ОТЗЫВ
официального оппонента
заведующего кафедрой «Сопротивление материалов»
Киевского международного университета гражданской авиации,
доктора технических наук, профессора
Николая Максимовича Бородачёва

о диссертации
Льва Григорьевича Гелимсона
«Обобщение аналитических методов решения задач прочности типовых элементов конструкций в технике высоких давлений»
на соискание учёной степени доктора технических наук

Диссертация Льва Григорьевича Гелимсона посвящена разработке обобщённых аналитических методов применительно к получению решений задач прочности для пространственных осесимметричных упругих элементов конструкций в технике высоких гидростатических давлений. Такие решения особенно удобны для выбора рациональных значений исходных данных на стадии эскизного проекта, для аналитического тестирования численных методов и для математической обработки экспериментальных данных. Но подобных решений нетривиальных пространственных задач известно крайне мало. Поэтому данная работа является полезным дополнением известных методов и весьма актуальна в теоретическом и прикладном отношениях.

Работа соответствует профилю специальности 01.02.06 «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры».

Единство диссертации обеспечивается лежащим в её основе вполне естественным принципом допустимой простоты, использованием аналитических методов расчёта и общностью предмета исследований прочности пространственных элементов конструкций в технике высоких давлений. Достаточно полное исследование возникающих математических проблем придаёт известную замкнутость этой многоплановой работе.

Научной новизной обладают обобщённые математические методы решения систем функциональных уравнений и оценки погрешностей неточных равенств и псевдорешений, аналитический метод макроэлементов и метод типизации схем нагружения пространственных тел для определения напряжений в них, способы приведения и коррекции критериев предельного состояния, метод индивидуализации коэффициентов запаса для различных исходных параметров задачи прочности, методы оценки и коррекции погрешностей усреднения при измерениях неоднородных распределений, а также результаты приложения этих методов к решению задач прочности для пространственных упругих тел.

Для решения систем функциональных уравнений, обобщающих краевые задачи математической физики, предложены четыре обобщённых математических метода.

Линейно-комбинационный метод дискретизирует континуальную проблему с использованием полной линейной независимости координатных функций без излишних требований к ним.

Парциальный метод разбивает систему неравносложных уравнений на разрешающую возможно более полную подсистему относительно простых уравнений системы, формирующую частичное решение всей системы, и на оценочную подсистему наиболее сложных уравнений, не влияющую на формирование частичного решения и лишь оценивающую его погрешность.

Метод наименьших нормированных степеней обобщает и корректирует метод наименьших квадратов и позволяет улучшать поевдорещение в процессе итераций. При этом используются предложенные методы оценки погрешностей неточных равенств и псевдорешений.

Аналитический метод макроэлементов позволяет получать простейшие приближённые аналитические решения задач для пространственных тел при кусочно-гладких поверхностных нагрузках. Степенная модификация предложенного метода основана на полученных линейно-комбинационным методом общих решениях гармонического и бигармонического уравнений в классах степенных рядов для функций напряжений Папковича-Нейбера в трёхмерной упругой задаче и Лява в осесимметричной упругой задаче. Интегральная модификация получена приложением парциального метода к системе уравнений осесимметричной упругой задачи в напряжениях. Получено приближённое обобщение решения Ламе. Повышение эффективности аналитического метода макроэлементов достигнуто с помощью метода типизации схем нагружения пространственного тела и определением такого основного типа схем, что линейные их комбинации исчерпывают общий тип схем нагружения рассматриваемого тела.

Способы приведения и коррекции критериев предельного состояния позволяют предложить возможные формулировки силовых критериев предельного состояния различных материалов при статическом и нестационарном нагружениях, в частности обеспечить чувствительность критериев к гидростатическим растяжениям и сжатиям.

Поставлен и решён ряд задач статической и усталостной прочности для пространственных тел, в том числе контактных задач с первоначально неопределёнными участками сцепления и проскальзывания. Это относится к задачам для цилиндрического тела под равномерным давлением на один торец и возможным противодавлением на кольцевую периферическую часть другого торца, для усечённого конического тела под равномерными давлениями на торцы, для стянутого пакета цилиндрических деталей и для составного цилиндра при технологиях тепловой сборки и запрессовки. Применительно к последнему получено существенное обобщение на случай конечной длины цилиндра и циклического нагружения. Показано, что простые приближённые аналитические методы возможны и эффективны и в задачах прочности для тел усложнённых конфигураций с концентраторами напряжений. Полученные представления позволили предложить ряд новых конструкций иллюминаторов, сосудов и других объектов применительно к высоким гидростатическим давлениям, защищённых авторскими свидетельствами.

Достоверность и обоснованность предложенных методов и результатов их применения обеспечивается их взаимозаменяемостью, согласованием полученных результатов в пределах инженерной точности с известными, а также с численными по апробированным программам МКЭ и с экспериментальными при использовании современного оборудования.

Ценностью для науки и практики обладают полученные общие решения гармонического и бигармонического уравнений в классах степенных рядов. Аналитический метод макроэлементов и метод типизации схем нагружения являются полезными дополнениями МКЭ и принципа суперпозиции и дают простые расчётные формулы для напряженно-деформированных состояний пространственных упругих элементов конструкций. Полученные обобщения решений Ламе, Гадолина и другие простые приближённые решения задач механики деформируемого твёрдого тела и прочности полезны для аналитического тестирования численных методов и позволяют установить основные закономерности деформирования и разрушения пространственных элементов конструкций. Полезны новые рациональные конструкции иллюминаторов, сосудов и других объектов техники высоких давлений, защищённые авторскими свидетельствами.

Методы и результаты исследований внедрены в Институте проблем прочности АН Украины, Институте проблем машиностроения АН Украины, Санкт-Петербургском Институте точной механики и оптики, НИПИОквангеофизике, НИИ компрессорного машиностроения, Украинском Государственном институте стекла.

Замечания по работе:

1. В работе предложен новый способ оценки относительной погрешности приближённых решений. Относительную погрешность a = b предлагается определять по формуле

$$\delta = |a - b|/(|a| + |b|) \quad (1)$$

вместо известной формулы

$$\delta = |a - b|/|a|. (2)$$

При применении формул (1) и (2) погрешность получается разной, причём по формуле (1) она почти вдвое меньше. То есть в некоторых случаях достаточно грубое решение может сойти за приемлемое. Не спасает и апелляция к функциональному анализу, так как основная идея остаётся в силе.

2. В работе широко используется так называемый парциальный метод решения задач теории упругости. Он заключается в разбиении исходной системы дифференциальных уравнений на две подсистемы. Первая подсистема включает в себя наиболее простые уравнения и используется для нахождения решения задачи. Вторая же подсистема не участвует в процессе построения решения и используется только для оценки погрешности решения. Так как уравнений первой подсистемы недостаточно для нахождения всех неизвестных функций, то в диссертации предлагается для нахождения некоторых неизвестных функций использовать принцип допустимой простоты. При использовании такого подхода решение получается весьма приближённым, так как выражениями для некоторых неизвестных функций нужно задаваться (причём довольно простыми) и, кроме того, полученное решение не будет удовлетворять всем исходным дифференциальным уравнениям. Точность полученных таким способом приближённых решений можно оценить, лишь сравнивая эти решения с точными решениями, а не подставляя в неиспользованные уравнения. Научную значимость такого подхода не следует преувеличивать, так как в настоящее время можно получать точное решение подобных задач, используя готовые программы решения задач теории упругости с использованием МКЭ, МГЭ, метода потенциала и др.

3. В диссертации рассмотрен также способ обобщения критериев предельных состояний. Основная идея обобщения заключается в том, что все напряжения приводятся к безразмерному виду путём деления положительных главных напряжений на предельное напряжение при растяжении, а отрицательных – на предельное напряжение при сжатии. Эта идея впервые осуществлена в теории прочности Мора, которую можно записать в виде

$$\sigma_e{}^\circ = \sigma_1/\sigma_t - \sigma_3/\sigma_c \leq 1,$$

что совпадает с соответствующей формулой в диссертации. Поэтому в данном случае следует говорить не о приоритете соискателя, а лишь о дальнейшем развитии им этого полезного обобщения.

Характеризуя работу в целом, следует отметить, что диссертация Льва Григорьевича Гелимсона представляет собой самостоятельно выполненное завершённое исследование, в котором осуществлено теоретическое обобщение и решение крупной научной проблемы, имеющей важное народнохозяйственное значение. Исследования, представленные в диссертации, составляют важный этап, связанный с разработкой методов решения задач прочности типовых злементов конструкций в технике высоких давлений.

Основное содержание диссертации изложено в научной монографии, двух книгах и более чем в десяти статьях. Кроме того, предложенные рациональные конструкции и способы испытаний в технике высоких давлений защищены 30 авторскими свидетельствами. Работа достаточно апробирована на 30 Всесоюзных и Международной научно-технических конференциях. При этом отмечена новизна и нестандартность подходов, позволивших получить простые аналитические решения сложных задач. Основные выводы диссертации отражают наиболее важные результаты работы. Основное содержание диссертации достаточно полно отражено в автореферате.

Учитывая вышеизложенное, считаю, что диссертационная работа Льва Григорьевича Гелимсона выполнена на достаточно высоком научном уровне и отвечает требованиям «Положення про порядок присудження наукових ступенів і присвоєння вчених звань України», а её автор заслуживает присуждения учёной степени доктора технических наук по специальности 01.02.06 – «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры».

Официальный оппонент

Заведующий кафедрой «Сопротивление материалов»
Киевского международного университета гражданской авиации,
доктор технических наук, профессор
Николай Максимович Бородачёв

Подпись Бородачёва Н. М. удостоверяю
Учёный секретарь Совета
Киевского международного университета гражданской авиации
Л. С. Братица

Ответы (без кавычек)
благодарного диссертанта Льва Григорьевича Гелимсона
на замечания (в кавычках):

«1. В работе предложен новый способ оценки относительной погрешности приближённых решений. Относительную погрешность a = b предлагается определять по формуле

$$\delta = |a - b|/(|a| + |b|) \quad (1)$$

вместо известной формулы

$$\delta = |a - b|/|a|. \quad (2)$$

При применении формул (1) и (2) погрешность получается разной, причём по формуле (1) она почти вдвое меньше. То есть в некоторых случаях достаточно грубое решение может сойти за приемлемое. Не спасает и апелляция к функциональному анализу, так как основная идея остаётся в силе.»

Диссертант Лев Григорьевич Гелимсон:

1. Выражаю искреннюю признательность за столь полезное замечание, дающее возможность дополнительно прояснить сделанное в диссертации.

Во-первых, в диссертации открыто и доказано, что само понятие приближения, в частности приближённого отношения, в том числе приближённого равенства, не универсально, условно, субъективно и является нечётким и плохо определённым, что доказывается возможностью сколь угодно малого различия между приближением и неприближением при любой попытке добиться именно чёткого их различения между собой (как парадокс неустранимого противоречия между непрерывностью погрешности и дискретностью, а именно грубейшей двоичностью, классификации. Он даже бесконечно сильнее связанного с неопределённостью понятия кучи дважды различно дискретного знаменитого древнегреческого парадокса кучи: одно зерно не составляет кучи зерна, два зерна не составляют кучи зерна, и так далее, миллион зёрен составляют кучу зерна; какое именно по счёту зерно делает ещё не кучу зерна уже кучей зерна). Действительно, если для определённости, простоты и наглядности примера ориентироваться, скажем, на инженерную точность, а именно на допускаемую инженерную относительную погрешность 10 %, и полагать вначале, что левая часть отношения меньше единичной правой части, то на первом этапе с шагом длиной $1/10^1$ отношение $0.9 \approx 1$ ещё можно считать именно приближением, в данном случае приближённым равенством, и использовать указанный знак ≈ приближённого равенства. А вот отношение $0.8 \neq 1$ уже нельзя считать именно приближением, в данном случае приближённым равенством, и нельзя использовать знак ≈ приближённого равенства, так что приходится считать отношение $0.8 \neq 1$ неприближением, просто неравенством и использовать указанный знак ≠ неравенства. То есть на примере этих двух отношений модуль разности приближения и неприближения на первом этапе составляет $|0.9 - 0.8| = 1/10^1$. На втором этапе отрезок [0.8, 0.9] разбивается на 10 шагов длиной $1/10^2$ и выбирается тот шаг, который от неприближения ведёт к приближению. Если продолжать настаивать ровно на десяти процентах допустимой относительной погрешности, то это шаг [0.89, 0.9]. То есть модуль разности приближения и неприближения на втором этапе составляет |0.9 - 0.89| = $1/10^2$. Продолжая этот процесс далее, получаем на этапе с номером n шаг $[0.9 - 1/10^n, 0.9]$ длиной $1/10^n$ и модуль разности приближения и неприближения $|0.9 - (0.9 - 1/10^n)| = 1/10^n$, систему вложенных отрезков с единственной неподвижной точкой 0.9 и сколь угодно малый шаг между неприближением и приближением. Если, наоборот, полагать, что левая часть отношения больше единичной правой части, то аналогично получится единственная неподвижная точка 1.1. В итоге для нестрогой (включающей и точность) приближённости отношения с наперёд заданной единичной правой частью и наперёд заданной относительной погрешностью 10 % необходима и достаточна, что естественно, принадлежность левой части отношения отрезку [0.9, 1.1], причём сколь угодно малый выход левой части отношения за пределы этого отрезка ведёт к переходу от приближения к неприближению. На произвольный общий случай любой пары действительных значений этот частный пример обобщается очевидным линейным преобразованием, чем и завершается доказательство.

Во-вторых, в диссертации обобщены отношения дизъюнктивными или конъюнктивными соединениями знаков отношений и/или модификаторов отношений с известными дизъюнктивными частными случаями ≤ (<=) и ≥ (>=). В частности, произвольное отношение R конъюнктивно обобщается формальным (проблематичным; верным или неверным) отношением R? с добавлением вопрошающего (формализующего, проблематизующего, вводящего независимость от осуществления, истинности) модификатора ?, например справа или слева на том же уровне или нижним либо верхним указателем (индексом). В частности, отношение = равенства обобщается отношением =? приравнивания (формального, проблематичного равенства, верного или неверного). А отношения <, >, ≤, ≥ строгого или нестрогого неравенства обобщаются отношениями <?, >?, ≤?, ≥? формального (проблематичного, верного или неверного) строгого или нестрогого неравенства соответственно. Полезными примерами дизъюнктивных соединений знаков отношений являются <≈, =≈, >≈.

В-третьих, в диссертации создана общая теория анализа приемлемости методов обработки данных с открытыми и доказанными принципиальными изъянами абсолютной и относительной погрешностей и якобы незаменимого классического метода наименьших квадратов Гаусса и Лежандра, причём за пределами крайне узких областей приемлемости (пригодности) возможны неоднозначность, неопределённость, неинвариантность и даже извращения действительности. В частности, относительная погрешность принципиально не соответствует своему замыслу о собственных пределах между нулём и единицей, нелогична в смысле произвольного выхватывания лишь одного элемента равенства для модуля в знаменателе, необоснованна в смысле игнорирования необходимого (для осуществления своего замысла) неравенства треугольника, а поэтому неправильна, определена лишь для двухэлементного формального (условного, независимого от истинности) приравнивания, для него двузначна (двусмысленна), вопреки замыслу может превышать единицу и быть бесконечной и вообще неопределённой при большем двух числе элементов приравнивания (в последних двух примерах ниже):

$$\delta_{a =? b,\, a} = ||a - b||/||a|| \neq ||a - b||/||b|| = \delta_{a =? b,\, b},$$

$$\delta_{1 =? 0,\, 0} = 1/0 = \infty,$$

$$\delta_{1 =? -1,\, 1} = \delta_{1 =? -1,\, -1} = 2,$$

$$\delta_{100 - 99 =? 0}\ ?,\ \delta_{1 - 2 + 3 - 4 =? -1}\ ?$$

При этом относительная погрешность никоим образом не отрицается, напротив, именно правильно используется в пределах её применимости. В частности, здесь показано избавление относительной погрешности от её двусмысленности посредством параметризации выбранным выражением a или b для модуля (нормы) в знаменателе. Для двухэлементного формального равенства a =? b это даёт взамен единственной двусмысленной относительной погрешности δ две (по числу элементов формального равенства) различные однозначные относительные погрешности $\delta_{a =? b,\, a}$ и $\delta_{a =? b,\, b}$ при сохранении остальных указанных недостатков.

Условно пригодная, не универсальная, нелогичная, двусмысленная, вопреки замыслу могущая превышать единицу и быть неограниченной относительная погрешность как метод оценивания математически строго проанализирована, исправлена и для любого математического моделирования обобщена безусловно пригодной, универсальной, логичной, однозначной, по замыслу всегда в пределах от нуля до единицы благодаря неравенству треугольника всеобщей погрешностью как методом оценивания.

Непременно дополнительно к верно используемой в пределах её применимости относительной погрешности в настоящей диссертации введена как инвариантная мера неточности, правильно обобщающей нечёткую приближённость, всеобщая погрешность на отрезке [0, 1], в частности линейная, квадратичная и с максимумом, с учётом частного случая неравенства Коши–Буняковского для знаменателей и с введённым альтернативным делением

$$E_{a =? b} = ||a - b||//(||a|| + ||b||) \geq E_{a =? b, Q} = ||a - b||//[2(||a||^2 + ||b||^2)]^{1/2} \geq E_{a =? b, M} = ||a - b||//(2\max\{||a||,||b||\})$$

$((a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1{}^2 + a_2{}^2 + ... + a_n{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2 + ... + b_n{}^2)$, $a_i = ||A_i||$, $b_i = 1$, $i = 1, 2, ... , n$;
$c//d = c/d$ при $c \neq 0$; $c//d = 0$ при $c = 0$ и любом d, даже нулевом или не существующем):

$$E_{0 =? 0} = 0;\ E_{0 =? 0, Q} = 0;\ E_{0 =? 0, M} = 0;$$
$$E_{1 =? 0} = 1;\ E_{1 =? 0, Q} = 1/2^{1/2};\ E_{1 =? 0, M} = 1/2;$$
$$E_{a =? 0} = 1\ (a \neq 0);\ E_{a =? 0, Q} = 1/2^{1/2}\ (a \neq 0);\ E_{a =? 0, M} = 1/2\ (a \neq 0);$$
$$E_{1 =? -1} = 1;\ E_{1 =? -1, Q} = 1;\ E_{1 =? -1, M} = 1;$$
$$E_{a =? -a} = 1\ (a \neq 0);\ E_{a =? -a, Q} = 1\ (a \neq 0);\ E_{a =? -a, M} = 1\ (a \neq 0);$$
$$E_{a =? b} = 1\ (a \geq 0 \geq b,\ a > b);\ E_{a =? b, Q} = E_{a =? a\char`^2/b, Q}\ (a \neq 0 \neq b).$$

По принципу допустимой простоты выбирается именно линейная всеобщая погрешность $E_{a =? b}$, тем более что она всегда не меньше квадратичной $E_{a =? b, Q}$ и $E_{a =? b, M}$ с максимумом и поэтому даёт непременно более жёсткую оценку неточности и чрезвычайно естественно и безупречно обобщается на любое количество n алгебраических слагаемых в левой части формального равенства с нулевой правой частью, в частности комплексных чисел, векторов и функций:

$$\Sigma_{i=1}{}^n a_i =? 0;\ E_{\Sigma a(i=1,2,...,n) =? 0} = ||\Sigma_{i=1}{}^n a_i||//\Sigma_{i=1}{}^n||a_i|| \in [0, 1].$$

Однако линейная всеобщая погрешность $E_{a =? b}$ нечувствительно единична при отсутствии одинаковых знаков a и b. Бесконечно малую чувствительность при отсутствии одинаковых знаков a и b можно придать линейной всеобщей погрешности $E_{a =? b}$ добавлением к её знаменателю строго положительной бесконечно малой ε с избавлением от потребности в именно альтернативном делении, с возможным переходом к пределу по строго положительной бесконечно малой ε и с возможностью естественного обобщения на любое количество n алгебраических слагаемых в левой части формального равенства с нулевой правой частью, в частности комплексных чисел, векторов и функций:

$$E_{a =? b, \varepsilon} = ||a - b||/(||a|| + ||b|| + \varepsilon) \in [0, 1],$$
$$E_{a =? b} = \lim_{\varepsilon\to+0} ||a - b||/(||a|| + ||b|| + \varepsilon) = ||a - b||//(||a|| + ||b||) \in [0, 1],$$
$$E_{a =? b} = ||a - b||/(||a|| + ||b|| + 0) = ||a - b||//(||a|| + ||b||) \in [0, 1];$$
$$\Sigma_{i=1}{}^n a_i =? 0;\ E_{\Sigma a(i=1,2,...,n) =? 0, \varepsilon} = ||\Sigma_{i=1}{}^n a_i||/(\Sigma_{i=1}{}^n||a_i|| + \varepsilon) \in [0, 1],$$
$$\Sigma_{i=1}{}^n a_i =? 0;\ E_{\Sigma a(i=1,2,...,n) =? 0} = \lim_{\varepsilon\to+0} ||\Sigma_{i=1}{}^n a_i||/(\Sigma_{i=1}{}^n||a_i|| + \varepsilon) = ||\Sigma_{i=1}{}^n a_i||//\Sigma_{i=1}{}^n||a_i|| \in [0, 1],$$
$$\Sigma_{i=1}{}^n a_i =? 0;\ E_{\Sigma a(i=1,2,...,n) =? 0} = ||\Sigma_{i=1}{}^n a_i||/(\Sigma_{i=1}{}^n||a_i|| + 0) = ||\Sigma_{i=1}{}^n a_i||//\Sigma_{i=1}{}^n||a_i|| \in [0, 1].$$

При отсутствии перехода к пределу линейная всеобщая погрешность E_ε с использованием строго положительной бесконечно малой ε оказывается не постоянной, а бесконечно мало переменной, или почти постоянной, или квазиконстантой, определяемой как величина, для которой существует такая постоянная, являющаяся пределом этой величины, что разность между этими величиной и постоянной является бесконечно малой. Подобная ситуация обычна для конечных пределов. Необычна здесь переменная, хотя и бесконечно мало переменная, оценка E_ε постоянного предмета. Пределом линейной всеобщей погрешности E_ε с использованием строго положительной бесконечно малой ε оказывается линейная всеобщая погрешность E без использования строго положительной бесконечно малой ε и поэтому с использованием альтернативного деления во избежание деления на нуль.

При потребности в конечной чувствительности при отсутствии одинаковых знаков a и b могут использоваться несколько более сложные и дающие более мягкую оценку неточности квадратичная всеобщая погрешность $E_{a =? b, Q}$ или всеобщая погрешность $E_{a =? b, M}$ с максимумом. Для любого количества n действительных алгебраических слагаемых в левой части формального равенства

$$\Sigma_{i=1}^{n} a_i =? 0$$

с нулевой правой частью можно каждое из слагаемых расположить в той части формального равенства, в которой действительное алгебраическое слагаемое непременно неотрицательно, затем просуммировать каждую из этих частей, обозначить сумму в левой части через a и сумму в правой части через b, а теперь применить соответствующую формулу

$$E_{a =? b, Q} = ||a - b||//[2(||a||^2 + ||b||^2)]^{1/2} \in [0, 1],$$
$$E_{a =? b, M} = ||a - b||//(2\max\{||a||, ||b||\}) \in [0, 1]$$

для двух элементов формального равенства. Для любого количества n алгебраических слагаемых, в частности комплексных чисел, векторов и функций, в левой части формального равенства

$$\Sigma_{i=1}^{n} a_i =? 0$$

с нулевой правой частью можно определить квадратичную всеобщую погрешность $E_{\Sigma a(i=1,2,...,n) =? 0, Q}$ или всеобщую погрешность $E_{\Sigma a(i=1,2,...,n) =? 0, M}$ с максимумом как максимум двухэлементных квадратичных всеобщих погрешностей $E_{a =? b, Q}$ или максимум двухэлементных всеобщих погрешностей $E_{a =? b, M}$ с максимумом для конечного множества всевозможных распределений n алгебраических слагаемых по частям формального равенства, причём для каждого из распределений следует просуммировать каждую из этих частей, обозначить сумму в левой части через a и сумму в правой части через b, а теперь применить соответствующую формулу

$$E_{a =? b, Q} = ||a - b||//[2(||a||^2 + ||b||^2)]^{1/2} \in [0, 1],$$
$$E_{a =? b, M} = ||a - b||//(2\max\{||a||, ||b||\}) \in [0, 1]$$

для двух элементов формального равенства. Но также можно и сразу применить более общую соответствующую формулу

$$\Sigma_{i=1}^{n} a_i =? 0;\ E_{\Sigma a(i=1,2,...,n) =? 0, Q} = ||\Sigma_{i=1}^{n} a_i||//(n\Sigma_{i=1}^{n}||a_i||^2)^{1/2} \in [0, 1],$$
$$\Sigma_{i=1}^{n} a_i =? 0;\ E_{\Sigma a(i=1,2,...,n) =? 0, M} = ||\Sigma_{i=1}^{n} a_i||//(n \max\{||a_1||, ||a_2||, ... , ||a_n||\}) \in [0, 1],$$

причём первую из них с учётом частного случая неравенства Коши–Буняковского.

Наряду с обычной нелогичной двусмысленной относительной погрешностью выше были дополнительно предложены две хотя бы частично усовершенствованные именно однозначные относительные погрешности:

левочастная относительная погрешность

$$\delta_{a =? b, a} = ||a - b||/||a||;$$

правочастная относительная погрешность

$$\delta_{a =? b, a} = ||a - b||/||b||.$$

Их дальнейшее усовершенствование достигается исключением деления на нуль благодаря использованию введённого альтернативного деления:

левочастная альтернативно относительная погрешность

$$\delta_{a =? b, a, //} = ||a - b||//||a|| \in [0, +\infty);$$

правочастная альтернативно относительная погрешность

$$\delta_{a =? b, a, //} = ||a - b||//||b|| \in [0, +\infty).$$

В последних формулах справа указаны множества значений соответствующих относительных погрешностей. Стремление их к плюс бесконечности осуществляется при стремлении буквы в знаменателе к нулю, тогда как другая буква сохраняет конечное ненулевое значение. Нелогичность обычной и этих двух относительных погрешностей заключается в том, что у них в числителе используются оба элемента формального равенства, а в знаменателе только один из этих элементов при отсутствии какой бы то ни было зависимости от другого элемента. Поэтому дальнейшее логичное усовершенствование относительных погрешностей осуществляется заменой (в знаменателе) нормы одного из элементов формального равенства некоторой функцией именно норм

$$c = ||a||,$$
$$d = ||b||$$

обоих элементов формального равенства, причём равной общему значению этих норм при условии равенства норм обоих элементов формального равенства. Таковы, в частности, классические средние двух неотрицательных чисел c, d с классическими неравенствами между этими средними:
среднее гармоническое, усовершенствованное исключением деления на нуль благодаря использованию введённого альтернативного деления,

$$H = 2cd//(c + d);$$

среднее геометрическое

$$G = (cd)^{1/2};$$

среднее арифметическое

$$A = (c + d)/2;$$

среднее квадратическое

$$Q = [(c^2 + d^2)/2]^{1/2};$$

$$H \leq G \leq A \leq Q.$$

Такова также функция минимума

$$m = \min\{c, d\}$$

этих чисел, которая не больше всех этих средних. Действительно, одно из этих входящих в эту функцию симметрично двух неотрицательных чисел c, d не больше другого и можно обозначить их так, что $c \leq d$. Тогда

$$m = \min\{c, d\} = c \leq 2cd//(c + d) = H,$$

поскольку

$$c(c + d) \leq c(d + d) = 2cd.$$

Такова также функция максимума

$$M = \max\{c, d\}$$

этих чисел, которая не меньше всех этих средних. Действительно, одно из этих входящих в эту функцию симметрично двух неотрицательных чисел c, d не больше другого и можно обозначить их так, что $c \leq d$. Тогда

$$M = \max\{c, d\} = d \geq [(c^2 + d^2)/2]^{1/2} = Q,$$

поскольку

$$2d^2 \geq c^2 + d^2.$$

Следовательно, получается цепочка нестрогих неравенств в порядке неубывания

$$m \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq M.$$

В итоге наряду с обычной нелогичной двусмысленной относительной погрешностью и двумя хотя бы частично усовершенствованными именно однозначными относительными погрешностями дополнительно предлагаются ещё шесть следующих хотя бы частично усовершенствованных именно однозначных относительных погрешностей в порядке невозрастания ввиду неубывания знаменателей:
относительная погрешность с минимумом

$$\delta_{a =? b, m} = ||a - b||/\min\{||a||, ||b||\};$$

относительная погрешность со средним гармоническим

$$\delta_{a =? b, H} = ||a^2 - b^2||/(2||ab||);$$

относительная погрешность со средним геометрическим

$$\delta_{a =? b, G} = ||a - b||/||ab||^{1/2};$$

относительная погрешность со средним арифметическим

$$\delta_{a =? b, A} = ||a - b||/[(||a|| + ||b||)/2] = 2||a - b||/(||a|| + ||b||);$$

относительная погрешность со средним квадратическим

$$\delta_{a =? b, Q} = ||a - b||/[(||a||^2 + ||b||^2)/2]^{1/2} = 2||a - b||/[2(||a||^2 + ||b||^2)]^{1/2};$$

относительная погрешность с максимумом

$$\delta_{a =? b, M} = ||a - b||/\max\{||a||, ||b||\};$$

$$\delta_{a =? b, m} \geq \delta_{a =? b, H} \geq \delta_{a =? b, G} \geq \delta_{a =? b, A} \geq \delta_{a =? b, Q} \geq \delta_{a =? b, M}.$$

Их дальнейшее усовершенствование достигается исключением деления на нуль благодаря использованию введённого альтернативного деления:

альтернативно относительная погрешность с минимумом

$$\delta_{a =? b, m, //} = ||a - b||//\min\{||a||, ||b||\} \in [0, +\infty);$$

альтернативно относительная погрешность со средним гармоническим

$$\delta_{a =? b, H, //} = ||a^2 - b^2||//(2||ab||) \in [0, +\infty);$$

альтернативно относительная погрешность со средним геометрическим

$$\delta_{a =? b, G, //} = ||a - b||//||ab||^{1/2} \in [0, +\infty);$$

альтернативно относительная погрешность со средним арифметическим

$$\delta_{a =? b, A, //} = ||a - b||//[(||a|| + ||b||)/2] = 2||a - b||//(||a|| + ||b||) = 2E_{a =? b} \in [0, 2];$$

альтернативно относительная погрешность со средним квадратическим

$$\delta_{a =? b, Q, //} = ||a - b||//[(||a||^2 + ||b||^2)/2]^{1/2} = 2||a - b||//[2(||a||^2 + ||b||^2)]^{1/2} = 2E_{a =? b, Q} \in [0, 2];$$

альтернативно относительная погрешность с максимумом

$$\delta_{a =? b, M, //} = ||a - b||//\max\{||a||, ||b||\} = 2E_{a =? b, M} \in [0, 2];$$

$$\delta_{a =? b, m, //} \geq \delta_{a =? b, H, //} \geq \delta_{a =? b, G, //} \geq \delta_{a =? b, A, //} \geq \delta_{a =? b, Q, //} \geq \delta_{a =? b, M, //}.$$

В этих формулах, кроме последней, справа указаны множества значений соответствующих относительных погрешностей. Стремление их к плюс бесконечности осуществляется при стремлении одной буквы к нулю, тогда как другая буква сохраняет конечное ненулевое значение. В трёх формулах относительные погрешности со средним арифметическим, со средним квадратическим и с максимумом оказываются именно точными удвоениями соответствующих всеобщих погрешностей (линейной, квадратичной и с максимумом), а наибольшее с учётом неравенства треугольника значение 2 достигается при условии противоположности ненулевых значений букв

$$b = - a \neq 0.$$

Таким образом, в настоящей диссертации полностью сохраняются и правильно используются в узких пределах применимости, приемлемости и пригодности только для достаточно хороших приближений и даже развиваются, совершенствуются и дополняются известные относительная погрешность, способ её оценки и формула для её определения; при этом непременно дополнительно к правильно используемой в пределах её применимости относительной погрешности в настоящей диссертации введена всеобщая погрешность без каких бы то ни было ограничений применимости, приемлемости и пригодности для именно любых формальных (условных, независимых от истинности) приравниваний, то есть для любых как приближений, так и неприближений, как инвариантная мера неточности, правильно обобщающей нечёткую приближённость. Для двухэлементных приближённых равенств всеобщая погрешность примерно вдвое меньше относительной погрешности, что следует иметь в виду и непременно правильно учитывать. Такое соотношение является прямым следствием принципиального недостатка именно и только относительной погрешности, которая в модуле (норме) числителя правильно учитывает все элементы формального равенства, а для модуля (нормы) знаменателя принципиально нелогично, произвольно и необоснованно выхватывает только один из элементов формального равенства и полностью игнорирует неравенство треугольника, необходимое для осуществления замысла относительной погрешности о её непременной принадлежности отрезку между нулём и единицей.

«2. В работе широко используется так называемый парциальный метод решения задач теории упругости. Он заключается в разбиении исходной системы дифференциальных уравнений на две подсистемы. Первая подсистема включает в себя наиболее простые уравнения и используется для нахождения решения задачи. Вторая же подсистема не участвует в процессе построения решения и используется только для оценки погрешности решения. Так как уравнений первой подсистемы недостаточно для нахождения всех неизвестных функций, то в диссертации предлагается для нахождения некоторых неизвестных функций использовать принцип допустимой простоты. При использовании такого подхода решение получается весьма приближённым, так как выражениями для некоторых неизвестных функций нужно задаваться (причём довольно простыми) и, кроме того, полученное решение не будет удовлетворять всем исходным дифференциальным уравнениям. Точность полученных таким способом приближённых решений можно оценить, лишь сравнивая эти решения с точными решениями, а не подставляя в неиспользованные уравнения. Научную значимость такого подхода не следует преувеличивать, так как в настоящее время можно получать точное решение подобных задач, используя готовые программы решения задач теории упругости с использованием МКЭ, МГЭ, метода потенциала и др.».

Диссертант Лев Григорьевич Гелимсон:

2. Выражаю искреннюю признательность за столь полезное замечание, дающее возможность дополнительно прояснить сделанное в диссертации.

Во-первых, при парциальном методе, в частности при интегральном методе, точно выполняются оба уравнения равновесия, одно из двух уравнений совместности деформаций и все граничные условия, так что не выполняется лишь одно из целого ряда условий. При любом приближённом решении какие-то условия непременно нарушаются, иначе оно было бы точным. Поэтому нарушение единственного из целого ряда условий является в этом смысле наименьшим возможным. Кроме того, для решения задачи прочности точность определения напряжений важнее точности выполнения одного из двух уравнений совместности деформаций, тем более что все граничные условия выполнены точно, а места наиболее опасных напряжённых состояний, как правило, располагаются на поверхности, то есть на границе, деформируемого твёрдого тела. Простейшее статически возможное распределение сдвигового напряжения как функции напряжений для определения всех нормальных напряжений, ещё и удовлетворяющее как дополнительному условию уравнениям равновесия не только целого существенно трёхмерного тела, но и произвольной отсечённой его части по методу сечений в бесконечном множестве мощности континуума, точно или достаточно хорошо приближённо соответствует его распределению в известных решённых задачах, в частности в теории плит. Поэтому есть все основания полагать, что даваемое интегральным методом приближённое решение по меньшей мере не хуже других приближённых решений, точность которых обычно не оценивается вообще никак.

Во-вторых, известный метод прямой оценки погрешностей приближённых решений основан на сопоставлении получаемого приближённого решения или с точным, или с гораздо более точным приближённым решением. Но им надо располагать, и поэтому нет возможности оценить таким путём точность наилучшего известного приближённого решения. Например, нам известны прямые оценки точности решений задач теории пластин, благо есть решения по теории плит, но нет известных прямых оценок решений по теории плит, потому что по существу очень мало решений нетривиальных существенно пространственных задач. В диссертации именно дополнительно к известному методу прямой оценки погрешностей приближённых решений предложен и использован ещё и другой подход – метод косвенной оценки погрешностей неточных псевдорешений как метод прямого оценивания погрешности неудовлетворения, соответствующей каждому из уравнений подсистемы, названной нами оценочной. И этот метод применим к достаточно широкому априорно не указуемому классу задач, хотя использован для сравнительно узкого класса задач по нуждам данной работы. В диссертации этот метод позволил дать косвенные оценки погрешностей впервые полученных приближённых решений нетривиальных задач для существенно пространственных тел. А сами эти решения позволили уточнить известные прямые оценки точности решений задач теории пластин по решениям теории плит, а главное, именно впервые дать прямые оценки точности решений задач теории плит. Важно, что этот дополнительный метод косвенной оценки погрешностей неточных псевдорешений, в частности приближённых решений, как метод прямого оценивания погрешности неудовлетворения, соответствующей каждому из уравнений подсистемы, названной нами оценочной, даёт именно не зависящие от соотношений размеров деформируемого твёрдого тела универсальные оценки погрешности приближённых решений по интегральному методу. Поэтому есть основания полагать, что точность решений по интегральному методу для существенно трёхмерных тел примерно соответствует точности решений теории пластин для пластин. Кроме того, и сложность

решений по интегральному методу для существенно трёхмерных тел примерно соответствует сложности решений теории пластин для пластин.
В-третьих, приближённые решения по интегральному методу сопоставимы с также аналитическими многовариантными приближёнными решениями по степенному методу и с численными решениями по методу конечных элементов и согласуются с данными проведённых экспериментов, так что выдерживают аналитическую, численную и экспериментальную проверку. Кроме того, простейшие возможные приближённые аналитические решения по степенному методу и по интегральному методу обеспечивают понимание и анализ деформирования, прочности и разрушения, открывают и обосновывают их проверяемые и подтверждаемые аналитически, численно и экспериментально принципиально новые явления и законы для существенно трёхмерных тел.
В-четвёртых, численные методы и экспериментальные данные полезны и необходимы для поверочных расчётов с уже выбранными исполнительными размерами. А для проектных расчётов и особенно для многопараметрической оптимизации, а также для испытания (тестирования) численных методов и их программ, не обеспечивающих внутренней проверяемости, необходимы достаточно простые именно аналитические методы.
В-пятых, диссертация является обобщением исследований автора с двадцатилетним безаварийным опытом его именно аналитических методов расчёта на прочность порядка тысячи конструкций в технике высоких давлений, причём в лаборатории прочности конструкций, работающих под давлением, ВНИИкомпрессормаш среди других использовался гидрокомпрессор на давления до 1600 МПа, что примерно в 15 раз превышает давление на дне Марианской впадины, глубочайшей в Мировом океане. Автор руководил испытанными по своим аналитическим методам численными конечно-элементными расчётами прочности внедрённых особо ответственных крупногабаритных сосудов высокого давления, в том числе для Института проблем прочности Академии Наук Украины, обосновал все эти расчёты и организовал их доскональные взыскательные проверки докторами и кандидатами наук, обсуждение и затем утверждение ИркутскНИИхимаш как головным институтом СССР по сосудам высокого давления.
В-шестых, именно обладающие простотой на уровне сопротивления материалов аналитические решения сложных задач для существенно трёхмерных тел необходимы для инженерного образования, продолжают и развивают труды и достижения классиков.

«3. В диссертации рассмотрен также способ обобщения критериев предельных состояний. Основная идея обобщения заключается в том, что все напряжения приводятся к безразмерному виду путём деления положительных главных напряжений на предельное напряжение при растяжении, а отрицательных – на предельное напряжение при сжатии. Эта идея впервые осуществлена в теории прочности Мора, которую можно записать в виде

$$\sigma_e^\circ = \sigma_1/\sigma_t - \sigma_3/\sigma_c \le 1,$$

что совпадает с соответствующей формулой в диссертации. Поэтому в данном случае следует говорить не о приоритете соискателя, а лишь о дальнейшем развитии им этого полезного обобщения.»

Диссертант Лев Григорьевич Гелимсон:

3. Выражаю искреннюю признательность за столь полезное замечание «о дальнейшем развитии им (соискателем) этого полезного обобщения», дающее возможность дополнительно прояснить сделанное в диссертации.
Во-первых, необходим ряд уточнений. Главное и принципиально важное уточнение заключается в том, что в диссертации неположительные главные напряжения делятся ни в коем случае не на строго отрицательное предельное напряжение при одноосном сжатии, а непременно на строго положительный модуль этого строго отрицательного предельного напряжения при одноосном сжатии. Кроме того, для полноты системы именно всевозможных случаев значений функции знака напряжения следует учесть, что напряжение в принципе может иметь не только положительную или отрицательную величину, но ещё и нулевую

величину. Нулевое главное напряжение можно равносильно делить хоть на строго положительное предельное напряжение при одноосном растяжении, хоть на строго положительный модуль строго отрицательного предельного напряжения при одноосном сжатии. Это деление принципиально необходимо для достижения именно единой размерности, в данном случае безразмерности, приведённого напряжения. Нулю можно при желании равносильно приписать хоть положительный, хоть отрицательный знак, однако функция знака нуля является непременно нулевой, что принципиально необходимо для её определённости и однозначности. Поэтому в диссертации неотрицательные главные напряжения делятся на строго положительное предельное напряжение при одноосном растяжении, а неположительные главные напряжения делятся на строго положительный модуль строго отрицательного предельного напряжения при одноосном сжатии.

Во-вторых, в теории прочности Мора нет ни в каком (ни в явном, ни в неявном) виде ни идеи деления положительных главных напряжений на предел прочности при растяжении (на предельное напряжение при одноосном растяжении), ни идеи деления отрицательных главных напряжений на предел прочности при сжатии (на модуль предельного напряжения при одноосном сжатии). В неявном виде идею деления каждого главного напряжения независимо от его знака на предел текучести в направлении этого главного напряжения в ортотропном материале, одинаково сопротивляющемся растяжениям и сжатиям, при условии совпадения главных направлений напряжённого состояния и основных направлений ортотропии можно усмотреть в критерии Ху–Марина как обобщении лишь одного критерия предельных состояний – четвёртой теории прочности. В явном виде идею деления каждого главного напряжения независимо от его знака на предел прочности при растяжении в изотропном материале, одинаково или различно сопротивляющемся растяжениям и сжатиям, выдвинули и использовали авторы (отметившие: «исследование критериев разрушения материалов, по-разному сопротивляющихся растяжению и сжатию, остаётся одним из актуальнейших вопросов механики деформируемых тел») научной монографии

Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряжённом состоянии. Киев: Наукова думка, 1976. 416 с.

Их замечательным результатом стала унификация с малым разбросом всех указанных данных о предельных плоских напряжённых состояниях совершенно различных изотропных материалов в первом квадранте с неотрицательностью обоих ненулевых главных напряжений. А в четвёртом квадранте с неотрицательностью одного ненулевого главного напряжения и неположительностью другого ненулевого главного напряжения получился большой разброс данных в направлении неположительного ненулевого главного напряжения. Идея деления неотрицательных главных напряжений на предел прочности при растяжении (на предельное напряжение при одноосном растяжении), а неположительных главных напряжений на предел прочности при сжатии (на модуль предельного напряжения при одноосном сжатии), насколько известно, впервые осуществлена автором научных монографий

Гелимсон Лев Г. Обобщение аналитических методов решения задач прочности. Сумы: Друкар, 1992. 20 с.

Gelimson Lev G. General Strength Theory. Sumy: Drukar Publishers, 1993. 64 pp.

Результатом стала унификация с малым разбросом (относительно предельных ломаной и эллипса соответствующим образом приведённых третьей и четвёртой теорий прочности) всех тех же указанных выше данных о предельных плоских напряжённых состояниях совершенно различных изотропных материалов не только в первом квадранте с неотрицательностью обоих ненулевых главных напряжений, но и в четвёртом квадранте с неотрицательностью одного ненулевого главного напряжения и неположительностью другого ненулевого главного напряжения.

В-третьих, критерий Кулона–Мора (как обобщение лишь одного критерия предельных состояний – третьей теории прочности), который можно записать в виде

$$\sigma_e/\sigma_t = \sigma_1/\sigma_t - \sigma_3/\sigma_c \leq 1,$$

сохраняет свой вид совершенно независимо от знаков главных напряжений σ_1 и σ_3. Так что главное напряжение σ_1 именно всегда независимо от его знака делится на предел прочности σ_t при растяжении (на предельное напряжение при одноосном растяжении), то есть не только при неотрицательности, но и при отрицательности главного напряжения σ_1. А главное напряжение σ_3 именно всегда независимо от его знака делится на предел прочности σ_c при сжатии (на модуль предельного напряжения при одноосном сжатии), то есть не только при неположительности, но и при положительности главного напряжения σ_3. Поэтому нет ни малейших оснований полагать, что критерий Кулона–Мора в его указанном виде якобы предусматривает деление положительных главных напряжений непременно на предел прочности при растяжении (на предельное напряжение при одноосном растяжении) и деление отрицательных главных напряжений непременно на предел прочности при сжатии (на модуль предельного напряжения при одноосном сжатии).

В-четвёртых, приведение главных напряжений для изотропного материала с $\sigma_t \neq \sigma_c$ делением положительных главных напряжений непременно на предел прочности σ_t при растяжении (на предельное напряжение при одноосном растяжении) и делением отрицательных главных напряжений непременно на предел прочности σ_c при сжатии (на модуль предельного напряжения при одноосном сжатии)

$$\sigma_j^\circ = \sigma_j/\sigma_t \ (\sigma_j \geq 0);$$
$$\sigma_j^\circ = \sigma_j/\sigma_c \ (\sigma_j \leq 0);$$
$$j = 1;\ 2;\ 3;$$
$$\sigma_e^\circ = \sigma_e/\sigma_t$$

даёт приведённую третью теорию прочности

$$\sigma_e^\circ = \sigma_1^\circ - \sigma_3^\circ = 1,$$

которая не содержит постоянных материала в явном виде и может прилагаться к любым видам материалов и нагружений при условии придания приемлемого смысла приведённым главным напряжениям σ_j°.

Приведённая третья теория прочности в размерных главных напряжениях σ_j принимает с учётом их знаков разные виды с равносильным (эквивалентным) напряжением σ_{et} для сравнения с σ_t при всех неотрицательных главных напряжениях σ_j и при наличии противоположных знаков главных напряжениях σ_j и с равносильным (эквивалентным) напряжением σ_{ec} для сравнения с σ_c при всех неположительных главных напряжениях σ_j:

$$\sigma_{et} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t \ (\sigma_3 \geq 0);$$
$$\sigma_{et} = \sigma_1 - \chi\sigma_3 = \sigma_t \ (\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_3);\ \chi = \sigma_t/\sigma_c;$$
$$\sigma_{ec} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c = |-\sigma_c| \ (\sigma_1 \leq 0).$$

Первый из этих трёх видов приведённой третьей теории прочности в размерных главных напряжениях σ_j при неотрицательности их всех естествен ввиду совпадения только при неотрицательности их всех с третьей теорией прочности для модельного (фиктивного) изотропного материала с одинаковыми сопротивлениями σ_t растяжению и сжатию.

Третий из этих трёх видов приведённой третьей теории прочности в размерных главных напряжениях σ_j при неположительности их всех естествен ввиду совпадения только при неположительности их всех с третьей теорией прочности для модельного (фиктивного) изотропного материала с одинаковыми сопротивлениями σ_c растяжению и сжатию.

А второй из этих трёх видов приведённой третьей теории прочности в размерных главных напряжениях σ_j при наличии их противоположных знаков совпадает только при наличии их противоположных знаков с критерием Кулона–Мора.

Этими тремя совпадениями обосновываются следующие выводы:

1) приведённая третья теория прочности при любых знаках главных напряжений выдерживает проверку известными, общепринятыми и многократно экспериментально проверенными обычной третьей теорией прочности и критерием Кулона–Мора;

2) приведённая третья теория прочности совпадает с критерием Кулона–Мора только при наличии противоположных знаков главных напряжений;

3) как следствие первых двух выводов можно предположить приемлемость и пригодность критерия Кулона–Мора только при наличии противоположных знаков главных напряжений. Неясность области приемлемости и пригодности критерия Кулона–Мора признавалась и ранее и немедленно вытекает хотя бы из необеспеченности именно неотрицательности равносильного (эквивалентного) напряжения по критерию Кулона–Мора. Действительно, если отношение σ_t/σ_c именно строго меньше единицы, то при трёхмерном равноосном сжатии ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 < 0$) равносильное (эквивалентное) напряжение по критерию Кулона–Мора именно строго отрицательно.

В-пятых, применительно к произвольному изотропному материалу с различной прочностью σ_t при растяжении и σ_c при сжатии ещё важнее приоритет соискателя в осуществлении приведения главных напряжений делением положительных главных напряжений непременно на предел прочности σ_t при растяжении (на предельное напряжение при одноосном растяжении) и делением отрицательных главных напряжений непременно на предел прочности σ_c при сжатии (на модуль предельного напряжения при одноосном сжатии) для обобщения не какого-либо одного отдельного, а именно произвольного критерия предельных состояний любого изотропного материала с одинаковой прочностью σ_t при растяжении и σ_c при сжатии

$$\sigma_e = F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_L \ (\sigma_L = \sigma_t = \sigma_c).$$

Приведение этого произвольного критерия предельных состояний даёт для любого материала и при любом нагружении соответствующий приведённый произвольный критерий предельных состояний

$$\sigma_e^\circ = F(\sigma_1^\circ, \sigma_2^\circ, \sigma_3^\circ) = 1.$$

В-шестых, применительно к произвольному анизотропному материалу с различной прочностью при растяжениях и при сжатиях с любой зависимостью от направлений и знаков главных напряжений при любом зависящем от времени t переменном нагружении ещё важнее приоритет соискателя в осуществлении синхронного приведения каждого главного напряжения $\sigma_{ju}(t)$ при постоянной нумерации ($ju = 1; 2; 3$) безотносительно упорядоченности алгебраических величин всех трёх главных напряжений путём его деления на модуль $|\sigma_{Lju}(t)|$ предельного его значения $\sigma_{Lju}(t)$ тех же направления и знака в тот же момент времени t в той же точке того же тела при одноосном напряжённом состоянии (аннулировании двух остальных главных напряжений) и прочих равных условиях нагружения к соответствующему приведённому главному напряжению:

$$\sigma_{ju}^\circ(t) = \sigma_{ju}(t)/|\sigma_{Lju}(t)| = 1/[|\sigma_{Lju}(t)|/\sigma_{ju}(t)] = 1/r_{ju}^\circ(t),$$
$$r_{ju}^\circ(t) = |\sigma_{Lju}(t)|/\sigma_{ju}(t)$$

есть обобщённый (равный обычному $|\sigma_{Lju}(t)|/|\sigma_{ju}(t)|$, умноженному на знак $\mathrm{sign}[\sigma_{ju}(t)]$ главного напряжения $\sigma_{ju}(t)$) одноосный запас главного напряжения $\sigma_{ju}(t)$.

В-седьмых, применительно к произвольному анизотропному материалу с различной прочностью при растяжениях и при сжатиях с любой зависимостью от направлений и знаков главных напряжений при любом зависящем от времени t переменном (не обязательно регулярном, периодическом, циклическом) нагружении за время $t(0) = t_0 \le t \le t_1 = t(1)$ ещё важнее приоритет соискателя в осуществлении постоянного векторного приведения переменной программы каждого главного напряжения. Каждая переменная программа синхронно приведённого главного напряжения $\sigma_{ju}^\circ(t)$ при постоянной нумерации без упорядоченности алгебраических величин главных напряжений заменяется равноопасным циклически изменяющимся одноосным напряжённым состоянием со средним напряжением цикла, равным среднему напряжению программы или минимально изменённым (если иначе равноопасность недостижима), величиной σ_{mju}° и искомым равноопасным амплитудным напряжением цикла σ_{aju}°. Переменной программе синхронно приведённого главного напряжения $\sigma_{ju}^\circ(t)$ соответствует постоянное векторное приведённое напряжение $\overline{\sigma}_{ju}^\circ = (\sigma_{mju}^\circ, \sigma_{aju}^\circ)$, действия согласно функции F выполняются по правилам векторной алгебры и результат берётся по модулю. Необходимость обобщить проверку как статической, так и усталостной прочности при циклически изменяющемся одноосном напряжённом состоянии приводит к структуре приведённого критерия предельных состояний анизотропного материала при переменном нагружении (с выбором в каждом случае своей наиболее опасной зависящей или не зависящей от времени t перестановки индексов $ju(t)$ или ju соответственно из чисел 1, 2, 3):

$$\sigma_e^\circ = \max\{\sup_{t\in[t(0),t(1)]}\max_{ju(t)}F[\sigma_{1u}^\circ(t),\ \sigma_{2u}^\circ(t),\ \sigma_{3u}^\circ(t)];\ \max_{ju}|F(\overline{\sigma}_{1u}^\circ,\ \overline{\sigma}_{2u}^\circ,\ \overline{\sigma}_{3u}^\circ)|\} = 1.$$

В-восьмых, является общепризнанным полное отсутствие известных всеобщих прочностных законов природы, поскольку для анизотропного различно сопротивляющегося растяжениям и сжатиям материала при переменном нагружении, когда главные направления напряжённого состояния в рассматриваемой точке тела могут вращаться, даже предложения по формулировкам критериев предельных состояний неизвестны. Поэтому полезно приводить частные критерии предельных состояний для отдельных видов материалов и условий нагружения именно к всеобщим прочностным законам природы для любых видов материалов и условий нагружения.

Диссертант Лев Григорьевич Гелимсон:

В заключение выражаю искреннюю признательность

официальному оппоненту
заведующему кафедрой «Сопротивление материалов»
Киевского международного университета гражданской авиации,
доктору технических наук, профессору
Николаю Максимовичу Бородачёву

за интересные, проникновенные, чрезвычайно глубокие, полезные, взыскательные и поучительные положительный отзыв на диссертацию и дающие возможность дополнительно прояснить достигнутое в диссертации замечания, в том числе с признанием полезности сделанных обобщения и развития достижений классиков.