}$$

на деле зависит лишь от  $z$ .

Средняя арифметическая ( $g_\lambda = 1$ ) по объёму тела всеобщая погрешность решения по оценочному уравнению

$${}^{g(\lambda)}\delta_\lambda = {}^1\delta_4 = (\pi a^2 h)^{-1} \int_0^h \int_0^a \delta_4(r, z) 2\pi r dr dz = (1 - \mu)(2 + \mu)(2 + 5\mu + \mu^2)^{-1} \ln(4/3)$$

находится между оценочной дробью и верхней оценкой

$$\underline{\delta}_4 = (1/12)(1 - \mu)(2 + \mu)(2 + 5\mu + \mu^2)^{-1} < {}^1\delta_4 < (1/3)(1 - \mu)(2 + \mu)(2 + 5\mu + \mu^2)^{-1} = \delta_{4u}$$

и вместе с этими границами не зависит от  $h/a$ , что вновь позволяет пользоваться известными формулами для радиального и окружного напряжений, проверенными для круглой пластины при такой же схеме нагружения.

Средняя всеобщая погрешность того же псевдорешения по системе в целом

$$\delta_\Lambda = [(\delta_1^4 + \delta_2^4 + \delta_3^4 + {}^1\delta_4^4)/4]^{1/4} = 2^{-1/2} {}^1\delta_4 = 2^{-1/2} (1 - \mu)(2 + \mu)(2 + 5\mu + \mu^2)^{-1} \ln(4/3)$$

для стального тела ( $\mu = 0.3$ ) составляет 9.12 %, что подтверждает достаточную для инженерных приложений универсальную по  $h/a$  точность полученного простого аналитического псевдорешения.

Аналогичные выводы и формулы с теми же множителями перед зависящими от  $\mu$  оценочными дробями относятся и к другим рассмотренным задачам.

В данной докторской диссертации было показано, что полная линейно-комбинационная методология сводит краевую упругую задачу к переопределённой системе ( $n > m$ ) линейных алгебраических уравнений, типичной и в задачах приближения экспериментальных данных.

Среди известных методов [4, 84, 108, 149, 207–209, 235] для решения подобных систем можно применить, видимо, лишь метод наименьших квадратов, минимизирующий

$$(П.23)$$

$${}^2L_f = n_\Lambda^{-1} \sum_{\lambda \in \Lambda} \{ \lim_{Z(\lambda) \rightarrow Z(\lambda)} V_{Z(\lambda)}^{-1} \int_{Z(\lambda)} \|L_\lambda[f_{\varphi \in \Phi} f_\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]]\|_\lambda^2 dV_{Z(\lambda)},$$

где, как и выше,

$n_\Lambda$  – число уравнений системы функциональных уравнений (2.1).

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 524/556

Но результат метода наименьших квадратов не инвариантен относительно сохраняющего равносильность (эквивалентность) системы функциональных уравнений (2.1) сложного её умножения (независимых умножений её уравнений на различные ненулевые множители), а инвариантен лишь при простом умножении её (всех её уравнений на общий ненулевой множитель; ввиду чётности второй степени допускается дополнительное умножение любых некоторых уравнений на минус единицу). Принятая терминология вполне аналогична таковой применительно к сложному и простому нагружениям тела [140].

Метод наименьших квадратов в качественном аспекте лишён физического смысла при различных размерностях уравнений системы, а в количественном аспекте ведёт к формальному сложению разномасштабных величин при фактическом игнорировании меньших по модулю величин подобно приложению четвертой теории прочности к материалам, которые не являются изотропными одинаково сопротивляющимися растяжению и сжатию.

Кроме того, метод наименьших квадратов не позволяет улучшить свой результат и оценить погрешность последнего.

Для исправления этих недостатков с учётом теории подобия и теории размерностей, а также идеи приведения критериев предельных состояний предложен двухпараметрический метод наименьших g-нормированных G-х степеней

$$(g, \geq 0, G > 0),$$

взамен (П.23) минимизирующий

$$(П.24)$$

$${}^G\delta_g((k)f, (k+1)f) =$$

$$n_\Lambda^{-1} \sum_{\lambda \in \Lambda} \{ \lim_{Z'(\lambda) \rightarrow Z(\lambda)} V_{Z'(\lambda)}^{-1} \int_{Z'(\lambda)} \{ \|L_\lambda[\varphi \in \Phi] f_{\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]}^{(k+1)}\| \|L_\lambda\|^{g-G} / \sup_{Z'(\lambda)} \|L_\lambda[\varphi \in \Phi] f'_{\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]}\| \lambda^g \} dV_{Z'(\lambda)}$$

для выражения искомого

$$(k+1)\text{-го } (k = 0, 1, \dots)$$

приближения

$${}^{(k+1)}f_{\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]}$$

к искомой функции  $f_{\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]}$  через известное k-е приближение

$${}^{(k)}f_{\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]}$$

к искомой функции  $f_{\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]}$ ,

где

$[L_\lambda]$  – физическая размерность значения  $L_\lambda[\varphi \in \Phi] f_{\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]}$ ;

точная верхняя грань  $\sup_{Z'(\lambda)}$  берётся по множеству всех таких функций  $f'_{\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]}$ , что

$$\|f'_{\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]}\|_\varphi = \|{}^{(k)}f_{\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]}\|_\varphi,$$

с приближением области

$$Z(\lambda) = Z_\lambda$$

её подмножествами

$$Z'(\lambda) = Z'_\lambda$$

конечной меры (объёма)  $V_{Z'(\lambda)}$ .

За исходное приближение можно взять псевдорешения нулевого

$$f_{\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]} = 0 \quad (\varphi \in \Phi),$$

или единичное

$$f_{\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]} = [f_\varphi] \quad (\varphi \in \Phi),$$

или даваемое методом наименьших ненормированных G-х степеней, в частности квадратов, отличающимся от метода наименьших квадратов лишь исправлением размерностей.

Метод наименьших g-нормированных квадратов ( $G = 2, g$  – любое положительное число) столь же прост в осуществлении, сколь и метод наименьших квадратов, и позволяет воспользоваться всеми его результатами, если  $\lambda$ -е уравнение системы (2.1) перед  $(k+1)$ -м шагом итерации нормировать делением на

$$[L_\lambda]^{(G-g)/2} \sup_{Z'(\lambda)} \|L_\lambda[\varphi \in \Phi] f'_{\varphi[\omega \in \Omega Z_\omega]}\| \lambda^{g/2}.$$

Критериями завершения итерационного процесса служат достаточная для принятой точности близость между собой последовательных приближений псевдорешения, соответствующих

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 525/556

нормированных систем, а также всеобщих погрешностей этих приближений по каждому из уравнений и заданной системе функциональных уравнений (2.1) в целом.

Лишь метод  $g$ -нормированных  $g$ -х степеней ( $G = g$ ) даёт результат, инвариантный при сложных умножениях решаемой системы, и может быть использован для обобщённой по сравнению с (2.4) оценки одним числом всеобщей погрешности  ${}^g\delta_\Lambda(f)$  псевдорешения

$$[\varphi \in \Phi \quad f'_\varphi[\omega \in \Omega \quad Z_\omega]]$$

системы функциональных уравнений (2.1) в виде

(П.25)

$${}^g\delta_\Lambda(f) = {}^g\delta_g^{1/g}(f, f) = (n_\Lambda^{-1} \sum_{\lambda \in \Lambda} {}^g(\lambda)\delta_\lambda^g)^{1/g}.$$

Целью является отыскание наилучшего псевдорешения

$$[\varphi \in \Phi \quad f'_\varphi[\omega \in \Omega \quad Z_\omega]]$$

(если оно существует в избранной совокупности классов искомых функций), для которого всеобщая погрешность  ${}^g\delta_\Lambda(f')$  равна точной нижней грани таковых для псевдорешений в этой совокупности

(П.26)

$${}^g\delta_\Lambda(f) = \inf {}^g\delta_\Lambda(f),$$

или хотя бы непременно существующих приближений наилучшего псевдорешения, для которых  ${}^g\delta_\Lambda(kf)$  сколь угодно мало превосходит величину (П.26).

Ясно, что её значение

$$0 \leq {}^g\delta_\Lambda(f) \leq 1$$

является мерой несовместности (противоречивости) системы функциональных уравнений (2.1) и может быть названо коэффициентом её рассогласования (некорреляции).

Если система функциональных уравнений (2.1) совместна независимо от её определённости, то коэффициент её рассогласования равен нулю и наилучшим псевдорешением является обычное (точное) решение.

Обратное верно при полноте каждого из классов избранной совокупности для искомых функций.

В частном случае системы уравнений (П.19) искомые функции  $x_j$  – постоянные, всеобщая погрешность  $i$ -го уравнения (П.20) не зависит от  $g$ , а (П.21) для системы уравнений (П.19) зависит от  $g$ .

Наилучшее псевдорешение существует и при чётном  $g$  удовлетворяет системе  $m$  уравнений  $(g - 1)$ -й степени, являющихся условиями аннулирования частных производных суммы в (П.21) по каждому из неизвестных  $x_j$ .

Ясно, что при  $g \neq 2$  даже в этом простом случае осуществление метода наименьших  $g$ -нормированных  $g$ -х степеней чрезвычайно затруднительно.

Если  $g$  нечётно, то поиск наилучшего псевдорешения требует оперирования с модулями, а при не натуральном  $g$  – с радикалами или даже иррациональными степенями.

Значит, при  $g \neq 2$  метод наименьших  $g$ -нормированных  $g$ -х степеней полезен прежде всего как дающий критерий качества произвольного псевдорешения и его приближения к наилучшему псевдорешению.

Если по принципу допустимой простоты принять  $g = 2$ , то этот метод наименьших бинормированных квадратов единственно удобен именно для поиска наилучшего псевдорешения с использованием формул, даваемых методом наименьших квадратов.

Однако опыт отыскания наилучшего псевдорешения переопределённой системы уравнений (П.19) показывает очень сильную его зависимость от выбора критерия оптимизации, в данном случае от положительного числа  $g$  (нулевое  $g$  делает оценку инвариантной и нечувствительной, а отрицательное  $g$  – парадоксальной для точного решения).

Если зафиксировать  $g$ , а  $n_\Lambda$  неограниченно увеличивать, то критерий (П.25) может привести к фактическому игнорированию части уравнений решаемой системы, что едва ли оправдано.

Поэтому не вполне удовлетворителен выбор какого бы то ни было универсального числа  $g$ , и оно должно зависеть от  $n_\Lambda$  так, что  $g(n_\Lambda)$  стремится к бесконечности вместе с  $n_\Lambda$ .

Например, можно принять

$$g(n_\Lambda) = n_\Lambda.$$

Если система функциональных уравнений (2.1) конечна, то формулы (П.24) и (П.25) при этом конкретизируются.

Если система функциональных уравнений (2.1) бесконечна, то критерий (2.3) выбора наилучшего псевдорешения вырождается в

$$(П.27) \\ \delta_\Lambda = \sup_{\lambda \in \Lambda} g^{(\lambda)} \delta_\lambda.$$

Здесь  $\sup$  – обобщённая точная верхняя грань упорядоченного множества, совпадающая с обычной точной верхней гранью для каждого множества в отдельности, но вводящая отношение строгого порядка между несовпадающими количественными множествами с учётом количеств, в частности кратностей, одинаковых элементов.

Количественные множества с произвольными (не обязательно безразмерными числовыми) количествами элементов именно принципиально дополняют, уточняют, исправляют и обобщают лежащие в основе современной классической математики множества Кантора только с единичными количествами наличных элементов, поэтому принципиально не способные выразить многие насущные совокупности.

Именно, отыскивается минимальное по сумме количеств всех элементов количественное подмножество (автоматически состоящее из наибольших элементов) пересечения сопоставляемых количественных множеств такое, что обычные точные верхние грани разностей каждого из сопоставляемых множеств и этого подмножества не совпадают и так же упорядочивают сопоставляемые количественные множества.

В частности, если обычные точные верхние грани их различны, то такое количественное подмножество минимальной мощности пусто и обобщение обычной точной верхней грани действительно достигается.

Такой критерий (П.27) можно использовать и для конечных систем (взамен (П.25) при

$$g(n_\Lambda) = n_\Lambda)$$

как более простой и менее точный.

Это позволяет раскрыть и цель последних обобщений.

Из двух псевдорешений системы функциональных уравнений (2.1) более точным считается то, для которого наибольшая из всеобщих погрешностей по отдельным уравнениям системы меньше (обычный принцип минимакса).

Если же эти максимумы (быть может, относящиеся к разным уравнениям системы для различных псевдорешений) совпадают, то критерий (П.27), но с обычной точной верхней гранью, не позволил бы провести различие между такими псевдорешениями и фактически игнорировал бы при этом все остальные уравнения в тех пределах, в которых максимальны всеобщие погрешности тех же уравнений.

Но интуитивно и по критерию (П.25) ясно, что тогда выбор более точного псевдорешения должен проводиться по остальным уравнениям, причём всеобщие погрешности разных уравнений системы при одном псевдорешении могут и совпадать, для чего и требуется обобщить понятие множества понятием количественного множества.

Для каждого из двух псевдорешений составляется своё количественное множество всеобщих погрешностей по уравнениям решаемой системы функциональных уравнений (2.1) и перенумеровывается в порядке невозрастания.

Далее отыскивается наименьший номер такой, что соответствующие элементы двух количественных множеств различны, и более точным считается то псевдорешение, для которого соответствующая этому номеру всеобщая погрешность меньше.

Значит, критерий (П.27) не позволяет выбрать более точное из двух различных псевдорешений лишь в том естественном и практически маловероятном случае, когда для них количественные множества всеобщих погрешностей по уравнениям системы полностью совпадают (не даст различия и даже совокупность критериев (П.25) при всех  $g > 0$ ).

Если различие между такими псевдорешениями при необходимости и можно провести, то с исправлением постановки задачи (например с учётом важности и точности отдельных уравнений системы).

Для прямого поиска наилучшего псевдорешения системы (2.1) предложен естественный метод выравнивания всеобщих погрешностей уравнений системы также с возможностью итерационного процесса.

В качестве исходного приближения можно взять то же, что и выше, или, например, полученное методом наименьших бинормированных квадратов.

Каждое  $\lambda$ -е уравнение системы функциональных уравнений (2.1) для выражения  $(k + 1)$ -го приближения через  $k$ -е приближение преобразуется при очевидном сохранении равносильности (эквивалентности) к такому виду:

$$\frac{\{L_{\lambda}[\varphi \in \Phi] f_{\varphi}[\omega \in \Omega] Z_{\omega}\}}{\sup_{\lambda} \{L_{\lambda}[\varphi \in \Phi] f'_{\varphi}[\omega \in \Omega] Z_{\omega}\}} \{ \{L_{\lambda}[\varphi \in \Phi] f_{\varphi}[\omega \in \Omega] Z_{\omega}\} / L_{\lambda}[\varphi \in \Phi] f_{\varphi}[\omega \in \Omega] Z_{\omega} \} = 0$$

$$(\lambda \in \Lambda),$$

причём вторая дробь (во второй фигурной скобке) вовсе не выписывается в случае аннулирования её знаменателя, а в знаменателе первой дроби (в первой фигурной скобке) стоит точная верхняя грань числителя второй дроби при различных изометрических преобразованиях даже идентичных кратных элементов.

Смысл такого преобразования уравнения – в том, что при

$${}_{(k+1)}f_{\varphi}[\omega \in \Omega] Z_{\omega} = {}_{(k)}f_{\varphi}[\omega \in \Omega] Z_{\omega} \quad (\varphi \in \Phi)$$

левая часть уравнения (П.28) равна именно всеобщей погрешности  ${}_{(k)}\delta_{\lambda}$   $k$ -го приближения по  $\lambda$ -му исходному уравнению.

Далее рассматривается количественное множество (возможно, кратных) индексированных чисел

$${}_{(k)}\delta_{\lambda} \in [0, 1]$$

и составляется система выравнивающих уравнений путём попарных приравниваний между собой левых частей уравнений (П.28) при различных  $\lambda$ .

На первом этапе составления системы выравнивающих уравнений для приравнивания выбираются  $\lambda'$ -е и  $\lambda''$ -е уравнения с возможно большим размахом всеобщих погрешностей известного приближения

$$|{}_{(k)}\delta_{\lambda'} - {}_{(k)}\delta_{\lambda''}|,$$

затем другие два уравнения по тому же принципу и т. д. до исчерпания возможностей приравнивания.

И на каждом последующем этапе составления системы выравнивающих уравнений вновь участвуют не более чем по разу все уравнения системы (2.1) в форме (П.28), но выравнивающее уравнение не составляется, если оно является следствием ранее составленных.

Процесс составления системы выравнивающих уравнений завершается при достижении её определённости независимо от завершённости текущего этапа (так, для системы (П.19)  $m$  уравнений).

Важно, что выравнивающие уравнения по сложности соответствуют исходным уравнениям (в частности линейны для системы (П.19)).

Решение системы выравнивающих уравнений выражает  $(k + 1)$ -е приближение наилучшего псевдорешения исходной системы функциональных уравнений (2.1) через известное  $k$ -е приближение.

Если для этих приближений

$${}_{(k+1)}\delta_{\Lambda} \leq {}_{(k)}\delta_{\Lambda},$$

то в дальнейшем итерационном процессе эта система выравнивающих уравнений остаётся квазистабильной, то есть для получения нового приближения попарно приравниваются между собой левые части тех же исходных уравнений исходной системы (2.1), преобразованных к виду (П.28) для последнего полученного приближения. Если же

$${}_{(k+1)}\delta_{\Lambda} > {}_{(k)}\delta_{\Lambda},$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 528/556

то происходит возврат к  $k'$ -му приближению, для него составляется новое количественное множество

$$\{(k)\delta_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$$

и соответственно ему пересоставляется система выравнивающих уравнений.

В результате числовая последовательность

$${}_{(k)}\delta_\Lambda (k = 0, 1, 2, \dots)$$

не возрастает и ограничена снизу нулём, так что существует соответствующий наилучшему псевдорешению системы функциональных уравнений (2.1) и осуществляемый оптимизирующей последовательностью его приближений предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} {}_{(k)}\delta_\Lambda = {}^0\delta_\Lambda \geq 0,$$

который и является коэффициентом рассогласования (некорреляции) системы функциональных уравнений (2.1).

Критерии завершения итерационного процесса:

стабилизация выравнивающих уравнений;

стабилизация последовательных приближений к наилучшему псевдорешению;

стабилизация всеобщих погрешностей по каждому из исходных функциональных уравнений и их системе (2.1).

Снижение коэффициента  ${}^0\delta_\Lambda$  рассогласования (некорреляции) системы функциональных уравнений (2.1) возможно лишь при исправлении постановки задачи с выбором как системы уравнений, так и совокупности классов искоемых функций.

Например, в задаче о линейном приближении

$$y = ax + b$$

четырёх точек

$$(x, y) = (-1, -1);$$

$$(x, y) = (1, 1);$$

$$(x, y) = (8, 10);$$

$$(x, y) = (12, 10)$$

метод наименьших квадратов даёт интуитивно и графически неоправданный и не улучшаемый результат

$$y = 0.927x + 0.364;$$

$$\delta_\Lambda = [(0.190^4 + 0.127^4 + 0.125^4 + 0.069^4)/4]^{1/4} = 0.146.$$

Метод наименьших бинормированных квадратов, исходя из априорного начального приближения

$$a_0 = b_0 = 1,$$

уже в первом приближении даёт близкий к естественному

$$y = x$$

результат

$$y = 0.99789x + 0.00817;$$

$$\delta_{\Lambda 1} = [(0.005^4 + 0.003^4 + 0.112^4 + 0.090^4)/4]^{1/4} = 0.0864.$$

Применительно к переопределённой системе уравнений

$$29x_1 + 21x_2 = 50 \text{ (I); } x_1 = 1;$$

$$50x_1 - 17x_2 = 33 \text{ (II); } x_2 = 1;$$

$$x_1 + 2x_2 = 7 \text{ (III); } x_1 = 3;$$

$$2x_1 - 3x_2 = 0 \text{ (IV); } x_2 = 2$$

(справа указаны номера уравнений и точные решения определённой подсистемы первых двух уравнений и определённой подсистемы последних двух уравнений – различные псевдорешения (парциальные решения) системы; конечно, возможны и другие разбиения системы на определённые подсистемы) метод наименьших квадратов даёт результат

$$x_1 = 1.00234;$$

$$x_2 = 1.00750;$$

$${}^2\delta_{\Lambda 0} = [(0.002^4 + 0.0001^4 + 0.398^4 + 0.202^4)/4]^{1/4} = 0.286,$$



не улучшаемый и фактически игнорирующий вторую подсистему с относительно меньшими коэффициентами.

Метод наименьших бинормированных квадратов, вновь исходя из начального единичного приближения

$$x_{10} = 1;$$

$$x_{20} = 1,$$

уже в первом приближении учитывает вторую подсистему, давая псевдорешение

$$x_{11} = 1.263;$$

$$x_{21} = 1.051;$$

$${}^2\delta_{\Lambda 1} = [(0.080^4 + 0.108^4 + 0.351^4 + 0.111^4)/4]^{1/4} = 0.250$$

с очевидной тенденцией сближения всеобщих погрешностей (П.20) по уравнениям системы. Исходя из этого приближения, метод выравнивания всеобщих погрешностей уравнений системы приводит к квазистабильной ( $k = 1, 2, \dots$ ) определённой системе двух линейных выравнивающих уравнений (для (I) и (III), (II) и (IV) исходных уравнений соответственно; наличие двух неизвестных позволяет выравнивать лишь две пары всеобщих погрешностей по уравнениям)

$$\begin{aligned} & [(29_{(k+1)}x_1 + 21_{(k+1)}x_2 - 50)/(29_{(k)}x_1 + 21_{(k)}x_2 + 50)][[29_{(k)}x_1 + 21_{(k)}x_2 - 50]/(29_{(k)}x_1 + 21_{(k)}x_2 - 50)] = \\ & [(_{(k+1)}x_1 + 2_{(k+1)}x_2 - 7)/(|_{(k)}x_1| + 2|_{(k)}x_2| + 7)][[_{(k)}x_1 + 2_{(k)}x_2 - 7]/(_{(k)}x_1 + 2_{(k)}x_2 - 7)]; \\ & [(50_{(k+1)}x_1 - 17_{(k+1)}x_2 - 33)/(50_{(k)}x_1 + 17_{(k)}x_2 + 33)][[50_{(k)}x_1 - 17_{(k)}x_2 - 33]/(50_{(k)}x_1 - 17_{(k)}x_2 - 33)] = \\ & [(2_{(k+1)}x_1 - 3_{(k+1)}x_2)/(2_{(k)}x_1 + 3_{(k)}x_2)][[2_{(k)}x_1 - 3_{(k)}x_2]/(2_{(k)}x_1 - 3_{(k)}x_2)]. \end{aligned}$$

При этом вторая дробь в любой части каждого из уравнений в случае аннулирования знаменателя просто опускается, а иначе выражает его знак.

Итерационный процесс с учётом (П.20) и (П.21) при

$$g = n_{\Lambda} = 4$$

дал

$$x_{12} = 1.5974;$$

$$x_{22} = 1.4374;$$

$${}^2\delta_{\Lambda 2} = [(0.2095^4 + 0.1634^4 + 0.2203^4 + 0.1489^4)/4]^{1/4} = 0.1925;$$

$$x_{13} = 1.5993;$$

$$x_{23} = 1.4674;$$

$${}^2\delta_{\Lambda 3} = [(0.2138^4 + 0.1597^4 + 0.2138^4 + 0.1584^4)/4]^{1/4} = 0.19219;$$

$$x_{14} = 1.5981;$$

$$x_{24} = 1.4684;$$

$${}^2\delta_{\Lambda 4} = [(0.2137^4 + 0.1591^4 + 0.2137^4 + 0.1591^4)/4]^{1/4} = 0.19216.$$

Стабильное убывание  ${}^2\delta_{\Lambda k}$  позволило обойтись без пересоставления системы выравнивающих уравнений.

Уже второе приближение приемлемо, а третье приближение весьма точно выражает наилучшее псевдорешение исходной системы, что подтверждается стабилизацией выравнивающих уравнений, последовательностей  $x_{jk}$ ,  $\delta_{ik}$  и  $\delta_{\Lambda k}$  по  $k$ , да и попарным выравниванием

$$\delta_{1k} \text{ и } \delta_{3k}, \delta_{2k} \text{ и } \delta_{4k}.$$

Число

$$\lim_{k \rightarrow \infty} {}^k\delta_{\Lambda} = \lim_{k \rightarrow \infty} {}^2\delta_{\Lambda k} \approx 0.192$$

является коэффициентом рассогласования (некорреляции) заданной системы уравнений как количественной мерой её противоречивости с существенным для практики углублением понятия несовместности (противоречивости) системы функциональных уравнений, в частности алгебраических уравнений.

В данном случае именно оценка всеобщих погрешностей показывает, что уже при четырёх уравнениях в решаемой системе метод наименьших (даже бинормированных) квадратов может оказаться недостаточным, а к полученному результату привел бы метод наименьших четырежды нормированных четвёртых степеней (биквадратов), однако его осуществление потребовало бы решения системы четырёх кубических уравнений.

## П.5. Аддитивный и мультипликативный методы определения окрестностей и запасов множества в гильбертовом пространстве

Пусть  $Z_{(\alpha)}$ ,  $[Z_{(\alpha)}]$  – множество и его расширение как его допускаемое множество в гильбертовом пространстве  $L_{(\alpha)}$  с нормой  $\| \cdot \|_{(\alpha)}$  и скалярным произведением  $( \cdot , \cdot )_{(\alpha)}$ , причём  $(\alpha)$  означает не обязательную возможность индекса  $\alpha \in A$ .

Аддитивный метод определения окрестностей и запасов множества в гильбертовом пространстве (рисунок П.1) обобщает определение всеобщей погрешности и естественно определяет  $(\delta_{(\alpha)}, z_{0(\alpha)})$ -окрестность  $(\delta_{(\alpha)} \geq 0)$  множества  $Z_{0(\alpha)}$  в пространстве  $L_{(\alpha)}$  относительно элемента  $z_{0(\alpha)} \in L_{(\alpha)}$

$$Z_{(\alpha)}(\delta_{(\alpha)}, z_{0(\alpha)}) = \{z'_{(\alpha)} \in L_{(\alpha)}; \exists z_{(\alpha)} \in Z_{(\alpha)}: \|z'_{(\alpha)} - z_{(\alpha)}\|_{(\alpha)} \leq \delta_{(\alpha)} \|z_{(\alpha)} - z_{0(\alpha)}\|_{(\alpha)}\}$$

и запас множества  $Z_{(\alpha)}$  по множеству  $[Z_{(\alpha)}]$  относительно  $z_{0(\alpha)}$

$$n_{\alpha(\alpha)} = \sup \{n_{(\alpha)} \geq 1: Z_{(\alpha)}(n_{(\alpha)} - 1, z_{0(\alpha)}) \subseteq [Z_{(\alpha)}]\}.$$

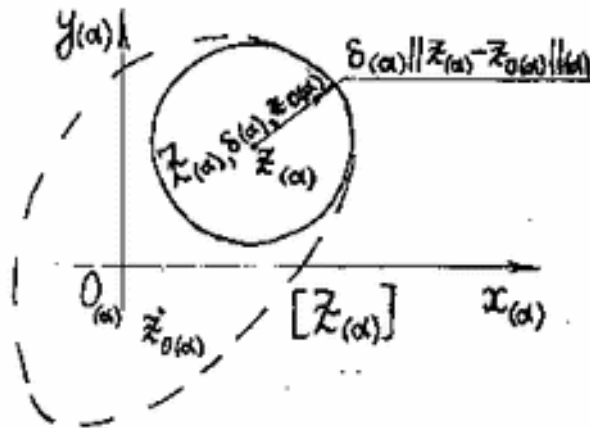


Рисунок П.1. Аддитивный метод определения окрестностей и запасов множества в гильбертовом пространстве.

Мультипликативный метод определения окрестностей и запасов множества в гильбертовом пространстве (рисунок П.2) обобщает определение коэффициента запаса и естественно определяет  $\{n_{(\alpha)} \exp[i\varphi_{(\alpha)}], z_{0(\alpha)}\}$ -окрестность  $(n_{(\alpha)} \geq 1, 0 \leq \varphi_{(\alpha)} \leq \pi)$  множества  $Z_{0(\alpha)}$  в пространстве  $L_{(\alpha)}$  относительно элемента  $z_{0(\alpha)} \in L_{(\alpha)}$

$$Z_{(\alpha)}\{n_{(\alpha)} \exp[i\varphi_{(\alpha)}], z_{0(\alpha)}\} = \{z'_{(\alpha)} \in L_{(\alpha)}; \exists z_{(\alpha)} \in Z_{(\alpha)}: n_{(\alpha)}^{-1} \|z_{(\alpha)} - z_{0(\alpha)}\|_{(\alpha)} \leq \|z'_{(\alpha)} - z_{(\alpha)}\|_{(\alpha)} \leq n_{(\alpha)} \|z_{(\alpha)} - z_{0(\alpha)}\|_{(\alpha)} \wedge \arccos[(z'_{(\alpha)} - z_{0(\alpha)}, z_{(\alpha)} - z_{0(\alpha)})_{(\alpha)} / (\|z'_{(\alpha)} - z_{0(\alpha)}\|_{(\alpha)} \|z_{(\alpha)} - z_{0(\alpha)}\|_{(\alpha)})] \leq \varphi_{(\alpha)}\}$$

и множество запасов множества  $Z_{(\alpha)}$  по множеству  $[Z_{(\alpha)}]$  относительно элемента  $z_{0(\alpha)}$  пространства  $L_{(\alpha)}$

$$\{n_{(\alpha)} \exp[i\varphi_{(\alpha)}]; \forall n_{(\alpha)} \geq 1: \varphi_{(\alpha)} = \sup \varphi'_{(\alpha)} \in [0, \pi]: Z_{(\alpha)}[n_{(\alpha)} \exp[i\varphi'_{(\alpha)}], z_{0(\alpha)}] \subseteq [Z_{(\alpha)}]\}.$$

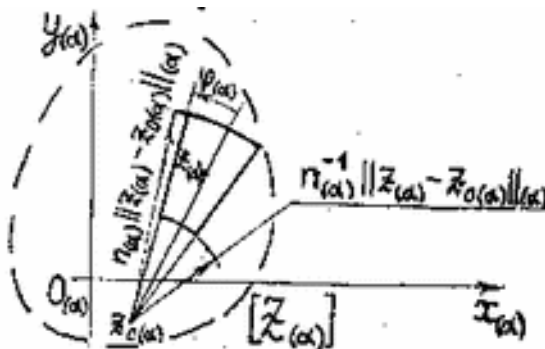


Рисунок П.2. Мультипликативный метод определения окрестностей и запасов множества в гильбертовом пространстве.

Пусть множество

$$Z = f[\alpha \in A Z_{(\alpha)}],$$

причём  $f$  – функция совокупности множеств (рисунок П.3).

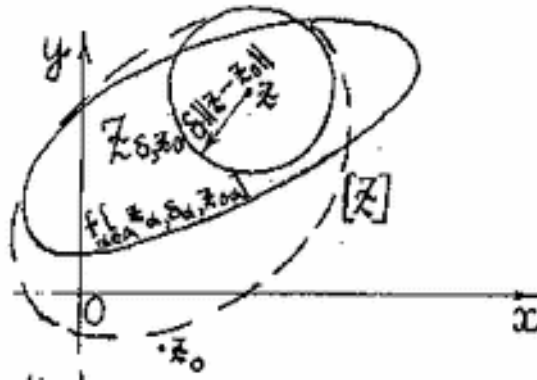


Рисунок П.3. Определение окрестностей и запасов множества значений функции  $f$  совокупности множеств в гильбертовом пространстве.

Если для допускаемого множества  $[Z]$

$$f[\alpha \in A [Z_\alpha]] \subseteq [Z],$$

то совокупность расширений

$$[\alpha \in A [Z_\alpha]]$$

является допускаемой для совокупности аргументов функции  $f$ .

В противоречащем случае требуются такие сужения  $Z_\alpha$  множеств  $[Z_\alpha]$ , что

$$(П.29)$$

$$Z = f[\alpha \in A Z_\alpha] \subseteq [Z].$$

Эти сужения характеризуются индивидуальными их запасами по их расширениям относительно некоторых элементов как начал отсчёта в соответствующих гильбертовых пространствах.

Эти запасы могут быть выражены через единый для них, входящий или не входящий в их множество, определяющийся по условию (П.29) при аддитивном и мультипликативном методах, в общем случае не совпадающий с запасом множества  $Z$  по допускаемому множеству  $[Z]$  и дополняющий этот запас.

Такое несовпадение может быть весьма существенным, как было показано в важном частном случае, когда в задаче прочности при сложном нагружении

$$z = f[\alpha \in A Z_\alpha]$$

– равносильное (эквивалентное) напряжение в опасной точке тела как функция совокупности исходных параметров задачи.

А именно, могут иметь место кратно уменьшенные подлинные запасы прочности при сложном нагружении по общей методологии всеобщего запаса, мультипликативной и аддитивной методологиям общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных.

Следовательно, по существу аддитивные окрестности точки (для неё – ввиду центральной симметрии) и множества в математике и мультипликативный коэффициент запаса в задаче прочности математически строго проанализированы и для любого математического моделирования обобщены теорией и общими аддитивным и мультипликативным методами определения окрестности и запаса произвольного множества относительно допускаемого множества в гильбертовом пространстве в любой математической задаче с ограничениями, в частности общего запаса как функции индивидуальных запасов независимых переменных.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 532/556

## **П.6. Открытие и теория явления и сущности неустойчивости знака с нарушением однозначности степени с отрицательным основанием и дробным показателем с нечётными числителем и знаменателем**

Открыты явление и сущность неустойчивости знака с нарушением однозначности степени с отрицательным основанием и дробным показателем с нечётными числителем и знаменателем.

К этому открытию привели изобретение, анализ и синтез следующего контрпримера (возведение в степень и извлечение корня первичны, умножение и деление вторичны):

$$(-1)^3 = -1 \neq 1 = [(-1)^6]^{1/2} = (-1)^{6/2}.$$

Всё началось с аналитического исследования правильности определения действия возведения в степень на примере анализа общеизвестных очевидных равенств по определениям возведения в степень и умножения

$$(-1)^3 = (-1)(-1)(-1) = -1.$$

Исследованию подлежат всевозможные равносильные (эквивалентные) представления всех элементов исследуемого предмета, в данном случае степени  $(-1)^3$ .

Всевозможные равносильные (эквивалентные) представления основания степени минус единицы, находящейся в скобках, обеспечивающих первенство выполнения действий в скобках по сравнению с возведением в степень, очевидным образом не способны вести к каким бы то ни было изменениям итога.

Зато показатель 3 находится вне скобок и допускает равносильные (эквивалентные) представления без скобок.

Аддитивные равносильные (эквивалентные) естественные представления в виде алгебраической суммы целых чисел очевидным образом не способны вести к каким бы то ни было изменениям итога.

Но естественны и мультипликативные представления равносильным (эквивалентным) умножением и числителя, и знаменателя равной показателю 3 дроби  $3/1$  на одно и то же произвольное положительное целое число.

Умножение на единицу не меняет ничего.

Умножение на 2 и ведёт к указанному контрпримеру. В самом деле, возведение в степень и извлечение корня являются приоритетными действиями по сравнению с делением. Поэтому приходится сначала возвести минус единицу в шестую степень и получить плюс единицу, из которой затем извлечь квадратный корень, причём именно арифметический, равный плюс единице.

Этот контрпример допускает такие обосновываемые следующей теоремой обобщения:

- 1) минус единица в основании степени может быть заменена произвольной отрицательной величиной;
- 2) дробь  $3/1$  в показателе степени может быть заменена произвольной дробью с нечётными числителем и знаменателем;
- 3) два как один и тот же дополнительный множитель для числителя и знаменателя дроби можно заменить любым ненулевым чётным числом.

**Теорема.** Равносильное умножение на одно и то же произвольное ненулевое чётное число произвольных нечётных числителя и знаменателя дробного показателя степени произвольной отрицательной величины меняет знак степени с минуса на плюс.

**Доказательство.**

Умножение произвольной отрицательной величины на минус единицу даёт положительную величину  $u$ , которую и удобно обозначить для наглядности её положительного знака, так что произвольная отрицательная величина есть  $(-u)$ .

Для произвольных нечётных числителя  $v$  и знаменателя  $w$  дробного показателя  $v/w$  степени существуют такие единственные целые числа

$$\begin{aligned} s &\in \mathbb{Z}, \\ t &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$(Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}),$$

что

$$\begin{aligned}v &= 2s + 1, \\w &= 2t + 1.\end{aligned}$$

Тогда соответствующая степень

$$(-u)^{v/w} = (-1)^{v/w} u^{v/w} = (-1)^{(2s+1)/(2t+1)} u^{v/w} = (-1) u^{v/w} = -u^{v/w}.$$

Для одного и того же произвольного ненулевого чётного числа  $q$  существует такое единственное ненулевое целое число

$$\begin{aligned}r &\in Z \\(Z &= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}),\end{aligned}$$

что

$$q = 2r.$$

Равносильное умножение на одно и то же произвольное ненулевое чётное число

$$q = 2r$$

произвольных нечётных числителя и знаменателя дробного показателя степени

$$v/w = (2s + 1)/(2t + 1) = qv/(qw) = 2r(2s + 1)/(2r(2t + 1))$$

произвольной отрицательной величины меняет знак степени с минуса на плюс:

$$(-u)^{qv/(qw)} = (-1)^{qv/(qw)} u^{qv/(qw)} = (-1)^{2r(2s+1)/(2r(2t+1))} u^{qv/(qw)} = u^{v/w}.$$

Теорема доказана.

## **П.7. Открытие и теория явления и сущности неустойчивости знака с нарушением однозначности извлечения корня как обратного действия для возведения в степень отрицательного основания с дробным показателем с нечётными числителем и знаменателем**

Контрпример предыдущего раздела исходил из возведения в степень, для которого обратным действием является извлечение корня, давшее начало другому изобретённому контрпримеру. Открыты явление и сущность неустойчивости знака с нарушением однозначности извлечения корня как обратного действия для возведения в степень отрицательного основания с дробным показателем с нечётными числителем и знаменателем.

К этому открытию привели изобретение, анализ и синтез следующего контрпримера (возведение в степень и извлечение корня первичны, умножение и деление вторичны):

$$(-1)^{1/3} = -1 \neq 1 = [(-1)^2]^{1/6} = (-1)^{2/6}.$$

Всё началось с аналитического исследования правильности определения действия извлечения корня как обратного действия для возведения в степень.

Исследованию подлежат всевозможные равносильные (эквивалентные) представления всех элементов исследуемого предмета, в данном случае степени  $(-1)^{1/3}$ .

Всевозможные равносильные (эквивалентные) представления основания степени минус единицы, находящейся в скобках, обеспечивающих первенство выполнения действий в скобках по сравнению с возведением в степень, очевидным образом не способны вести к каким бы то ни было изменениям итога.

Зато показатель  $1/3$  находится вне скобок и допускает равносильные (эквивалентные) представления без скобок.

Естественны мультипликативные представления равносильным (эквивалентным) умножением и числителя, и знаменателя дроби  $1/3$  в показателе на одно и то же произвольное положительное целое число.

Умножение на единицу не меняет ничего.

Умножение на 2 и ведёт к указанному контрпримеру. В самом деле, возведение в степень и извлечение корня являются приоритетными действиями по сравнению с делением. Поэтому приходится сначала возвести минус единицу в квадрат и получить плюс единицу, из которой затем извлечь корень шестой степени, причём именно арифметический, равный плюс единице.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 534/556

Этот контрпример допускает такие обосновываемые предыдущей теоремой обобщения:

- 1) минус единица в основании степени может быть заменена произвольной отрицательной величиной;
- 2) дробь  $1/3$  в показателе степени может быть заменена произвольной дробью с нечётными числителем и знаменателем;
- 3) два как один и тот же дополнительный множитель для числителя и знаменателя дроби можно заменить любым ненулевым чётным числом.

Теорема предыдущего раздела и её доказательство именно дословно имеют место и в данном разделе и не нуждаются в повторении здесь.

## **П.8. Общая теория точечной и окрестной равносильной устойчивости**

Определение. Равносильная устойчивость предмета есть его неизменность при любых равносильных (эквивалентных) заменах любых его частей, в частности элементов.

Теорема. Степень неотрицательной величины равносильно устойчива.

Доказательство.

Степень неотрицательной величины является двухэлементной системой, состоящей из этой неотрицательной величины как основания этой степени и из показателя этой степени, и сохраняется неизменной при любых равносильных (эквивалентных) заменах любого из этих элементов или их обоих, что и требовалось доказать.

Теорема. Степень отрицательной величины с дробным показателем с нечётными числителем и знаменателем не является равносильно устойчивой.

Доказательство.

Степень отрицательной величины является двухэлементной системой, состоящей из этой отрицательной величины как основания этой степени и из дробного показателя этой степени, и по теореме, доказанной ранее в Приложении, сохраняется неизменной при любых равносильных (эквивалентных) заменах этой отрицательной величины как основания этой степени и только при некоторых равносильных (эквивалентных) заменах дробного показателя этой степени, а именно при всех аддитивных равносильных (эквивалентных) заменах дробного показателя этой степени и только при некоторых мультипликативных равносильных (эквивалентных) заменах дробного показателя этой степени умножением его числителя и знаменателя на одно и то же произвольное нечётное число, однако меняет знак с минуса на плюс при некоторых мультипликативных равносильных (эквивалентных) заменах дробного показателя этой степени, а именно при умножении его числителя и знаменателя на одно и то же произвольное ненулевое чётное число, что и требовалось доказать.

Теорема. Степень отрицательной величины с дробным показателем с чётным числителем и нечётным знаменателем равносильно устойчива.

Доказательство.

Степень отрицательной величины является двухэлементной системой, состоящей из этой отрицательной величины как основания этой степени и из дробного показателя этой степени, и по теореме, доказанной ранее в Приложении, сохраняется неизменной при любых равносильных (эквивалентных) заменах этой отрицательной величины как основания этой степени. Ввиду чётности числителя и нечётности знаменателя дробного показателя этой степени при любых равносильных (эквивалентных) заменах дробного показателя этой степени, а именно при умножении его числителя и знаменателя на одно и то же произвольное ненулевое целое число или при делении этих числителя и знаменателя на их произвольный общий делитель, чётность числителя сохраняется и даёт возможность выделить множитель 2, возвести отрицательную величину в квадрат, получить положительную величину с половинным относительно первоначального показателем степени и воспользоваться первой теоремой настоящего раздела, что и требовалось доказать.

Определение. Окрестной называется равносильная устойчивость предмета, принадлежащего его топологическому пространству, со всеми частями (в частности элементами),

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 535/556

принадлежащими их топологическим пространствам, имеющая место в некоторой совокупности существующих соответствующих окрестностей.

Определение. Точечной называется равносильная устойчивость предмета, принадлежащего его топологическому пространству, со всеми частями (в частности элементами), принадлежащими их топологическим пространствам, не являющаяся окрестной.

Следствие. Точечной является равносильная устойчивость предмета, принадлежащего его топологическому пространству, со всеми частями (в частности элементами), принадлежащими их топологическим пространствам, не имеющая места ни в какой совокупности соответствующих окрестностей.

## **П.9. Открытие и теория явления и сущности невозможности окрестной равносильной устойчивости возведения отрицательного основания в степень**

Вслед за открытием явления и сущности неустойчивости знака с нарушением однозначности степени с отрицательным основанием и дробным показателем с нечётными числителем и знаменателем открыты явление и сущность невозможности окрестной равносильной устойчивости возведения отрицательного основания в степень.

Теорема. Невозможна окрестная равносильная устойчивость возведения отрицательного основания в степень.

Доказательство.

Окрестной называется равносильная устойчивость предмета, принадлежащего его топологическому пространству, со всеми частями (в частности элементами), принадлежащими их топологическим пространствам, имеющая место в некоторой совокупности существующих соответствующих окрестностей.

В любой окрестности любого показателя степени существует бесконечное множество дробных показателей с нечётными числителями и знаменателями.

По теореме предыдущего раздела степень отрицательной величины с дробным показателем с нечётными числителем и знаменателем не является равносильно устойчивой.

Следовательно, невозможна окрестная равносильная устойчивость возведения отрицательного основания в степень, что и требовалось доказать.

## **П.10. Открытие и теория явления и сущности невозможности окрестной равносильной устойчивости извлечения корня (как обратного действия для возведения в степень) из отрицательной величины**

Вместе с открытием явления и сущности невозможности окрестной равносильной устойчивости возведения отрицательного основания в степень открыты явление и сущность невозможности окрестной равносильной устойчивости извлечения корня (как обратного действия для возведения в степень) из отрицательной величины, поскольку извлечение корня есть возведение в степень, обратную степени корня, то есть частный случай возведения в степень.

Следовательно, и теория явления и сущности невозможности окрестной равносильной устойчивости извлечения корня (как обратного действия для возведения в степень) из отрицательной величины есть частный случай теории явления и сущности невозможности окрестной равносильной устойчивости возведения отрицательного основания в степень.

## **П.11. Общая теория дополнительных альтернативных новых действий**

Исторически и логически первичным арифметическим действием является сложение положительных целых чисел как соединение всех их единиц как частей.

Эти единицы как идеальные предметы вполне могут считаться тождественными.

Вычитание (убавление) положительного целого вычитаемого имеет смысл изъятия из уменьшаемого его единиц как частей в количестве единиц как частей вычитаемого и

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 536/556

определяется как действие, обратное прибавлению (сложению) вычитаемого к разности, дающему уменьшаемое.

Умножение данного числа как множимого на положительное целое число как множитель имеет смысл умножения данного числа на это положительное целое число единиц как равных частей множителя, каждая из которых умножением на данное число как множимое превращается в данное число.

Именно поэтому умножение данного числа на положительное целое число определяется как сложение этого положительного целого числа одинаковых слагаемых, каждое из которых равно данному числу.

Деление данного числа на положительное целое число как делитель имеет смысл деления данного числа на это положительное целое число равных частей и затем взятия приходящегося на любую лишь одну из этих частей в итог с оставлением приходящегося на все остальные равные части в стороне, так что для выполнения закона сохранения при делении необходимо и достаточно деление только на единицу.

Именно поэтому деление данного числа на положительное целое число как делитель определяется как действие, обратное умножению на это положительное целое число частного, дающему делимое.

Деление с остатком (именно принципиально отличающееся от обычного деления и чрезвычайно широко применяемое в теории чисел и криптографии) положительных целых делимого на делитель имеет смысл кратного вычитания делителя из делимого называемое неполным частным наибольшее возможное неотрицательное целое число раз при условии неотрицательности итоговой разности, называемой остатком (от деления), что равносильно (эквивалентно) вычитанию из делимого произведения делителя на такое называемое неполным частным наибольшее возможное неотрицательное целое число, что называемая остатком (от деления) разность неотрицательна и строго меньше делителя.

Эта равносильность (эквивалентность) основана, во-первых, на природе умножения как кратного сложения и, во-вторых, на природе вычитания (убавления) как действия, обратного сложению (прибавлению).

В частном случае нулевого остатка деление с остатком даёт итог обычного деления без остатка и неполное частное становится обычным, то есть полным, частным.

В частном случае строгого превышения делителем делимого делимое является остатком (от деления), а неполное частное становится нулевым, так что эти итоги очевидны именно сразу и деление с остатком на деле не требует никаких дополнительных действий.

Умножение данного числа как множимого на положительное нецелое число как множитель имеет смысл умножения данного числа на равное целой части этого нецелого числа целое число единиц как равных частей и дополнительно на строго меньшую единицы положительную дробную часть этого нецелого числа, единственным способом представимую конечной при её рациональности или бесконечной при её иррациональности суммой так называемых аликвотных дробей с единичными числителями и положительными целыми знаменателями по методу Фибоначчи последовательного выделения из этой дробной части каждый раз именно наибольшей возможной не превышающей её аликвотной дроби, то есть с наименьшим возможным знаменателем.

Умножение множимого на множитель имеет смысл сложения итогов умножения множимого на целую часть множителя и на каждую из слагающих дробную часть множителя аликвотных дробей как деления множимого на положительный целый знаменатель этой аликвотной дроби.

Деление данного числа как делимого на положительное нецелое число как делитель имеет смысл деления данного числа на равное целой части делителя неотрицательное целое число единиц как равных частей и на меньшую единицы положительную дробную часть делителя, то есть смысл деления данного числа на превышающее на единицу целую часть делителя количество частей, последняя из которых меньше единицы, а все предыдущие части равны единице и поэтому между собой, причём деление идёт прямо пропорционально частям, а в



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 537/556

качестве общего итога деления принимается итог, приходящийся на одну единичную часть, независимо от её наличия.

Поэтому в случае нулевой целой части положительного делителя деление на него приобретает смысл умножения на превышающее единицу обращение делителя, то есть на обращение его положительной дробной части.

Именно поэтому деление данного числа как делимого на ненулевое число как делитель определяется как действие, обратное умножению на это ненулевое число частного, дающему делимое.

Возведение числа в положительную целую степень имеет смысл кратного умножения этого числа самого на себя столько раз, какова эта степень.

Извлечение корня положительной целой степени из неотрицательного числа имеет смысл действия, обратного возведению в степень в том смысле, что возведение этого корня в эту степень даёт это число.

Возведение данного неотрицательного числа в равную обращению положительного целого числа степень имеет смысл корня степени, равной этому положительному целому числу, из данного неотрицательного числа.

Возведение данного неотрицательного числа в равную положительному нецелому числу степень имеет смысл возведения данного числа в равную целой части этого нецелого числа степень с дополнительным умножением итога этого возведения на итог возведения данного неотрицательного числа в степень, равную строго меньшей единицы положительной дробной части этого положительного нецелого числа, единственным способом представимой конечной при её рациональности или бесконечной при её иррациональности суммой так называемых аликвотных дробей с единичными числителями и положительными целыми знаменателями по методу Фибоначчи последовательного выделения из этой дробной части каждый раз именно наибольшей возможной не превышающей её аликвотной дроби, то есть с наименьшим возможным знаменателем, то есть с дополнительным умножением на произведение всех итогов возведения данного неотрицательного числа в степень, равную каждой из слагающих дробную часть этого положительного нецелого числа аликвотных дробей, как извлечения корня положительной целой степени, равной положительному целому знаменателю этой аликвотной дроби, из данного неотрицательного числа.

При иррациональности меньшей единицы положительной дробной части этого положительного нецелого числа и, равносильно (эквивалентно), самого этого положительного нецелого числа получаются бесконечная сумма аликвотных дробей, умножение на произведение бесконечного множества итогов возведения в степени, являющихся итогами извлечения корней, и соответствующие предельные переходы.

Возведение ненулевого числа в нулевую степень имеет смысл единицы как пустого произведения.

Возведение в отрицательную степень имеет смысл обращения итога возведения в противоположную положительную степень.

Общая теория дополнительных альтернативных новых действий опирается на целый ряд именно методологических основоположений.

1. Классическая математика полезно применяет целый ряд обычных действий, прежде всего сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня, введённые в своё время как обусловленные жизненными и научными потребностями.

2. Известна так называемая «бритва Оккама», запрещающая вводить новые сущности именно без необходимости.

3. Если жизненные и научные потребности принципиально не могут быть удовлетворены совокупностью всех обычных действий, то необходимо вводить некоторые новые действия.

4. Во имя преемственности развития знания, его сохранения и наращивания новые действия вводятся непременно как дополнительные и альтернативные при выполнении необходимого условия сохранения всех возможностей беспрепятственного использования всех обычных действий без каких бы то ни было помех со стороны новых действий.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 538/556

5. Названия и обозначения новых действий должны именно явным образом и чётко отличаться от названий и обозначений всех обычных действий во избежание путаницы.
6. Названия и обозначения новых действий должны отчасти напоминать названия и обозначения имеющихся (наличных) сходных обычных действий во имя самообъяснимости.
7. Новые действия должны быть достаточно простыми, ясными, однозначными и удобными в использовании и могут опираться на имеющиеся (наличные) сходные обычные действия.
8. Новые действия могут обладать некоторыми свойствами обычных действий полностью, некоторыми свойствами частично, некоторыми свойствами не обладать вообще, зато обладать новыми свойствами, совершенно не присущими имеющимся (наличным) сходным обычным действиям.
9. Новые действия должны перенимать и обобщать с распространением на свои расширенные области полезности свойства имеющихся (наличных) сходных обычных действий в областях их полезности во имя преемственности развития знания, его сохранения и наращивания.
10. Новые действия должны быть необходимыми и в совокупности с обычными действиями достаточными для приемлемого решения жизненно и научно важных и полезных видов задач, принципиально неразрешимых всей совокупностью обычных действий.
11. Совокупность новых действий сама по себе и вместе с совокупностью всех обычных действий должна образовывать достаточно логичные системы.
12. Совокупность обозначений новых действий сама по себе и вместе с совокупностью обозначений всех обычных действий должна образовывать достаточно логичные системы.

В предыдущих разделах настоящего Приложения были изложены следующие открытия:

1. Открытие явления и сущности неустойчивости знака с нарушением однозначности степени с отрицательным основанием и дробным показателем с нечётными числителем и знаменателем.
2. Открытие явления и сущности неустойчивости знака с нарушением однозначности извлечения корня как обратного действия для возведения в степень отрицательного основания с дробным показателем с нечётными числителем и знаменателем.
3. Открытие явления и сущности невозможности окрестной равносильной устойчивости возведения отрицательного основания в степень.
4. Открытие явления и сущности невозможности окрестной равносильной устойчивости извлечения корня (как обратного действия для возведения в степень) из отрицательной величины.

Следовательно, возведение в степень и извлечение корня безупречно определены только для неотрицательных оснований.

Поэтому классической математикой принимается ограничение степенных  $x^a$  и показательных  $a^x$  функций лишь неотрицательными основаниями.

Так что степенные и показательные функции, чрезвычайно распространённые в математике, науке и жизни в целом, определены только для неотрицательных оснований, что наносит невообразимый ущерб и урон.

Таким образом, очень актуальной предстоящей целью является обобщение степенных и показательных функций на отрицательные основания.

Средством достижения этой цели необходимо является новое возведение в степень, позволяющее безупречно возводить в любую степень также отрицательные основания.

Возведение неотрицательных оснований в любую степень безупречно определено обычным возведением в степень и непременно должно перениматься и обобщаться новым возведением в степень во имя преемственности развития знания, его сохранения и наращивания.

Наиболее простым и естественным методом достижения такого обобщения является такой алгоритм (такая последовательность действий):

- 1) представление основания степени в виде произведения нормы (в частности модуля, абсолютной величины) основания и дополнительного множителя (в частности функции знака основания),

- 2) возведение в степень только этой нормы,
- 3) сохранение этого дополнительного множителя без его возведения в степень,
- 4) умножение степени нормы на этот дополнительный множитель.

В частности, новое возведение в степень неотрицательной величины совпадает с её обычным возведением в степень.

А новое возведение в степень отрицательной величины умножает итог обычного возведения в степень противоположной положительной величины на равную минус единице функцию знака отрицательной величины, то есть просто присваивает этому итогу знак минус.

Поэтому представляется целесообразным назвать новое возведение в степень минус-возведением в степень, или просто минус-остепенением, а обычное возведение в степень просто остепенением по филологическому примеру умножения.

При этом новое извлечение корня именно как частный случай нового возведения в степень, а не только как обратное действие для возведения в степень, неизбежно определится само собой.

Поэтому представляется целесообразным назвать новое извлечение корня минус-извлечением корня, или просто минус-укоренением, а обычное извлечение корня просто укоренением по филологическому примеру умножения.

Однако возведение в степень было введено в истории математики первоначально как возведение в положительную целую степень и именно как умножение как раз такого положительного целого числа одинаковых сомножителей.

Поэтому представляется целесообразным дополнительное введение нового умножения под названием минус-умножения и его обратного действия, а именно нового деления под названием минус-деления.

В созданной общей теории дополнительных альтернативных новых действий отделение и итоговый учёт отрицательных знаков в альтернативных минус-умножении и минус-возведении в степень повышают действенность отрицательности также обобщением степенных и показательных функций на отрицательные основания.

Действенность отрицательности может повышаться полезным откладыванием учёта отрицательных знаков предметов действия до подведения итога действия, а то и необходимым для действенности или хотя бы для применения методов для положительных чисел.

Таково отыскание наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного отрицательных целых чисел для нахождения множества всех отрицательных общих кратных этих чисел посредством (требующих неперменной положительности) или алгоритма Евклида для абсолютных величин этих чисел, или разложений этих абсолютных величин на простые множители по основной теореме арифметики.

Кроме того, действенность отрицательности ведёт к обобщению степенных и показательных функций на отрицательные основания.

## П.12. Теория альтернативного минус-умножения

Альтернативное минус-умножение сохраняет абсолютную величину обычного произведения и отрицательность, так что сохраняющее отрицательность минус-произведение ненулевых сомножителей положительно тогда и только тогда, когда все без исключения сомножители положительны, и отрицательно тогда и только тогда, когда хотя бы один сомножитель отрицателен.

Такое альтернативное минус-умножение хотя и непривычно, но не менее естественно, чем обычное умножение, при котором произведение чётного числа отрицательных сомножителей положительно, что никак не связано с интуицией и вытекает лишь из желания обеспечить в кольцах и полях распределительный (дистрибутивный) закон умножения относительно сложения.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 540/556

Но обычное умножение необходимо ведёт к недопустимому сужению областей определения степенных и показательных функций до случаев лишь неотрицательных оснований.

Введённое же автором альтернативное сохраняющее отрицательность минус-умножение естественно приводит к альтернативному минус-возведению в степень, сохраняющему знак основания и абсолютную величину обычной степени, что снимает всякие ограничения для возведения произвольных отрицательных оснований в любую степень. Во многих видах типичных насущных задач это преимущество необходимо для их успешного решения, причём нераспределительность альтернативного сохраняющего отрицательность минус-умножения относительно сложения не создаёт никаких затруднений.

Следует особо отметить, что как в математической логике, так и в алгебре множеств справедливы оба распределительных (дистрибутивных) закона – как умножения относительно сложения, так и сложения относительно умножения.

При этом в математической логике роль сложения играет дизъюнкция, а роль умножения – конъюнкция.

В алгебре же множеств роль сложения играет действие теоретико-множественного объединения, а роль умножения – действие теоретико-множественного пересечения.

В то же время в арифметике и алгебре чисел справедлив лишь один из этих двух распределительных (дистрибутивных) законов, а именно, умножение распределительно (дистрибутивно) относительно сложения, тогда как уже здесь имеет место отказ от другого распределительного закона, так что сложение не распределительно относительно умножения.

А если это так, то и оставшийся закон распределительности (дистрибутивности) умножения относительно сложения не следует рассматривать как неприкосновенную догму.

Решающим доводом в пользу введения альтернативного сохраняющего отрицательность минус-умножения является то, что оно вводится именно и только как дополнительное к обычному умножению, не просто использует его, но и действительно основывается на нём без малейшей попытки его ущемить и тем более исключить.

Нет и речи о навязывании нового там, где обычное прекрасно работает.

Напротив, такое дополнительное минус-умножение по существу ещё и помогает обычному умножению в затруднительных для него случаях и значительно расширяет палитру методов решения применительно к целым видам типичных насущных задач.

Сохраняющее отрицательность минус-умножение обозначается с помощью прямой двойной кавычки:

$$\begin{aligned} \text{"}\prod_{j \in J} a_j = \min(\text{sign}(a_j) \mid j \in J) \mid \prod_{j \in J} a_j \mid &= \min(\text{sign}(a_j) \mid j \in J) \prod_{j \in J} |a_j|, \\ \text{"}\prod_{j \in J} a_j > 0 \text{ лишь при всех } a_j > 0, \\ \text{"}\prod_{j \in J} a_j < 0 \end{aligned}$$

при всех ненулевых  $a_j$  и хоть одном  $a_j < 0$ .

Теорема. Минус-умножение переместительно (коммутативно).

Доказательство.

Для любых действительных чисел  $a$  и  $b$

$$\begin{aligned} a''b &= \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b))|ab|, \\ b''a &= \min(\text{sign}(b), \text{sign}(a))|ba|, \\ a''b &= b''a, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Минус-умножение сочетательно (ассоциативно).

Доказательство.

Для любых действительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$

$$\begin{aligned} (a''b)''c &= \min(\min(\text{sign}(a), \text{sign}(b)), \text{sign}(c))|(ab)c|, \\ a''(b''c) &= \min(\text{sign}(a), \min(\text{sign}(b), \text{sign}(c)))|a(bc)|, \end{aligned}$$

$(a''b)''c = a''(b''c) = a''b''c = \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b), \text{sign}(c))|abc|$ , что и требовалось доказать.

Определение. Неотрицательным минус-умножением называется минус-умножение на неотрицательное число.

Теорема. Неотрицательное минус-умножение распределительно (дистрибутивно) относительно алгебраического сложения и совпадает с умножением.

Доказательство.

Для любых действительных чисел  $a \geq 0$ ,  $b$  и  $c$

$$a''(b + c) = \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b + c))|a(b + c)|,$$
$$a''b + a''c = \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b))|ab| + \min(\text{sign}(a), \text{sign}(c))|ac|.$$

Если  $a$  равно нулю, то равны нулю все модули ниже,

$$a''(b + c) = \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b + c))|a(b + c)| = 0,$$
$$a''b + a''c = \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b))|ab| + \min(\text{sign}(a), \text{sign}(c))|ac| = 0,$$
$$a''(b + c) = a''b + a''c = 0.$$

Если  $a$  строго положительно, то

$$a''(b + c) = \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b + c))|a(b + c)| =$$
$$\min(1, \text{sign}(b + c))|b + c| = \text{sign}(b + c)|b + c| = a(b + c),$$
$$a''b + a''c = \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b))|ab| + \min(\text{sign}(a), \text{sign}(c))|ac| =$$
$$\min(1, \text{sign}(b))|b| + \min(1, \text{sign}(c))|c| = \text{sign}(b)|b| + \text{sign}(c)|c| = ab + ac,$$
$$a''(b + c) = a''b + a''c = a(b + c) = ab + ac.$$

Следовательно, в обоих возможных случаях

$$a''(b + c) = a''b + a''c = a(b + c) = ab + ac,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Минус-умножение распределительно (дистрибутивно) относительно алгебраического сложения без противоположных знаков.

Доказательство.

Все нулевые слагаемые в алгебраической сумме можно опустить как не влияющие на неё и аннулирующие все свои минус-произведения.

Поэтому остаётся сумма только положительных или только отрицательных слагаемых.

Для любых действительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$

$$a''(b + c) = \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b + c))|a(b + c)|,$$
$$a''b + a''c = \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b))|ab| + \min(\text{sign}(a), \text{sign}(c))|ac|.$$

Если  $b > 0$  и  $c > 0$  при любом  $a$ , то

$$a''(b + c) = \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b + c))|a(b + c)| = \min(\text{sign}(a), 1)|a(b + c)| =$$
$$\text{sign}(a)|a(b + c)| = a(b + c),$$
$$a''b + a''c = \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b))|ab| + \min(\text{sign}(a), \text{sign}(c))|ac| =$$
$$\min(\text{sign}(a), 1)|a|b + \min(\text{sign}(a), 1)|a|c = \text{sign}(a)|a|b + \text{sign}(a)|a|c = ab + ac,$$
$$a''(b + c) = a''b + a''c = a(b + c) = ab + ac.$$

Если  $b < 0$  и  $c < 0$  при любом  $a$ , то

$$a''(b + c) = \min(\text{sign}(a), -1)|a(b + c)| = -|a(b + c)| = -|a|(-b - c) = |a|(b + c),$$
$$a''b + a''c = \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b))|ab| + \min(\text{sign}(a), \text{sign}(c))|ac| =$$
$$\min(\text{sign}(a), -1)|a|b + \min(\text{sign}(a), -1)|a|c = -|a|(-b) - |a|(-c) = |a|b + |a|c,$$
$$a''(b + c) = a''b + a''c = |a|(b + c) = |a|b + |a|c.$$

Следовательно, в обоих возможных случаях

$$a''(b + c) = a''b + a''c,$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Для нарушения распределительного (дистрибутивного) закона минус-умножения относительно алгебраического сложения необходима и достаточна совокупность обоих условий: во-первых, строгая отрицательность минус-множителя, а во-вторых, непрерывное наличие как положительных, так и отрицательных слагаемых в сумме.

Доказательство.

Необходимость доказывается методом от противоречащего.

Пусть нарушен распределительный (дистрибутивный) закон минус-умножения относительно алгебраического сложения, а минус-множитель неотрицателен.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 542/556

Тогда по теореме о неотрицательном минус-умножении распределительный (дистрибутивный) закон минус-умножения относительно алгебраического сложения выполняется вопреки допущению.

Полученное противоречие доказывает необходимость строгой отрицательности минус-множителя.

Пусть нарушен распределительный (дистрибутивный) закон минус-умножения относительно алгебраического сложения, однако в сумме полностью отсутствуют или положительные, или отрицательные слагаемые.

Тогда по теореме о распределительности (дистрибутивности) минус-умножения относительно алгебраического сложения без противоположных знаков распределительный (дистрибутивный) закон минус-умножения относительно алгебраического сложения выполняется вопреки допущению.

Полученное противоречие доказывает необходимость наличия как положительных, так и отрицательных слагаемых в сумме.

Тем самым необходимость полностью доказана.

Достаточность.

Для любых действительных чисел  $a < 0$ ,  $b > 0$  и  $c < 0$

$$\begin{aligned} a''(b + c) &= \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b + c))|a(b + c)| = \min(-1, \text{sign}(b + c))|a||b + c| = (-1)|a||b + c| = a|b + c|, \\ a''b + a''c &= \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b))|ab| + \min(\text{sign}(a), \text{sign}(c))|ac| = \\ &= \min(-1, 1)|ab| + \min(-1, -1)|ac| = (-1)|ab| + (-1)|ac| = ab - ac = a(b - c), \\ & \quad b - c > |b + c|, \\ & \quad a(b - c) < a|b + c|, \\ & \quad a''b + a''c < a''(b + c), \\ & \quad a''(b + c) > a''b + a''c, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

### П.13. Теория альтернативного минус-деления

Сохраняющее отрицательность минус-деление обозначается с помощью прямой двойной кавычки:

$$\begin{aligned} a''/b &= \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b))|a/b|, \\ a''/b &> 0 \end{aligned}$$

лишь при  $a > 0$  и  $b > 0$ ,

$$a''/b < 0$$

при ненулевых  $a$  и  $b$  и хоть одном  $a < 0$  или  $b < 0$ .

Минус-деление отличается от обычного деления только при совокупности условий  $a < 0$  и  $b < 0$  и только знаком минус вместо плюса у частного.

Минус-деление является обратным действием для минус-умножения.

### П.14. Теория альтернативного минус-остепенения (минус-возведения в степень)

Обычное возведение в степень не позволяет возводить произвольные отрицательные основания в любую степень и необходимо ведёт к недопустимому сужению областей определения степенных и показательных функций до случаев лишь неотрицательных оснований.

Альтернативное минус-остепенение, или минус-возведение в степень, умножает функцию направления (знака) основания на степень нормы основания, что снимает всякие ограничения для возведения произвольных отрицательных оснований в любую степень.

Во многих видах типичных насущных задач это преимущество минус-остепенения, или минус-возведения в степень, необходимо для их успешного решения, причём то, что степень сохраняет направление (знак) её основания, не создаёт никаких затруднений.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 543/556

Решающим доводом в пользу введения альтернативного минус-остепенения, или минус-возведения в степень, сохраняющего знак её основания, является то, что такое минус-остепенение, или минус-возведение в степень, вводится именно и только как дополнительное к обычному возведению в степень, не просто использует его, но и действительно основывается на нём без малейшей попытки его ущемить и тем более исключить.

Нет и речи о навязывании нового там, где обычное прекрасно работает.

Напротив, такое дополнительное альтернативное минус-остепенение, или минус-возведение в степень, по существу ещё и помогает обычному возведению в степень в затруднительных для него случаях и значительно расширяет палитру методов решения применительно к целым видам типичных насущных задач.

Сохраняющее направление (знак) основания и его отрицательность минус-остепенение, или минус-возведение в степень, обозначается с помощью прямой двойной кавычки:

$$\begin{aligned} "a^b &= a^{"b} = |a|^b \text{sign}(a), \\ "a^{2k-1} &= a^{"2k-1} = |a|^{2k-1} \text{sign}(a) = a^{2k-1}, k \in \{1, 2, 3, \dots\}, \\ "a^{2k} &= a^{"2k} = a^{2k} \text{sign}(a), \\ "(-1)^3 &= (-1)^{"3} = (-1)^3 = -1 = ("(-1)^6)^{1/2} = (-1)^{6/2} = (-1)^{6/2}, \\ "(-1)^{1/3} &= (-1)^{"1/3} = (-1)^{1/3} = -1 = ("(-1)^2)^{1/6} = (-1)^{2/6} = (-1)^{2/6}. \end{aligned}$$

В итоге минус-возведение неотрицательных чисел в степени обычно.

Минус-возведение отрицательных чисел в степени, показатели которых являются дробями с нечётными числителями и знаменателями, в частности в нечётные степени, даёт обычные итоги, причём становится однозначным и вполне определённым независимо от равносилоного умножения числителей и знаменателей таких дробей на одинаковые ненулевые чётные множители.

При чётности числителей таких дробей, в том числе при возведении в чётные степени, обычные итоги умножаются на функции направления (знака) основания.

А при отрицательности оснований и чётности знаменателей таких дробей итоги вместо чисто мнимых становятся отрицательными.

Кроме того, впервые появляется возможность возводить отрицательные числа в степени с иррациональными показателями.

Теорема. Невозможно определить обычное возведение никакого отрицательного числа в степень ни с каким иррациональным показателем.

Доказательство.

Возведение в степень с иррациональным показателем определяется через предельный переход именно произвольной последовательности рациональных показателей, стремящейся к этому иррациональному показателю.

А в любой окрестности любого иррационального числа есть, во-первых, бесконечное множество рациональных чисел, каждое из которых выражается дробью с нечётным числителем и нечётным знаменателем, что ведёт к отрицательному знаку степени отрицательного числа, являющейся нижним пределом последовательности степеней отрицательного числа, а во-вторых, бесконечное множество рациональных чисел, каждое из которых выражается дробью с чётным числителем и нечётным знаменателем, что ведёт к положительному знаку степени отрицательного числа, являющейся верхним пределом последовательности степеней отрицательного числа. Эти нижний и верхний пределы последовательности степеней отрицательного числа противоположны друг другу и являются ненулевыми и поэтому различными.

Так что последовательность степеней отрицательного числа не имеет единого предела.

Следовательно, определить обычное возведение никакого отрицательного числа в степень ни с каким иррациональным показателем невозможно, что и требовалось доказать.

Теорема. Минус-степень минус-произведения есть минус-произведение минус-степеней.

Доказательство.

$$\begin{aligned} (a^"b)^{"c} &= |a^"b|^c \text{sign}(a^"b) = \\ &= |ab|^c \min(\text{sign}(a), \text{sign}(b)), \end{aligned}$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 544/556

$$\begin{aligned} a^m \cdot b^m &= |a|^{\text{sign}(a)} |b|^{\text{sign}(b)} = \\ &= |ab|^{\min(\text{sign}(a), \text{sign}(b))} = \\ &= |ab|^{\min(\text{sign}(a), \text{sign}(b))}, \\ (a \cdot b)^m &= a^m \cdot b^m, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

## П.15. Теория альтернативного вектор-остепенения (вектор-возведения в степень)

Обобщение (функции) знака  $\text{sign}(x)$  действительного числа  $x$  направлением (функцией направления)

$$\text{dir}(a) = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$

комплексного числа

$$a = r e^{i\varphi}$$

приводит к вектор-остепенению, или вектор-возведению в степень, с обобщением минус-остепенения, или минус-возведения в степень, как на комплексное основание

$$a = r e^{i\varphi}$$

с действительным показателем  $b$  степени

$$a^b = a^{b^{\text{dir}(a)}} = |a|^b \text{dir}(a) = r^b \text{dir}(a),$$

так и на комплексное основание

$$a = r e^{i\varphi}$$

с комплексным показателем

$$b = c + di$$

степени:

$$\begin{aligned} a^b &= a^{c+di} = a^{c^{\text{dir}(a)}} = a^{c^{\text{dir}(a)}} = \\ &= |a|^{c^{\text{dir}(a)}} \text{dir}(a) = \\ &= r^{c^{\text{dir}(a)}} e^{i\varphi} = r^c r^{di} e^{i\varphi} = \\ &= r^c e^{id \ln(r)} e^{i\varphi} = r^c e^{i(d \ln(r) + \varphi)}. \end{aligned}$$

## П.16. Теория альтернативного минус-укоренения (минус-извлечения корня)

Укоренение (извлечение корня) является обратным действием для остепенения (возведения в степень).

Кроме того, укоренение (извлечение корня) является частным случаем остепенения (возведения в степень).

Минус-укоренение (минус-извлечение корня) является обратным действием для минус-остепенения (минус-возведения в степень).

Кроме того, минус-укоренение (минус-извлечение корня) является частным случаем минус-остепенения (минус-возведения в степень).

Поэтому теория альтернативного минус-укоренения (минус-извлечения корня) является частным случаем теории альтернативного минус-остепенения (минус-возведения в степень).

А именно, частным случаем теории альтернативного минус-остепенения (минус-возведения в степень) для степени, которая является обращением степени извлекаемого корня.

## П.17. Теория обобщения степенных функций на отрицательные основания минус-степенными функциями

Степенные функции вида

$$y = x^a$$

с постоянным действительным числом  $a$  как показателем степени безупречно определены для положительных оснований  $x$  при любых действительных показателях  $a$ , для нулевого основания  $x$  при любых строго положительных показателях  $a$ .

Для отрицательных оснований  $x$  степенные функции вида



$$y = x^a$$

вообще не определены ни при каких иррациональных показателях  $a$ , при любом рациональном показателе  $a$  с нечётным числителем и нечётным знаменателем допускают явление неустойчивости знака, устраняемое предписанием несократимости показателя, при любом рациональном показателе  $a$  с нечётным числителем и чётным знаменателем вообще не имеют действительных значений (лишь чисто мнимые).

Для отрицательных оснований  $x$  степенные функции вида

$$y = x^a$$

при любом рациональном показателе  $a$  с чётным числителем и нечётным знаменателем определены, однако со снижающими полезность неестественными (в отличие от функции  $y = x$ ) отсутствием отрицательных значений и нарушением монотонности, да и определены окрестно неустойчиво.

Ведь в любой окрестности каждого такого показателя есть три бесконечных множества:

- 1) иррациональных показателей  $a$ , при которых для отрицательных оснований степенные функции вообще не определены;
- 2) рациональных показателей  $a$  с нечётным числителем и нечётным знаменателем, при которых для отрицательных оснований степенные функции допускают явление неустойчивости знака, устраняемое предписанием несократимости показателя, причём с полезными естественными (как у функции  $y = x$ ) наличием и отрицательных значений, и монотонности;
- 3) рациональных показателей  $a$  с нечётным числителем и чётным знаменателем, при которых для отрицательных оснований степенные функции вообще не имеют действительных значений (лишь чисто мнимые).

Безупречно повсеместное определение дополнительных сохраняющих направление (знак) основания минус-степенных функций вида

$$y = -x^a = x^{na}$$

благодаря именно дополнительному альтернативному минус-остепенению (минус-возведению в степень), причём с полезными естественными (как у функции  $y = x$ ) наличием и отрицательных значений, и монотонности.

## П.18. Теория обобщения показательных функций на отрицательные основания минус-показательными функциями

Показательные функции вида

$$y = a^x$$

с постоянным действительным числом  $a$  как основанием степени безупречно определены для положительных оснований  $a$  при любых действительных показателях  $x$ , для нулевого основания  $a$  при любых строго положительных показателях  $x$ .

Для отрицательных оснований  $a$  показательные функции вида

$$y = a^x$$

вообще не определены ни при каких иррациональных показателях  $x$ , при любом рациональном показателе  $x$  с нечётным числителем и нечётным знаменателем допускают явление неустойчивости знака, устраняемое предписанием несократимости показателя, при любом рациональном показателе  $x$  с нечётным числителем и чётным знаменателем вообще не имеют действительных значений (лишь чисто мнимые).

Для отрицательных оснований  $a$  показательные функции вида

$$y = a^x$$

при любом рациональном показателе  $x$  с чётным числителем и нечётным знаменателем определены, однако окрестно неустойчиво.

Ведь в любой окрестности каждого такого показателя есть три бесконечных множества:

- 1) иррациональных показателей  $x$ , при которых для отрицательных оснований показательные функции вообще не определены;

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 546/556

2) рациональных показателей  $x$  с нечётным числителем и нечётным знаменателем, при которых для отрицательных оснований показательные функции допускают явление неустойчивости знака, устраняемое предписанием несократимости показателя;

3) рациональных показателей  $x$  с нечётным числителем и чётным знаменателем, при которых для отрицательных оснований показательные функции вообще не имеют действительных значений (лишь чисто мнимые).

Безупречно повсеместное определение дополнительных сохраняющих направление (знак) основания минус-показательных функций вида

$$y = "a^x = a^{''x}$$

благодаря именно дополнительному альтернативному минус-остепенению (минус-возведению в степень).

## **П.19. Теория обобщения степенно-показательных функций на отрицательные основания минус-степенно-показательными функциями**

Степенно-показательные функции вида

$$y = g(x)^{h(x)}$$

с действительной функцией  $g(x)$  независимой переменной  $x$  как основанием степени и с действительной функцией  $h(x)$  независимой переменной  $x$  как показателем степени безусловно определены для любых положительных значений оснований  $g(x)$  при любых действительных значениях показателей  $h(x)$ , для нулевых значений оснований  $g(x)$  при любых строго положительных значениях показателей  $h(x)$ .

Для отрицательных значений оснований  $g(x)$  степенно-показательные функции вида

$$y = g(x)^{h(x)}$$

вообще не определены ни при каких иррациональных значениях показателей  $h(x)$ , при любом рациональном значении показателя  $h(x)$  с нечётным числителем и нечётным знаменателем допускают явление неустойчивости знака, устраняемое предписанием несократимости значения показателя, при любом рациональном значении показателя  $h(x)$  с нечётным числителем и чётным знаменателем вообще не имеют действительных значений (лишь чисто мнимые).

Для отрицательных значений оснований  $g(x)$  степенно-показательные функции вида

$$y = g(x)^{h(x)}$$

при любом не изолированном рациональном значении показателя  $h(x)$  с чётным числителем и нечётным знаменателем определены, однако, может быть, окрестно неустойчиво.

Ведь в любой окрестности каждого такого рационального значения показателя  $h(x)$  могут быть три бесконечных множества:

1) иррациональных значений показателя  $h(x)$ , при которых для отрицательных значений оснований  $g(x)$  степенно-показательные функции вообще не определены;

2) рациональных значений показателя  $h(x)$  с нечётным числителем и нечётным знаменателем, при которых для отрицательных значений оснований  $g(x)$  степенно-показательные функции допускают явление неустойчивости знака, устраняемое предписанием несократимости значений показателя  $h(x)$ ;

3) рациональных значений показателя  $h(x)$  с нечётным числителем и чётным знаменателем, при которых для отрицательных значений оснований  $g(x)$  степенно-показательные функции вообще не имеют действительных значений (лишь чисто мнимые).

Безупречно повсеместное определение дополнительных сохраняющих направление (знак) основания минус-степенно-показательных функций вида

$$y = "g(x)^{h(x)} = g(x)^{''h(x)}$$

благодаря именно дополнительному альтернативному минус-остепенению (минус-возведению в степень).

## П.20. Развитие теории и алгоритм аналитического приближения предельных поверхностей в пространстве приведённых напряжений

Фонд исходных (для приведения) критериев предельных состояний применительно к изотропным одинаково сопротивляющимся растяжению и сжатию материалам можно расширить в каждом случае с физическим смыслом, который совершенно необходим [238].

Так, допустим, что в предельном состоянии материала равносильное (эквивалентное) напряжение  $\sigma_e$  является не постоянной материала  $\sigma_L$ , а линейной комбинацией её и не только промежуточного главного напряжения  $\sigma_2$  (как в предложенном методе исправления критериев предельных состояний), но и крайних главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Это не даёт ничего нового лишь при исправлении третьей теории прочности, а в общем случае исправления критерия

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L$$

приводит ко второй дополнительной (кроме  $x$ ) безразмерной постоянной  $\lambda$ :

$$\sigma_e = (1 + \lambda)^{-1}F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \lambda(1 + \lambda)^{-1}(\sigma_1 - \sigma_3) + x\sigma_2 = \sigma_L.$$

Опыт на кручение

$$\sigma_1 = \tau_L,$$

$$\sigma_2 = 0,$$

$$\sigma_3 = -\tau_L$$

и установленный ранее физический смысл постоянной  $x$  дают формулировку критерия

$$\sigma_e = (2\tau_L - \sigma_L)F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)/[2\tau_L - F(\tau_L, 0, -\tau_L)] + [\sigma_L - F(\tau_L, 0, -\tau_L)](\sigma_1 - \sigma_3)/[2\tau_L - F(\tau_L, 0, -\tau_L)] + \sigma_L\sigma_2/\sigma_{III} = \sigma_L.$$

В случае

$$x = 0$$

и четвёртой теории прочности

$$F(\tau_L, 0, -\tau_L) = 3^{1/2}\tau_L$$

получается критерий Б. И. Ковальчука [204].

Пусть удельная потенциальная энергия деформирования, умноженная на максимальное сдвиговое напряжение, в предельном состоянии материала является линейной комбинацией главных напряжений (что обобщает гипотезу о том, что эта энергия является линейной функцией параметра Лоде-Надаи [213]). Тогда опыты при одноосных растяжении и сжатии и равномерном двухосном сжатии дают формулировки критериев предельных состояний для изотропного одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию материала

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3) = \sigma_L^2 + [\sigma_L^2 - 2(1 - \mu)\sigma_{cc}^2]\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_3)$$

и в приведённом виде

$$\sigma_1^{\circ 2} + \sigma_2^{\circ 2} + \sigma_3^{\circ 2} - 2\mu(\sigma_1^{\circ}\sigma_2^{\circ} + \sigma_2^{\circ}\sigma_3^{\circ} + \sigma_1^{\circ}\sigma_3^{\circ}) = 1 + [1 - 2(1 - \mu)\sigma_{cc}^{\circ 2}]\sigma_2^{\circ}/(\sigma_1^{\circ} - \sigma_3^{\circ}).$$

Для изотропного различно сопротивляющегося растяжению и сжатию материала при двухосном сжатии получается уравнение Г. М. Охрименко [262].

Вполне возможны и другие подходы к исправлению критериев предельных состояний.

Если предположить, что в предельном состоянии материала квадрат максимального сдвигового напряжения является линейной комбинацией главных напряжений, то те же опыты дают следующую формулировку приведённого критерия предельных состояний:

$$\sigma_1^{\circ} - \sigma_3^{\circ} = 1 + (1 - \sigma_{cc}^{\circ})\sigma_2^{\circ}/(\sigma_1^{\circ} - \sigma_3^{\circ}).$$

Если такой же комбинацией является произведение максимального и октаэдрического сдвиговых напряжений, то те же опыты дают формулировку приведённого критерия предельных состояний через приведённую интенсивность напряжений  $\sigma_i^{\circ}$ :

$$\sigma_i^{\circ} = 1 + (1 - \sigma_{cc}^{\circ})\sigma_2^{\circ}/(\sigma_1^{\circ} - \sigma_3^{\circ}).$$

Если такой же комбинацией является произведение максимального и квадрата октаэдрического сдвиговых напряжений, то те же опыты дают такую формулировку приведённого критерия предельных состояний:

$$\sigma_i^{\circ 2} = 1 + (1 - \sigma_{cc}^{\circ 2})\sigma_2^{\circ}/(\sigma_1^{\circ} - \sigma_3^{\circ}).$$

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук:

01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 548/556

Первые две из этих формулировок однопараметрических (с приведённым предельным напряжением равномерного двухосного сжатия  $\sigma_{cc}^{\circ}$ ) и третья формулировка соответственно дают для  $\sigma_{cc}^{\circ}$  и его аналога  $\sigma_{tt}^{\circ}$  при растяжении

$$\begin{aligned}\sigma_{tt}^{\circ} + \sigma_{cc}^{\circ} &= 2; \\ \sigma_{tt}^{\circ 2} + \sigma_{cc}^{\circ 2} &= 2\end{aligned}$$

и могут оказаться приемлемыми лишь при таких условиях.

Если приведённые результаты экспериментов существенно отклоняются от подобных условий, даваемых этими или иными формулировками критериев предельных состояний, то становится вынужденным увеличение числа параметров и соответственно опытов, минимальное по принципу допустимой простоты.

Пусть в предельном состоянии изотропного одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию материала квадрат максимального сдвигового напряжения является линейной комбинацией предельного одноосного и главных напряжений.

Четыре опыта при одноосных и равных двухосных растяжениях и сжатиях дают такую формулировку приведённого критерия предельных состояний:

$$\begin{aligned}(\sigma_{tt}^{\circ} + \sigma_{cc}^{\circ})(1 - \sigma_{tt}^{\circ}\sigma_{cc}^{\circ})(\sigma_1^{\circ} - \sigma_3^{\circ}) + (2\sigma_{tt}^{\circ}\sigma_{cc}^{\circ} - \sigma_{tt}^{\circ} - \sigma_{cc}^{\circ})(\sigma_1^{\circ} - \sigma_3^{\circ})^2 + (\sigma_{cc}^{\circ} - \sigma_{tt}^{\circ})(1 - \sigma_{tt}^{\circ})(1 - \sigma_{cc}^{\circ})\sigma_2^{\circ} \\ = \sigma_{tt}^{\circ}\sigma_{cc}^{\circ}(2 - \sigma_{tt}^{\circ} - \sigma_{cc}^{\circ}).\end{aligned}$$

Аналогичная гипотеза для октаэдрического сдвигового напряжения (или эквивалентная гипотеза об удельной энергии формоизменения как такой же линейной комбинации) и те же четыре опыта дают следующую формулировку приведённого критерия предельных состояний:

$$\begin{aligned}(\sigma_{tt}^{\circ} + \sigma_{cc}^{\circ})(1 - \sigma_{tt}^{\circ}\sigma_{cc}^{\circ})(\sigma_1^{\circ} - \sigma_3^{\circ}) + (2\sigma_{tt}^{\circ}\sigma_{cc}^{\circ} - \sigma_{tt}^{\circ} - \sigma_{cc}^{\circ})\sigma_1^{\circ 2} + (\sigma_{cc}^{\circ} - \sigma_{tt}^{\circ})(1 - \sigma_{tt}^{\circ})(1 - \sigma_{cc}^{\circ})\sigma_2^{\circ} = \\ \sigma_{tt}^{\circ}\sigma_{cc}^{\circ}(2 - \sigma_{tt}^{\circ} - \sigma_{cc}^{\circ}).\end{aligned}$$

Можно предложить следующий алгоритм аналитического приближения предельной поверхности исследуемого материала:

- 1) осуществляется приведение экспериментальных данных с геометрическим их изображением в пространстве приведённых главных напряжений и на рационально выбранных его плоскостях;
  - 2) анализируются приведённые экспериментальные данные для абстрагирования от их разброса, для отсеивания заведомых выбросов и для выделения основных качественных закономерностей предельной поверхности и её пересечений с выбранными плоскостями;
  - 3) выбирается по принципу допустимой простоты минимальное число данных, совокупность которых достаточно полно характеризует предельную поверхность (минимальная репрезентативная выборка);
  - 4) выбирается по принципу допустимой простоты физическая гипотеза о предельных состояниях материала, вместе с минимальной репрезентативной выборкой дающая потенциально приемлемую формулировку приведённого критерия предельных состояний;
  - 5) минимизируется средняя всеобщая погрешность аналитического приближения приведённых экспериментальных данных и принимается совокупность значений постоянных материала согласно отыскиваемому по созданной методологии наилучшему псевдорешению соответствующей системы уравнений в задаче приближения;
  - 6) устанавливается искомый критерий предельных состояний исследуемого материала при заданном нагружении путём подстановки формул приведения главных напряжений в полученное аналитическое выражение формулировки приведённого критерия.
- Заметим, что до всесторонней экспериментальной проверки указанные и другие подобные формулы, несмотря на наличие физического смысла, должны рассматриваться лишь как возможные формулировки критериев предельных состояний, которые в принципе могут оказаться полезными для аналитического приближения экспериментальных данных о предельных состояниях различных материалов при действительных условиях нагружения образцов и элементов конструкций.

## **П.21. Дополнительные результаты проверки обобщённых аналитических методов решения задач прочности**

Предложенный и являющийся в данной докторской диссертации основным естественный принцип допустимой простоты согласуется с характером законов природы, историей развития естественных наук и спецификой научного мышления.

На принципе допустимой простоты основаны созданные общие теории, методологии и методы, в частности общие (полу)степенной и интегральный аналитические методы макроэлементов. Их приложение к исследованиям напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, прочности и разрушения трёхмерных тел и оптических свойств трёхмерных цилиндрических светопрозрачных элементов привели к открытиям систем принципиально новых явлений и законов и к созданию соответствующих теорий и простых аналитических методов решения задач в пространственной постановке. Эти решения дают обобщения (в точной, а если это невозможно, то в приближённой форме) известных решений задач для пластин и плит, а также формул Ламе [358] и других известных решений для пространственных тел под кусочно-гладкими поверхностными нагрузками.

При нарушении этого условия созданные общие теории, методологии и методы, в частности общие (полу)степенной и интегральный аналитические методы макроэлементов, вынуждают соответствующее изменение постановки задачи, которое делает её не только решаемой этими методами, но и более реальной.

Это видно на примере задачи о жёстко защемлённом по боковой поверхности пространственном цилиндрическом упругом теле под равномерным давлением на один из торцов. При этом аннулирование радиального перемещения боковой поверхности тела выполнено всюду, а для осевого перемещения это не удаётся (иначе, как показывает точное решение [123], напряжения на краях торцов бесконечны) и не обязательно для инженерной практики, так как едва ли можно указать конструкцию, для элемента которой такое условие сколь-нибудь точно выполнялось бы на деле. Следовательно, по ходу решения созданными общими теориями, методологиями и методами постановка задачи может существенно исправляться в направлении разрешимости и практической осуществимости. Полученное простое аналитическое решение даёт результаты, существенно отличающиеся от известных аналитических [123] и численных [152] в краевой области возмущения

$$0.8a \leq r \leq a,$$

что обусловлено исправлением постановки задачи. Важно заметить, что основанные на полученных созданными общими теориями, методологиями и методами представлениях о деформировании и прочности пространственных тел новые технические решения нацелены на снижение наибольших напряжений в элементах конструкций. А это не только увеличивает их прочность, но и попутно снижает погрешности результатов приложения к ним этих общих теорий, методологий и методов, ориентированных на кусочно-гладкие распределения поверхностных нагрузок на пространственные тела.

В случае изотропного одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию материала при статическом нагружении приведённые критерии предельных состояний часто дают как свои чрезвычайно узкие частные случаи обычные критерии предельных состояний, а в ряде других случаев дают результаты, в целом естественные и согласующиеся с известными результатами. Например, приведённая третья теория прочности для изотропного различно сопротивляющегося растяжению и сжатию материала в областях одного знака главных напряжений совпадает с обычной третьей теорией прочности для модуля предельного одноосного напряжения того же знака, что естественно, а в области различных знаков главных напряжений совпадает с критерием Кулона–Мора, что можно рассматривать как предложение по определению не вполне ясной [111] области его применимости (линейное приближение кривой Мора неприемлемо вне этой области, при

$$\sigma_1 < 0$$

возможно

$$\sigma_c < 0$$

и, видимо, должно сравниваться не с  $\sigma_t$ , а с  $(-\sigma_c)$ , но отсюда следовала бы ограниченная прочность при всестороннем давлении). Приведённые критерии предельных состояний дают согласующиеся с известными результаты для отношения  $\tau_1/\sigma_t$  предельных напряжений при кручении и одноосном растяжении для изотропных различно сопротивляющихся растяжению и сжатию материалов в зависимости от

$$\chi = \sigma_t/\sigma_c$$

(см. рис. 2.30, в) согласно критериям Кулона–Мора (кривая 1), Боткина–Миролюбова (кривая 2), Баландина (кривая 3), критериям Писаренко–Лебедева как выражениям их теории (кривые 4–6) [238], а также и по приведённым третьей (кривая 7) и четвёртой (кривая 8) теориям прочности и критерию Писаренко–Лебедева (кривая 9). То же касается и отношения пределов усталости изотропных материалов при симметричных циклах кручения и изгиба. Приведённая четвёртая теория прочности при эллиптическом приближении диаграммы предельных амплитуд на участке без нарушения статической прочности даёт для сочетания симметричных циклов изгиба и кручения формулу Гафа и Полэрда [325].

Приведённые критерии предельных состояний позволяют приближать предельные состояния ряда материалов [204, 238, 259] с такими же примерно погрешностями, как и достаточно универсальная теория Писаренко–Лебедева.

Существенными звеньями проверки созданных общих теорий, методологий и методов, в частности общих (полу)степенного и интегрального аналитических методов макроэлементов и их приложений к исследованиям напряжённо-деформированных состояний, жёсткости, прочности и разрушения трёхмерных тел и оптических свойств трёхмерных цилиндрических светопрозрачных элементов являются использование полученных результатов при создании рациональных образцов техники высоких гидростатических давлений, а также достаточная прочность, надёжность и долговечность соответствующих конструкций при экстремальных условиях использования по месту внедрения в ряде организаций.

## **П.22. Акт внедрения результатов исследований напряжённо-деформированного состояния глубоководных иллюминаторов в Ленинградском институте точной механики и оптики**

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе Ленинградского института точной механики и оптики  
докт. техн. наук, профессор О. Ф. Немолочнов  
23.10.1986

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор Сумского филиала Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина,  
канд. техн. наук, доцент И. А. Ковалёв  
16.10.1986

**АКТ ВНЕДРЕНИЯ**

результатов исследований напряжённо-деформированного состояния глубоководных  
иллюминаторов

В соответствии с договором о творческом научном содружестве № 83-98 от 1 января 1984 г. между Ленинградским институтом точной механики и оптики и Сумским филиалом Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина по теме «Исследование свойств иллюминаторов для применения в глубоководных аппаратах» Сумским филиалом Харьковского политехнического института им. В. И. Ленина выполнен комплекс теоретических и экспериментальных исследований напряжённо-деформированного состояния светопрозрачных элементов. Разработанные на этой основе методики расчёта и рекомендации по проектированию и расчёту глубоководных иллюминаторов переданы в отраслевую лабораторию кафедры теории оптических приборов Ленинградского института

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 551/556

точной механики и оптики и использованы ею при создании новых глубоководных оптических систем.

Использование полученных результатов позволило усовершенствовать проектирование и расчёт глубоководных оптических систем, повысить качество создаваемых глубоководных оптических систем, повысить качество изображения глубоководных объектов.

Заведующий кафедрой теории оптических приборов, докт. техн. наук, профессор, лауреат Ленинской и Государственных премий М. М. Русинов

Докт. техн. наук, профессор, лауреат Государственных премий П. Д. Иванов

Заведующий кафедрой сопротивления материалов, канд. техн. наук, доцент И. Б. Каринцев  
Старший научный сотрудник Л. Г. Гелимсон

### **П.23. Акт внедрения результатов диссертационной работы в НИПИокеангеофизика ПО «Южморгеология»**

Министерство геологии СССР

«УТВЕРЖДАЮ»

Зам. директора НИПИокеангеофизика

А. С. Щербаков

13 января 1987 г.

АКТ ВНЕДРЕНИЯ

в НИПИокеангеофизика ПО «Южморгеология»

результатов диссертационной работы Гелимсона Л. Г.

12 января 1987 г. г. Геленджик

В соответствии с договором по теме 06.05.03.81-85 «Экспериментально-теоретические исследования, разработка и изготовление глубоководных боксов и стендов высокого давления для оптико-механических испытаний» Гелимсоном Л. Г. выполнены исследования напряжённо-деформированного состояния стеклоэлементов и его влияния на оптические свойства глубоководных иллюминаторов. Разработанные на этой основе метод проектирования иллюминаторов с учётом жёсткости и прочности стеклоэлементов, рекомендации по проектированию и новые конструкции иллюминаторов переданы в отдел фототелевизионных систем НИПИокеангеофизика ПО «Южморгеология» и использованы в комплексе «МИР» при глубоководных съёмках.

Использование полученных результатов позволило повысить качество изображения глубоководных объектов, увеличить достоверность получаемой информации и сократить время на проведение работ по дешифрированию экспонированного фотоматериала.

Благодаря этому в 1986 г. получен первичный годовой экономический эффект 28 (двадцать восемь) тысяч рублей. По служебным соображениям расчёт экономического эффекта не передаётся.

Доля автора в экономическом эффекте от внедрения диссертационной работы составляет 90 %, то есть 25200 (двадцать пять тысяч двести) рублей.

Заведующий отделом фототелевизионных систем канд. техн. наук А. М. Игнатов

Старший экономист А. П. Химченко

### **П.24. Акт внедрения результатов докторской диссертации в Институте проблем прочности АН Украины**

УТВЕРЖДАЮ

Директор

Института проблем прочности

АН Украины,

академик АН Украины

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 552/556

В. Т. Трощенко

26.10.1992 г.

### АКТ ВНЕДРЕНИЯ

в Институте проблем прочности АН Украины результатов докторской диссертации канд. техн. наук, ст. научн. сотрудника

Л. Г. Гелимсона

В соответствии с договором 63-01-09-86-90/48-С от 16 января 1986 г. (научный руководитель канд. техн. наук, доцент И. Б. Каринцев) по теме «Разработка методики исследования работоспособности изделий оболочечного типа диаметром до 1100 мм при внешнем гидростатическом давлении», отнесённой Президиумом АН Украины к категории важнейших, Сумским физико-технологическим институтом (бывшим филиалом Харьковского политехнического института) создан и внедрён в Институте проблем прочности АН Украины крупногабаритный стенд для испытаний внешним давлением до 60 МПа оболочек диаметром до 1200 мм и длиной до 1850 мм.

Ожидаемый экономический эффект (в ценах 1987 года) составил 860 (восемьсот шестьдесят) тысяч рублей.

Л. Г. Гелимсон в качестве ответственного исполнителя в 1986-88 гг. с помощью аналитических методов, разработанных на основе созданного им общего метода решения задач прочности ответственных элементов конструкций при типовых схемах их нагружения в технике высоких давлений, выполнил прочностные расчёты несущих деталей камеры, что значительно сократило сроки и стоимость разработки упомянутой темы.

Л. Г. Гелимсоном дана постановка задачи аналитических расчётов, выполнено курирование её решения с помощью метода МКЭ по программе «Ротор» Института проблем машиностроения АН Украины, а также проведён анализ результатов аналитических и численных расчётов. Отмеченное позволило осуществить расчёт прочности и долговечности несущих деталей камеры и согласовать его в бывшем ведущем отраслевом институте бывшего Союза – в ИркутскНИИХиммаше. На базе проектных расчётов, выполненных Л. Г. Гелимсоном, обоснованы оптимальные конструктивные и технологические решения камеры, что способствовало снижению её массы при заданной несущей способности и долговечности.

Настоящий акт не является основанием для взаимных финансовых расчётов между Институтом проблем прочности АН Украины, а также упомянутыми организациями или их правопреемниками.

Заведующий отделом 18,

канд. техн. наук, ст. научн. сотр. Ю. М. Родичев

Старший научный сотрудник,

канд. техн. наук Г. М. Охрименко

22.10.1992 г.

### Добавление к этому акту внедрения

Следует заметить, что в академическом журнале в обзорной статье

(Охрименко Г. М. Республиканский семинар «Основы проектирования, изготовления и эффективного применения прочных корпусных конструкций из стёкол и керамики для океанологических приборов» // Проблемы прочности. 1991. № 3. С. 94–95. С. 95)

опубликован отзыв о докладе Льва Григорьевича Гелимсона

«Применение сосудов высокого давления для лабораторных испытаний систем и элементов глубоководной техники / Л. Г. Гелимсон, В. В. Усенко, А. В. Васильев, М. В. Олефиренко, П. И. Хащина»

об опыте создания крупногабаритных сосудов высокого давления с использованием обобщённых аналитических методов расчёта напряжённо-деформированного состояния и прочности в диссертации Льва Григорьевича Гелимсона

«Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений»



Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 553/556

на соискание учёной степени доктора технических наук

и об опыте внедрения крупногабаритных сосудов высокого давления, в том числе в Институте проблем прочности Национальной Академии Наук Украины:

«В докладе Л. Г. Гелимсона, В. В. Усенко, А. В. Васильева, М. В. Олефиренко и П. И. Хащины «Применение сосудов высокого давления для лабораторных испытаний систем и элементов глубоководной техники» освещён опыт создания и внедрения сосудов высокого давления для испытания оболочечных конструкций из силикатных и керамических материалов. Описанные камеры, одна из которых позволяет испытывать изделия диаметром до 1200 мм и длиной до 1800 мм внешним давлением до 60 МПа, выгодно отличаются от известных меньшей металлоёмкостью и простотой в обслуживании. Широкое внедрение таких камер будет способствовать дальнейшему улучшению эксплуатационных свойств оболочечных конструкций.»

Старший научный сотрудник  
Института проблем прочности  
Национальной Академии Наук Украины  
кандидат технических наук  
Григорий Михайлович Охрименко

## **П.25. Справка об использовании результатов диссертационной работы в Сумском физико-технологическом институте**

УТВЕРЖДАЮ

Ректор Сумского физико-технологического института  
академик ИАН Украины, профессор И. А. Ковалёв  
28.10.1992

СПРАВКА

об использовании результатов диссертационной работы  
канд. техн. наук, ст. научн. сотр. Л. Г. Гелимсона  
на соискание учёной степени  
доктора технических наук

В 1983-1989 гг. кафедрой сопротивления материалов в порядке выполнения хозяйственных тем высокого уровня координации (научный руководитель зав. кафедрой, канд. техн. наук, доц. И. Б. Каринцев, зав. лабораторией канд. техн. наук А. А. Каминский) был создан и внедрён ряд сосудов высокого давления диаметрами полости до 1200 мм, длинами до 2000 мм на рабочие давления до 200 МПа (крупногабаритные – до 60 МПа) в ПО «Южморгеология» (Геленджик), СКБ техники морских геологоразведочных работ (Мурманск), НИПИ Океанмаш (Днепропетровск), Институте проблем прочности АН Украины, Институте проблем машиностроения АН Украины и других организациях с общим годовым экономическим эффектом 10.7 млн. руб.

Л. Г. Гелимсон в качестве ответственного исполнителя выполнил аналитическими методами проектные и поверочные расчёты прочности этих сосудов, а для двух крупногабаритных курировал расчёты МКЭ по программе «Ротор-К» Института проблем машиностроения АН Украины и согласовал расчёты прочности в ведущей организации по сосудам высокого давления – ИркутскНИИхиммаш.

Настоящая справка выдана для предъявления по месту защиты докторской диссертации Л. Г. Гелимсона на основании хранящихся в Сумском физико-технологическом институте подлинных актов внедрения сосудов высокого давления.

Зав. кафедрой сопротивления материалов,  
канд. техн. наук, доцент И. Б. Каринцев  
Доцент, канд. техн. наук, ст. научн. сотр. А. А. Каминский

## **П.26. Справка об использовании результатов докторской диссертации в Научно-производственном предприятии «Сплав-Т»**

### **СПРАВКА**

об использовании в Научно-производственном предприятии «Сплав-Т»

результатов докторской диссертации

кандидата технических наук, ст. научного сотрудника г. Гелимсона Л. Г.

В настоящее время в этиленовых компрессорах сверхвысокого давления ( $p \geq 1200$  кг/см<sup>2</sup>) используются твердосплавные плунжеры, изготовленные иносфирмами, в частности фирмой "Sandvik", Швеция.

При решении задачи организации отечественного производства твердосплавных плунжеров группой работников ВНИИкомпрессормаш предложена конструкция сборного плунжера взамен монолитного, на которую получен ряд авторских свидетельств.

Конструкция сборного плунжера состоит из твердосплавной втулки, стянутой стальным сердечником, и центрирующих твердосплавную втулку и стальные части плунжера втулок.

Сборный плунжер по сравнению с монолитным обладает целым рядом преимуществ, основные из них:

- существенное снижение расхода твёрдого сплава;
- повышение износостойкости сальниковых уплотнений;
- повышение безопасности работы компрессора.

В разработке методики расчётов плунжеров сборной конструкции Гелимсон Л. Г. в качестве ответственного исполнителя НИР принимал непосредственное участие. Им разработана методика прочностного расчёта составного плунжера с учётом концентрации напряжений в галтели на основе обобщения аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений.

Методика позволяет реализовать потенциальные преимущества составного плунжера перед цельными аналогами за счёт оптимального выбора осевого натяга между сердечником и рабочими втулками, а также радиального зазора между последними и сердечником. Методика используется в качестве научных основ рационального проектирования составных плунжеров.

Плунжеры используются на Северодонецком ПО «Азот» и Новополоцком ПО «Полимир». Заключён договор на изготовление партии плунжеров для Сумгайтского ПО «Оргсинтез», намечается изготовление для Новополоцкого ПО «Полимир».

В настоящее время экономия валютных средств от изготовления опытных образцов составила более 5 млн. рублей в год.

При выполнении работ по выпуску запланированных партий плунжеров экономия составит 15 млн. рублей в год.

Настоящая справка выдана для предъявления по месту защиты г. Гелимсоном Л. Г. докторской диссертации.

Директор арендного Научно-производственного предприятия «Сплав-Т» В. М. Данько

Исполнитель: ведущий инженер

Богута А. В.

30.11.1992

## **П.27. Акт внедрения результатов докторской диссертации в НИИкомпрессормаш**

УТВЕРЖДАЮ

Директор НИИкомпрессормаш Н. Д. Федоренко

25.06.1993 г.

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 555/556

### АКТ ВНЕДРЕНИЯ

результатов докторской диссертации ведущего научного сотрудника  
Л. Г. Гелимсона

При создании НИИкомпрессором поршневого компрессора высокого давления одной из основных научно-технических проблем явилось проектирование двухслойного цилиндра конечной длины с концентраторами напряжений, предназначенного для экстремальных условий эксплуатации при циклических изменениях высоких удельных нагрузок. Известные аналитические и численные методы оказались недостаточными для решения этой проблемы. Л. Г. Гелимсон применил к ней созданные им обобщённые аналитические методы решения задач прочности, в частности обобщённые методы решения систем функциональных уравнений, аналитический метод макроэлементов с обобщёнными формулами Ламе и Гадолина для толстостенных цилиндров, обобщённые критерии предельного состояния различных материалов при нестационарном нагружении, а также обобщённые запасы прочности при сложных нагружениях элементов конструкций. Эти методы позволили решить до конца в общем виде задачу прочности в пространственной постановке с учётом реальной конфигурации цилиндра, технологий тепловой сборки или запрессовки с радиальным натягом, а также специфики нагружения цилиндра. В результате научно обоснована оптимальная конструкция двухслойного цилиндра и применена ресурсосберегающая технология его создания с использованием имеющихся конструктивных элементов и конструкционных материалов. Обобщённые аналитические методы решения задач прочности позволили успешно решить актуальную проблему создания одного из наиболее ответственных элементов техники высоких давлений на стадии его проектирования. Представленный Л. Г. Гелимсоном расчёт прочности составного цилиндра включен в соответствующий комплект технической документации как его неотъемлемая составная часть.

Внедрение цилиндра даст значительный экономический эффект, количественная оценка которого затруднительна в условиях нынешних инфляционных процессов.

Акт выдан для предъявления по месту защиты диссертации.

Зав. отделом малых и средних поршневых компрессоров В. Е. Шуваев  
Зав. отделом металловедения и выносливости материалов А. Н. Нацвин

## **П.28. Акт внедрения результатов докторской диссертации в Украинском Государственном институте стекла**

УТВЕРЖДАЮ

Зам. директора

Украинского Государственного института стекла

А. М. Райхель

26.11.1993

### АКТ ВНЕДРЕНИЯ

результатов докторской диссертации  
ведущего научного сотрудника

Л. Г. ГЕЛИМСОНА

Л. Г. Гелимсоном переданы в Украинский Государственный институт стекла созданные им обобщённые аналитические методы решения фундаментальных и прикладных проблем, а также результаты приложения этих методов к ряду конкретных инженерных задач. Эти результаты используются в Институте для эффективного решения сложных научно-технических проблем, неразрешимых с помощью известных методов. Аналитический метод макроэлементов, методы обобщения и коррекции критериев предельного состояния для различных материалов при нестационарных нагрузках и методы разделения коэффициентов запаса для искомых параметров позволяют рационально управлять напряжённо-

Ph. D. & Dr. Sc. Lev Grigorevic Gelimson. Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений: дис. ... докт. техн. наук: 01.02.06. Киев: Институт проблем прочности Академии наук Украины, 1992, 1993. 556/556

деформированными состояниями и прочностью элементов конструкций, в частности из стекла и стеклокристаллических материалов. Принципы допустимой простоты, обобщённые аналитические методы решения систем функциональных уравнений, оценки точности и оптимизации их псевдорешений, а также оценки и коррекции погрешностей измерений применяются для эффективной аналитической аппроксимации дискретных экспериментальных данных. В частности, под авторским надзором Л. Г. Гелимсона выполняется степенная аппроксимация данных по диффузионным процессам на границе раздела плёнка-подложка с использованием метода выравнивания относительных погрешностей уравнений системы.

Достаточно простые и эффективные обобщённые аналитические методы Л. Г. Гелимсона позволяют существенно снизить трудоёмкость исследований и приносят значительный экономический эффект, количественная оценка которого затруднена инфляцией.

Заведующий научно-техническим отделом В. И. Борулько  
Заведующая сектором плёночных покрытий А. Б. Аткарская

#### CONTRIBUTOR'S PROFILE & ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Name	Gelimson Lev Grigorevic, literary and artistic pseudonym Leo Himmelsohn
Ф.И.О. (полностью)	Гелимсон Лев Григорьевич, литературно-художественный псевдоним Лео Гимельзон
Degree Current position	Ph. D. & Dr. Sc. in Engineering in the section "Physical and Mathematical Sciences" by the Highest Attestation Commission Classifier Director Director, Producer, Literary and Artistic Manager
Учёная степень Должность	доктор технических наук в разделе «Физико-математические науки» по Классификатору Высшей Аттестационной Комиссии директор директор, продюсер и литературно-художественный руководитель
Institutional affiliation	Academic Institute for Creating Universal Sciences, Munich, Germany Multilingual Literary and Musical Theater, Munich, Germany
Место работы	Академический институт создания всеобщих наук, Многоязычный литературно-музыкальный театр, Мюнхен, Германия
e-mail, эл. почта	Leohi@mail.ru
Postal address Почтовый адрес	Ph. D. & Dr. Sc. Lev Gelimson, Westendstrasse 68, D-80339 Munich, Germany
Science Index (SPIN)	8046-6818
Scopus ID	6505889792
Researcher ID	R-5007-2016
ORCID ID	0000-0003-0627-84